ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)e^{\kappa x+\lambda}dx$ **(πολυωνυμική × εκθετική)**

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
   α) $\int_0^1 xe^x dx$ β) $\int_0^1 (x-1)e^x dx$
   γ) $\int_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$ δ) $\int_0^1 (x^2+2x+1)e^{-2x}dx$

2. Έστω $I_\lambda = \int_1^\lambda x^2e^x dx$, $\lambda \in R$.
   α) Να υπολογίσετε το I_λ.
   β) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda$ και $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_\lambda$.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_\lambda = \int_0^\lambda (x^2+1)e^{-x}dx$ και στη συνέχεια το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda$.

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\eta\mu(\kappa x+\lambda)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)dx$
(πολυωνυμική × τριγωνομετρική)

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
   α) $\int_0^\pi 2x\sigma\upsilon\nu 2x dx$ β) $\int_0^\pi x\eta\mu x dx$ γ) $\int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu 3x dx$
   δ) $\int_0^\pi x^2\eta\mu x dx$ ε) $\int_0^\pi x^2\sigma\upsilon\nu x dx$ στ) $\int_0^\pi x^2\eta\mu 2x dx$

☞ $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\ln f(x)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} \ln f(x)dx$ **(πολυωνυμική × λογαριθμική)**

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
   α) $\int_1^e x^2\ln x dx$ β) $\int_1^e \ln x dx$

γ) $\int_1^e x\ln x dx$ δ) $\int_1^e \ln^2 x dx$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x t\ln t dt$, $x > 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

   α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_\lambda = \int_1^\lambda f(x)dx$, $\lambda > 0$.

   β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda$.

☞ $\int_\alpha^\beta e^{\kappa x}\eta\mu(\lambda x)dx$ ή $\int_\alpha^\beta e^{\kappa x}\sigma\upsilon\nu(\lambda x)dx$ **(εκθετική × τριγωνομετρική)**

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

   α) $\int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ β) $\int_0^1 e^{-x}\eta\mu x dx$

☞ **εύρεση του** $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ **όταν έχουμε πληροφορίες για την f '**

10. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(x) = 2\eta\mu x^2$ για κάθε $x\in R$ και $f\left(\sqrt{\pi}\right) = 1$.

    Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^\pi f(x)dx$

11. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(x) = 2e^{x^2}$ για κάθε $x\in R$ και $f(1) = e$.

    Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 f(x)dx$

12. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ και

$f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$

13. Έστω F μια παράγουσα της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+1}$ στο [0, 1] όπου f συνεχής στο [0, 1]. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία A(1, 1) και B(0, 2), να δείξετε ότι: $\int_0^1 F(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$. Έστω G μια παράγουσα της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ στο [0, 1]. Να δείξετε ότι:
$\int_0^1 G(x)dx = G(1) - \ln 2$.

☞ **γινόμενο με f, f', f''…**

15. Η συνάρτηση f(x) έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα [1, 3] και ισχύουν: f(1) = f(3) = 2 και $\int_1^3 f(x)dx = 4$. Να δείξετε ότι:
$\int_1^3 x \cdot f'(x)dx = 0$.

16. Η συνάρτηση f(x) έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα [0, 1] και ισχύει: $\int_0^1 x^2 \cdot f'(x)dx = 100 - 2\int_0^1 xf(x)dx$. Να βρείτε την τιμή f(1).

17. Η συνάρτηση f(x) έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R και είναι άρτια. Να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} x \cdot f''(x)dx = 0$.

18. Έστω μια συνάρτηση f(x) που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R.
α) Αν για κάποια α, β∈R με α < β ισχύει: $\alpha f'(\alpha) = \beta f'(\beta)$, να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f''(x)dx = f(\alpha) - f(\beta)$.
β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει: $f''(x) \geq 0$ για κάθε x∈R, να δείξετε ότι: $\dfrac{f'(2)}{3} \neq \dfrac{f'(3)}{2}$

19. Η συνάρτηση f(x) έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα [0, 1] και ισχύουν: f(0) = f(1) = 0 και $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι: $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$.

20. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια ώστε f(0) = 0 και f(1) = 1. Να δείξετε ότι:
α) $\frac{f(x)}{x} > f'(x)$ για κάθε x > 0.
β) $\int_0^1 f^3(x)dx \geq \frac{1}{4}$.

21. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, π]. Αν $\int_0^\pi (f(x) + f''(x))ημxdx = 7$ και f(π) = 3, να βρείτε την τιμή f(0).

22. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο με f(π) = 1 και $\int_0^\pi (4f(x) + f''(x))ημ2xdx = 2$. Να δείξετε ότι: f(0) = 2

23. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, 1]. Αν f(0) = 1 και f(1) = f '(0) = f '(1) = 0, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 (f''(x) - f(x)) \cdot e^{-x}dx$.

24. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, 1]. Αν f '(0) = f '(1) = -1, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 f'(x)f''(x)dx$.

25. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [α, β] και ισχύει: f(α) = f(β) = g(α) = g(β) = 0, να δείξετε ότι: $\int_α^β f''(x)g(x)dx = \int_α^β f(x)g''(x)dx$.

26. Να βρείτε τη συνάρτηση f: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν: f(0) = 2000, f '(0) = 1 και
$1 + \int_0^x f''(t)συνtdt = συν^2x + \int_0^x f'(t)ημtdt$.

☞ υπαρξιακά - θεωρητικές

27.Η συνάρτηση f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο με $f'(x) \neq 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\ln[f(x)]dx = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = 1$.

28.Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0, α] και $\int_0^{\alpha} x \cdot f''(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = f'(\alpha)$.

29.Έστω συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο R για την οποία ισχύει: $f(1) = \frac{7}{3}$, $f(0) = 1$ και $f'(x) > 2x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{4}{3}$.

β) Αν επιπλέον η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, να δείξετε ότι:

i) $f(x) \leq xf'(x) + 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

ii) $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{5}{3}$.

☞ αναγωγικός τύπος

30.Να δείξετε ότι:

α) Αν $I_\nu = \int_0^2 x^\nu e^x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $I_\nu = 2^\nu e^2 - \nu I_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$

β) Αν $I_\nu = \int_1^e \ln^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $I_\nu = e - \nu I_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$

γ) Αν $I_\nu = \int_1^e x\ln^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $2I_\nu + \nu I_{\nu-1} = e^2$, $\nu \geq 2$

δ) Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $I_\nu = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$

ε) Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$

στ) Αν $I_\nu = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^\nu x dx$, $\nu \in N^*$, τότε: $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$

31.Αν $I_\nu = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^\nu dx$, να δείξετε ότι: $I_\nu = \frac{2\nu}{2\nu+1} I_{\nu-1}$, $\nu \geq 2$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

32.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x+3)^2 dx$ β) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)^3} dx$

γ) $\int_0^\pi ημ^4 x \cdot συνx dx$ δ) $\int_0^\pi συν^2 x \cdot ημx dx$

ε) $\int_0^\pi e^{ημx} \cdot συνx dx$ στ) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

ζ) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$ η) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

θ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{εφx}}{συν^2 x} dx$ ι) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{συνx}{\sqrt{ημx}} dx$

33.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$ β) $\int_1^3 x\sqrt{x+1} dx$

γ) $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$ δ) $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1} dx$

ε) $\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$ στ) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

34.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x\ln(x^2+9) dx$ β) $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} dx$

γ) $\int_0^{\pi^2} ημ\sqrt{x} dx$ δ) $\int_0^{\pi^2} συν\sqrt{x} dx$

ε) $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ στ) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 συνx^2 dx$

35.Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα [0, 1] και ισχύει: $f(1) = f'(1) = 2$ και $f(0) = 0$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
$\int_0^1 x^3 \cdot f''(x^2) dx$.

36.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \frac{x\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$.

37. Αν $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x-1)dx = 1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{-1} f(x)dx$.

38. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο R, να δείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

β) $\int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)dx = \gamma\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\gamma \neq 0$

γ) $\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt$.

☞ η αντικατάσταση u = -x (έχουμε αντίθετα όρια ολοκλήρωσης)

39. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει: $\alpha f(x) + \beta f(-x) = \gamma$, $\alpha + \beta \neq 0$, να δείξετε ότι: $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2\gamma}{\alpha+\beta}$.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\text{συν}x}{1+e^x}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x) + f(-x) = \text{συν}x$ για κάθε $x \in R$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{1+2^x}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x) + f(-x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

42. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $x, y \in R$ ισχύει: $f(x + y) = f(x) + f(y) + x\text{ημ}y + y\text{ημ}x$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x) + f(-x) = 2x\text{ημ}x$ για κάθε $x \in R$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

43. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και περιττή, να δείξετε ότι:
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

44.Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2^{\eta\mu x}+1}dx$.

45.Έστω συνάρτηση f: [-1, 1] → R συνεχής, άρτια και τέτοια ώστε:
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$. Να δείξετε ότι: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\alpha^x+1}dx = 1$.

46.Έστω συνάρτηση f: R → R συνεχής και άρτια και η συνεχής συνάρτηση g: R → R με g(x) ≠ -1 και g(x)g(-x) = 1 για κάθε x∈R.

α) Να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

β) i) Να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{g(x)+1}dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.

ii)Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}dx$.

☞ **η αντικατάσταση u =** $\frac{1}{x}$ **(έχουμε αντίστροφα όρια ολοκλήρωσης)**

47.Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{1}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{1+x^2}dx$ για κάθε α > 0.

48.Να δείξετε ότι: $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{1-x^2}{1+x^4}dx = 0$ για κάθε α > 0.

☞ **η αντικατάσταση u = α + β - x**

49. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] με:
f(x) + f(α + β - x) = c για κάθε x∈[α, β]. Να δείξετε ότι:
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta - \alpha)\, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$.

50.Έστω συνάρτηση f: [α, β] → R με συνεχή παράγωγο στο [α, β] τέτοια ώστε: f '(x) = f '(α + β - x) για κάθε x∈[α, β]. Να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta-\alpha}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right].$$

51.Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και τέτοια ώστε: f (x) = f (α + β - x) για κάθε x∈[α, β]. Να δείξετε ότι:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = (\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$.

52.Να δείξετε ότι:

α) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\varepsilon\varphi x)dx = 0$ β) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+1)}{\ln\left(2+x-x^2\right)}dx = \frac{1}{2}$.

53.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx$ β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\varepsilon\varphi x)dx$.

☞ολοκλήρωμα αντίστροφης

54.α) Έστω συνάρτηση f: [α, β] → R η οποία είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ με x∈[0, 1].

i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

ii) Να δείξετε ότι: $\int_{0}^{1} e^{x^2}dx + \int_{1}^{e} \sqrt{\ln x}\,dx = e$.

55.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$.

56.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 5$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.

57.Έστω συνάρτηση f: R → R συνεχής και τέτοια ώστε:

$e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = e$.
γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^e f(x)dx$.

58. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής και τέτοια ώστε:
$f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 f(x)dx$.

59. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x) > 0$ και τέτοια ώστε:
$e^{f(x)} + \ln f(x) = 2x$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 1$ και $f(x) = e$.
γ) Να υπολογίσετε την παράσταση: $\int_1^e f^{-1}(x)dx + \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{e^e+1}{2}} f(x)dx$.

☞ολοκλήρωμα σύνθετης

60. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής και τέτοια ώστε:
$f(x^3 + x) = 2x$ για κάθε $x \in R$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:
$\int_0^2 f(x)dx$.

61. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής και η συνάρτηση $g(x) = x + \ln x$
με $f(g(x)) = xe^x$, $x > 0$.
α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^{1+e} f(x)dx$.

62. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα με τη βοήθεια της αντικατάστασης:
α) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ θέτοντας: $x = 2\eta\mu u$
β) $\int_0^3 \frac{1}{x^2+9}dx$ θέτοντας: $x = 3\varepsilon\varphi u$