ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x$\in[a, \quad]$ τότε $\int_{\sim} f(x)dx \geq 0$ ή αν δεν έχει τιμή 0 παντού στο [α,β] τότε $\int_{a} f(x)dx > 0$

Β. Πάνω σε αυτό αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x$\in[a, \quad]$ τότε

$\int_{\sim} f(x)dx \geq \int_{\sim} g(x)dx$

Γ. Αν f συνεχής στο [α,β] τότε έχει μέγιστη Μ και ελάχιστη τιμή m οπότε
$m \leq f(x) \leq M$ άρα με ολοκλήρωση $m(\quad -\sim) \leq \int_{\sim} f(x)dx \leq M(\quad -\sim)$

Δ. αν f(x)≥0 στο [α,β] και είναι μη μηδενική συνάρτηση στο [α,β] $\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$
Ε. αν f(x)≥g(x) στο [α,β] και είναι f-g μη μηδενική συνάρτηση στο [α,β]
$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
Να μελετηθεί η άσκηση 10 σελ 353

1. Αν f,g συνεχείς στο [α,β] και για κάθε x στο [α,β] f(x)≥g(x). Αν υπάρχει $x_o\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)\neq g(x_o)$ τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

2. Να δείξετε ότι :
   i. $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

   ii. $2 \leq \int_{0}^{1} e^{x} dx - \int_{1}^{0} e^{-x} dx \leq e + \frac{1}{e}$

   iii. $\frac{2\pi}{13} \leq \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\sigma\upsilon\nu x} \leq \frac{2\pi}{7}$

3. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [0, 1] με f(x) > 0 για κάθε x∈ [0,1]. Αν m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της f στο [0,1], να αποδειχθεί ότι: $\frac{m}{M} \le \int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{M}{m}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$, x στο [1,e]

i) Να μελετηθεί ως προς κυρτότητα και τη μονοτονία
ii) f(x)>0 στο [1,e]
iii) $\int_1^e e^x dx > \int_1^e \ln x dx$

4. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x^4+2014}}$, $x \ge 0$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}\ln x$, $x \in \left[\sqrt{e}, +\infty\right)$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι έχει ένα ακριβώς ολικό μέγιστο στο $\left[\sqrt{e}, +\infty\right)$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt$

6. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [0,1] και $\int_0^1 f(x)dx = 0,$ 2<f(x)<5 για κάθε στο [0,1] να δείξετε ότι :

α) $(f(x))^2 - 7f(x) + 10 < 0$ για κάθε x στο [0,1]

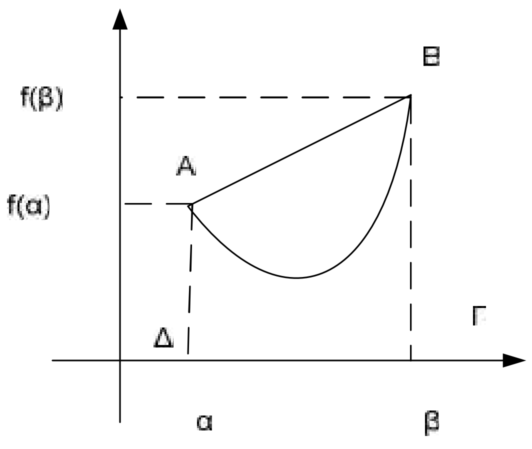
β) $\int_0^1 (f(x))^2 dx < -10$

7. Έστω μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β] με $f''(x) > 0, \forall x \in [a, \ \ ]$

i. Αν f(x)≥0 στο [α,β] να εξηγήσετε γεωμετρικά ότι

$\int_a f(t)dt < (\ \ - a)\frac{f(a)+f(\ \ )}{2}$

ii. Να δείξετε ότι ισχύει η παραπάνω ισότητα



1. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [0,1] και $\int_0^1 f(x)dx = 0, a < f(x) <$ για κάθε στο [0,1] να δείξετε ότι :
   α) $(f(x))^2 - (\alpha+\beta)f(x) + \alpha\beta < 0$ για κάθε x στο [0,1]

   β) $\int_0^1 (f(x))^2\, dx \le -a$

2. Έστω f συνεχής στο R να δείξετε ότι $\int_0^{\sqrt{3}} \left(3 + f^2(x)\right) dx \ge 2\int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx$

3. Έστω f συνεχής στο R με $1 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in [0,1]$ και $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$ να δείξετε ότι:
   i. $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{5}{2}$ ii. $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \le \frac{3}{4}$

4. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f :[α,β]→R Να δείξετε ότι
   $\int_{\sim} xf(x)dx \le \frac{(\; -\sim)^2}{2} f(\;) + a\int_{\sim} f(x)dx$

5. Έστω η συνεχής και θετική συνάρτηση στο [α,β] . Αν m,M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο [α,β] να δείξετε ότι
   $\frac{m}{M}(\; -\sim)^2 \le \int_{\sim} f(x)dx.\int_{\sim} \frac{1}{f(x)} dx \le \frac{M}{m}(\; -\sim)^2$

6. Έστω f,g συνεχείς στο [0,1]. Αν m η ελάχιστη τιμή της f, M η μέγιστη τιμή της g και ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{m+M}{2}$ να δείξετε ότι
   $\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \frac{m^2 + M^2}{2}$