ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β. Να δείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.
γ. Αν α>0, β>0 και $\frac{\ln(\alpha+1)}{\ln(\beta+1)} = \frac{\alpha}{\beta}$ να δείξετε ότι α=β.
δ. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωση $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού α.
ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα των x και την ευθεία x=2.

Λύση

α. Πεδίο ορισμού $A = (-1, +\infty)$

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Ο.Ε	↗	

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$. Έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$

γ. $\frac{\ln(\alpha+1)}{\ln(\beta+1)} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} = \frac{\ln(\beta+1)}{\beta}$ (1)

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -\frac{f(x)}{x^2} < 0, \forall x > 0$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 .

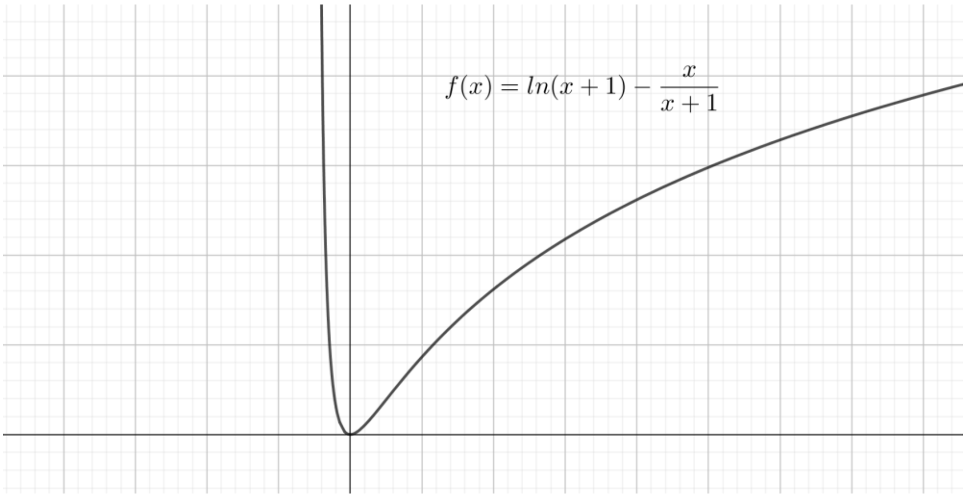
Έτσι (1) $g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$

δ. Το $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Έστω $\Delta_1 = (-1,0]$, $\Delta_2 = (0, +\infty)$

Η f συνεχής στο Δ_1 και γνησίως φθίνουσα άρα $f(\Delta_1)$=[0,+∞)

f συνεχής στο Δ_2 και γνησίως αύξουσα άρα $f(\Delta_1)$=(0,+∞)



- Αν $\alpha < 0$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την x=0.
- Αν α>0 η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις μια στο διάστημα Δ_1 και μια στο διάστημα Δ_2.

ε. Η $f(x) \geq 0$ στο διάστημα [0,2] και συνεχής. Άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω θα είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (\ln(x+1) - \frac{x}{x+1})\, dx =$$

$$[(x+1)ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \frac{x+1}{x+1}dx - \int_0^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx =$$

$$[(x+1)ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 1dx - \int_0^2 1 - \frac{1}{x+1}dx =$$

$$[(x+1)ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 2dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx =$$

$$[(x+1)ln(x+1)]_0^2 - [2x]_0^2 + [\ln(x+1)]_0^2 =$$

$$4ln3 - 4\ \tau.\mu.$$