

☞ Για την αναζήτηση του  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , πρέπει η  $f$  να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$  ή  $(-\infty, \alpha)$  αντίστοιχα.

☞ **Βασικά όρια:**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, \text{ αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^v} = 0$

### πολυωνυμική

☞ **εύρεση ορίου πολυωνυμικής**

1. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 + 3x - 2)$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 3x - 1)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sin\theta - 2)x^3 + 5x - 1]$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 + 1)x^3 - 3x + 1]$

☞ **διερεύνηση παραμετρικού ορίου**

2. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x]$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda^2 - 1)x^4 - \lambda x + 1]$

### ρητή

☞ **εύρεση ορίου ρητής**

3. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{3x^2 - 4x + 1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^3 - 3x + 2}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^3 - 4x + 1}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 + x + 1}$

☞ **διερεύνηση παραμετρικού ορίου**

4. Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + x^2 + 3}{\mu x^2 - 3x + 5}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + 2x - 1}{(\mu + 1)x^2 + 2}$

☞ **εύρεση παραμέτρων**

5. Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^v - x - 1}{x^5 + x + 1} = 2$ , να βρείτε τους  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ .

6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1} - (\alpha \cdot x + \beta) \right] = 4.$$

7. Αν  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1} - \alpha x + \beta$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

8. Να βρεθεί το πολυώνυμο  $P(x)$  με πραγματικούς συντελεστές και

$$P(0) = 2015 \text{ ώστε να ισχύει: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x) - x^3}{x + 2014} = 2.$$

9. Να βρεθεί το πολυώνυμο  $P(x)$  ώστε να ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2 + 1} = 2$  και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = 3.$$

### απόλυτα

10. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 3x| + x - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 2x| + 3}{|x - 1| - 2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 - 2x + 3| + x - 1}{x^4 + 2x + 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - x - 2| + 3x^2 - 1}{2|x^2 - 1| + 5x^2 + x + 1}$$

### ρίζες

☞ **ιδιότητα:** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$ .

11. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 - 2x + 1})$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 2})$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^4 - x^2 + 1} - x + 1)$$

☞ **Απροσδιόριστη μορφή :**  $\infty - \infty$

Αν το αποτέλεσμα της πράξης των μεγιστοβάθμιων όρων είναι:

- $\neq 0$ , βγάλω κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του  $x$

εφαρμογή:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x)$

- $= 0$ , πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση

εφαρμογή:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x)$

12. Να βρείτε τα όρια :

γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - x)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + 2x)$

ε)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{4x^2 - x})$

στ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{4x + 1})$

13. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x + 2)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x + 1)$

ε)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1 + x\sqrt{x^2 + 3})$

στ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x\sqrt{4x^2 + 1})$

14. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x} - 4x)$ .

15. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 3} + 2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 3} + 2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 - 1} - 4x}{\sqrt{x^2 + 1} - 2x}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{25x^2 - 1} - 5x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$

στ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 1}}$

☞ **διερεύνηση παραμετρικού ορίου**

16. Για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \alpha x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} + \alpha x)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{\alpha x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1}), \alpha > 0$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha^2 x + \sqrt{x^2 + 1})$

☞ **εύρεση παραμέτρων**

17. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \alpha x - \beta) = 2$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \alpha x - \beta) = 0$

18. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το όριο:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$  να είναι πραγματικός αριθμός.

**κριτήριο παρεμβολής**

19. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)$ , όταν :

α)  $\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x - 1}{x + 1}$ ,  $x < -1$  και  $\sigma = -\infty$ .

β)  $\sqrt{4x^2 + 1} - x \leq f(x) + x \leq \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x > 0$  και  $\sigma = +\infty$ .

20. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$|(x^3 + 2)f(x) - x^2| \leq x$ , για κάθε  $x > 0$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**τριγωνομετρικά όρια**

21. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \cdot \eta\mu \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3x - 2}{x^2 + 2}$

22. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 + 5} \cdot \sigma\upsilon\nu 3x$

γ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \cdot \eta\mu 2x$

δ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$

☞ **βασικό όριο:** Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

23. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta\mu x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \cdot \eta\mu x + 1}{x^2 + \eta\mu x + 3}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\eta\mu x}{2x + 1}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x \cdot \eta\mu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x}$

☞ **βασικό όριο:** Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta\mu \frac{1}{x} = 1$ .

24. Να βρείτε τα όρια :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \eta\mu \frac{1}{x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 2} \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) \cdot \eta\mu \frac{2}{x}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{3x^2 + 4}$$

**εκθετικά - λογαριθμικά όρια**

25. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2 + 1}{x + 2}}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + 1}{x + 2}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{2 - x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

26. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x})$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - \ln(1 + e^x)]$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 2)]$$

27. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x}$ .

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

**☞ όριο εκθετικών με διαφορετικές βάσεις**

- στο  $+\infty$  : κοινός παράγοντας η εκθετική με τη **μεγαλύτερη** βάση

- στο  $-\infty$  : κοινός παράγοντας η εκθετική με τη **μικρότερη** βάση

28. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{5^x - 2^x}{5^x + 2^x}$ . Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

29. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (7^x - 5^x + 3^x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (7^x - 5^x + 3^x)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3 \cdot 2^x}{e^x - 2^x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x + 3^{x+1}}{2 \cdot 3^x - e^x} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2^x + 3^x}{1 + 5^x + e^x}$$

**☞ διερεύνηση παραμετρικού ορίου**

30. Για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$ , να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{x+1} + 3^x}{\alpha^x - 3^{x+1}}, \alpha > 0 \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^x - 1}{3^x - 2^x + 1}, \alpha > 1$$

31. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln[(\alpha+1)x^2+x+1] - \ln(x+2)$ ,  $x > -1$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$  με  $\alpha \geq -1$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε να υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και να είναι πραγματικός αριθμός.

**υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν δίνεται άλλο όριο**

32. Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$ .

33. Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x^2 - x}{2f(x) + x + 1}$ .

34. Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)] = 0$ ,  $\beta > 0$  και  $\alpha \neq 0$ , να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x^2] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

35. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $(-\infty, 0)$  για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 f(x) + x^2 + 1}{x^2 + 3} = 2.$$

α) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

β) Να βρείτε το  $\alpha$ , αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) + \alpha x + 1}{x + 2} = 1$ .

36. Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x}{3x - 1} = 2$ , να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (f(x) + 6x) \left( \sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) \right]$$

**ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**

37. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $f^3(x) + xf(x) = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να δείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα  $x'x$ .  
 β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα.  
 γ) Να δείξετε ότι υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και να το υπολογίσετε.  
 δ) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση:  $f(x) > \frac{1}{x^2}$  για κάθε  $x > 1$ , να δείξετε ότι υπάρχουν τα παρακάτω όρια και να τα υπολογίσετε:  
 i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ .

38. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln(1 - e^x) - \ln(1 + e^x)$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$ .  
 β) Να δείξετε ότι:  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in A$ .  
 γ) Να βρείτε το  $m < 0$  ώστε:  $f(m) = m$ .  
 δ) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-1)x^3 + x^2 + 6}{f(-3)x^2 - x - 2}$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)}$                       iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ .

39. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$ ,  $x > 0$ .

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.  
 β) Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών  $f(x)$ .  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\ln(\ln x) + \frac{\ln x - 1}{\ln x} = 1 - \ln x + \frac{e-x}{e}$ .  
 δ) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}$                       iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu \left( \frac{1}{f(x)} \right) \right]$

40. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x$  για την οποία ισχύει ότι:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ .

- α) Να δείξετε ότι:  $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$ .  
 β) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) \cdot \left( \sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} - 1 \right) \right]$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$