ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **(Μονάδες 7)**

Α2. Να διατυπώσετε τι θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

Α3. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

(Μονάδες 4)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- **α.** Το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f, όταν η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως.
- **β.** Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$
- **γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- **δ.** Η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$.
- **ε.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω f R→R συνεχής με $f^2(x)=x^2+x+1, \forall x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x}=-\frac{1}{2}$.

Β1. Να βρείτε τον τύπο της f **(Μονάδες 10)**

Β2. Αν $f(x)=-\sqrt{x^2+x+1}, x\in R$ τότε :

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(x))$

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $\frac{\alpha}{f(x)}=1$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$ **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f :[0,π]→R με: $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ και $f''(x)+f(x)=2\sigma\upsilon\nu x, \forall x\in[0,\pi]$ και η συνάρτηση $g(x)=f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x, x\in[0,\pi]$

Γ1. Να δείξετε ότι $g(x)=\eta\mu^2 x$ **(Μονάδες 8)**

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f **(Μονάδες 9)**

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον x'x και την ευθεία x=π **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύουν

- f(0)=0
- $f(x)\geq xe^{2x}$ για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$. **(Μονάδες 5)**

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x\eta\mu x}$ **(Μονάδες 5)**

Δ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx=1$,να βρείτε τον τύπο της f στο [0,1].

(Μονάδες 5)

Δ4. Υπολογίστε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) της C_f στο Ο(0,0) και τις ευθείες x=0 και x=α, όπου 0<α<1.

(Μονάδες 5)

Δ5. Αν την χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής του α ελαττώνεται με ρυθμό 2 $^{m}/_{sec}$,να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του Ε(α) την χρονική στιγμή όπου α(t_0)=1

(**Μονάδες 5)**

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x | συνx = 0\}$ έχουμε: $(εφx)' = \left(\dfrac{ημx}{συνx}\right)' = \dfrac{(ημx)'συνx - ημx(συνx)'}{συν^2x} = \dfrac{συνxσυνx + ημxημx}{συν^2x}$

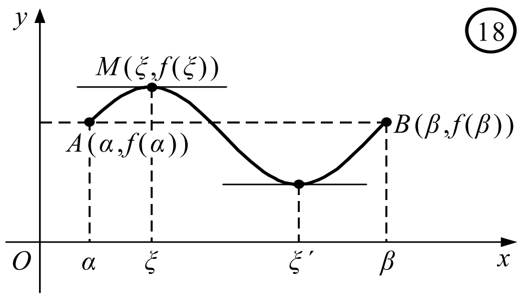
$= \dfrac{συν^2x + ημ^2x}{συν^2x} = \dfrac{1}{συν^2x}$.

Α2.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$ και
- $f(α) = f(β)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0$.



Α3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to α^+}\dfrac{f(x)-f(α)}{x-α} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to β^-}\dfrac{f(x)-f(β)}{x-β} \in \mathbb{R}$.

Α4.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$f^2(x) = x^2 + x + 1 > 0, \ \forall x \in R$ άρα $f(x) \neq 0$ στο R και συνεχής επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Θέτω $g(x) = \frac{1+f(x)}{x}$ για x κοντά στο 0. Έτσι $f(x) = -1 + xg(x), \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

Η f συνεχής άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. Επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο f(x)<0, $\forall x \in R$

Οπότε $f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$

B2. $\lim_{x\to+\infty}\left(x+f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}$

B3. $\frac{\alpha}{f(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=\alpha,\alpha\in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\leq-\frac{1}{2}$

Άρα έχουμε τον πίνακα μονοτονίας :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	<		>

Ο.Μ.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2},+\infty)$

Έχει ολικό μέγιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Το $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

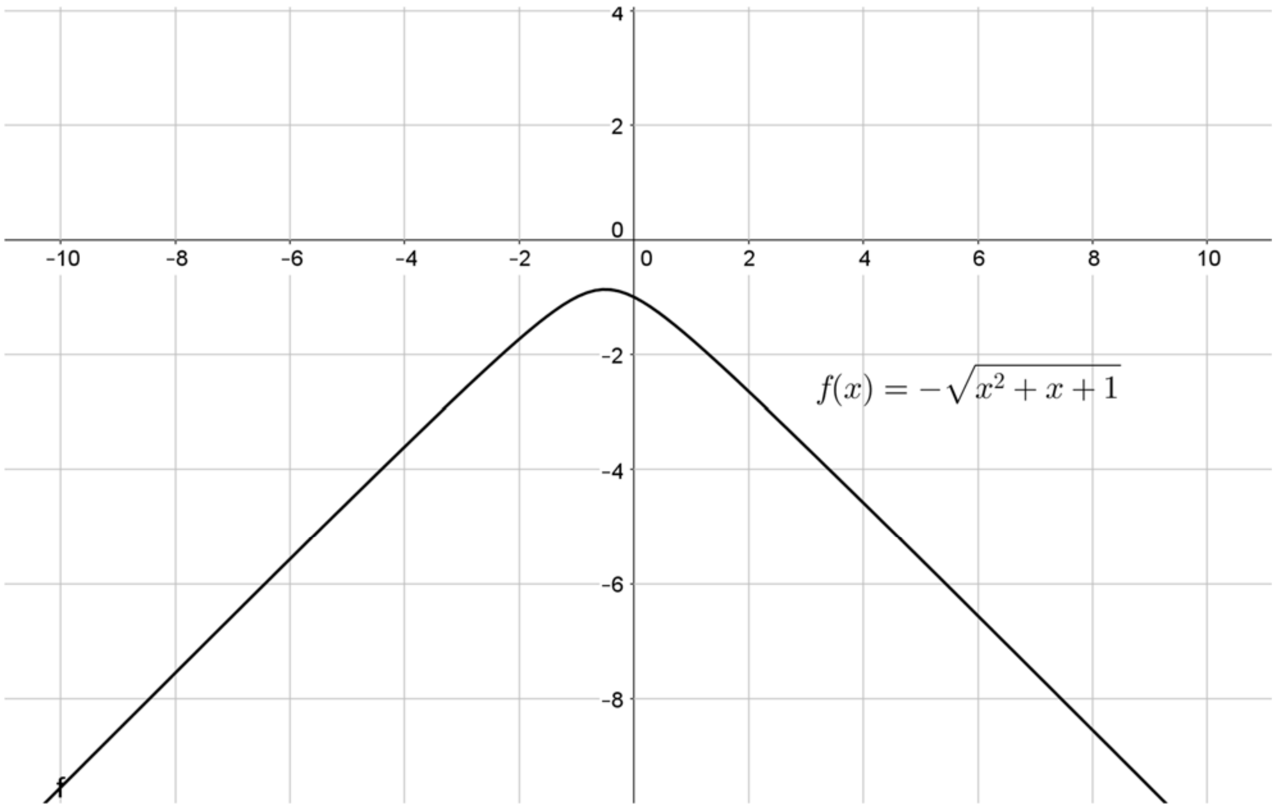
Έστω $A_1=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ και $A_2=[-\frac{1}{2},+\infty)$ Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_1 άρα

$f(A_1)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2 άρα $f(A_2)=\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Αν $\alpha<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση f(x)=α έχει ακριβώς 2 ρίζες μια στο A_1 και μια στο A_2

Αν $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση f(x)=α έχει ακριβώς μια λύση την $x=-\frac{1}{2}$

Αν $\alpha>-\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση f(x)=α είναι αδύνατη



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $g'(x) = \eta\mu x\big(f''(x) + f(x)\big) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 2x$

Οπότε $g(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + c$

Για x=0 , $c = \frac{1}{2}$ $g(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x) = \eta\mu^2 x$

Γ2. $g(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x).\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = (x)', x \in (0, \pi)$$

$\frac{f(x)}{\eta\mu x} = x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = x\eta\mu x + c_1\eta\mu x, x \in (0, \pi)$

Για $x = \frac{\pi}{2}$, $c_1 = 0$ άρα $f(x) = x\eta\mu x$ $x \in (0, \pi)$

$f(0) = f(\pi) = 0$ έτσι $f(x) = x\eta\mu x, x \in [0, \pi]$

Γ3. Η f συνεχής $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, \pi]$

Ε=$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi x.\eta\mu x\, dx = [-x\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sigma\upsilon\nu x dx = \cdots = \pi\ \tau.\mu.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) - 2e^{2x} \geq 0, \forall x \in R$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}, x \in R$ με $g(0) = 0$

Άρα έχουμε $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in R$

Το 0 εσωτερικό του R

Η g παραγωγίσιμη στο R άρα και στο 0 με $g'(x) = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$

Η g παρουσιάζει στο 0 τοπικό ακρότατο άρα από το θεώρημα του Fermat $g'(0) = 0 \Leftrightarrow$ $f'(0) = 1$.

Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

Δ2. Είναι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^2(x)}{x\eta\mu x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f^2(x)}{x^2}}{\frac{x\eta\mu x}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 1$$

Δ3.

$f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow e^{-x} f(x) - xe^{x} \geq 0, \forall x \in R$ Άρα $\int_0^1 \left(e^{-x} f(x) - xe^{x}\right) dx \geq 0$

Παρατηρώ ότι: $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - (e - 1) = 1$

Οπότε $\int_0^1 (e^{-x} f(x) - xe^x) dx = 0$

Αν η συνάρτηση $e^{-x} f(x) - xe^x$ δεν ήταν παντού 0 στο [0,1] τότε $\int_0^1 (e^{-x} f(x) - xe^x) dx > 0$

Άτοπο. ‘Αρα $e^{-x} f(x) - xe^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = xe^{2x} - x = x(e^{2x} - 1) \geq 0$ στο [0,α]

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha} (xe^{2x} - x) dx = \frac{a\boldsymbol{e}^{2a}}{2} - \frac{\boldsymbol{e}^{2a}}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} \tau.\mu$$

Δ5. $\alpha'(t_o) = -2$ m/s και $a(t_o) = 1$

$$E(t) = \frac{a(t)e^{2a(t)}}{2} - \frac{e^{2a(t)}}{4} - \frac{a^2(t)}{2} + \frac{1}{4}$$

$$E'(t) = \frac{a'(t)e^{2a(t)} + a(t)e^{2a(t)}2a'(t)}{2} - \frac{e^{2a(t)}a'(t)}{2} - a(t)a'(t)$$

$$E'(t_o) = \frac{-2e^2 - 2e^2 2(-2)}{2} - \frac{e^2(-2)}{2} - 1(-2) = 3e^2 + e^2 + 2 = 4e^2 + 2\ m^2/sec$$