ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται συνάρτηση $f\ R \to R$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει κλίση σε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ ίση με $2x - 7$. Η C_f τέμνει τον άξονα x'x στα διαφορετικά σημεία Α, Β.Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία Α, Β τέμνονται κάθετα.

α. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 7x + 12, \forall x \in R$

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|f(x)|}{x-3}$

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις εφαπτόμενες στο Α, Β.

Λύση

α. $\forall x \in R, f'(x) = 2x - 7$ οπότε από τη συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει σταθερά $c \in R$ ώστε $f(x) = x^2 - 7x + c$.

Έστω $A(\alpha, 0)$ και $B(b, 0), \alpha \neq b$ τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x. Τότε α,b ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + c = 0\ (1)$

Οι εφαπτόμενες στα Α , Β είναι αντίστοιχα

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = (2a - 7)x - 2a^2 + 7a$$

και

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \Leftrightarrow y = (2b - 7)x - 2b^2 + 7b$$

Αφού τέμνονται κάθετα θα είναι $f'(a).f'(\beta) = -1 \Leftrightarrow (2\alpha - 7).(2b - 7) = -1 \Leftrightarrow$

$$4ab - 14(a + b) = -50\ (2)$$

Όμως α, b λύσεις της (1) άρα από τους τύπου του Vieta $ab = c$ και $\alpha + b = 7$

Οπότε στην (2) $4c - 14.7 = -50 \Leftrightarrow 4a = 48 \Leftrightarrow a = 12$

Επομένως $f(x) = x^2 - 7x + 12, \forall x \in R$

β. $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|f(x)|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{f(x)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x-4)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} (x - 4) = -1\ (3)$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|f(x)|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-f(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-(x-3)(x-4)}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (-x + 4) = 1\ (4)$$

Από τις (3), (4) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{|f(x)|}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{|f(x)|}{x-3}$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|f(x)|}{x-3}$

γ. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $f(x) = 0$ είναι $\alpha = 3\ , \beta = 4$

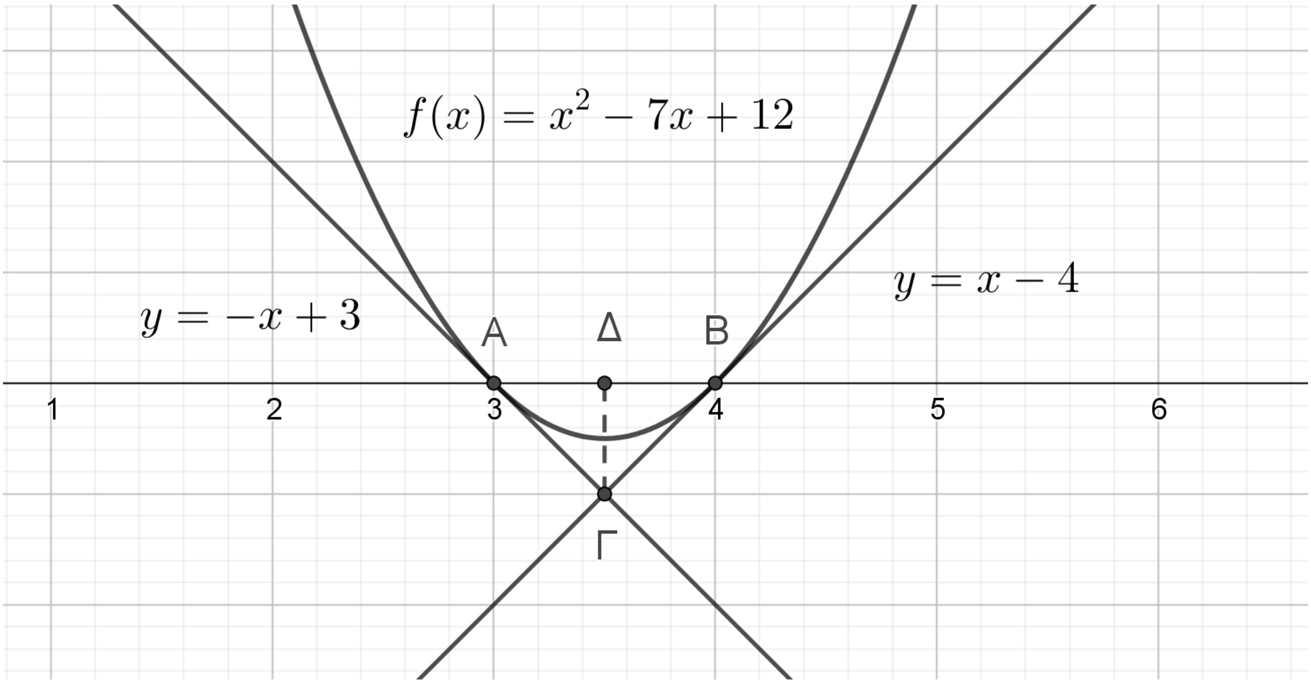
Η εφαπτομένη στο $A(3,0)$ είναι :

$$\varepsilon_1 y = (2a - 7)x - 2a^2 + 7a \Leftrightarrow y = -x + 3$$

Η εφαπτομένη στο $B(4,0)$ είναι :

$$\varepsilon_2 : y = (2b - 7)x - 2b^2 + 7b \Leftrightarrow y = x - 4$$

Το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και είναι : $\Gamma\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = (AB\Gamma) - \int_3^4 -f(x)dx = \frac{1}{2}(AB)(\Gamma\Delta) + \int_3^4 f(x)dx =$$

$$\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} + \int_3^4 (x^2 - 7x + 12)dx = \frac{1}{4} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4 - 7\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 + 12[x]_3^4 =$$

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{64}{3} - \frac{27}{3}\right) - 7\left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) + 12 =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{37}{3} - \frac{49}{2} + 12 = \frac{1}{4} + \frac{37}{3} - \frac{25}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\tau.\mu$$