

υπολογισμός ορίου συνάρτησης, μορφή  $\frac{\alpha}{0}$ ,  $\alpha \neq 0$

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 3}{\sqrt{x} - 1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 3x}{(x - 2)^2}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 8}{|x - 1|}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{1 - \sin x}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 1}{x - \eta\mu x}$

στ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{x \cdot \eta\mu x}$

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x - 2}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{(x + 1)^3}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{\eta\mu x}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - 3}{\sin x}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$

στ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4}$

3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{|x|} \right)$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{|x|} \right)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{|x|} \right)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\eta\mu^2 x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{(x - 1)^3}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1} \right)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x - 3) \cdot \eta\mu x}{x^3 - 9x}$

5. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1}$ .

6. Να δείξετε ότι:

α)  $\frac{\eta\mu x}{x} < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x} = +\infty$

**☞ εύρεση παραμέτρων**

7. Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  για την οποία υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το όριο :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4} \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + \lambda - 1}{x - 1}$$

8. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + \alpha x + 1} = +\infty$ , να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

9. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 1} = 2 \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x + \beta\sqrt{x} + 1}{x - 1} = 2$$

10. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + (\beta + 2)x + 4}{(x - 1)^2} \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**☞ διερεύνηση παραμετρικών ορίων**

11. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  όταν:

$$\alpha) f(x) = \frac{2x^2 - \lambda x - \lambda^2}{|x - 1|} \qquad \beta) f(x) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda x - 2}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x^3 - 3\lambda x + \lambda^2}{(\lambda - 2)^2} \qquad \delta) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \lambda}{x^3 - 2x^2 + x}$$

**☞ υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν δίνεται άλλο όριο**

12. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|f(x) = 3 \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 f(x) = -3$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x - 3} = +\infty \qquad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{f(x)} = -\infty$$

13. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , όταν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{f(x)} = -\infty \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x - 2)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = -\infty$$

14. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x + \eta\mu x} = +\infty$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

15. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta\mu 2x}{\sqrt{x + 4} - 2} = -\infty$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

16. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{f(x) - 2} = +\infty$ .

17. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{f(x)} = +\infty$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$ .

18. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{f(x)} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 + 2x + 1} = -\infty$ , να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

19. Αν  $f, g$  συναρτήσεις ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x^2 - 1)}{x - 2} = -\infty$  και

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{g(x)(x - 1)} = +\infty$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

☞ μορφή  $\frac{\infty}{\infty}$

20. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{2f(x) + 1}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f^2(x) + 2}{f^2(x) - f(x) + 3}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f^2(x) + 1}$

21. Αν  $f, g$  συναρτήσεις ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$ , να βρείτε το

όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2g(x) + 3f(x)g(x)}{f^2(x) + 2g^2(x) + f^2(x)g^2(x)}$ .

22. Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $(-1, 1)$  τέτοια ώστε:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  και  $\alpha f(x) + 1 \leq \sqrt{x + 1}$ , για κάθε  $x \in (-1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι:  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

β) Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$ .