πεδίο ορισμού

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   i) f(x)= $\dfrac{1}{x^2-1}$ ii) f(x)= $\dfrac{1}{x^3-4x}$

   iii) f(x)= $\sqrt{x^2-5x+6}$ iv) f(x)= $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

   v) f(x)= $\sqrt{1-\ln x}$ vi) f(x)= $\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

   vii) f(x)=$\dfrac{1+x}{2-|x|}$ viii) f(x)=$\sqrt{x+5}-\sqrt[3]{1-x}$

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

   i) f(x)= $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{e^x-1}$ ii) f(x)=$\sqrt{e^{2x}-e^x-2}$

   iii) f(x)= $\sqrt{4-\sqrt{2-x}}$ iv) f(x)= $\dfrac{\sqrt{-x^2+6x-5}}{x^2-|x|}$

   v) f(x)= $\dfrac{\ln(\ln x)}{e^x-1}$ vi) f(x)= $\sqrt{2\ln x-\ln^2 x}$

   vii) f(x)= $\ln\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$ viii) f(x)= $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

   ix) f(x)= $\sqrt{\dfrac{e^x-1}{x}}$ x) f(x)= $\sqrt{\dfrac{\ln x}{x-1}}$

3. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, όταν:

   i) f(x)= $\sqrt{x^2-\alpha x+1}$ ii) f(x)= $\ln\left(\alpha x^2+x+\alpha\right)$

σύνολο τιμών

4. Να γράψετε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

   i) f(x)= x^2 ii) f(x)= x^3

   iii) f(x)= ημx iv) f(x)= συν^{2}x

   v) f(x)= e^x vi) f(x)= lnx

5. Έστω η συνάρτηση f(x)= $\dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, ενώ ο αριθμός -1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

γραφική παράσταση - σχετική θέση των C_f και C_g

6. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, όταν:
   i) $f(x)=x^2-6x+5$ ii) $f(x)=2\ln(1+x)-4$ iii) $f(x)=e^x-2$
   iv) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ v) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ vi) $f(x)=\ln^2x-\ln x$

7. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x, όταν:
   i) $f(x)=x^3-x^2+2x$ ii) $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ iii) $f(x)=1-|\ln x|$

8. Να βρεθούν οι τιμές του $x\in R$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 1$.

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , όπου:
   i) $f(x)=2x-x^2$ και $g(x)=x^2+3x$
   ii) $f(x)=x^3-x^2+2x-3$ και $g(x)=x^2-2$
   iii) $f(x)=1+\ln(x+1)$ και $g(x)=2$

10. Έστω οι συναρτήσεις: $f(x)=\alpha x^2 + x + 1$ και $g(x)=x^2 + \alpha x$. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in R$ ώστε οι C_f, C_g να έχουν δύο κοινά σημεία.

11. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g, όταν:
    i) $f(x)=x^2-5x+6$ και $g(x)=3-x^2$
    ii) $f(x)=x-1$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$
    iii) $f(x)=2\ln x+3$ και $g(x)=\ln^2x+\ln x+1$.

12. Να βρείτε τους $\alpha, \beta\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= \alpha x^3 + \beta x + 1$ να περνά από τα σημεία Α(1, 2) και Β(2, 9)

13. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)= \alpha\ln(x+1) + \beta$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα y'y στο 2, να βρεθούν οι α, β.

14. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = x^4-(\alpha+1)x^2+\beta x+3$ και $g(x) =(\alpha+2)x^2+(2-\beta)x-1$ τέμνονται πάνω στις ευθείες x=-1 και x=1, να βρείτε:
α) τις τιμές των α και β,
β) τα άλλα κοινά σημεία των C_f και C_g.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x)= \begin{cases} x^3, x \leq 0 \\ \ln x, x > 0 \end{cases}$

α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)= α για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.

16.Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^2(x) + f(x) - 2 = x^2 + x$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον x'x.

17.Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει:
$g(x) = f(x)(2 - f(x)) + e^x - 3$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον ημιάξονα Oy'.

ίσες συναρτήσεις

18.Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι f = g. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ισχύει: f (x) = g(x).

i) $f(x) = \dfrac{2x^2-2x}{x^3-1}$ και $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$

ii) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-xe^x}{xe^x}$ και $g(x) = \dfrac{e^x}{x}-1$

iii) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-|x|}$ και $g(x) = \dfrac{1}{|x|}+1$

iv) $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 2$

v) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$

vi) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$

vii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ και $g(x) = 2\ln x - \ln(1-x)$

19.Να βρεθεί ο $\alpha\in R$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι ίσες:

$f(x) = \alpha x + 3$ και $g(x) = \dfrac{\alpha x^3 + 4\alpha x^2 + 4x + 3}{x^2 + \alpha x + 1}$.

πράξεις με συναρτήσεις

20.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

21.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ και $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

22.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ και $g(x)= \sqrt{x-1}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

23.Αν $f(x)= \ln x$ και $g(x)= e^x-1$, να βρεθούν οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$.

24.Να βρεθούν οι συναρτήσεις: $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ όταν:

α) $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)= \dfrac{1}{x-2}$

β) $f(x)= \dfrac{1}{x-1}$ και $g(x)= \dfrac{x}{x+2}$

γ) $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)= \sqrt{3-x}$

δ) $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)= \ln(x-1)$

ε) $f(x)= x^2 + 3$ και $g(x)= \dfrac{1}{x-4}$

25.Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύει: $(g\circ f)(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ αν $f(x) = \ln x$.

26.Να βρεθεί η συνάρτηση f, όταν:

α) $g(x)=x-2$ και $(f\circ g)(x)=x^2+x+1$

β) $g(x)= e^x-1$ και $(f\circ g)(x)= x+2$.

27. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει: $(g\circ f)(x) = 3x + 2$, αν $g(x) = \dfrac{1+x}{x-1}$.

28. Να βρεθεί η συνάρτηση g, όταν:
α) $f(x)=x+3$ και $(f\circ g)(x)= e^{1+x} +3$
β) $f(x)= x^3-1$ και $(f\circ g)(x)= x^2+3$.

29. Αν $f(x) = x^2 - 2x + 4$, να βρείτε δύο συναρτήσεις g για τις οποίες ισχύει: $(f\circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

30. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το (0,3) και $g(x)=x^2 -1$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f\circ g$.

31. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το [0,1) και $g(x)=\ln x$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f\circ g$.

32. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το [7,27], να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)= f(x^3+x-3)$.

33. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A = (0,1], να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)= f(x-2) + f(\ln x)$.

34. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x)= \dfrac{x}{2x-1}$, ισχύει:
$(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in R-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
β) Αν $g(x) = - x$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $-f$ είναι ίσες

36. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $(f\circ f)(x)= 4x - 3$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι: $f(1) = 1$.

37. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει:
$(f\circ f\circ f)(x)= 2x^2 - 6x +3$, $x\in R$. Να δείξετε ότι: $f(3) = 3$ ή $f(3) = \dfrac{1}{2}$.

38. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $f(f(x))= xf(x)$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί το $f(0)$.

39. Έστω ότι για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: f(f(x))=4-x για κάθε $x \in R$.
α) Να βρεθεί το f(2)
β) Να δείξετε ότι: f(x) + f(4-x) = 4 για κάθε $x \in R$.

40. Έστω ότι για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: $f(f(x))=x^5$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι: $f(x^5) = f^5(x)$ για κάθε $x \in R$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $(f \circ g)(x)=x^2-3x+4$ για κάθε $x \in R$ και $(g \circ f)(2)=2$. Να δείξετε ότι οι C_f , C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

συναρτησιακές σχέσεις

42. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g: R→R με την ιδιότητα:
α) $f(1-x) + f(x) = x^3+2$ για κάθε $x \in R$.
β) g(x) + g(3-x) = x+1 για κάθε $x \in R$.

43. Να βρείτε τη συνάρτηση f: A→R αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:
α) 2f(x) + 3f(-x) = 4x + 5, A = R
β) 2f(x) + 3f(1-x) = 4x + 5, A = R
γ) f(x) + 2f(3-x) = 2x - 1, A = R
δ) $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, $A = R^*$
ε) $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\ln x$, $A = (0, +\infty)$.

44. Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο R^* η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $xf(x)+2f\left(\frac{-1}{x}\right)=3$.

45. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει:
$f(x-1) - 2f(3-x)= x^2+1$, για κάθε $x \in R$.
i) Να δείξετε ότι:
α) $f(x) - 2f(2-x)= x^2 + 2x +2$
β) $f(2-x) -2f(x) = x^2 - 6x +10$
ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

46. Μια συνάρτηση f: R→R έχει την ιδιότητα:
$3f(x+1) - 2f(2-x) = x^2 + 14x - 5$, για κάθε $x \in R$.
α) Να βρεθεί ο τύπος της f.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της $g(x)=f(x-2)+1$, $x\in R$.

47.Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει:
$f^2(x^2 - 4x +3) + 2f(x^2 - 3x +2) + 1 = 0$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

48.Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $f(x^2) + f(2x) = 0$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

49.Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $f(f(x))=3x+4$ για κάθε $x\in R$.
α) Να βρεθεί το $f(-2)$
β) Να δείξετε ότι: $f(3x+4) = 3f(x) + 4$ για κάθε $x\in R$.

50.Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $f(f(x))=3x-2$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(3x-2) = 3f(x) - 2$ για κάθε $x\in R$.
β) Η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

51.Για τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ ισχύει: $f\left(\frac{x}{e}\right) \le \ln x \le f(x) - 1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στη C_f και να βρείτε τον τύπο της f.

52.Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f: R\to R$ με την ιδιότητα:
$f(x) - x \le x^2 \le f(x-1) + x$, για κάθε $x\in R$.

53.Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο R, η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση: $\alpha f(x)+\beta f(1-x)= x$ με $\alpha+\beta\neq 0$. Να δείξετε ότι:
α) $f(x) + f(1-x) = \dfrac{1}{\alpha+\beta}$, για κάθε $x\in R$.
β) $f(x) = \dfrac{x}{\alpha-\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}$, για κάθε $x\in R$ όταν $\alpha\neq\beta$.

54.Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x\in R$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=1$ β) $f(-\alpha) = \dfrac{1}{f(\alpha)}$ γ) $f(2x) =f^2(x)$ δ) $f^3(x) = f(3x)$

55.Έστω συνάρτηση f: $(0, +\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:
$f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y\in(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι:

α) $f(1)=0$
β) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
γ) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
δ) $f(x^3) = 3f(x)$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

☞ **μελέτη μονοτονίας συνάρτησης με τη βοήθεια του ορισμού**

56.Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3 + 2\sqrt{x-1}$
ii) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x-2}$
iii) $f(x) = x^3 + 5x - 2$
iv) $f(x) = -x^3 - 3x + 2$
v) $f(x) = 3e^{x-2} - 1$
vi) $f(x) = 2 - 3\ln x$
vii) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
viii) $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$

57.Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ, να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f + g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ
β) αν $g(\Delta)\subseteq\Delta$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ
γ) αν $f(x)\geq 0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

58.Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f - g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ
β) αν $g(\Delta)\subseteq\Delta$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ
γ) αν $f(x)\geq 0$ και $g(x)> 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

59.Έστω οι συναρτήσεις f, g: $R\to R$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

60.Έστω η συνάρτηση f: R→R η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση g(x) = f(3x-2) - f(1-2x), x∈R. Να εξετάσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

☞ μονοτονία και άτοπο

61.Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει: $f^3(x) + e^{f(x)} + 1 = x$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

62.Έστω οι συναρτήσεις f, g: R→R για τις οποίες ισχύει: $f(x) + e^{f(x)} = g(x)$ για κάθε x∈R. Αν η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

63.Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει: $f(2^x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ για κάθε x∈R.

64.Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{2^{f(x)}}$, x>0. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

65.Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει: $f(x) + e^{f(x)} + x^3 = 0$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στοR.

66.Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 3f(x) = 2x$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

67.Αν για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = -x+1$ για κάθε x∈R, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

68.Έστω οι συναρτήσεις f, g: R→R για τις οποίες ισχύει: (f+g)(x) = ημx για κάθε x∈R. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα.

69.Έστω f με πεδίο ορισμού το A με f(x)>0 για κάθε A. Αν για την f ισχύει: ln(f(x))+f(x)+x=0 για κάθε x∈A, να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

70.Έστω ότι για τη συνάρτηση f: R→R ισχύει: $f(f(x))+x^3=0$, για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

☞ **λύση ανισώσεων**

71. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R και η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία Α(1, 5) και Β(5, -2).
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R
β) Να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(e^x)) < -2$.

72. Έστω η συνάρτηση f: $R\to R$ με $f(x) = x^3 + x + 2$.
α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) > 12$.
γ) Να δείξετε ότι: $f(2x) + f(1) < f(3x) + f(e^x)$ για κάθε $x > 0$.

73. Έστω οι συναρτήσεις f, g: $R\to R$ για τις οποίες ισχύει: $(f\circ g)(x)=x$ για κάθε $x\in R$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λυθεί η ανίσωση: $g\big(2f(10-4x)-f(x)\big) > x$.

74. Έστω οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις f, g: $R\to R$. Η C_f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον άξονα y'y στο Α(0, -1). Η C_g τέμνει τον άξονα x'x στο -1 και τον θετικό ημιάξονα Oy.
i) Να βρείτε τη μονοτονία των f, g.
ii) Να λύσετε την ανίσωση: $g(f(x^2)) < 0$.

75. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g: $R\to R$ με την f γνησίως φθίνουσα, τη g γνησίως αύξουσα και $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x\in R$.
i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^3)g(2x) - f(2x)g(x^3) < 0$.

76. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση f : $R\to R$ της οποίας η γραφική παράσταση περνά από τα σημεία Α(2, -1) και Β(5,2).
Να λύσετε την ανίσωση: $f^2(x) \le f(x) + 2$.

77. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x^2-4} - x + 2 > e^{x-2} - x^2 + 4$.
γ) Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση: $g(e^x) > g(1- x)$.

☞ **<u>μελέτη προσήμου</u>**

μπορούμε να βρούμε το πρόσημο μιας συνάρτησης f, αν ξέρουμε:

- **τη μονοτονία της και**
- **μία ρίζα της**

π.χ.

Έστω f $\uparrow$ στο R και f(1)=0, τότε:

- **$x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$**
- **$x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	-		+

78.Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^x + x - 1$ β) $f(x) = x^5 + x^3 + x - 3$

γ) $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ δ) $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$

79.Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 1$, $x > 0$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

β) Αν $1 < \alpha < e < \beta$, να δείξετε ότι: $f(\ln\alpha)f(\ln\beta) < 0$.

80.Έστω η συνάρτηση $f(x) = - x - x^3 - \ln x + 2$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 0$

γ) Αν $1 < \alpha < e < \beta$, να δείξετε ότι: $f(\ln\alpha)f(\ln\beta) < 0$.

81.Έστω η συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to R$ με f(0)=0, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{\ln(x+1)}$, x>0. Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

82.Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$ με f(0)=0, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$, $x \in R^*$. Να δείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in R^*$.

83.Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, ν.δ.ο. για τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(3x+1) - f(x+1)}{2x}$, ισχύει: $h(x)<0$ για κάθε $x \in R^*$.

☞ **λύση εξίσωσης με τη βοήθεια της μονοτονίας**

ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει <u>το πολύ μία</u> ρίζα.

84.Έστω η συνάρτηση f: R→R η οποία είναι γνησίως μονότονη και ισχύει η σχέση: f(x) = - f(4-x) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα.

85.Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει η σχέση: f(2-x) + f(x+4) = 0 για κάθε x∈R. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να λύσετε:
α) την εξίσωση: f(x)=0
β) την ανίσωση: $f(x^2-5) > 0$.

86.Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση f: R→R με την ιδιότητα: f(4-x)+f(2+x)=0 και f(1)>f(2). Να λυθεί:
α) η εξίσωση: f(x)=0 β) η ανίσωση: $f(x^2-6)>0$.

87.Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$, x∈R.
α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
β) Να λύσετε την εξίσωση: f(x)= 3.
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $2^x(x+3) > 1$.

88.Έστω η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to R$ για την οποία ισχύει η σχέση: f(x - lnx) + f(x - 1) = lnx + 3 για κάθε x>0. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να λύσετε:
α) την εξίσωση: f(x)=2
β) την ανίσωση: $f(e^x - 1) < 2$.

89.Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = 5 - x - x^3$ και $g(x)= 4 + x + 10^x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

☞ **γενικές ασκήσεις**

90.Έστω f με πεδίο ορισμού το R με f(x)>1 για κάθε x∈R. Αν για την f ισχύει: $f^3(x)-3f(x)-x=0$ για κάθε x∈R, να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία. Κατόπιν να λυθεί η ανίσωση: f(f(x))>2.

91.Έστω f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει: $f^3(x)+3f(x)=4e^x$ για κάθε x∈R. Να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία. Κατόπιν να λυθεί η ανίσωση: $f(f(x)-1)\leq 1$.

92.α) Έστω συνάρτηση f: A→R. Αν η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα A, να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο A.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)= $\sqrt{x}$ lnx + 2 - $\sqrt{x}$ - 2lnx δεν είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$.$(0, +\infty)$

93.Η συνάρτηση f: R→R είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(0, 2) και Β(2, 0).
α) Να λυθεί η εξίσωση: f(2x+3) + f(x+1) = f(5-3x) + f(6-x).
β) Να λυθεί η ανίσωση: f(2x+3) + f(x+1) < f(5-3x) + f(6-x).

94.Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση g: R→R για την οποία ισχύει: $g\left(\frac{g(x)+2014x}{2015}\right)$ = x για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι g(x) = x, για κάθε x∈R.

ακρότατα

95.Δίνονται οι συναρτήσεις: f(x)= x^2-2x+2 και g(x) = $\frac{2x}{x^2+1}$.
α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
β) Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο x_0 = 1.
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

96.Δίνονται οι συναρτήσεις: f(x)= $\frac{10x}{x^2+25}$ και g(x) = 1+ $|x-5|$
α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=5.
β) Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 1.
γ) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

97.Έστω συναρτήσεις f,g: R→R τέτοιες ώστε:
g(x) = $f^2(x)$ - 2x f(x) + x^2 + 7 για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:
α) g(x) $\geq$ 7 για κάθε x∈R
β) Αν η ευθεία με εξίσωση y = x τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο, τότε η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

98.Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει η σχέση:
2f(x) $\leq$ f(1) + f(2) για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι:
i) f(1) = f(2)
ii) Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

99.Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $\frac{4}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
α) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 2.

β) Να βρείτε τις τιμές των α, β∈R αν ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha+5}}+\frac{1}{\sqrt{\beta^2-2\beta+5}}=1.$$

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= e^x + e^{-x}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i) $f(0) = 2$
ii) $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in R$
iii) Η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2.
β) Να βρείτε τις τιμές των α, β∈R αν ισχύει: $f(\alpha) + f(\beta) = 4$.

άρτια - περιττή

101. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{9-x^2}}$ β) $f(x) = \dfrac{\alpha^x+1}{\alpha^x-1}$

γ) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ δ) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

102. Έστω οι συναρτήσεις $f,g: R\to R$. Να δείξετε ότι:
α) Αν η f είναι άρτια, τότε και η $g\circ f$ είναι άρτια.
β) Αν η f είναι περιττή και η g άρτια, τότε η $g\circ f$ είναι άρτια.
γ) Αν οι f, g είναι περιττές, τότε και η $g\circ f$ είναι περιττή.

103. Δύο συναρτήσεις $f,g: R\to R$ έχουν την ιδιότητα:
α) $f^2(x)=f(x)f(-x)$ β) $g^2(x)=-g(x)g(-x)$ για κάθε $x\in R$.
Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

104. Μια συνάρτηση $f: R\to R$ έχει την ιδιότητα: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=0$ β) η f είναι περιττή
γ) $f(x-y)=f(x)-f(y)$, για κάθε $x, y\in R$.
δ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

105. Μια συνάρτηση $f: R\to R$ έχει την ιδιότητα:
$x\left[f(x)+f(-x)+2\right]+2f(-x)=0$, για κάθε $x\in R$.
i) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
ii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

106. Έστω ότι για τη μη μηδενική συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει:

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=1$
β) η f είναι άρτια συνάρτηση.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 - 1

☞ 1-1 συνάρτηση με γνωστό τύπο

107. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1
α) $f(x) = 1- \sqrt{3-2x}$ β) $f(x) = 2\ln x + 3$
γ) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$ δ) $f(x) = \dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

108. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι 1-1
α) $f(x) = x^2 -1$ β) $f(x) = \ln(1+|x|)$
γ) $f(x) = x^{2013} - x^{2012} + 2$ δ) $f(x) = (e^x-1)(x-2)+2015$

109. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 2x + 1$, $\alpha \in R$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.
β) Να δείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + x^2 + \alpha x -2$ δεν είναι 1-1.

☞ 1-1 και σύνθετη συνάρτηση ή συναρτησιακή σχέση

110. α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1, να δείξετε ότι και οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ είναι 1-1.
β) Αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1, τότε και η f είναι 1-1.

111. Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει: $f(f(x)) = f(x)+2014x$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι:
α) η f είναι 1-1 β) να βρείτε το $f(0)$.

112. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f: R \to R$ για κάθε $x \in R$ ισχύει:
$\alpha f(f(x)) + \beta f(x) + \gamma x = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

113. Έστω οι συναρτήσεις $f,g: R \to R$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, η συνάρτηση g είναι 1-1 και $f(f(x)) = \ln f(x) + g^3(e^x)$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

114. Έστω οι συναρτήσεις $f,g: R \to R$ για τις οποίες ισχύει:
$g(f(x)) = 2x^5 + e^{f(x)} +1$, $x \in R$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

115. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι 1-1 σε καθεμία από τις

παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(f\circ f)(x) = x$, για κάθε $x\in R$

β) $(f\circ f)(x) - 2f(x) + 3x = 0$, για κάθε $x\in R$

γ) $(f\circ f)(x) + f^3(x) = (x+2)^3$, για κάθε $x\in R$.

116. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να είναι 1-1 και να ικανοποιεί την αντίστοιχη σχέση

α) $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$, για κάθε $x\in R$

β) $f(x^2+x+1) + f^2(2x+1) \leq -\frac{1}{4}$, για κάθε $x\in R$

γ) $f(x) + f(x-1) = x^2 - 3x + 3$, για κάθε $x\in R$.

δ) $f^2(x)\leq f(x)f(1-x)$, για κάθε $x\in R$.

117. Αν για τη συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει: $f(f(x)) =x^2-3x+4$, για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι:

α) $f(2)=2$ β) η $g(x)=x^2-xf(x)+4$ δεν είναι ¨1-1¨.

118. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$f(f(x)) + f(x) = -\frac{1}{4}x$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1

β) αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.

119. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει:

$x^3 + f(x) + e^{f(x)} = 0$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1

β) η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα.

120. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))=-x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1-1

β) η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ) η f είναι περιττή

δ) $f(0) = 0$.

☞ συνάρτηση 1-1 και λύση εξισώσεων

121. Έστω η 1-1 συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(1) =1$. Να βρείτε τα κοινά σημεία με τους άξονες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f(x^2+x+1) -1$.

122. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : R \to R$ της οποίας η γραφική παράσταση περνά από τα σημεία Α(3, 2) και Β(5,9).
α) Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $f(x^2-1) = 2$ ii) $f^{\,2}(x) - 11f(x) + 18 = 0$
β) Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $f(x^2+1) < 9$ ii) $f^{\,2}(x) - 11f(x) + 18 < 0$.

123. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : R \to R$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: R \to R$ με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει:
$f(\lambda^2-3\lambda) - f(2\lambda-6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

124. Αν $f(f(x))=\ln x+1$ για κάθε $x>0$, να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $f(e^x)=f(x+1)$.

125. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = e^x + x$.
i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $f(f(x))= e^{x+1} + e + 1$
β) $e^{x^2-4} - e^{3x} = 3x - x^2 + 4$.
iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $g(0, +\infty) \to R$ αν ισχύει:
$f(g(x))= x + \ln x$, για κάθε $x>0$.

126. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to R$ με $f(x) = \ln x + x^3 - 1$.
i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.
iii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha>0$, αν: $f(f(\alpha)) = f(e^3)$.

127. Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει: $|f(x) - f(y)| \geq \kappa|x - y|$ με $\kappa > 2$, να δείξετε ότι:
α) η f είναι 1-1
β) Η εξίσωση: $f(f(x)) = 2x$ έχει το πολύ μία λύση.

☞ **γενικές ασκήσεις**

128. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει: $f(f(x))=x$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g(x) = e^x + e^{f(x)}$ η οποία είναι 1-1.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
β) Να δείξετε ότι: $(g \circ f)(x) = g(x)$.
γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f.

129. Έστω συνάρτηση f: R→R τέτοια ώστε: $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε x, $y\in R$. Να δείξετε ότι:
α) f(0)=1
β) f(x)f(-x) = 1 για κάθε $x\in R$
γ) αν η εξίσωση f(x) = 1 έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι 1-1.

130. Αν η συνάρτηση f: R→R είναι 1-1 και για κάθε x, $y\in R$ ισχύει: $f(x+f(y)) = f(x+y) + 2$, να δείξετε ότι: f(x) = x + 2.

131. Έστω συνάρτηση $f:(0, +\infty)\to(0, +\infty)$ τέτοια ώστε: f(f(x))=xf(x).
Να δείξετε ότι:
α) η f είναι 1-1
β) f(1) = 1
γ) $f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x$, για κάθε $x\in(0, +\infty)$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

☞ Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης με γνωστό τύπο

132. Να βρεθούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ ii) $f(x)=3+\sqrt{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$
iv) $f(x)=2e^{x}-3$ v) $f(x)=1-3e^{2-x}$ vi) f(x)= 2lnx - 1
vii) f(x)=ln(3-x) viii) $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ ix) $f(x)=\frac{2e^{x}-1}{e^{x}-1}$

133. Να δείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της
α) $f(x)= 1 - \ln(1 + e^{x})$ β) $f(x)= \ln\sqrt{e^{3x}+2}$
γ) $f(x)= 1 - \sqrt{1-e^{x}}$ δ) $f(x)= \ln\frac{e^{x}+1}{1-e^{x}}$

134. Αν $f(x)=\frac{x}{x-1}$, να βρεθεί συνάρτηση g ώστε: $f^{-1}(g(x))=f(x)$.

135. Αν $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και g(x)=x+2, να βρεθούν οι συναρτήσεις: $(f^{-1}\circ g)^{-1}$ και $g^{-1}\circ f$.

136. Να δείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

α) $f(x)= x^3 + 1$ β) $f(x)= \frac{2x^3-1}{5}$

137. Να δείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της
α) $f(x)= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ β) $f(x)= \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

☞ Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης με συναρτησιακή σχέση

138. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = x + 2$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

139. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = f(x) + 2x$ για κάθε $x\in R$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x) = \frac{f(x)-x}{2}$.
β) Αν επιπλέον ισχύει: $f(2) = 4$, να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f^{-1}(8)$.

140. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 5f(x) = x + 6$ για κάθε $x\in R$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.
γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες x'x και y'y.
ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^3) < x$.

141. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ η οποία έχει σύνολο τιμών το R και ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = x$ για κάθε $x\in R$.
α) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη f^{-1}.
γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f^2(x) \le f(x)$.

☞ αντίστροφη συνάρτηση και λύση εξισώσεων - ανισώσεων

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2-x-\ln x$.
i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
ii) Να λυθεί η ανίσωση: $x+\ln x >1$.

143. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{e}{x}+x$ αντιστρέφεται.

Κατόπιν να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x)=x$.

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x$.
   i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
   ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x)=1-x$.
   iii) Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(x) \le 1-x$.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$.
   i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
   ii) Να βρείτε το $f^{-1}(4)$.
   iii) Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x)=12$, $f^{-1}(x)=-2$.
   iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες καθώς και με την ευθεία $y=x$.
   v) Να λύσετε την εξίσωση: $(2-ημ^2x)^3=ημ^3x+ημ^2x+ημx-2$.
   vi) Να λύσετε τις ανισώσεις: $f^{-1}(x)<3$, $f^{-1}(x+1)\ge x+5$.

146. Έστω ότι η γνησίως μονότονη συνάρτηση f περνά από τα σημεία Α(1,2) και Β(3,0). Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(f(x^2+2x)+2\right)=1$.

147. Έστω ότι η γνησίως μονότονη συνάρτηση f περνά από τα σημεία Α(-1,3) και Β(1,2). Να λυθεί η ανίσωση: $f\left(f(e^x-2)-2\right)>2$.

148. Η συνάρτηση $f: R\to R$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1, 5) και Β(3, 8).
   α) Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}\left(f(x^2-3x-3)+3\right)=1$.
   β) Να λυθεί η ανίσωση: $f\left[2+f^{-1}\left(\dfrac{2x+10}{x-1}\right)\right]\le 8$.

149. Έστω f ορισμένη στο R συνάρτηση 1-1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(\ln x+2)+1$ είναι 1-1 και να βρεθεί η g^{-1} συναρτήσει της f^{-1}. Αν επιπλέον η C_f περνά από το σημείο Α(2,1), να λυθεί η εξίσωση: $g^{-1}(x)=1$.

150. Δίνεται ότι: $\ln(xf(x))=f(x)$ για κάθε $x<0$.
   α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.
   β) Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{e}\, f^{-1}(x)=-2$.
   γ) Να λυθεί η ανίσωση: $2f(x)+1<0$.

151. Έστω η συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύουν:
   $(f\circ f)(x)+x=2f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(3)=5$.
   α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την τιμή $f^{-1}(3)$.

β) Αν f(R) = R, να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = 5$.

152. Μία συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη: $(f\circ f)(x)= 9x - 16$, για κάθε $x\in R$ και $f(1) = -1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη .
β) Να βρείτε το $f^{-1}(1)$ και να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $f^{-1}(x) = -1$ ii) $f\left(f^{-1}(x)+\frac{8}{3}\right)=1$.

153. Έστω η συνάρτηση f: $R\to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = e^x$ για κάθε $x\in R$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) = \ln f(x)$.
β) Να δείξετε ότι: $f(e^x) = e^{f(x)}$, $x\in R$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση: $[f(f(x))]^2 + f^{-1}(e^{f(x)}) = 6$.

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και $f^{-1}(0) = 0$.
β) Να μελετήσετε τη θέση της C_f ως προς τον άξονα x'x.
γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(5x) = f(3x) + f(7x)$.
δ) Αν $αβ < 0$, να δείξετε ότι: $f(α)f(β) < 0$.

κοινά σημεία C_f και $C_{f^{-1}}$ ($f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$, όταν f $\uparrow$)

πρόταση

155. Έστω η συνάρτηση f: $A\to R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:
α) η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
β) Οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $B = A \cap f(A)$.

εφαρμογές

156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

157. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x - 27$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

158. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 5$ με σύνολο τιμών f(R) = R.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να δείξετε ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο M(-4, 0).

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^2-4} - e^{x-2} = x + 2 - x^2$.
δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}\left(f(e^x - 1) - e\right) < 0$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$.
α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(1 + f^{-1}(x)\right) = 1$.
δ) Να δείξετε ότι: $f^{-1}(0) < 0$.

☞ **θεωρητικές ασκήσεις**

160. Έστω η συνάρτηση f: R→R η οποία είναι περιττή και αντιστρέψιμη. Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή.
(Τι γίνεται αν η f είναι άρτια;)

161. Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει:
$(f\circ f)(x) = x - 1$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
α) η f είναι 1-1.
β) $f^{-1}(x) = 1 + f(x)$
γ) η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

162. Έστω η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει:
$(f\circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι:
α) η f αντιστρέφεται
β) $f(0) = 0$
γ) $f(x) = x + f^{-1}(x)$.

163. Έστω f ορισμένη στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(0)=1$ β) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, $x\in R$ γ) $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$
δ) Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει: $f^{-1}(\alpha\beta)= f^{-1}(\alpha)+ f^{-1}(\beta)$.

164. Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(xy)=f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y\in R$. Να δείξετε ότι:
α) $f(1)=0$
β) $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$
γ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1, τότε η f είναι

αντιστρέψιμη και ισχύει: $f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha)\, f^{-1}(\beta)$.

165. Έστω ότι για τη συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$ ισχύει: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)-f(y)$, για κάθε x, y>0. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα, τότε:
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+3)+f(x)=f(x^2+1)+f(x+1)$.
γ) Αν επιπλέον ισχύει: f(x)>0 για κάθε x>1, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.