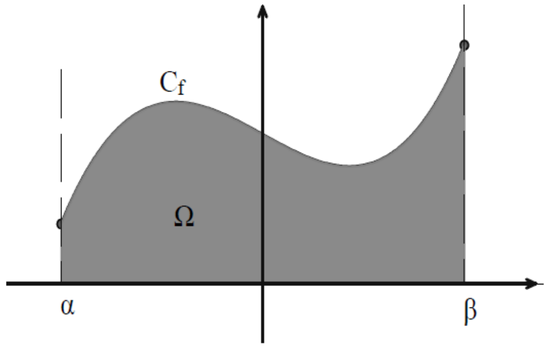
το ορισμένο ολοκλήρωμα

☞ γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος

Αν $f(x) \geq 0$ και f συνεχής στο [α, β], το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = α και x = β.



- Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εξαρτάται μόνον από τη συνάρτηση f και τα άκρα α και β και όχι από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, δηλαδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du$
- Το σύμβολο dx στο ολοκλήρωμα δηλώνει ότι η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το x. Οτιδήποτε άλλο θεωρείται σταθερό π.χ. $\int_\alpha^\beta g(t)f(x)dx = g(t)\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

☞ ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

1. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$ (α < β)

2. Αν $f(x) \geq 0$ στο [α, β] και η f δεν μηδενίζεται παντού στο [α, β], τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

3. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

4. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

5. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

6. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά

7. $\int_\alpha^\beta (\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

8. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$ ισχύει για **τυχαία** α, β, γ

☞ **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

☞ **ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος**

1. Αν $\int_1^5 f(x)dx = 2$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ και $\int_1^7 f(x)dx = 5$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

   α) $\int_5^2 f(x)dx$ β) $\int_5^7 f(x)dx$

   γ) $\int_1^2 f(x)dx$ δ) $\int_2^7 f(x)dx$

2. Αν $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ και $\int_0^5 f(x)dx = 6$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

   α) $\int_1^2 f(x)dx$ β) $\int_0^2 f(x)dx$ γ) $\int_1^5 f(x)dx$

3. Αν $\int_8^5 f(x)dx = -3$, $\int_1^{10} f(x)dx = 5$, $\int_1^{11} f(x)dx = 10$ και $\int_5^{10} f(x)dx = 1$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

   α) $\int_{10}^{11} f(x)dx$ β) $\int_1^5 f(x)dx$

   γ) $\int_8^{10} f(x)dx$ δ) $\int_8^{11} f(x)dx$

4. Να δείξετε ότι:

   α) $\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^2}dx = 1 + \int_2^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

   β) $\int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+e^x}dx - \int_{2\alpha}^{\alpha} \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \alpha$.

5. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$ ώστε να ισχύει:

   α) $\int_1^{\alpha} \frac{x^2+2}{x^2+1}dx + \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x^2+1}dx = 5$

   β) $\int_1^{\alpha} \frac{4}{2+\eta\mu x}dx - \int_{\alpha}^1 \frac{2\eta\mu t}{2+\eta\mu t}dt = 8$.

6. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 1] με f(x) < 0 για κάθε x∈[0, 1] και $\int_0^1 f(x)\left[\int_0^1 f(x)dx\right]dx = 4$. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 f(x)dx$.

7. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R και τέτοια ώστε: $\int_1^2 x\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx = 5$. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 f(x)dx$.

8. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 1] με f(x) > 0 για κάθε x∈[0, 1] και $\int_0^1 f(x)\left[\int_0^1 f(x)dx\right]dx = \int_0^1 f(x)dx + 2$. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 f(x)dx$.

9. Έστω συνάρτηση f: R→ R η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $\int_0^1 f(x)dx = -2$ και f(x) ≠ 0 για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι: f(x) < 0 για κάθε x∈R.

10. Έστω συνάρτηση f: R→ R η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $\int_0^1 f(x)dx < 1$ και f(0) > 0. Να δείξετε ότι η εξίσωση: f(x) = 2x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

☞ υπολογισμός απλού ορισμένου ολοκληρώματος

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)dx$ β) $\int_0^1 \left(e^x + 3x^2\right)dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)dx$ δ) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1\right)dx$

ε) $\int_0^1 (x+1)(x-1)dx$ στ) $\int_1^2 \frac{3x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x}dx$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx$ β) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x-x}dx$

γ) $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)^3 dx$ δ) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$

ε) $\int_1^3 (x-2)\eta\mu(x^2-4x+3)dx$ στ) $\int_0^1 (x+1)e^{(x+1)^2}dx$

13.Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 2] και τέτοια ώστε: $\int_0^2 \left(4x^3+3x^2-2x+\int_0^1 f(x)dx\right)dx = 0$. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 f(x)dx$.

14.Έστω συνάρτηση f: R→ R η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $\int_0^2 \left(3x^2-2x-\int_0^1 f(x)dx\right)dx > 0$. Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx < 2$.

15.Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{x+1}dt$

☞ **ολοκλήρωμα συνάρτησης διπλού τύπου**

16.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^1 f(x)dx$, αν $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 0 \\ 3x^2+x+1, & x > 0 \end{cases}$

β) $\int_{-2}^2 f(x)dx$, αν $f(x) = \begin{cases} 2e^x-1, & x \ge 0 \\ 4x^3-2x^2+1, & x < 0 \end{cases}$

17.Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 |x-2|dx$ β) $\int_0^2 |x-1|dx$ γ) $\int_1^3 |x^2-4|dx$

18.α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 2^x + 2x - 1$.

β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{-1}^1 |f(x)|dx$.

19.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$, $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_0^1 |f(x) - 2x - 1| dx$.

☞ **εύρεση f μέσα από σχέση με f, f' στην οποία εμφανίζεται και το ολοκλήρωμα** $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

20.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και τέτοια ώστε:

$f'(x) = \int_0^1 f(x)dx$ για κάθε $x \in R$. Αν $f(0) = 1$, να βρείτε την f.

21.Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R και τέτοια ώστε:

$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$ για κάθε $x \in R$. Να βρείτε την f.

22.Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και τέτοια ώστε:

$xf'(x) = f(x) + \int_1^2 f(x)dx - 3$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = 2$, να βρείτε τη συνάρτηση f.

23.Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$x\int_0^1 (x-1)f(x)dx = f(x) - x$ για κάθε $x \in R$.

☞ **ανισότητες**

24.Να δείξετε ότι:

α) $\int_1^2 (xe^x - 2e^x + e)dx > 0$ β) $\int_0^2 (x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x - 2)dx > 0$

γ) $\int_0^2 (2e^x - 2)dx \ge \int_0^2 (x^2 + 2x)dx$ δ) $\int_1^3 2x\ln x dx \le \int_1^3 (x^2 - 1)dx$

25.Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 2], να δείξετε ότι:

$\int_0^2 f^2(x)dx + 8 \ge 4\int_0^2 f(x)dx$.

26.Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [0, 1], να δείξετε ότι:

α) $\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{4} + \int_0^1 f^2(x)dx$

β) $\int_0^1 [2f(x) + g(x)]^2 dx \le 5\int_0^1 [f^2(x) + g^2(x)]dx$

27. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = 2^x - \alpha x - 1$, $\alpha \in R$.
   α) Να βρείτε την τιμή του α, αν ισχύει: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$.
   β) Για $\alpha = \ln 2$, να δείξετε ότι: $\int_0^1 2^{x^2} dx > 1 + \frac{\ln 2}{3}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x + 1$.
   α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
   β) Να δείξετε ότι: $\int_1^2 x^x dx > e - 1$.

29. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) + x^2 - 1}{x - 1} = 3$.
   α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 1$.
   β) Αν επιπλέον η f είναι κυρτή στο R, να δείξετε ότι: $\int_0^3 xf(x)dx \geq \frac{9}{2}$.

30. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R. Να δείξετε ότι: $\int_\kappa^{\kappa+1} f(x)dx \leq f(\kappa + 1) \leq \int_{\kappa+1}^{\kappa+2} f(x)dx$ με $\kappa \in R$.

31. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 2] και τέτοια ώστε: $f'(x) > 3x^2$ για κάθε $x \in [0, 2]$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι:
   α) $\int_0^2 f(x)dx > 4$
   β) $f(2) > 7 + f(1)$
   γ) Υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $(2 - \xi)\left(\int_0^2 f(x)dx - 4\right) = \xi f(\xi) - 2\xi^3$.

32. Να δείξετε ότι:
   α) $12 < \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9}\,dx < 20$
   β) $9 < \int_2^7 \frac{1 + x^3}{1 + x^2}dx < 35$
   γ) $\frac{1}{5} < \int_5^8 \frac{2x - 9}{2x + 5}dx < 1$
   δ) $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$

33. α) Να δείξετε ότι: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1 + x^2}dx = \ln 2$
   β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x) = xe^{-x}$.
   γ) Να δείξετε ότι: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{1 + x^2}dx \leq \frac{\ln 2}{e}$.

34.α) Να δείξετε ότι: $e^x > x$ για κάθε $x \in R$.

β) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+x^2}dx > \ln 2$.

γ) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R→ R καθώς και η συνεχής συνάρτηση h: R→ R για τις οποίες ισχύει:

$\int_{e^{2\alpha}}^{f(\alpha)f'(\alpha)-\alpha} (e^x - x)\left(h^2(x)+1\right)dx = 0$ για κάθε $\alpha \in R$. Αν $f(0) = -2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

35.α) Έστω συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει: $\int_\alpha^\beta g^2(x)dx = 0$, να δείξετε ότι: $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $\int_0^1 f^2(x)dx = 8\int_0^1 f(x)dx - 16$. Να βρείτε τον τύπο της f.

36.Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \to R$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $\int_0^1 f^2(x)dx = 1$ και $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{2}{3}$. Να δείξετε ότι: $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

37.Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε: $f(x) + \int_0^{f(x)} |f(t)|dt = 0$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

38.Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία είναι 1-1 και τέτοια ώστε: $f^{-1}(x) = x + \int_x^{f(x)} \sqrt{1+t^2}dt$ για κάθε $x \in R$. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι: $f(x) = x$ για κάθε $x \in R$.

39.Αν $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$ με $x>0$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$.

40.Αν $f(x) = \frac{e^x}{x}$ με $x > 1$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$.