ΘΕΜΑ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^x$ $x \in R$,

$g(x) = \frac{lnx}{x}, x > 0$ και το σημείο $A(2 + ln2, 1)$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x) = (fog)(x)$ και να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2^x) + f(3^x) = f(4^x) + f(5^x)$

γ. Να βρείτε σημείο Μ της C_f που απέχει από το A την ελάχιστη απόσταση την οποία και να υπολογίσετε

δ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MA είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ

ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) + x - 4 = ln2$ έχει μοναδική ρίζα στο R

Λύση:

α. Η fog έχει πεδίο ορισμού το $A = \{x \in (0, +\infty) \ / \ g(x) \in R\} = (0, +\infty)$

$\forall x \in A$ είναι $h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = e^{\frac{lnx}{x}}$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{lnx}{x}} \qquad (1)$$

Θέτουμε $u = \frac{lnx}{x}, x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} u = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{lnx}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} . lnx\right) = +\infty . (-\infty) = -\infty$$

Έτσι στην (1) $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0.$

β. Η $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Η εξίσωση $f(2^x) + f(3^x) = f(4^x) + f(5^x)$ έχει προφανή ρίζα την $x = 0$

Οι συναρτήσεις $\left(\frac{2}{4}\right)^x$ και $\left(\frac{3}{5}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες στο R, επομένως :

αν $x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{4}\right)^x < \left(\frac{2}{4}\right)^0 \Leftrightarrow 2^x < 4^x \Leftrightarrow f(2^x) < f(4^x)$ (2)

όμοια

$x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow 3^x < 5^x \Leftrightarrow f(3^x) < f(5^x)$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2), (3) έχουμε

$f(2^x) + f(3^x) < f(4^x) + f(5^x), \forall x > 0$ (4)

αν $x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{4}\right)^x > \left(\frac{2}{4}\right)^0 \Leftrightarrow 2^x > 4^x \Leftrightarrow f(2^x) > f(4^x)$ (5)

όμοια

$x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow 3^x > 5^x \Leftrightarrow f(3^x) > f(5^x)$ (6)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (5), (6) έχουμε

$f(2^x) + f(3^x) > f(4^x) + f(5^x), \forall x < 0$ (7)

Από τις (4), (7) συμπεραίνουμε ότι μοναδική λύση είναι η x=0.

γ. Έστω $M(x, e^x), x \in R$ τυχαίο σημείο της C_f. Η απόσταση ΑΜ δίνεται από τη σχέση

$$(AM) = d(x) = \sqrt{(x - 2 - ln2)^2 + (e^x - 1)^2}$$

Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι θετική $\forall x \in R$, γίνεται ελάχιστη όταν το τετράγωνό της γίνεται ελάχιστο.

Δηλαδή

$g(x) = d^2(x) = (x - 2 - ln2)^2 + (e^x - 1)^2, x \in R$

$g'(x) = 2(x - 2 - ln2) + 2(e^x - 1)e^x = 2(e^{2x} - e^x + x - 2 - ln2)$

$g'(ln2) = 0$

$g''(x) = 2(2e^{2x} - e^x + 1) = 2\left(e^{2x} + \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$

Η $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

min

Η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $x = ln2$ στο σημείο $M(ln2, 2)$ με ελάχιστη τιμή

$d(ln2) = \sqrt{5}$

δ. $\lambda_{AM} = \frac{2-1}{ln2-(2+ln2)} = -\frac{1}{2}$.

$f'(x) = e^x$, $f'(ln2) = e^{ln2} = 2$. Είναι $\lambda_{AM} . f'(ln2) = -1$
Η ευθεία MA είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = 2e^x + x - 4 - ln2, x \in R$
$K(ln2) = 0$
$K'(x) = 2e^x + 1 > 0, \forall x \in R.$ Η K είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα 1-1 οπότε το $x = ln2$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $K(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) + x - 4 = ln2$.