

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**1.1 – Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς****A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους**

1. Αν $x + y = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
 - α) $A = 2x + 4y + 2(2x + y)$
 - β) $B = 4(x - y) - 2(x - 3y)$
 - γ) $\Gamma = -3(x + 2y) - (x - 2y)$
 - δ) $\Delta = 5(x - 3) + 2(y - x) - (-5 - y)$

2. Αν $x - y = -2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:
 - α) $A = 3(2x - 5y) - 2(x - 6y) - y$
 - β) $B = -3(x + 2y) - (x - 2y)$
 - γ) $\Gamma = -(-x - 7y) + 4(y - 2\omega) - 4(x + 2y - 2\omega)$

3. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = -2(\beta - 2\alpha + 1) - 3(1 - 2\beta)$.

4. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και οι αριθμοί x, y αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = 2(1 - \alpha) - x(2 - y) + 2(x - \beta + 1)$.

5. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\gamma + \delta = -4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{4(\alpha - \beta) - 2(\alpha - 3\beta)}{3(2\gamma - \delta) - (\gamma - 8\delta)}$$
.

6. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:
 - α) $3(1 - 2x) + 2(y + x - 1) - 2(y - 2x) = 1$
 - β) $2(xy - 1) - x(2y - 3) - 3(x - 1) = 1$
 - γ) $2(x + y) - [1 + y - 2(y - x)] - 3(y - 1) = 2$

B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $3^7 \cdot 3^{-5}$	β) $3^{11} : 3^9$	γ) $7^{21} : 7^{19}$
δ) $2^{-5} : 2^{-10}$	ε) $\frac{12^4}{6^4}$	στ) $\frac{5^{-3}}{15^{-3}}$
ζ) $5^3 \cdot 5^4 \cdot 5^{-5}$	η) $\frac{3^6 \cdot 3^4}{3^7}$	θ) $\frac{2^5 \cdot 2^8}{2^3 \cdot 2^6}$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) 10^7 \cdot 10^{-4} & \beta) 10^{-2} : 10^{-5} & \gamma) (10^{-3})^{-4} : 10^7 \\ \delta) 10^5 : (10^{-4})^{-2} & \epsilon) 10^5 : (10^4 \cdot 10^3) & \sigma\tau) (10^5 : 10^4) \cdot 10^3 \end{array}$$

9. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{lll} \alpha) 4^6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 & \beta) (2^3)^4 : 2^7 & \gamma) (7^{-2})^{-3} : 7^5 \\ \delta) (5^4 : 5)^2 \cdot 5^{-4} & \epsilon) \frac{2^{15} : (2^3 \cdot 2^4)}{(2^{-3})^{-1}} & \sigma\tau) \frac{(3^2 \cdot 3^3)^4}{(3 \cdot 3^5)^3} \end{array}$$

10. Να γράψετε ως μία δύναμη καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha) x^6 \cdot x^3 \cdot x & \beta) y \cdot \frac{1}{y^2} \cdot y^5 \\ \gamma) (x^2 \cdot x)^4 & \delta) (x^3 : x^7)^{-2} \\ \epsilon) (x^{-1} \cdot x^{-2})^{-3} & \sigma\tau) (x^{-2} \cdot x^3) : x^4 \\ \zeta) \frac{x^2 \cdot x^{-2}}{x^3} & \eta) (x^6 \cdot x^3 \cdot x) \cdot (x^{-3} : x^2) \end{array}$$

11. Αν $xy = -2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = (x^2 \cdot y^{-1})^3 \cdot (x^{-1} \cdot y^3)^2 \cdot y$$

$$B = (x \cdot y^2)^3 \cdot (x^3 \cdot y^{-1})^2 \cdot x^{-5}$$

12. Αν $x^2y = -3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{[(x^{-2})^3 \cdot y^4]^2}{(x^{-8})^2 \cdot (y^{-3})^{-2}}$$

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{50} = 3\sqrt{2}$$

$$\beta) \sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{48} = 0$$

$$\gamma) 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{50} = 10\sqrt{2}$$

$$\delta) \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\epsilon) \sqrt{300} - 3\sqrt{48} + \sqrt{27} = \sqrt{3}$$

14. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{12}) & \beta) B &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}) \\ \gamma) \Gamma &= (\sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} & \delta) \Delta &= \frac{\sqrt{32} + \sqrt{50} + \sqrt{98}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

15. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) & \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 4) - 2 \cdot (1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \\ \beta) & (3\sqrt{2} + 2)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) - (3\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

16. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \beta) \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \gamma) \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \delta) \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad \epsilon) \frac{3}{\sqrt{27}} \quad \sigma\tau) \frac{2}{\sqrt{32}}$$

17. α) Να αποδείξετε ότι: $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 4$

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

18. α) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i) } 2\sqrt{3} + x = 8\sqrt{3} - x \quad \text{ii) } y + \sqrt{8} = \sqrt{50}$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{x \cdot y \cdot \sqrt{6}}$

19. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ και $B = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $A \cdot B$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Gamma = \sqrt{A \cdot B \cdot \sqrt{8}}$

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

A. Μονώνυμα

20. Να βρείτε το μονώνυμο που είναι:

- α) αντίθετο από το $-2x^2y$
β) όμοιο με το $-x^2y$ και έχει συντελεστή 3.

21. Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή -4 και μεταβλητές x και y . Να βρείτε το μονώνυμο όταν αυτό είναι:

- α) 2ου βαθμού ως προς x και 3ου βαθμού ως προς y
β) 1ου βαθμού ως προς x και 4ου βαθμού ως προς y

γ) 3ου βαθμού ως προς x και 8ου βαθμού ως προς x και y.

22. Τα μονώνυμα $-2x^{7-3\lambda}y^{2\mu+5}$ και $3x^4y^3$ είναι όμοια. Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

23. Δίνεται το μονώνυμο $2x^{2\lambda-5}y^3$. Να βρείτε τον αριθμό λ, ώστε το μονώνυμο:

α) να είναι 3ου βαθμού ως προς x ,

β) να είναι 4ου βαθμού ως προς x και y.

24. Δίνονται τα μονώνυμα: $(\alpha - 4)x^3y^5$ και $5x^{\lambda-1}y^{2\mu-3}$. Να βρείτε τους αριθμούς α, λ και μ ώστε τα μονώνυμα να είναι:

α) όμοια β) ίσα γ) αντίθετα.

B. Πράξεις με μονώνυμα πρόσθεση

25. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x^2 + 3x^2$

β) $5y^3 - 6y^3$

γ) $3x^2y + 3x^2y$

δ) $2\alpha^2\beta + \alpha^2\beta$

ε) $xy^3 - 2xy^3$

στ) $-2\alpha^3\beta^2 + 2\alpha^3\beta^2$

26. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $5x^2 - 3x^2 + x^2$

β) $-5\alpha^2\beta + 3\alpha^2\beta - \alpha^2\beta$

γ) $-x^2y + 2x^2y - 3x^2y$

δ) $3xy^2 - 5xy^2 + 2xy^2$

ε) $-2\alpha^3\beta^2\gamma + 4\alpha^3\beta^2\gamma - \alpha^3\beta^2\gamma$

στ) $5\sqrt{3}\alpha^2\beta - \sqrt{3}\alpha^2\beta + 3\sqrt{3}\alpha^2\beta$

πολλαπλασιασμός

27. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x^3 \cdot 3x^2$

β) $-5x^2 \cdot 2x$

γ) $-2x \cdot (-x^2)$

δ) $-\frac{3}{2}x^2 \cdot (-4x)$

ε) $\sqrt{2}x^2 \cdot (-3x)$

στ) $\sqrt{8}x^2 \cdot (-\sqrt{2}x^2)$

28. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x^3y \cdot (-3x^2y^3)$

β) $(-3x^2y) \cdot (-2xy^3)$

γ) $(-2xy^2z^3) \cdot (-x^2yz)$

δ) $(-\frac{2}{3}xy^2z) \cdot (-6x^2yz)$

ε) $3x \cdot (-2x^3) \cdot 5x^2$

στ) $2x^3 \cdot (-2x) \cdot (-4x^2)$

29. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x^3 \cdot (3x^2)^2$

β) $(-2x^2)^3 \cdot (3x^3)^2$

γ) $(-x^2y)^2 \cdot (-xy^2)$

δ) $(-2x^2y)^3 \cdot (-xy^2)^2$

διαίρεση

30. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $6x^4 : 3x$ β) $12x^4 : (-3x^3)$ γ) $-6x^5 : 2x^3$
 δ) $9x^3 : (-3x^4)$ ε) $(-2x^5) : (-4x^7)$ στ) $\frac{3}{4}x^2 : \left(-\frac{2}{3}x^2\right)$

31. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-6x^4y^2 : 3xy$ β) $-12xy^3 : 4xy^4$
 γ) $(-8xy^4) : (-2x^3y^4)$ δ) $16x^4y^3\omega^2 : (-8xy^2\omega^3)$

32. Δίνονται τα μονώνυμα: $6x^3y$ και $-\frac{1}{2}xy^2$.

- α) Να βρείτε το γινόμενο των δύο μονωνύμων.
 β) Αν το μονώνυμο $-3x^{\lambda+2}y^{2\mu-3}$ είναι ίσο με το παραπάνω γινόμενο, να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

1.3 Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

33. Έστω τα πολυώνυμα: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 4$ και

$Q(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

- i) $P(x) + Q(x)$ ii) $P(x) - Q(x)$ iii) $2P(x) - 3Q(x)$

34. Έστω τα πολυώνυμα: $P(x) = 7x^2 - 6x + 2$ και

$Q(x) = -4x^2 + 7x - 8$. Να βρεθούν τα:

- i) $A(x) = P(x) + Q(x)$ ii) $B(x) = P(x) - Q(x)$ iii) $A(-1)$ και $B(1)$

35. Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Να βρεθούν οι τιμές: $P(2)$, $P(0)$ και $P(-1)$.

36. Έστω το πολυώνυμο: $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Να βρεθούν τα:

- i) $P(2)$ ii) $P(-1)$ iii) $P(-x)$ iv) $P(3x)$

37. Έστω τα πολυώνυμα: $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ και

$Q(x) = 4x^2 - 6x$. Να βρεθούν τα:

- i) $P(x) + Q(x)$ ii) $P(x) - Q(x)$ iii) $P(2x) - Q(-x)$

38. Δίνονται τα πολυώνυμα: $A(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $B(x) = -3x^2 + 7x - 6$ και $\Gamma(x) = 2x^2 - 4x + 5$. Αν το $A(x)$ είναι ίσο με το $B(x) + \Gamma(x)$, να βρείτε:

- α) τους αριθμούς a , β , γ β) τα $A(2)$ και $A(-1)$

39. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = 3x^2 - ax + 4$. Αν ισχύει: $P(1) = 2$, να βρείτε
 α) τον αριθμό a β) το $P(-x)$ γ) το $P(2x)$ δ) το $P(x^2)$
40. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και $Q(x) = x^2 + 5x - 3$
 Να βρείτε τους αριθμούς a , b και γ , αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι ίσο με το $Q(-x) + Q(2x)$.
41. Δίνεται το πολυώνυμο: $A(x) = ax^2 - bx + 2$.
 α) Αν το πολυώνυμο $B(x) = 4x$ είναι ίσο με το $A(x) - A(-x)$, να βρείτε το b .
 β) Αν ισχύει: $A(-1) = 5$, να βρείτε το a .
 γ) Για τις παραπάνω τιμές των a και b , να βρείτε το $A(3x) - A(2x)$.

πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

42. Να κάνετε τις πράξεις:
 i) $3x^2(2x^3 - 6x - 2)$ ii) $-5x^3(3x^2 - x + 1)$
 iii) $x^2y(2x + 3xy)$ iv) $-3x^2y(-2xy^2 + 3xy)$
 v) $3x(x - 2) - 2x(1 - 5x)$ vi) $-5x(2x - 3) - 3x(2 - x)$
 vii) $2x^2(3x - 1) - x + x(5x - 4x^2)$ viii) $1 - 2x^2(3x - 1) - x(5x - 2)$
43. Να κάνετε τις πράξεις:
 i) $(3x + 2)(2x - 1)$ ii) $(-3x + 1)(-2x + 3)$
 iii) $(2x - 3)(3x^2 - x + 1)$ iv) $(3x^2 - 4x - 2)(2x - 1)$
 v) $(x^2 - 2x - 1)(3x^2 + 2x + 1)$ vi) $-4x(2x - 1)(-3x + 2)$
 vii) $(2x - 3)(-3x + 2)(-x + 1)$ viii) $(x - 1)(3x^2 - x)(2x + 1)$
 ix) $2x(x + 1)(-3x + 2)(2 - x)$ x) $-3x^2(2x - 3)(3x - 2)(1 - x^2)$
44. Να κάνετε τις πράξεις:
 i) $4x(-2x^2 + 3x - 1) - (3x + 2)(-x^2 - x)$
 ii) $x^2 - 3x(x - 2) - (x - 1)(1 - 3x)$
 iii) $x^3 - 2x(x^2 - 2x + 3) - 3(x - 1)(1 - 3x^2)$
 iv) $xy - 2x(x - 3y) - (x - y)(2x - y)$
45. Αν $P(x) = x + 3x(2x - 1)(x - 2)$ και $Q(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, να βρείτε τις τιμές των a , b , γ , δ ώστε: $P(x) = Q(x)$.
46. Να αποδείξετε ότι:
 α) $(x + 2)(3x - 1) - (3x + 8)(x - 1) = 6$
 β) $5(x + 1) - 2(3x + 2)(x + 1) + x(6x + 5) = 1$
 γ) $x^2 - 4x(x - 1) - (x - 1)(1 - 3x) = 1$
 δ) $(2x + 3)(x^2 + x - 1) - (x + 2)(x^2 - 1) - x(x + 1)(x + 2) = -1$.

**Αξιοσημείωτες ταυτότητες
τετράγωνο αθροίσματος**

47. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x + 3)^2$	ii) $(y + 1)^2$	iii) $(2x + 5)^2$
iv) $(2\alpha + 3\beta)^2$	v) $(x^2 + 2)^2$	vi) $(2x^2 + 5x)^2$
vii) $(x + \sqrt{3})^2$	viii) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$	ix) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

τετράγωνο διαφοράς

48. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x - 3)^2$	ii) $(y - 2)^2$	iii) $(3x - 4)^2$
iv) $(2\alpha - 3\beta)^2$	v) $(x^3 - x)^2$	vi) $(3x^2 - 2x)^2$
vii) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$	viii) $(\sqrt{2} - 3)^2$	ix) $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2$

49. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $3(2x + 1)^2 - 2(3x - 2)^2$
 β) $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 - 3(y^2 - x^2)$
 γ) $3(x - 2)^2 + 4(1 + x)^2 - 2(x - 2)(3 - x)$
 δ) $2(3x - 1)^2 - 3(x + 2)^2 - 4(1 - x)(x + 3)$

ειδικές περιπτώσεις

☞ $(- \alpha + \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$

50. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(- x + 3)^2$	ii) $(-2y + 3)^2$	iii) $(- 3x + 2)^2$
------------------	-------------------	---------------------

☞ $(- \alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

51. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(- x - 3)^2$	ii) $(-2y - 3)^2$	iii) $(- 2x - 3y)^2$
------------------	-------------------	----------------------

52. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x - 1)^2 - (- x + 2)^2 - (- x - 1)^2$
 β) $3(2x + 1)^2 - 2(-3x + 2)^2 + (-2x - 3)^2$

εφαρμογή: τετράγωνο αθροίσματος 3 όρων

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

53. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(2x + y + 3)^2$	ii) $(3x - y + 1)^2$	iii) $(2x - y - 3)^2$
---------------------	----------------------	-----------------------

iv) $(2x + 3y - 1)^2$ v) $(x^2 - x + 1)^2$ vi) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

κύβος αθροίσματος – κύβος διαφοράς

54. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x + 2)^3$ ii) $(y^2 + 1)^3$ iii) $(2x + 3y)^3$
 iv) $(\alpha - 3)^3$ v) $(x^2 - 2)^3$ vi) $(x^2 - 2x)^3$

γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

55. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(x + 1)(x - 1)$ ii) $(y + 3)(y - 3)$
 iii) $(2 - x)(x + 2)$ iv) $(2x + 3y)(2x - 3y)$
 v) $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$ vi) $(3x + \frac{1}{2})(3x - \frac{1}{2})$

56. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $1 - 2x(x - 3) - (3x - 2)^2$
 β) $(2x + 3)^2 - (2x - 1)(2x + 1)$
 γ) $(1 - x)^2 + (1 + x)^2 - (x + 1)(x - 1)$
 δ) $(x + 4)^2 + (3x + 2)^2 - (2x - 5)^2$
 ε) $(2\alpha + 1)^2 + (\alpha - 2)^2 - 5\alpha^2$
 στ) $(x - 2)^2 - (1 - x)^2 - 2(x + 3)(x - 2)$
 ζ) $(-2 + \alpha)^2 - 3(-\alpha - 1)^2 - (\alpha - 1)^2$
 η) $(x - 1)^3 + 3(x + 1)^2 - x(x^2 + 9)$

57. Να αποδείξετε ότι:

α) $3(x + 3)^2 - 3(x - 3)^2 = 36x$
 β) $(2\alpha - 3)^2 - 4(\alpha + 1)^2 = 5(1 - 4\alpha)$
 γ) $(x - 2)^2 + (3 - x)^2 - 2(x - 2)(x - 3) = 1$
 δ) $(3x - 2)^2 - 2(3x - 2)(3x + 2) + (3x + 2)^2 = 16$
 ε) $(x - 2)^2 - 5(x - 1)(x + 1) + (2x + 1)^2 = 10$
 στ) $(\alpha - 3\beta)^2 - (\beta - 3\alpha)^2 = 8(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)$
 ζ) $(2x + 1)^2 - 3(x - 1)(x + 1) = 8x + (x - 2)^2$
 η) $(\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 9) - (\alpha\beta + 6)^2 = (3\alpha - 2\beta)^2$

58. Να αποδείξετε ότι:

α) $(x + 3)^3 - 9(x + 1)^2 = x^3 + 9(x + 2)$
 β) $(x + 1)^3 - x(x^2 - 3) = (x + 3)^2 + 2(x - 2)(x + 2)$
 γ) $(x - 1)^3 - x(x - 2)^2 - (x - 2)(x + 2) + x = 3$
 δ) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - (x + 1)^3 = -3x(x + 1) - 2$
 ε) $2x(2x - 1)^2 - (2x - 1)^3 + 4x(1 - x) = 1$
 στ) $(x - 1)(x + 1)^3 - x(x - 2)^3 = (2x - 1)^3$

59. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό, όταν:

α) $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1)$

β) $P(x) = (x - 1)^2 - (3x - 2)^2 - 2x(5 - 4x)$

γ) $P(x) = (x - 2)^3 + (1 - 3x)^2 - (x + 3)(x^2 + 6)$

δ) $P(x) = (x - \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2}x)^2 - (2 - x)(x + 2)$

60. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)^3 + 3x(x + 1)$ είναι μηδενικό.

61. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$(\alpha - 2)^2 + (2\alpha + 1)^2 = (\alpha + 2)^2 + (2\alpha - 1)^2$ και στη συνέχεια ότι ισχύει: $1003^2 + 2011^2 = 1007^2 + 2009^2$.

62. α) Να αποδείξετε ότι: $\left(x + \frac{10}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{10}{x}\right)^2 = 40$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(2010 + \frac{1}{201}\right)^2 - \left(2010 - \frac{1}{201}\right)^2.$$

63. α) Να αποδείξετε ότι: $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) + 1 = x^8$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = 9 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 10001 + 1$.

64. α) Να αποδείξετε ότι: $(x - 1)^3 + 3x(x - 1) + 1 = x^3$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $99^3 + 300 \cdot 99 + 1$ είναι κύβος ενός ακεραίου τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Παραγοντοποίηση

A. Κοινός παράγοντας

Όταν **όλοι** οι όροι μιας παράστασης είναι γινόμενα που έχουν κοινό παράγοντα, τότε «βγάζουμε» κοινό παράγοντα έξω από την παρένθεση, σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$

65. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $3\alpha + 3\beta$

ii) $5x - 5y + 5\omega$

iii) $-3x - 3y$

iv) $2\alpha + 4\beta$

v) $3x - 6y + 12\omega$

vi) $4\alpha\beta - 8\beta$

vii) $5xy - 10y\omega$

viii) $3x^3 + 6x^2$

ix) $\alpha^2 + 3\alpha$

x) $x^2 - x$

xi) $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha$

xii) $3\alpha^4 - 9\alpha^3 + 6\alpha^2$

66. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $2x^2y^2 - 4x^3y - 6xy^4$

ii) $3\alpha\beta\gamma^4 - 9\alpha\beta^2 - 12\alpha\beta\gamma^2$

- | | |
|-------------------------------------|---|
| iii) $\alpha(x + 1) + \beta(x + 1)$ | iv) $(3x - 1)(4x - 2) - (3x - 1)(3x + 1)$ |
| v) $(2x - 1)^3 - 3(2x - 1)^2$ | vi) $(3x - 1)^2 + 5(1 - 3x)$ |
| vii) $(2x - 3)^2 - 3(3 - 2x)$ | viii) $(x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 2(1 - x)$ |
| ix) $x^2(x - 1) + x - 1$ | x) $x^2(x - 3) - x + 3$ |

67. (εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|---|--|-------------------------------|
| i) $7\alpha + 7\beta$ | ii) $3x - 3y + 3\omega$ | ii) $-2x + 2y$ |
| iv) $5\alpha + 5$ | v) $-8x + 12y - 20\omega$ | vi) $2x^3 - 3x^2$ |
| vii) $2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 10\alpha$ | viii) $12\alpha^2\beta^3\gamma - 9\alpha^2\beta\gamma^2$ | ix) $8x^2y - 4xy^2 + 6x^2y^2$ |
| x) $x^2y + xy^2 - xy$ | xi) $(2x - 1)(2x + 5) - (2x - 1)(x - 1)$ | |
| xii) $(3x - 2)^3 - 5(3x - 2)^2$ | xiii) $(2x - 1)^2 - 5(1 - 2x)$ | |
| xiv) $x^2(x - 2) + x - 2$ | xv) $x^2(x - 1) - x + 1$ | |

Β. Ομαδοποίηση (κοινός παράγοντας κατά ομάδες)

Όταν η παράσταση έχει άρτιο πλήθος όρων (συνήθως 4 ή 6 όρους), χωρίζουμε την παράσταση σε δύο ομάδες και κάνουμε χωριστά παραγοντοποίηση με στόχο να εμφανίσουμε και στις δύο ομάδες **ίδιο** παράγοντα.

68. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| i) $x^3 + x^2 + 3x + 3$ | ii) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ |
| iii) $x^3 - x^2 + x - 1$ | iv) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$ |
| v) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ | vi) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ |
| vii) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$ | viii) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ |
| ix) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$ | x) $4x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ |
| xi) $(x - 1)(3x + 2) + x^3 - x^2$ | xii) $(x + 3)(3x - 2) + x^3 + 3x^2$ |
| xiii) $\alpha x^2 + \alpha x - \beta x - \beta + x + 1$ | xiv) $\alpha x^3 + \alpha x - 3x^2 - 3 + \beta x^2 + \beta$ |

69. (εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| i) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$ | ii) $4x^3 - 6x^2 + 6x - 9$ |
| iii) $5x^5 + 5x^3 - 10x^2 - 10$ | iv) $8x^2 - 12xy - 10x + 15y$ |
| v) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$ | vi) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ |

διάσπαση όρου

Όταν μία παράσταση έχει 3 όρους, γράφουμε τον έναν όρο ως άθροισμα ή διαφορά δύο όρων ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε ομαδοποίηση.

70. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| i) $2x^2 + 5xy + 3y^2$ | ii) $3x^2 - 5xy + 2y^2$ |
| iii) $7x^2 + 10xy + 3y^2$ | iv) $5x^2 - 8xy + 3y^2$ |
| v) $x^2 + 5xy + 4y^2$ | vi) $x^2 + 4xy + 3y^2$ |

Γ. Διαφορά τετραγώνων

Η ταυτότητα γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά αν γραφεί ανάποδα δίνει: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ οπότε μετατρέπει μια διαφορά τετραγώνων σε γινόμενο.

71. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| i) $x^2 - 4$ | ii) $\alpha^2 - 9$ | iii) $x^2 - 1$ |
| iv) $4x^2 - 25$ | v) $9\alpha^2 - 16\beta^2$ | vi) $25x^2 - 36y^2$ |
| vii) $(x - 3)^2 - 4$ | viii) $9 - (x - 1)^2$ | ix) $(\alpha + 1)^2 - (\beta - 3)^2$ |
| x) $4(\alpha + 1)^2 - 9(\beta - 2)^2$ | xi) $x^2 - \frac{9}{16}$ | xii) $x^2 - 5$ |

72. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|---------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| i) $x^3 - 4x$ | ii) $2\alpha^3 - 32\alpha$ | iii) $2x^5 - 2x^3$ |
| iv) $4x^3 - x$ | v) $27\alpha^3 - 12\alpha$ | vi) $x^4 - 1$ |
| vii) $100x^2 - y^4$ | viii) $81x^4 - 16$ | ix) $(\alpha + 1)^3 - \alpha - 1$ |

73. (εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| i) $\alpha^2 - 16$ | ii) $x^2 - 25$ | iii) $81 - x^2$ |
| iv) $4x^2 - y^2$ | v) $16\alpha^2 - 49$ | vi) $16x^2 - 9y^2$ |
| vii) $\frac{x^2}{9} - 1$ | viii) $x^2 - \frac{16}{25}$ | ix) $(2x - 1)^2 - x^2$ |
| x) $(5x + 1)^2 - 9x^2$ | xi) $4 - (x + 1)^2$ | xii) $16x^2 - (3x - 1)^2$ |

74. (εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-----------------------------|
| i) $3x^2 - 12$ | ii) $8x^2 - 18$ | iii) $\alpha^3 - \alpha$ |
| iv) $25x^4 - y^2$ | v) $3x^4y^3 - 12x^2y$ | vi) $\alpha^7 - 16\alpha^3$ |

Δ. Ανάπτυγμα τετραγώνου

Η ταυτότητα τετράγωνο αθροίσματος αν γραφεί ανάποδα δίνει: $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ οπότε μετατρέπει μια παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ σε (τέλειο) τετράγωνο.

Όμοια: $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

75. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| i) $x^2 + 4x + 4$ | ii) $x^2 + 2x + 1$ | iii) $\alpha^2 + 8\alpha + 16$ |
| iv) $x^2 - 10x + 25$ | v) $4x^2 - 4x + 1$ | vi) $4\alpha^2 - 12\alpha + 9$ |
| vii) $(x+y)^2 - 2(x+y) + 1$ | viii) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ | ix) $\frac{x^2}{9} - 2x + 9$ |
| x) $20x^3 - 20x^2 + 5x$ | xi) $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$ | xii) $4y^2 - x^2 + 4x - 4$ |

76.(εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| i) $x^2 + 6x + 9$ | ii) $x^2 - 4x + 4$ | iii) $\alpha^2 + 10\alpha + 25$ |
| iv) $9x^2 - 6x + 1$ | v) $4x^2 + 4x + 1$ | vi) $16\alpha^2 - 24\alpha + 9$ |
| vii) $x^3 - 2x^2 + x$ | viii) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1$ | ix) $(x^2 - 4x + 2)^2 - 4$ |

Ε. Άθροισμα κύβων: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Διαφορά κύβων: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

77.Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|-----------------|------------------|----------------------------|
| i) $x^3 + 1$ | ii) $x^3 - 8$ | iii) $8\alpha^3 + 27$ |
| iv) $64 - 8x^3$ | v) $x^4y + xy^4$ | vi) $16\alpha^4 - 2\alpha$ |

ΣΤ. τριώνυμο της μορφής $x^2 + ax + \beta$

Αναζητούμε δύο αριθμούς κ, λ έτσι ώστε: $\begin{cases} \kappa \cdot \lambda = \beta \\ \kappa + \lambda = \alpha \end{cases}$ δηλαδή δύο

αριθμούς κ, λ με γινόμενο β και άθροισμα α . Τότε ισχύει:

$$x^2 + ax + \beta = (x + \kappa)(x + \lambda)$$

78.Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|----------------------|
| i) $x^2 + 5x + 6$ | ii) $x^2 + 4x + 3$ | iii) $x^2 + 7x + 12$ |
| iv) $x^2 + 2x - 3$ | v) $x^2 + 3x - 10$ | vi) $x^2 - 6x + 8$ |
| vii) $x^2 - 4x + 3$ | viii) $x^2 - x - 12$ | ix) $x^2 - 6x - 7$ |
| x) $2x^2 - 4x - 16$ | xi) $3x^2 - 12x - 15$ | xii) $x(x - 6) + 8$ |

79.(εξάσκηση) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- | | |
|-----------------------------|---|
| α) $12xy^2 + 9x^2y + 3x^3$ | β) $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2x^3y$ |
| γ) $3x(x-1) - x + 1$ | δ) $(5\alpha - 3\beta)(4x-3y) + (3y-4x)(\beta-3\alpha)$ |
| ε) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18$ | στ) $6x^2 - 4ax - 9\beta x + 6\alpha\beta$ |
| ζ) $25\alpha^2 - 16\beta^2$ | η) $(\alpha+3)^2 - (\alpha-3)^2$ |
| θ) $x^4 - 4x^2y^2$ | ι) $x^2 - 2x - y^2 + 1$ |
| ια) $x^2 + 5x + 6$ | ιβ) $x^2 - 12x + 20$ |
| ιγ) $x^2 + 2x - 15$ | ιδ) $x^3 - 7x^2 + 6$ |
| ιε) $8x^3 - 1 - (2x-1)^2$ | ιστ) $4x^3 - 4 + 16x^2 - x$ |

ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

80.Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | | |
|------------------|---------------------|----------------------------|
| i) $\frac{3}{x}$ | ii) $\frac{1}{x-1}$ | iii) $\frac{x+1}{(x-2)^2}$ |
|------------------|---------------------|----------------------------|

$$\text{iv)} \frac{x^2+1}{x^2-2x}$$

$$\text{v)} \frac{x^2-x}{x^2-1}$$

$$\text{vi)} \frac{3x^2-2x}{9x^2-4}$$

81. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} \frac{x^2-x}{x^2-1}$$

$$\text{ii)} \frac{x^2-1}{x^2+x}$$

$$\text{iii)} \frac{2x-4}{x^2-2x}$$

$$\text{iv)} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$$

$$\text{v)} \frac{x^2+xy}{y^2+xy}$$

$$\text{vi)} \frac{2x^2-18}{2x^2-6x}$$

$$\text{vii)} \frac{3x^2-2x}{9x^2-4}$$

$$\text{viii)} \frac{x^3-x}{x^2+x}$$

$$\text{ix)} \frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$$

$$\text{x)} \frac{x^2+x-2}{2x^2+4x}$$

$$\text{xi)} \frac{x^2-25}{x^2+10x+25}$$

$$\text{xii)} \frac{(x-1)^2-1}{x^2-4}$$

82. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} \frac{x^2-x}{x^2(x-2)+x}$$

$$\text{ii)} \frac{x(x-3)}{x(x-6)+9}$$

$$\text{iii)} \frac{(2x+1)^2-4}{4x^2-1}$$

$$\text{iv)} \frac{(x-1)(x+1)^2+9(1-x)}{x^2-x}$$

83. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{2+4+6+\dots+200}{3+6+9+\dots+300}$.

πρόσθεση – αφαίρεση ρητών παραστάσεων

84. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i)} \frac{1}{2x^2} + \frac{2x-1}{2x^2}$$

$$\text{ii)} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{iii)} \frac{x^2}{x-2} + \frac{4}{2-x}$$

$$\text{iv)} \frac{x^2}{x-1} + \frac{2x-1}{1-x}$$

85. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\text{i)} \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma} + \frac{\gamma-\alpha}{\gamma\alpha}$$

$$\text{ii)} \frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x^2} - 1$$

$$\text{iii)} \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

$$\text{iv)} \frac{x}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{v)} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}$$

$$\text{vi)} \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x}$$

vii)
$$\frac{3}{2x-4} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+10}{2x^2-8}$$

ix)
$$\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} - \frac{4y^2}{x^2-y^2}$$

viii)
$$\frac{3}{2x-2} - \frac{4}{3x+3} - \frac{3}{x^2-1}$$

x)
$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x+1}{x^2+x}$$