

1. α. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$
 β. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(f \circ g)(x) = \alpha$
2. Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(4,-1)$ τότε:
 - i. να βρείτε τη μονοτονία της f
 - ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(x)-1) < 2$
3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + f(x) = x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
 - i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
 - ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
4. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι:
 - i. $f(0) = 1$
 - ii. $f(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - iii. αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι 1-1.
5. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + x^3 = 8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 - i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \alpha$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
 - iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 - iv. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(f(x)) + f(x) = -\frac{1}{4}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. η συνάρτηση f είναι 1-1
 - ii. αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.
7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(f(x)) = f(x) + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - x), \forall x \in \mathbb{R}$
 - ii. Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2) = 4$ να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f^{-1}(8)$.

8. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $(f(x))^3 + 5f(x) = x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) < x$.

9. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

β) η f είναι περιττή,

γ) $f(x-y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

δ) αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$, τότε η f είναι «1-1»,

ε) $f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (θέμα από Ε.Μ.Ε.)

ΟΡΙΑ

1. Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ και η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x < 1 \\ |z - i|^2 x^2 - |\bar{z} - 1|^2 x, & x \geq 1 \end{cases}$

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

α. Να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $x - y = \frac{1}{2}$

β. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς z έχει το ελάχιστο μέτρο.

2. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x) - \sin x| \leq x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Β. α. Να δείξετε ότι :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x} = a, (a \neq 0)$$

$$\beta. \text{ Να βρείτε το όριο: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) - f(-x) \cdot \ln 2x}{3x^2 - \ln^2 x}$$

$$3.i. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια: } \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta \mu x}{x^2 + 1} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \eta \mu \frac{2}{x} \right)$$

ii. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = \alpha + \beta i$, όπου α, β οι αριθμοί που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα και $w = \kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν οι εικόνες του w βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο την εικόνα του z και ακτίνα 2, να αποδείξετε ότι: $\kappa^2 + \lambda^2 + 4\lambda = 0$.

iii. Αν επιπλέον το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\kappa - 2)x^2 + 6x + 3}{\lambda x + 3}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε τα κ, λ καθώς και το όριο αυτό.

4. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w καθώς και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 3} + |z - 3i| \cdot x + |w - 4|$ για την οποία είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ Να βρείτε:

α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z και του w

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$

5. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(x-1)f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και το $A(1,3) \in C_f$

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 0$

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f^2(x) \ln \frac{1}{f(x)} \right)$

6. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και $\alpha\beta > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{b}{x}$$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(4)$ και η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x+2)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h .

β. Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής συνάρτηση.

γ. η εξίσωση $f(x) = f(x+2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

8. Μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

9. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[α,β]$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $(α,α)$ και $(β,β)$ και της g από τα $(α,β)$ και $(β,α)$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο είναι μοναδικό.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + αx + β$ με $α > 0, β < 0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z = (1 + 3i)(α + βi)$. Αν οι εικόνες

του z βρίσκονται στην ημιευθεία $y = x, x \geq 0$:

α. να αποδείξετε ότι: $α + 2β = 0$,

β. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$,

γ. αν επιπλέον $z = 10\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τον z

11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = |2z + 1| x^3 - zx - 1$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε

ότι αν $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{12}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

12. Έστω $α, β, γ \in \mathbb{R}$ με $α < β < γ < 0$ και $α + γ = 2β$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2 - a^2}{(x - b)(x - g)} - \frac{x^2 - g^2}{(x - a)} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α, γ)$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f: [α,β] \rightarrow [α,β]$ τέτοια ώστε $|(f(x) - f(y))| \leq \frac{1}{2} |x - y|$

για κάθε $x, y \in [α,β]$

Να αποδείξετε ότι

i. η f είναι συνεχής στο $[α,β]$

ii. η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[α,β]$

iii. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [α,β]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

14. Δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί z, w καθώς και η συνάρτηση $f(x) = |z| x^3 + |w| x^2 - |z + w|$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$.

15. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε ο αριθμός: $z = \frac{f(1) + i}{1 - f(5)i}$ να είναι φανταστικός.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = f(5)$.

β) Θεωρούμε και τη συνάρτηση: $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_g της g .

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in D_g$, ώστε $g(\xi) = 0$.

16. Έστω z και w δύο διαφορετικοί και μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί. Θεωρούμε και τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2|z|^x + |w|^x}{|z|^x + 2|w|^x}$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\chi_0) = 2\chi^{2010}$.

β) Αν ισχύει ότι $4|z|^2 > |z+w|^2 + |z-w|^2$, τότε:

ii) να αποδείξετε ότι $|z| > |w|$,

iii) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) + \ln^2 3x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = 16. \text{ Να βρείτε:}$$

α) Την τιμή $f(0)$

β) το $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2014)x^3 - 3x^2 + 2x - 1]$

18. Έστω f συνεχής στο $[0, \alpha]$ με $f(\alpha) + 2f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f(0) = 0$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$

ii. Η g παίρνει την τιμή 0

iii. Υπάρχει $x_0 \in [0, \alpha]$ με $f(x_0) = -\frac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{3}$

19. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Αν ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 1$ και $f(5) = 6$, να αποδείξετε ότι:

i. η ευθεία $y = 4$ τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 5)$

ii. υπάρχει μοναδικός $x_1 \in (1, 4)$ τέτοιος, ώστε $f(x_1) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{10}$

20. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $|z - 2i|^2 = 2|z - i|^2 + 1$ και $\frac{w}{z} = 4\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$

i) Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών z και w .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $|z + w| \cdot e^{2x} = x + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.