ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

☞ **συνέχεια στο x_o**

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_o τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}, & x\neq 4\\ 5, & x=4\end{cases}$ στο $x_o=4$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$ στο $x_o=1$

γ) $f(x)=\begin{cases}x\cdot ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ στο $x_o=0$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_o τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & -3\leq x<1\\ 3x+1, & x\geq 1\end{cases}$ και $x_o=1$.

β) $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x\cdot e^{\frac{x-1}{x}}, & x>0\end{cases}$ και $x_o=0$.

γ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ και $x_o=0$.

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, h: $R\to R$ με $f(x)=ημx\cdot g(x)+(x^2+1)\cdot h(x)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση h δεν είναι συνεχής στο x_0 ,να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 .

4. Έστω f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες στο R για τις οποίες ισχύουν:

- Η g είναι συνεχής στο 2008.
- $\lim\limits_{x\to 2008^+} f(x) = 2009$ και $\lim\limits_{x\to 2008^-} f(x) = 2007$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση h(x)=f(x)g(x) είναι συνεχής στο x_0 =2008, όταν και μόνο όταν g(2008)=0.

☞ **συνέχεια στο πεδίο ορισμού**

5. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & , \ x<\sqrt{3} \\ x^2+2x-3 & , \ x\geq\sqrt{3} \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \ x\leq 0 \\ \dfrac{\eta\mu 2x}{x} & , \ x>0 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} & , \ x<0 \\ e^x-1 & , \ x\geq 0 \end{cases}$ δ) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ |x|\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \ |x|>1 \end{cases}$

6. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\eta\mu 3x)}{x} & , \ x>0 \\ 3 & , \ x=0 \\ \dfrac{x^2+3\eta\mu x}{\eta\mu x} & , \ x<0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{\eta\mu 2x} & , \ -1<x<0 \\ 1 & , \ x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$

γ) $f(x) = \begin{cases} x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x} & , \ x>0 \\ 0 & , \ x=0 \\ x\cdot e^{\frac{1}{x}} & , \ x<0 \end{cases}$ δ) $f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{2}{x}}-1 & , \ x<0 \\ \ln(x+1)+1 & , \ 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1} & , \ x>1 \end{cases}$

☞ **εύρεση παραμέτρων**

7. Να βρείτε την τιμή του α∈R, ώστε η συνάρτηση

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & , \ x\neq 0 \\ 2 & , \ x=0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

8. Να βρείτε την τιμή του α∈R, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x & , x\le 2 \\ \sqrt{5x^3-4} & , x>2 \end{cases}$$ να είναι συνεχής .

9. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \neq 0$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+\alpha^2+2}, & x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu(\alpha^2 x)}{\eta\mu x} & , 0<x<\pi \end{cases}$$ να είναι συνεχής .

10. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}+\eta\mu 2x}{x^2+x}, & x>0 \\ e^x+\lambda & , x\le 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

11. Να βρεθούν οι α, $\beta\in R$ ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}, & x\neq 1 \\ 4 & , x=1 \end{cases}.$$

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+\lambda^2 & , x\le \mu \\ \eta\mu(x-\mu)-1 & , x>\mu \end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε τους λ, μ.

13. Να βρεθούν οι α, $\beta\in R$ ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-\alpha x-1}{x-2}, & x>2 \\ 2x^2+\alpha x+\beta & , x\le 2 \end{cases}$$

14. Αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x<\alpha \\ x^3+x & , x\ge\alpha \end{cases}$ είναι συνεχής, να δείξετε ότι: α = 0.

15. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2, 1) και ισχύει:
$(x-2)f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε τους α, β καθώς και τον τύπο της f.

β) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$.

☞ **f συνεχής: όριο της f στο x_o = τιμή της f στο x_o**

16.Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει: $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να βρείτε την τιμή f(0).

17.Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{x^2+1}$, να βρείτε την τιμή f(0).

18.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) + 2x = xf(x) + x^3 + 1$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε:

α) την τιμή f(1)

β) τον τύπο της συνάρτησης f.

19.Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f: R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) + \sqrt{x^2+x+2} = xf(x) + x + 1$ για κάθε $x\in R$.

20.Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(x)\sqrt{x^2+1} = 2\eta\mu^2 x + f(x)$ για κάθε $x\neq 0$. Αν $f(0) = 4$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

21.Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει: $2f(x) + x\sigma\upsilon\nu x = x + f(x)\sqrt{x^2+4}$ για κάθε $x\neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

☞ **εύρεση μιας τιμής συνεχούς συνάρτησης μέσα από όριο**

22.Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Αν ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-\sqrt{x}} = 2$, να βρείτε την τιμή f(1).

23.Η συνάρτηση $f: R\to R$ είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x} = 2$.

Να βρείτε την τιμή f(0).

24.Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2-4} = 2$.

α) Να βρείτε την τιμή f(2).

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{xf(x) - 2f(2)}{\sqrt{x+2} - 2}$.

25.Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f(1) = -3$ και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + f(x)}{x - 1} = 10$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

26.Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f(0) = -1$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + 1 + \eta\mu x}{x^2 + x} = \lambda \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
β) Αν επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + 1}{\eta\mu x} = 3$, να βρείτε το λ.

27.Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, περιττή και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) + 2}{(x-1)^2} = 3$.
α) Να βρείτε την τιμή f(1).
β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.
γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - 3}{(x+1)^2}$.

28.Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, περιττή και $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$.
α) Να βρείτε την τιμή f(1).
β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.
γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) + 5}{x + 1}$.

☞ **ανισότητες και συνέχεια**

29.Αν f συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει: $xf(x) \geq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in R$, να βρείτε την τιμή f(0).

30.Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει:
$xf(x) \leq f(x) + 2\eta\mu(x-1)$ για κάθε $x \in R$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να δείξετε ότι: $f(1) = 2$.

31.Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$ και ισχύει:

$f(x)(x - \alpha) \geq x^2 + \alpha x - 2\alpha^2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι: $f(\alpha) = 3\alpha$.

32. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $1 - \sqrt{x^2+1} \leq xf(x) \leq x^2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει: $1 + 4x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 9$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.
β) Να βρεθεί ο $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-5}{x-2}, & x \neq 2 \\ \alpha^3 + 8, & x = 2 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2xf(x) \leq |x-1| - x^2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

35. Αν για τη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει $f(0) = 0$ και $\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x} < 0$ για κάθε $x \in R^*$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

36. Έστω οι συναρτήσεις f, g: $R \to R$ τέτοιες ώστε: $|f(x) - g(x)| \leq (x-1)^2 \cdot |g(x)|$ για κάθε $x \in R$ όπου g συνεχής στο $x_0=1$ και $g(1) = 2$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
β) Να βρείτε τα όρια:
i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-g(x)}{\eta\mu(x-1)}$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) \leq 2xf(x)$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:
α) η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ για την οποία ισχύει: $f(x) > \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:
α) η f δεν είναι συνεχής

β) η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)}, & x \in (0,1) \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

39.Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:
$|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ για κάθε $x, y \in R$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

40.Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με σύνολο τιμών το R και τέτοια ώστε:
$|f(x) - f(y)| \ge |x - y|$ για κάθε $x, y \in R$. Να δείξετε ότι:
α) η συνάρτηση f είναι 1-1
β) η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

☞ θεωρητικές που καταλήγουν σε ανισότητα

41.Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: R \to R$ για τις οποίες ισχύει:
$f^2(x) + g^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

42.Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in R$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
Όμοια αν ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in R$.

☞ αλλαγή μεταβλητής

43.**Έστω συνάρτηση f** συνεχής στο x_0 τέτοια ώστε:
$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{ημ5h} = α \in R$.
α) Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
β) Να βρείτε το α, αν $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - 2014\, f(x_0)}{h} = 10$.

44.Έστω συνάρτηση f συνεχής στο x_0 τέτοια ώστε: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{\sqrt{1 + h} - 1} = α \in R$.
α) Να βρείτε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$.
β) Να βρείτε το α, αν $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - \sqrt{2014} f(x_0)}{h} = 5$.

<u>δύο σημαντικές περιπτώσεις αλλαγής μεταβλητής</u>

αν για την εύρεση του $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **έχουμε σχέση της μορφής:**

- **f(x + y) = ...   θέτουμε $x = x_0 + h$**
- **f(xy) = ...   θέτουμε $x = x_0 h$**

οπότε το όριο αντίστοιχα γίνεται: $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h)$ και $\lim\limits_{h \to 1} f(x_0 h)$

45.Για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: $f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^x$ για κάθε x, y∈R. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

46.Για τη συνάρτηση f: (0, +∞) →R ισχύει: f(xy) = xf(y) + yf(x) για κάθε x, y∈(0, +∞).

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο (0, +∞).

β) Αν $\lim\limits_{u \to 1} \frac{f(u)}{u-1} = 0$, να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha(}{x - \alpha}$.

47.Για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: f(x+y) = f(x)f(y) για κάθε x, y∈R. Να δείξετε ότι:

α) Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής στο R.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $\alpha \neq 0$, τότε είναι συνεχής στο R.

48.Για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: f(x+y) = f(x)f(y) - ημxημy για κάθε x, y∈R. Αν $f(0) \neq 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$:

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha(}{x - \alpha}$.

49.Για τη συνάρτηση f: (0, +∞) →R ισχύει: f(xy) = f(x) + f(y) για κάθε x, y∈(0, +∞). Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο (0, +∞).

50.Για τη συνάρτηση f: R →R ισχύει: f(xy) = f(x) + f(y) + 5(x-1)(y-1) για κάθε x, y∈R. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R^*.

51.Για τη συνάρτηση f: R^* →R ισχύει: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ για κάθε

$x, y \in R^*$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R^*.

52.Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής στο $\alpha \in R^*$ τέτοια ώστε:
$f(x - 2y) = f(x) - 2f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

☞ **γενικά συνδυαστικά θέματα**

53.Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $|f(x) - f(y)| \le \kappa|x - y|$ για κάθε $x, y \in R$ και $\kappa \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι:
α) Η f είναι συνεχής.
β) Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

54.Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $|x - y| \le \frac{1}{3}|f(x) - f(y)|$ για κάθε $x, y \in R$. Να δείξετε ότι:
α) Η f αντιστρέφεται.
β) Η f^{-1} είναι συνεχής στο R.
β) Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

55.Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει:
$f^3(x) - 2f^2(x) = x - 2008 - f(x)$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2010$.

56.Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και τέτοια ώστε: $f(2) > 0$ και: $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
β) Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
γ) Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ κοντά στο $\frac{1}{2}$.
δ) Αν επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

57.Έστω συνάρτηση $f: A \to R$ η οποία είναι 1-1, συνεχής και τέτοια ώστε $\lim_{x \to 1} f(x) = f(0)$ και $f^{-1}(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 1 \\ f(x-1) - 1 & , x \le 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι:
α) ο αριθμός 1 δεν ανήκει στο σύνολο A

β) η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι συνεχής.

58. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με $f^3(x) + 2f(x) = x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

δ) Να δείξετε ότι: $0 < \dfrac{f^3(x)}{x^3} < \dfrac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$.

ε) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

59. Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $2f^3(x) + f(x) = kx$ για κάθε $x \in R$ και $k > 0$.

α) Να δειχθεί ότι η f είναι 1–1.

β) Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής και: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{k}{6f^2(2)+1}$.