Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$.

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια

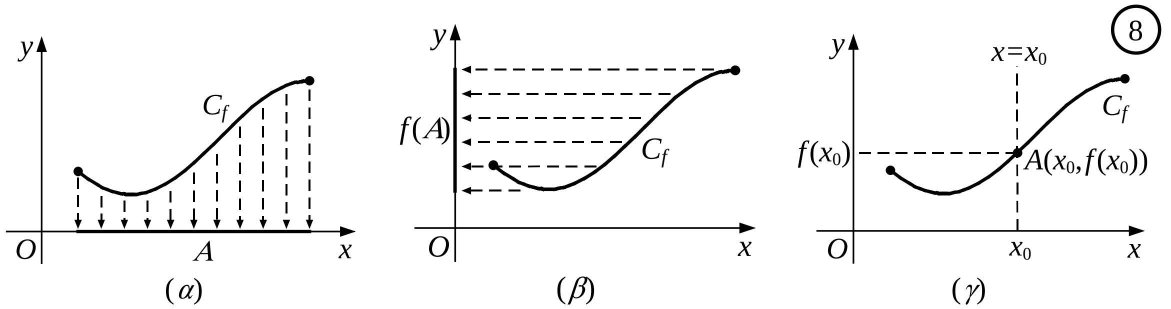
- Η **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με $\boldsymbol{C_f}$.

- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- ΄Οταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

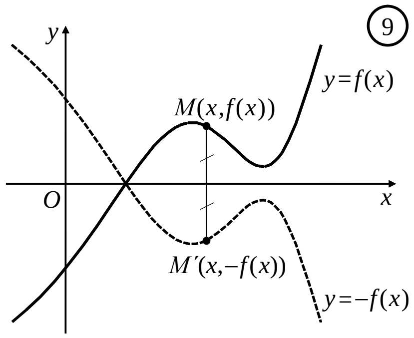
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

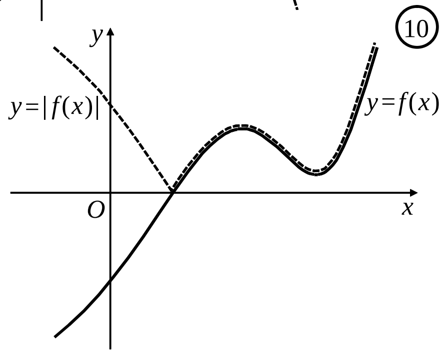


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

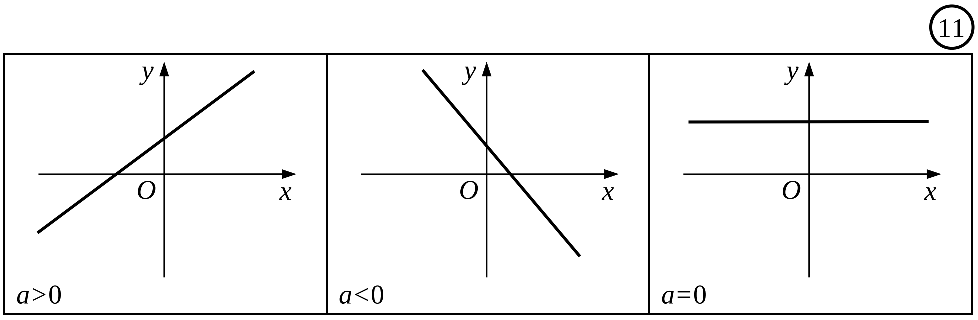
α) $f(x)=\alpha x+\beta$ β) $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$ γ) $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$

δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

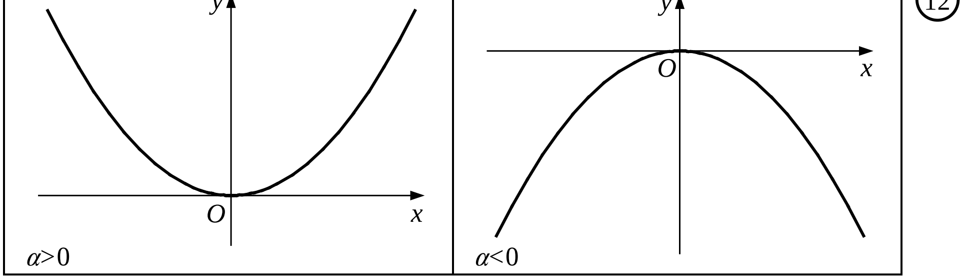
Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

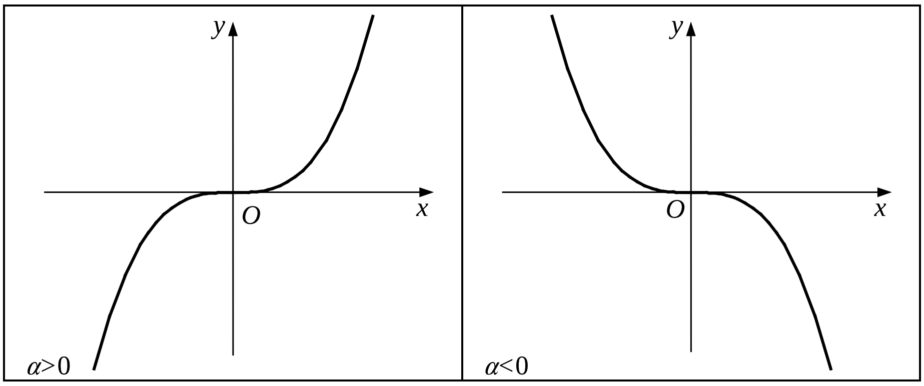
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$



β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$.

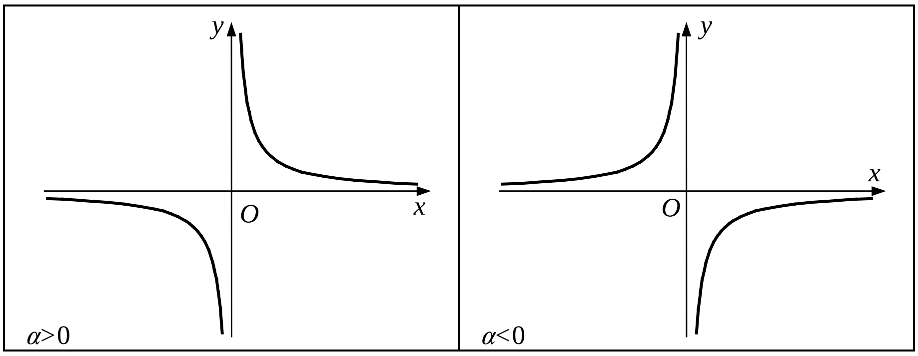


γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$.



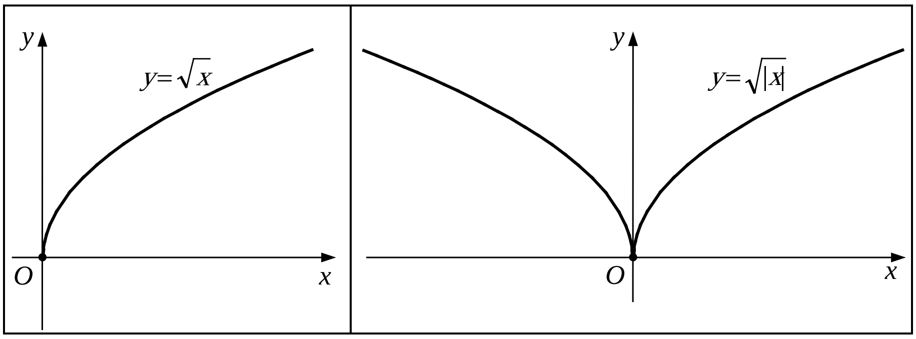
13

δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\quad \alpha\neq 0$.



14

ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=\sqrt{/x/}$.



15

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

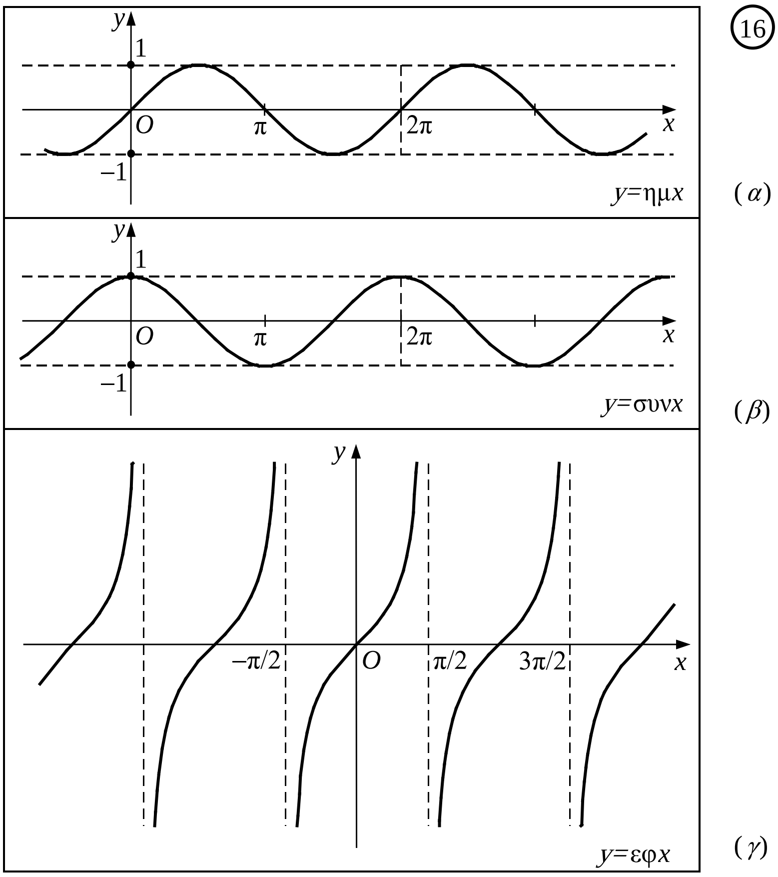
α) $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$

β) $f(x)=\alpha^x,\quad 0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x,\ 0<\alpha\neq 1$

Απάντηση

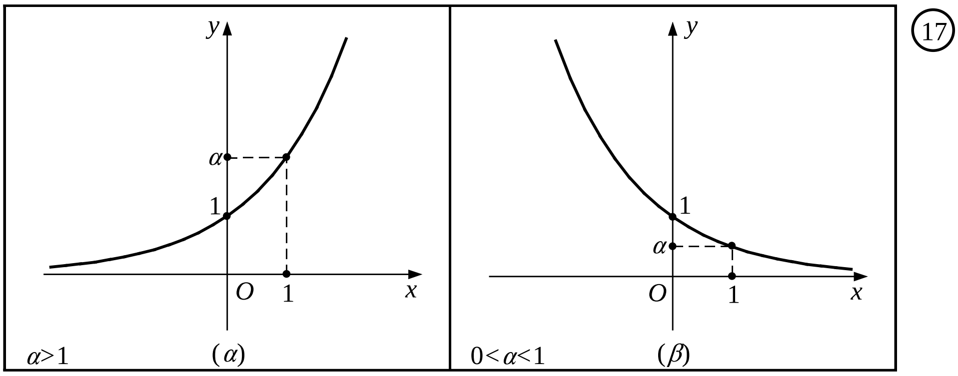
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x,\quad f(x)=\sigma\upsilon\nu x,\quad f(x)=\varepsilon\varphi x$



Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $f(x) = συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \alpha^x,\quad 0 < \alpha \neq 1}$.

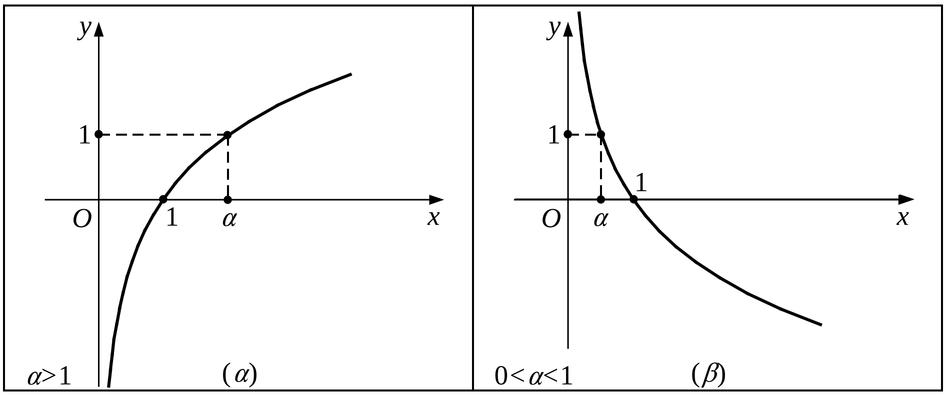


Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\boldsymbol{\alpha > 1}$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \log_\alpha x,\ 0 < \alpha \neq 1}$



Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = k\log_\alpha x_1$

7) Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ **αν** $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln\alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f ,g λέγονται ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f ,g ;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού *A* και *B* των συναρτήσεων *f* και *g* αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

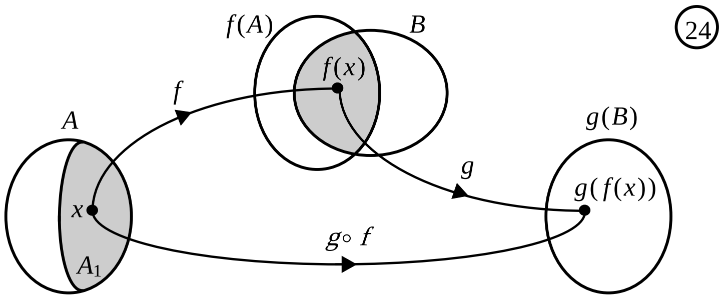
$$\{x \mid x\in A \quad \text{και} \quad x\in B, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0\}.$$

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απάντηση

Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A, B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της *f* με την *g*, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x)).$$



Σχόλια

α) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) ● Γενικά, αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

- Αν *f*, *g*, *h* είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof)=(hog)of.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των *f, g* και *h* και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in \varDelta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα *διάστημα Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in \varDelta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)>f(x_2)$$

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad .$$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **συνάρτηση $1-1$**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν} \quad x_1 \neq x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **συνάρτηση $1-1$**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2.$$

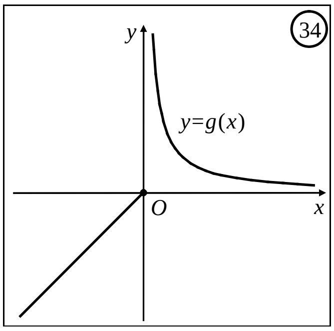
Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "$1-1$". Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.



Παράδειγμα

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x \ , & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} \ , & x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34).είναι $1-1$,

αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f:A\to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι :

$$f^{-1}(f(x))=x, \quad x\in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y))=y, \quad y\in f(A).$$

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Γ. Όρια συναρτήσεων

1. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o;

Απάντηση

Ισχύει ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Παρατηρήσεις στο όριο

α) Ισχύει ότι :

(α)	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
(β)	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$

β) Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \qquad \text{ή} \qquad (\alpha, x_0) \qquad \text{ή} \qquad (x_0, \beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \to x_0} c = c$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_o μια ιδιότητα P ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

3. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_o .

Απάντηση

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

β) Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ) Θεώρημα 3ο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$ **4.** $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$ **6.** $\lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

δ) Θεώρημα 4ο

— Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.Είναι τότε :

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

—Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$.

Θα είναι τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \textbf{όπου } Q(x_0) \neq 0$$

ε) Θεώρημα 5ο Κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

στ) Ισχύει ότι

- $|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

4 . Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0 .

Απάντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, δηλαδή το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

5 . Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty,\ \nu\in N$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty,\ \nu\in N$.

ι) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in$○						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in R$	$\alpha\in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0\in R$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται **απροσδιόριστες** μορφές :

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ 0\cdot(\pm\infty)\ ,\ (+\infty)-(+\infty),\ \ (-\infty)-(-\infty)\ ,\ \frac{0}{0},\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

6 . Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\nu}}=0,\quad \nu\in N^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\nu}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{\nu}}=0,\quad \nu\in N^*.$

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$, με $\alpha_\nu\neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\kappa\neq 0$ ισχύει:

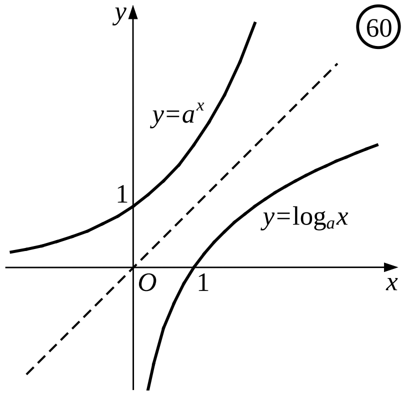
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)\quad \text{και}\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

δ) Για το όριο **εκθετικής - λογαριθμικής** συνάρτησης ισχύει ότι

● Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$

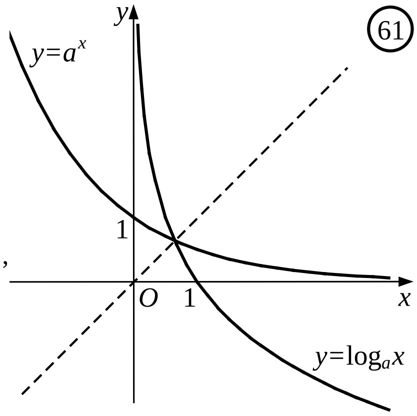
$$\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$



● Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



Σχόλια

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

● Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Δ. Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός
1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο** x_0**;**

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Σχόλιο: Ισοδύναμα, θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι **συνεχής στο** x_0**;**

Απάντηση
Μια συνάρτηση f δεν **είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$ στο σημείο x_0.

Ορισμός
3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται απλώς **συνεχής;**

Απάντηση

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Ορισμός
4. Ποιές συναρτήσεις είναι γνωστό ότι είναι **συνεχείς;**

Απάντηση

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0} συνx = συνx_0 .$$

Τέλος, αποδεικνύεται (χωρίς όμως να απαιτείται η απόδειξη από τους μαθητές) ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$ είναι συνεχείς**.

5. **Θεώρημα**

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει ότι:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g, \quad c\cdot f, \quad \text{όπου} \quad c\in\mathbb{R}, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

6. **Θεώρημα**

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

Ορισμός

7. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β);**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ. 63α)

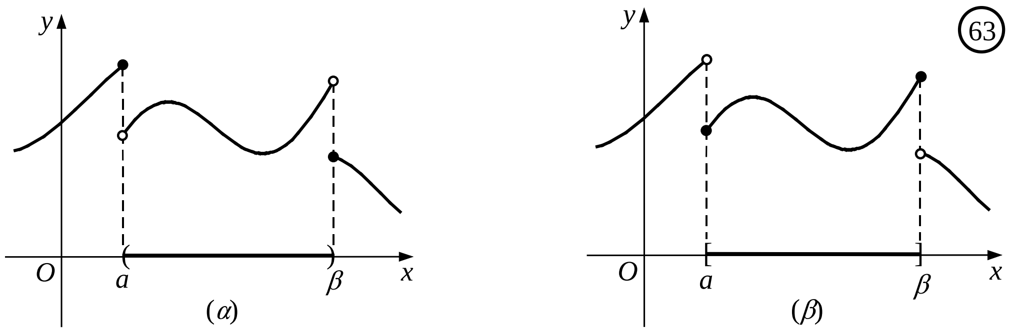
Ορισμός

8. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;**

Απάντηση

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\ 63\beta)$$



Σχόλιο:

Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και να μην είναι συνεχής υποχρεωτικά συνεχής στο σημείο $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$ του πεδίου ορισμού της

Δ₂. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

9. **Θεώρημα Bolzano**

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

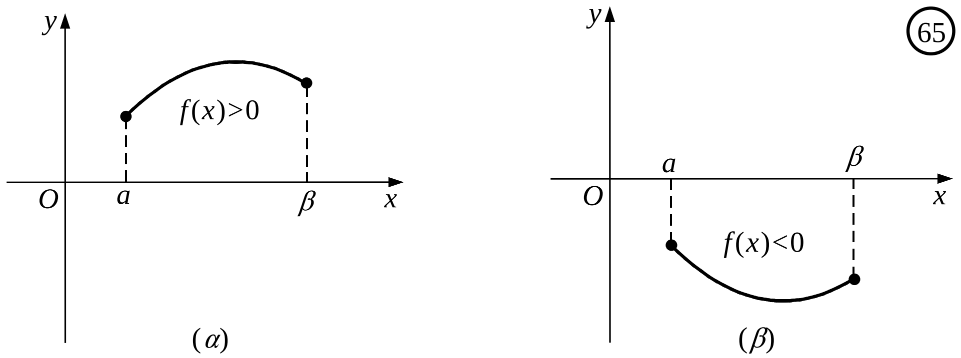
$$f(x_0)=0$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).
ή αλλιώς, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο *(γεωμετρική ερμηνεία)*.

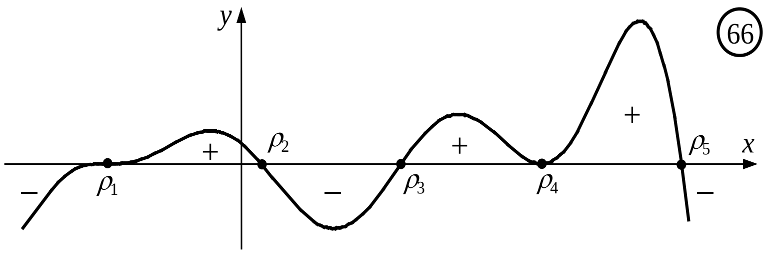
ΣΧΟΛΙΑ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



10. Πως μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης f;

Απάντηση

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

11.**Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano)**

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

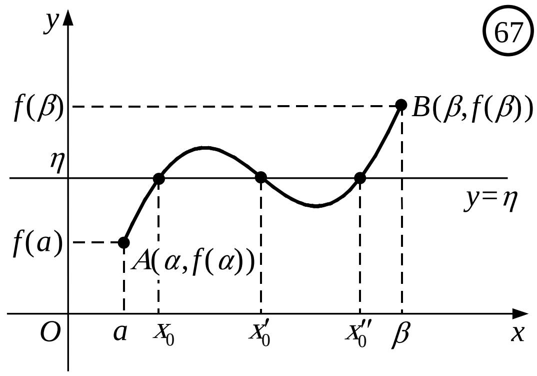
- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

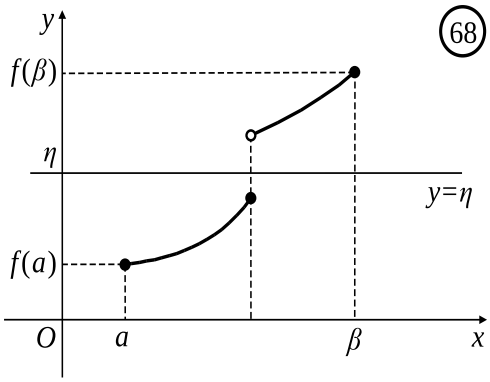
$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



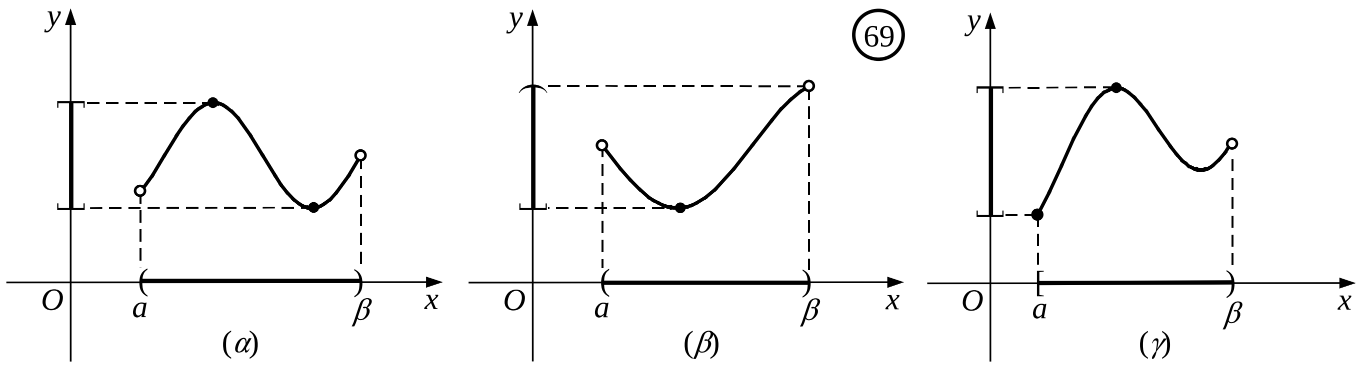
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



12.**Πρόταση**

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



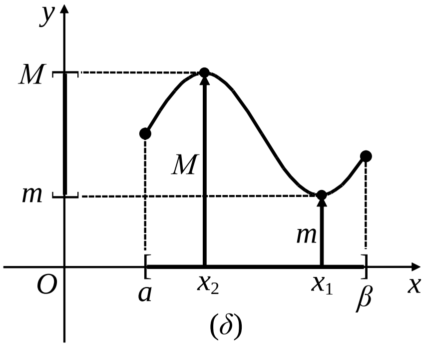
Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

13. **Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)**

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}.$$

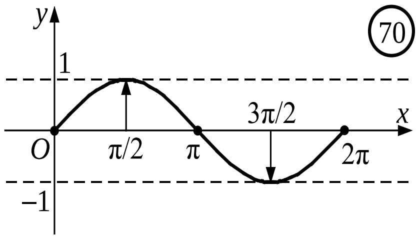


(δ)

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[\boldsymbol{m},\boldsymbol{M}]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

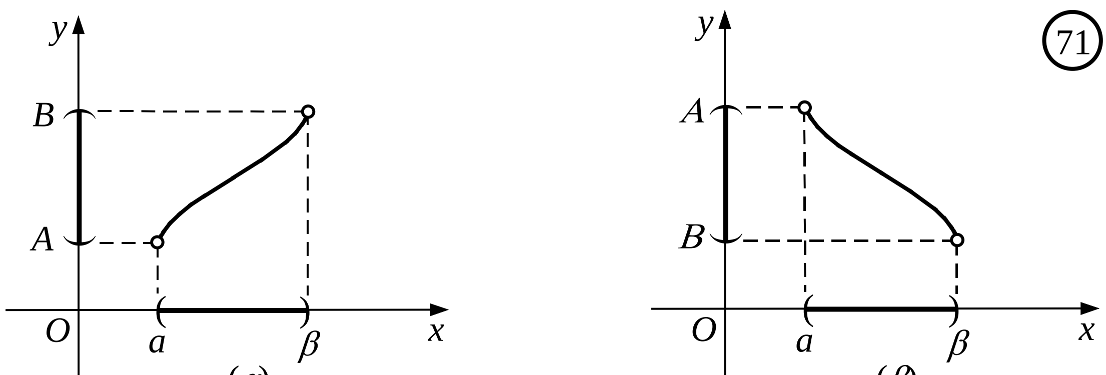
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.



14. Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).



(α) (β)

Διαφορικός λογισμός (Κανόνες παραγώγισης)

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Σχόλια

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ ,\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Απάντηση

● Η εξίσωση της *εφαπτομένης (ε) της* C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Σχόλιο

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.

Θεώρημα

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε θα είναι :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. □

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Ισχύει όμως ότι :

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Ορισμός

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο Α

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R.$$

5. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$ **β)** Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in N-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Απόδειξη

α) Για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

β) Για $x\neq x_0$ ισχύει ότι : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του ○, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Επομένως :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. □

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Σχόλια – Τύποι

● Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$$f'(x) = -\eta\mu x \text{, δηλαδή } (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = e^x \text{, δηλαδή } (e^x)' = e^x$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και

ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, δηλαδή $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

6. Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Σχόλια – Τύποι

Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Ισχύει επομένως ότι :

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\boldsymbol{(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}.$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

Β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Ισχύει επομένως ότι :

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Γ. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in N^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.$$

Δ. • Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in R-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.\quad\square$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

7. Θεώρημα

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Σχόλια

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$(f(u))' = f'(u)\cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

8.Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Q$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^{x}$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in R^*$ και ισχύει

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη

α) Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha\ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

β) Πράγματι, αν $y = \alpha^{x} = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^{u})' = e^{u}\cdot u' = e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha = \alpha^{x}\ln\alpha.$$

γ) Πράγματι·

- αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Διαφορικός λογισμός
(Βασικά Θεωρήματα-Συνέπειες ΘΜΤ - Μονοτονία)

9. Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

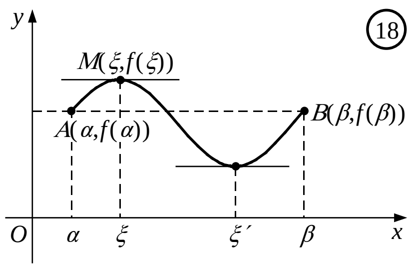
Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

10. Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία.

Απάντηση

Το θεώρημα του Rolle διατυπώνεται ως εξής :



Αν μια συνάρτηση f είναι:

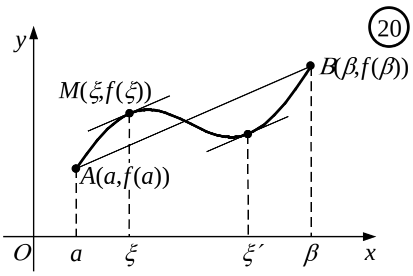
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α, β) **και**
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

11. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση



Το θεώρημα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ **και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα** (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο, ώστε:**

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.

12. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και
- $f'(x)=0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

Απάντηση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του *Δ*, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. □

13. Θεώρημα

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

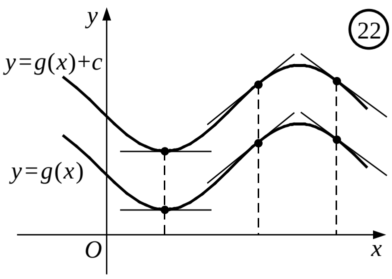
$$f(x)=g(x)+c$$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. □



Σχόλιο

Τα παραπάνω θεωρήματα (3 και 4) ισχύουν σε διάστημα και **όχι σε ένωση διαστημάτων**.

14.Πρόταση(χωρίς απόδειξη)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι

$$f'(x)=f(x) \quad \textbf{για κάθε} \quad x \in \mathrm{R},$$

τότε $f(x)=ce^x$ για κάθε $x \in \mathrm{R}$.Αντί του R μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ.

15. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απάντηση

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως. □

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.