ΟΡΙΣΜΟΣ

Αρχική (ή παράγουσα) της **f** που ορίζεται στο **διάστημα** Δ λέγεται κάθε συνάρτηση **F** που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: **F '(x) = f(x)**, για κάθε $x \in \Delta$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln\lvert x\rvert + c,\ c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$G(x) = \sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c,\ c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c,\ c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x) = \varepsilon\varphi x + c,\ c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma\varphi x + c,\ c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$
11	$f(x) = \alpha^x$	$G(x) = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c,\ c \in \mathbb{R}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$\kappa(x)=f'(x)+g'(x)$	$K(x)=f(x)+g(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
2	$\kappa(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	$K(x)=f(x)\cdot g(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$\kappa(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$K(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$\kappa(x)=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$	$K(x)=g\left(f(x)\right)+c,\ c\in\mathbb{R}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3

Α/Α	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$g(x)=f'(x)$	$G(x)=f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
2	$g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$G(x)=\ln\lvert f(x)\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$g(x)=f^{\alpha}(x)\cdot f'(x),\ \alpha\neq-1$	$G(x)=\dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$g(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$G(x)=\sqrt{f(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$
5	$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$	$G(x)=\eta\mu f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
6	$g(x)=\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
7	$g(x)=\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$	$G(x)=\varepsilon\varphi f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$g(x)=\dfrac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$	$G(x)=-\sigma\varphi f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$g(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$	$G(x)=e^{f(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$g(x)=\alpha^{f(x)}\cdot f'(x)$	$G(x)=\dfrac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}+c,\ c\in\mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η F είναι μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ. Τότε:

- Η συνάρτηση $G(x)=F(x)+c$, με $c\in R$ σταθερά, είναι παράγουσα της f στο Δ
- Κάθε παράγουσα G της f στο Δ, έχει τη μορφή: $G(x)=F(x)+c$, με $c\in R$ σταθερά

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Αν F, G είναι παράγουσες των f και g αντίστοιχα στο διάστημα Δ, τότε:
α) η λFείναι παράγουσα της λf στο Δ
β) η κF + λG είναι παράγουσα της κf + λg στο Δ με $\kappa, \lambda\in R^*$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

   α) $f(x) = x^3$ β) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$

   γ) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ δ) $f(x) = x\sqrt{x}$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

   α) $f(x) = x^2+2\eta\mu x-3$ β) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3e^{-x} + 2^x$

   γ) $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x} - x + 1}{x^2}$ δ) $f(x) = \dfrac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

   α) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ β) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

   γ) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}$

   ε) $f(x) = x e^{x^2+1}$ στ) $f(x)=e^x \cdot \sigma\upsilon\nu(e^x+1)$

   ζ) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)^{99}$ η) $f(x) = x(3x^2-1)^{10}$

4. Να βρεθούν οι τιμές των α, $\beta\in R$ για τις οποίες η συνάρτηση $F(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ είναι μία παράγουσα της $f(x) = (-3x + 7)e^{-x}$.

5. α) Να βρεθούν οι α, $\beta\in R$ έτσι ώστε η $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x)e^{x^2}$ να είναι αρχική της $f(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2}$ για κάθε $x\in R$.

   β) Να βρεθεί ο τύπος της παραγωγίσιμης στο $(0, +\infty)$ συνάρτησης

$g(x)$ όταν: $\dfrac{g'(x)}{2x^2+1} = e^{x^2-g(x)}$ για κάθε $x > 0$ και $g(1) = 1$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5}{2}x\cdot\sqrt{x+2}$ με $x\in(-2, +\infty)$. Να βρείτε τις τιμές των α, β$\in$R ώστε η συνάρτηση $F(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)\sqrt{x+2}$ να είναι αρχική της f στο $(-2, +\infty)$.

7. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ και F αρχική της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε να ισχύει: $xf(x) = (x + 1)F(x)$ για κάθε $x > 0$ και $F(1) = e$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

8. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ και F αρχική της f στο R, τέτοια ώστε να ισχύει: $F(x) + f(x) = 2x\cdot e^{-x}$ για κάθε $x\in R$ και $F(0) = 0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

9. α) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu x + x^2 > 1$ για κάθε $x > 0$.
   β) Έστω F μία αρχική της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \to R$ με
   $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$.
   i) Να μελετήσετε τη μονοτονία της: $g(x) = F(x) - \ln x + \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$.
   ii) Να δείξετε ότι: $F\left(\dfrac{e}{2}\right) - F(e) < \dfrac{27}{8} - \ln 2$.

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ και F μια αρχική της. Αν $f(1)=2$ και για κάθε $x\in R$ είναι: $f(x) = 2xe^{x^2-F(x)}$, να βρεθεί η f.

11. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(x) = -e^{-2x}$ για κάθε $x\in R$. Αν $f(0) = 1$, να βρεθεί η f.

12. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε: $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, $x\in R$.
    α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο της μορφής:
    $f(x) = xe^{-x} + c$ για κάθε $x\in R$, όπου $c\in R$.
    β) Αν η ευθεία $y = 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε τον τύπο της f.

13. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ και F μια αρχική της με $F''(x) \neq 0$ για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει: $F(x) = F(2-x)$ για κάθε $x\in R$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

14. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R $\to$ R. Να βρείτε την παράγουσα F της f στο R, για την οποία ισχύει: $2f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}F(x)$ για κάθε $x \in R$ και F(0) = 1.

15. Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R $\to$ R και F μια αρχική της. Αν f(1)=1 και f(x)F(2-x)=1 για κάθε $x \in R$:
α) Να δείξετε ότι: f(2-x)F(x)=1 για κάθε $x \in R$.
β) Να δείξετε ότι: F(2-x)F(x)=1 για κάθε $x \in R$.
γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

16. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:
α) $f(x) = 2|x| + 1$ β) $f(x) = 3x|x| + 2$

17. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα.

18. Έστω συνάρτηση f: R $\to$ R η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε: $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in R$. Να δείξετε ότι:
α) η συνάρτηση g(x) = f(x) - x, $x \in R$ είναι γνησίως μονότονη.
β) Αν επιπλέον ισχύει: f(1) = f(2), τότε κάθε παράγουσα συνάρτηση της g είναι κοίλη.

19. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{7A}{2} \cdot e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t), από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή , δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \dfrac{A}{4} \cdot e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0.
Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο, καθώς και η συνάρτηση K(t).