☞ **υποθέσεις - συμπέρασμα του Rolle**

1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [0, π] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, π).
α) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = e^{-f(x)}ημx$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0, π].
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ\in(0, π)$ ώστε: $f'(ξ) = σφξ$.

2. Έστω $0 < α < β$ και μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(x) \neq 0$. Αν η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία της C_f με τετμημένες $x_1 = α$ και $x_2 = β$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι:
α) για τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{x}{f(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [α, β].
β) Υπάρχει $ξ\in(α, β)$ ώστε: $\dfrac{f'(ξ)}{f(ξ)} = \dfrac{1}{ξ}$.

3. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με f(0)=0. Για τη συνάρτηση $g(x) = f(x)\cdot e^{-x}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0, 1].
α) Να βρείτε τον αριθμό f(1).
β) Να δείξετε ότι σε κάποιο σημείο της C_f η εφαπτομένη είναι οριζόντια.
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0, 1)$ ώστε: $f'(x_0) = f(x_0)$.

4. α) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x\cdot ημx$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0, π].
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: εφx = -x έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, π).

5. α) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\dfrac{1}{2π}, \dfrac{1}{π}]$.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x\cdot σφx = 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

6. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει: $f(x) = x\cdot f(ημx)$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
α) Για τη συνάρτηση g(x) = f(ημx) εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [0, π].

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε: $f'(x_0) = g(x_0)$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (e^{x-1} - 1)$ ημx, $x \in R$. Να δείξετε ότι:
   α) η εξίσωση: $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1)
   β) η εξίσωση: εφx $= e^{1-x} - 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

☞ μεταξύ 2 ριζών της f υπάρχει ρίζα της f'

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1$, όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha > \beta$ και $\alpha + \beta < -2$. Να δείξετε ότι:
   α) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1, 1).
   β) Ισχύει: $\beta^2 \geq 3\alpha$.

9. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει: $f(-1)=f(1)=3$. Να δείξετε ότι:
   α) η εξίσωση: $x^2 f(x) + x - 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1, 1)
   β) η εξίσωση: $2xf(x) + x^2 f'(x) + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1, 1).

10. Αν η εξίσωση: $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες, να δείξετε ότι: $\alpha^2 > 3\beta$.

11. Αν η εξίσωση: $x^4 + \alpha x^3 + 3\beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες, να δείξετε ότι: $\alpha^2 > 8\beta$.

12. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R. Αν η εξίσωση: $f(4)x^4 + f(2)x^2 - x + 1 = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

13. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η σχέση:
   $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{4} = 0$, να δείξετε ότι:
   α) η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\delta}{4}x^4$ δεν είναι 1-1.
   β) η εξίσωση: $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

14. Αν $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $f'(x) = 0$.

☞ **αν έχουμε σχέση της μορφής f(α) = f(β) → εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα [α, β]**

15. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] για την οποία ισχύει η σχέση: $f^2(\beta) - f^2(\alpha) = \beta^2 - \alpha^2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f'(x_0)\, f(x_0) = x_0$.

16. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις: $\alpha < \beta$ και $\text{συν}\alpha + \frac{\alpha^2}{2} = \text{συν}\beta + \frac{\beta^2}{2}$, να δείξετε ότι: $\alpha < 0 < \beta$.

17. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με $f(x)f'(x) \neq 0$ και $f(\alpha)f'(\beta) = f(\beta)f'(\alpha)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$.

18. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα [α, β]. Αν ισχύει: $f(\alpha) \cdot e^{g(\beta)} = f(\beta) \cdot e^{g(\alpha)}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f'(x_0) = g'(x_0)f(x_0)$.

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει: $\alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$.
   α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.
   β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

20. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] για την οποία ισχύει: $\ln f(\beta) - \ln f(\alpha) = \beta - \alpha$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
   α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f'(x_0) = f(x_0)$.
   β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0 - 1, 0)$.

το πολύ κ ρίζες

☞ **το πολύ 1 ρίζα**

21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

22. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^{2004} - 1002x^2 + α = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (0, 1).

23. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2(2\ln x - 1) + 8x(\ln x - 1) + 10 = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα (1, 2).

24. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(x) \neq 2x - 1$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = x^2 - x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

25. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f^2(x) + e^{f(x)} + f(x) = x^3 + x$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο R.

☞ **το πολύ 2 ρίζες**

26. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο R.
β) Να λύσετε την εξίσωση: $2016^x = 2015x + 1$.

27. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $e^x (x^2 + x + 3) = x$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

28. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^4 + x^2 = 100 + ημx$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

29. Αν $f(x) = e^x$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία ε: $y = αx + β$ το πολύ σε δύο σημεία.

30. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = - x^2 + 5x - 2$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα σημεία Α(1, 2) και Β(2, 4).

31. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $5^x = 4x + 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες οι οποίες μάλιστα είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί.

32. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f''(x) \neq 2$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = x^2 + λx - λ$, $λ \in R$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

33. Δίνεται η εξίσωση: $x^ν + 5x + 7 = 0$ όπου ν θετικός ακέραιος με $ν \geq 3$. Να δείξετε ότι:

α) αν ο ν είναι άρτιος, τότε η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
β) αν ο ν είναι περιττός, τότε η εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

ακριβώς κ ρίζες

☞ ακριβώς 1 ρίζα

34. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις:
α) $4x^3 - 9x^2 + 8x - 2 = 0$
β) $e^x + 1 = 2ex$
έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0, 1).

35. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις:
α) $x^5 + x^3 + 15x - 25 = 0$
β) $x^3 + x^2 - 2συνx + 10x = 1$
έχουν μοναδική ρίζα στο R.

36. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Να λύσετε την εξίσωση: $x f'(x) + f(0) = f(x)$.

37. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = συνx$ και $g(x) = x$, τέμνονται σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, π)$.

38. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(x) \neq e^x$ για κάθε $x \in R$. Αν $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = e^{x_0} - 1$.

39. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 2] με συνεχή παράγωγο. Αν ισχύει: $f'(0) < 1 < f'(2)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 1$.

40. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:
$f(0) = f\left(\frac{π}{2}\right) = 0$ και $f'(x) \neq ημx + συνx$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = ημx - συνx$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0.
β) Αν επιπλέον ισχύει: $f(x_0) = 0$, να δείξετε ότι: $f(x) > ημx - συνx$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{π}{4}\right)$ και $f(x) < ημx - συνx$ για κάθε $x \in \left(\frac{π}{4}, +\infty\right)$.

☞ **ακριβώς 2 ρίζες**

41. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ - xημx - συνx έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (-π, π).

παράγουσα συνάρτηση
ορισμός - πίνακας παραγουσών

☞ **ύπαρξη ρίζας με Rolle στην παράγουσα**

42. Να δείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:
α) $3\alpha x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$
β) $10\alpha x^9 - 5\beta x^4 + 2\beta x - \alpha = 0$
γ) $e^x - 3ex^2 + 6x - 2 = 0$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

43. Αν ισχύει: $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση:
$\alpha x^2+(\beta+2\delta)x+\gamma - \delta = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

☞ **ύπαρξη αριθμού που ικανοποιεί μια σχέση με Rolle στην παράγουσα**

- **άθροισμα**

44. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε: $f'(\xi) = \xi$.

45. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [-α, α] και παραγωγίσιμη στο (-α, α) με α > 0. Αν ισχύει: $f(\alpha) - f(-\alpha) = 2\alpha^2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ ώστε: $f'(\xi) = \alpha - 2\xi$.

46. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α, β] και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g(\alpha) \neq g(\beta)$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}$.

47. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [2, 3] και f(3) - f(2) = ln3 - ln2, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 3)$ ώστε: $\xi f'(\xi) = 1$.

- **γινόμενο**

48.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και f(0) = 0. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, 1)$ ώστε: $\frac{f(\xi)}{\xi-1} + f'(\xi) = 0$.

49.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in$ R ώστε: $f'(\xi) = \frac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.

50.Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο [0, 1] και τέτοιες ώστε f(0) = 0, g(1) = 0 και $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(0, 1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, 1)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

51.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ = εφξ.

52.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, π] με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0, \pi)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, \pi)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ + σφξ = 0.

53.Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με f(α) = f '(β) = 0. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ ώστε: $f(\xi)\cdot f''(\xi) = -[f'(\xi)]^2$.

54.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε f(1) = -1, f(2) = 2 και f(3) = -3. Να δείξετε ότι:
α) η εξίσωση: f(x) = 0 έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες
β) η εξίσωση: f(x) + xf '(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 3).

55.Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε: f(1) = 2f(2) = 3f(3). Να δείξετε ότι:
α) η εξίσωση: f(x) + xf '(x) = 0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (1, 3).

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ ώστε: $f''(\xi) = -2\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$.

- **πηλίκο**

56. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1, 2] με f(2) = 2f(1). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

57. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο [α, β] και τέτοιες ώστε f(α) = f(β) = 0 και $g(x)\,g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

58. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 2] και τέτοια ώστε: $\dfrac{f'(1)}{f(1)} = \dfrac{f'(2)}{f(2)}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε: $f(\xi)\cdot f''(\xi) = [f'(\xi)]^2$.

- **σύνθετη**

59. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε f(1) + f(2) = 0. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε: $f(\xi)\cdot f'(\xi) = 0$.

60. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 2]. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ ώστε: $f'(\xi) = f'(2 - \xi)$.

61. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε: f(0) = 0 και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R^*$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

62. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [-1, 1] \to (0, +\infty)$ με f(-1) = f(1). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ ώστε:

α) $f'(\xi) = 2\xi f^2(\xi)$ β) $f'(\xi) = 8\xi^3\sqrt{f(\xi)}$

γ) $f'(\xi) = 6\xi^5 e^{-f(\xi)}$ δ) $f'(\xi) = \dfrac{2\xi}{3f^2(\xi)}$

ε) $f'(\xi)\,\sigma\upsilon\nu f'(\xi) = 2\xi^3$ στ) $f'(\xi)\, e^{f^2(\xi)} = \dfrac{\xi}{f(\xi)}$.

- **εύρεση αρχικής από σχέση της μορφής:** $f'(x) + g(x)f(x) = 0$

63. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και τέτοια ώστε: $\dfrac{f(2016)}{f(2015)} = e$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (2015, 2016).

64. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$ για κάθε $\lambda \in R$.

65. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ με $\alpha > 0$. Αν ισχύει: $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ ώστε:
α) $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ β) $f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$
γ) $f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$ δ) $f'(\xi) + (2\xi - 1)f(\xi) = 0$.

66. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $f(0) = 2$ και $f(1) = 1 + e$. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f'(x) = 2x(f(x) - 1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

67. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f''(\xi) + [f'(\xi)]^2 = 0$.

☞ **ρίζα της f''**

68. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha\beta < 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = f(0)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f''(\xi) = 0$.

69. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) = 0$.

70. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f(0) = f(1) - 1 = f(2) - 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R$ ώστε: $f''(\xi) = 0$.

71. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0) = 1$, $f(1) = e - 1$ και $f(2) = e^2 - 8$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ ώστε: $f''(\xi) + 6\xi = e^{\xi}$.

72. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, e] με $f(1) = 1$,

f (2) = 4 - ln2 και f (e) = e^2 - 1. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ ώστε: $f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$.

☞ **γενικές ασκήσεις**

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha > 0$, η οποία έχει τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες. Να δείξετε ότι:
α) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$.
β) $\beta^2 > 3\alpha\gamma$
γ) $f''(\rho_1) + f''(\rho_2) = 0$.

74. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [-2, 2], για την οποία ισχύει: $6xf(x) \neq (3x^2 - 12)f'(x)$ για κάθε $x \in [-2, 2]$. Να δείξετε ότι:
α) $f(2)f(-2) \neq 0$
β) Η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-2, 2).

75. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο [α, β] και τέτοιες ώστε: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f'(x)\,g(x) \neq f(x)\,g'(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $g(\xi) = 0$.

Γενίκευση της 73

76. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R για τις οποίες ισχύει: $f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης f(x) = 0 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της εξίσωσης g(x) = 0 και αντιστρόφως.

77. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2011) και Β(-3, 1), να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}\left(-2010 + f(x^2 - 3)\right) = -3$.
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ευθεία δ: $y = \frac{1005}{2}x + 1005$.

78. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και τέτοια ώστε: $f(0) > 0$ και $f'(1) > f(1)$. Να δείξετε ότι:
α) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) αν ισχύει η σχέση: $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, τότε η εφαπτομένη του ερωτήματος α) είναι μοναδική.

79. Έστω συναρτήσεις f, g: $(1, +\infty) \to R$ με f παραγωγίσιμη και τέτοιες ώστε για κάθε x > 1 να ισχύει: $f(x) \neq 0$, $(x^2+1)f(x) = f(x^2)$ και $g(x) = \frac{x^2-1}{f(x)}$. Να δείξετε ότι:
   α) $g(x) = g(x^2)$ για κάθε x > 1
   β) η εξίσωση: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2-1}$ έχει άπειρες λύσεις.

80. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) με f(α) = f(β) = 0. Να δείξετε ότι:
   α) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $g'(\xi) = 0$ όπου: $g(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, $c \notin [\alpha, \beta]$.
   β) Η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο (ξ, f(ξ)) διέρχεται από το σημείο A(c, 0). **(ΘΕΜΑ)**

81. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1, 2] με 2f(1) = ln4 + f(2). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (ξ, f(ξ)) να διέρχεται από το σημείο B(0, ξ).

82. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με f(1) - f(0) = 1.
   α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$ ώστε: $f'(\xi_1) = 2\xi_1$.
   β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (0, 1)$ ώστε: $f'(\xi_2) = \frac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2 - 1}$.

83. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [2, 3] με την f ' συνεχή. Αν $f(3) = f(2) + \frac{19}{3}$ και $f'(2) > 6$, να δείξετε ότι:
   α) Υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \xi^2$.
   β) Υπάρχει $\rho \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε: $f'(\rho) = 3\rho$.