

**Όριο συνάρτησης στο  $x_0 \in \mathbf{R}$**

- η έννοια του ορίου
- προϋπόθεση αναζήτησης του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**ΙΔΙΟΤΗΤΑ: Όρια και πράξεις**

**απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  με πολυώνυμα**

1) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x + 1}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3}$

v)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - 2x^2}{-x^2 + 5x + 6}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5}$

vii)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{4 - x^2}$

viii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

ix)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + 4x^2}{4x^4 - 3x^2}$

x)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

xi)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{(2x - 1)^3 - 1}$

xii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

**απροσδιόριστη μορφή  $\frac{0}{0}$  με ρίζες**

2) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

v)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{x^2 - 1}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - \sqrt{4x + 1}}{x^2 - 5x + 6}$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + 2x}{x^2 - 1}$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1-\sqrt{x+5}}{x-4}$$

3) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+3}}$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2-2x}}{\sqrt{3x+7} - 2\sqrt{x+2}}$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{\sqrt{x+1} - x + 1}$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 3x + 1}{x-1}$$

$$\text{ix) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$$

$$\text{x) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x-7}$$

$$\text{xi) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{4x+5} - 5}{x-1}$$

$$\text{xii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt{x+2} + x - 6}{x-2}$$

4) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2-x-1}}{\sqrt{x^3-1}}$$

**ΙΔΙΟΤΗΤΑ:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$

☞ **πλευρικά όρια**

5) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq -1 \\ x^3+2, & x > -1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = -1$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 2 \\ \sqrt{2x+5} + x - 3, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 2$$

$$\text{iii) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & -3 \leq x < 1 \\ \frac{x-1}{2x^2-2}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

$$\text{iv) } f(x) = \begin{cases} x^3-2, & x < -2 \\ 3x+2, & -2 \leq x < 1 \\ x^2-1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = -2 \text{ και στο } x_0 = 1$$

$$\text{v) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & 0 < x < 1 \\ -4, & x = 1 \\ \frac{x^2-6x+5}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

6) Να βρεθεί ο  $\alpha \in \mathbf{R}$  ώστε να έχει όριο στο  $x_0 = 2$  η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \alpha x - 1, & x \leq 2 \\ x^2 + 2\alpha x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

7) Αν  $f(x) = \begin{cases} 2\alpha^2 x^2 + \alpha x + 1, & x \leq 1 \\ \alpha^2 x - 3, & x > 1 \end{cases}$  να δείξετε ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

8) Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  ώστε να έχει όριο στο  $x_0 = -1$  η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^4 + 1, & x \leq -1 \\ 2\alpha x^3 + \beta^2 x, & x > -1 \end{cases}$$

9) Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 3x - \alpha, & x \leq -1 \\ x^2 - \alpha x + \beta, & -1 < x < 1 \\ x^3 - \alpha x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}$ . Να βρείτε τις

τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma$  για τις οποίες υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

10) Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \alpha f(x) + \beta, & x < 0 \\ \beta f(x) + \alpha, & x > 0 \end{cases}$  με  $\alpha \neq \beta$ .

Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = m$ , να δείξετε ότι:  $\alpha + \beta = 1$ .

### ΙΔΙΟΤΗΤΑ: Όριο και διάταξη

#### Όρια με απόλυτα

☞ Το  $x_0$  δεν μηδενίζει καμιά παράσταση μέσα σε απόλυτο

11) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| + |x-3| + x^2 - 6}{x^2 - 2x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 3| - |x - 2|}{x - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^3 - 3x - 1| + x}{|x^3 + 5x + 4| - 2}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^{10} + x + 1| + |x^2 - 1| - 2}{x}$$

12) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f^2(x) - 3| - |f(x) + 1|}{f(x) - 1}$

☞ Το  $x_0$  μηδενίζει (έστω μια) παράσταση μέσα σε απόλυτο

13) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1| + x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^2 - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1| + x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| + x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - x^2 + x + 2}{\sqrt{x+2} - 1}$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9 - |x - 3|}{|x - 1| - 2}$$

14) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  τέτοιες ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e$  και

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ . Να αποδείξετε ότι για κάποιες τιμές του  $x \in \mathbf{R}$  η εξίσωση

$t^2 + f(x)t + g(x) = 0$  έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

**ΙΔΙΟΤΗΤΑ: Κριτήριο παρεμβολής**

☞ Δίνεται (συνήθως διπλή) ανισότητα και ζητείται όριο

15) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , όταν:

i)  $x^2 - 2x \leq f(x) \leq x^3 - x^2 - x$  και  $x_0 = 1$

ii)  $3x - x^2 \leq f(x) + 2 \leq 3x + x^2$  και  $x_0 = 0$ .

16) i) Αν  $x^2 + 2x \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}.$$

ii) Αν  $\eta\mu x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + x + 2$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , να βρείτε το

όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}.$

iii) Αν  $6\sqrt{x} - 6 \leq f(x) \leq x + 3$  για κάθε  $x \geq 0$ , να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9}.$$

17) i) Αν  $|xf(x) - |x|| \leq x^2$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

ii) Αν  $|f(x) - g(x)| \leq |x^2 g(x)|$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$ , να βρείτε

το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

18) Αν  $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x + 2$  για κάθε  $x \geq 0$ , να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$                       ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$                       iii)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{x + 2} - 2}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 16}{x - 2}$                       v)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 1} - \sqrt{5}}{x - 2}$                       vi)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 4}$

19) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  τέτοιες ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lambda. \text{ Αν ισχύει: } f(x) \leq \frac{|x|}{x} \leq f(x) + g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}^*, \text{ να}$$

αποδείξετε ότι  $\lambda \neq 0$ .

20) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^2$  για κάθε

$x, y \in \mathbf{R}$  να βρείτε τα όρια: α)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$       β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

☞ Όταν στο όριο εμφανίζεται παράσταση της μορφής  $\eta\mu^\infty$  ή  $\sigma\upsilon\nu^\infty$

21) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu \frac{1}{x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{x}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \eta\mu \frac{2}{x - 1}$

v)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} \cdot \eta\mu \frac{3x}{x - 1}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} \cdot \eta\mu \frac{x^2 + 1}{x}$

☞ μηδενική επί φραγμένη

22) Έστω συνάρτηση  $f$  με σύνολο τιμών  $f(A) = [-3, 2]$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x \cdot f(x) = 0.$$

23) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f^2(x) - 3f(x) + 2 \leq 0$  κοντά στο  $x_0 = 0$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu 2x \cdot f(x)$ .

**ΙΔΙΟΤΗΤΑ:** - βασική τριγωνομετρική ανισότητα  
- τριγωνομετρικά όρια

24) Να βρείτε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x}{x}$

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x}{x^2}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - x}$

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{3\eta\mu x + x}$

vi)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\eta\mu^2 x}$

vii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$

viii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x \cdot \eta\mu x}$

αλλαγή μεταβλητής

25) Να βρείτε τα όρια :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi 5x} \\ \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\epsilon\phi 5x} & \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x} \\ \text{v)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + \eta\mu 5x}{x} & \text{vi)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 5x}{x^2} \\ \text{vii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{viii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x) \cdot \eta\mu(\beta x)}{\eta\mu(\gamma x) \cdot \eta\mu(\delta x)} \end{array}$$

26) Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7} - 3}$$

27) Να βρείτε τα όρια :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 6} & \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ \text{iv)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x-1} & \text{v)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1} & \text{vi)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - x + 1}{1 - \sqrt[3]{x-1}} \end{array}$$

28) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 2\sqrt{f^2(x) + 5}}{f^2(x) - 2f(x)} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^3(x) - f(x) - 1| - |f(x) - 3| - 4}{f(x) - 2}$$

29) Έστω η πολυωνυμική περιττή συνάρτηση  $P(x)$ . Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|P(x)|\eta\mu x + 1| - |xP(-x) + 1|}{x}$$

30) α) Αν  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 1$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x-1)$  .

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$  .

31) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2$ . Να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x)}{\ln x}$

32) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \kappa$ .

α) Αν η  $f$  είναι άρτια, να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = \kappa$ .

β) Αν η  $f$  είναι περιττή, να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = -\kappa$ .

33) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}-1}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(2x) + f(3x)}{x}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(2x)}{x^2}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$

στ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{\eta\mu^2 x}$

34) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

ii) Να δείξετε ότι:  $f(x) + f(-x) = 2x^2$ .

iii) Αν  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha$  όπου  $\alpha > 0$ , να βρείτε το  $\alpha$  ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\alpha} f(x) = 1.$$

35) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha^2, \text{ να βρείτε}$$

το  $\alpha > 0$  ώστε να ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 2\alpha} f(x) = \alpha + 3$ .

**βοηθητική συνάρτηση (θέτω – λύνω – αντικαθιστώ)**

36) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , αν:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 1 - x) = 3$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 2$

37) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu 2x}{x^3 + x} = 5$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .



38) α) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - x}{x^2 + 3x}$

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$

γ) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x - 2} = 1$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x - 2}$ .

39) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x} = 3$ , να βρείτε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$                       β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$                       γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - x}$

40) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$ , αν

α)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)(x^2 - x - 2) = -3$  και  $x_0 = -1$

β)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 - 4} = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)(x + \sqrt{x+6}) = 2$  και  $x_0 = -2$

41) Να βρείτε τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$  αν

$\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) + g(x)] = 19$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 2g(x)] = -3$ .

42) α) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \kappa$ ,  $\kappa \in \mathbf{R}$  να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

β) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^2 + 2x - \beta}{x - 2} = 4$ .

43) Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$  και  $|g(x) - 1| \leq |f(x)|$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να βρείτε τα όρια

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$                       β)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$                       γ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - 3| - 2}{g^2(x) - g(x)}$

44) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbf{R}$  και ισχύει:

$f^3(x) + f(x)\eta\mu^2x = 2x^2\eta\mu x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , να βρείτε το  $\lambda$ .

- 45) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$   
 και η συνάρτηση  $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$  με  $\frac{g(x)}{\eta\mu^4 x} = \frac{1}{x^2 \eta\mu^2 x} + \frac{f(x)}{x^4}$ . Αν  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$ , να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

**ανισότητες και όρια**

☞ **υπάρχει το**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- 46) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$  και  
 $xf(x) - \eta\mu x \leq 0, x \in \mathbf{R}$ . Να βρείτε το  $\lambda$ .

- 47) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$  και  
 $xf(x) \leq \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x - 1, x \in \mathbf{R}$ . Να βρείτε το  $\lambda$ .

- 48) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbf{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4\alpha + 3$   
 και  $xf(x) \geq \eta\mu 3x + \eta\mu 5x$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ .

- 49) Αν  $\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$ , για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να αποδείξετε ότι:  
 $\alpha = \beta + \gamma$ .

- 50) Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $(-1, 1)$  και τέτοια ώστε  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  και  $\alpha f(x) + 1 \leq \sqrt{x+1}$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Να αποδείξετε  
 ότι:  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

☞ **δεν δίνεται ότι υπάρχει το**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow$  **κριτήριο παρεμβολής**

- 51) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f^2(x) \leq 2xf(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να  
 αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

- 52) Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει:  $f^2(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 2f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ ,  
 να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

- 53) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για τις οποίες ισχύει:  
 $f^2(x) + g^2(x) \leq \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

- 54) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για τις οποίες ισχύει:  
 $f(x) \leq 0 \leq g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$ , να δείξετε  
 ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

- 55) Έστω η μη σταθερή συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  τέτοια ώστε:  $f^2(x) \leq x^2$  για  
 κάθε  $x \in \mathbf{R}$ . Να δείξετε ότι:

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$ .

γενικές

- 56) Αν για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  ισχύει:  $f(x) = f(2-x)$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$  και  
 $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) - 2x - 1) = 5$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

- 57) Αν η συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  είναι περιττή και  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , να βρείτε

το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( f(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$ .

- 58) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Αν η  $f$  είναι άρτια, η  $g$  είναι  
 περιττή,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) (\sqrt{2x+7} - 3) = 5$ , να βρείτε το  
 όριο:  
 $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)]$ .

- 59) Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4.$$

Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ , όπου  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

- 60) Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με την ιδιότητα:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  
 για κάθε  $x, y \in \mathbf{R}$ .

ι) Να δείξετε ότι  $f(0) = 0$  και ότι η  $f$  είναι περιττή.

ii) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2014$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

iii) Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2014$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

61) Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x} = 2$ .

α) Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

β) Να υπολογίσετε το  $\lambda \in \mathbf{R}$  ώστε:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \lambda x \eta\mu x}{x^2 \eta\mu x + f^2(x)} = 5$

γ) Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + x}{x + \eta\mu x}$ .

62) Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 4}{x - 2} = 2014$ , να βρεθεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x) + 4)}{x - 2}$ .

63) Έστω μιγαδικός αριθμός  $z$  και συναρτήσεις  $f, g$  τέτοιες ώστε:

- $f(x) \leq \frac{x^2 - x - 2 \operatorname{Im}(z)}{3x - 6} \leq g(x)$  για κάθε  $x \neq 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = z \bar{z}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2|z| - 1$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $|z| = 1$ .

ii) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό  $z$ .