1.Δίνεται συνάρτηση $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} \sim \boldsymbol{x}^2+\quad ,\boldsymbol{x}\le 2 \\ \boldsymbol{x}^3+¥\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>2 \end{cases}$ να βρείτε τα α,β αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(2,f(2)) είναι // στην ευθεία y=-8x+10

2. Η συνάρτηση f R→R είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=2$ Αν η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x^3+1), x<1 \\ f(2x), x\ge 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_o=1$, να αποδείξετε ότι

α. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=3f'(2)$ β. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=2f'(2)$

γ. $f'(2)=0$ δ. Η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη

3. Έστω η συνάρτηση f (1,+∞) με:

$$f(x) = 2014 + |\ln(x-1)| \quad \text{και } c\in R \text{ με } c>2014$$

i. Να βρείτε την παράγωγο της f.

ii. Αν η ευθεία με εξίσωση y = c τέμνει την C_f σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους.

4. Έστω $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\dfrac{4}{\boldsymbol{x}-2},\boldsymbol{x}\neq 2$. Αν Α,Β είναι σημεία της C_f ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά να έχουν συντελεστή διεύθυνσης -1 τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α,Β.

ii. Να γράψετε τις εξισώσεις $(ε_1)$, $(ε_2)$ των εφαπτόμενων στα σημεία αυτά.

iii. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση g ισχύει η σχέση:

g(1-x)-g(1+x)=-2x, για κάθε x πραγματικό

να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο (1,g(1)) είναι κάθετη στις $(ε_1)$, $(ε_2)$.

5.Έστω f:(0, +∞) →R παραγωγίσιμη και: $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{i}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{z}_2=\dfrac{1}{\ \ ^2}+\dfrac{1}{\boldsymbol{f}(\ \ )}\boldsymbol{i}$ $,0<α<β$,

f(β)≠0

i. Αν $\left|z_1+\overline{z_2}\right|=\left|z_1-\overline{z_2}\right|$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $x_o f'\left(x_o\right)=2f(x_o)$

ii. Αν $\operatorname{Im}(z_1.z_2)=\dfrac{f(a)}{2^{\;\;2}}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in R$ τέτοιο ώστε $f(\theta)=0$

6.Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1,2] και με συνεχή παράγωγο στο [1,2]. Επίσης ισχύουν: $f(1)=f(2)-\dfrac{7}{3},\ f'(1)>4$

Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in$ (1,2) τέτοιο ώστε $f'\left(x_o\right)=x_o^2$

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (1,2) τέτοιο ώστε: $f'(¶)=4¶$

7. Έστω η συνάρτηση f: R→R με f(0) = 0 ώστε: $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1},\forall x\in R$

i. Να δείξετε ότι:

Η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + f(x)-x$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2-2) + f^3(x) = x$

iii.Να δείξετε ότι: $f^3(x) < x$ για κάθε $x > 0$

iv. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{x}=1$

8. Εστω f R→R παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f(x) = \ln[f(x)]+e^x$, x∈R και f(x)>1 για κάθε x πραγματικό

α. Να εκφραστεί η f' συναρτήσει της f

β. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln[f(x)]$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0,1) τέτοιο ώστε $f'(\xi)>e-1$

9. Έστω η συνάρτηση $f:[1,2]\rightarrow R$ για την οποία ισχύουν: $f''(x)>0$ για

κάθε $x\in[1,2]$, $f(2)=2f(1)$

i. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

ii Για κάθε $x\in(1,2)$ δείξτε ότι: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$

10. Έστω η συνάρτηση f $R\rightarrow R$ παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=2$ και
$\left[f(x)-e^x\right]\left[f'(x)-e^x\right]=0$ για κάθε x πραγματικό

α. Να δείξετε ότι $\left[f(x)-e^x\right]^2=1$

β. Να βρείτε τον τύπο της f

11.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{2x}{e^x}$ και $g(x)=e^x-\dfrac{x^3}{3}-x-1$

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f και να αποδείξετε ότι $e^x>2x$, για

κάθε $x\in R$

γ. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της g

ε. Να λύσετε την ανίσωση: $g(e^{2x})<g(4x^2+1)$, $x\in R$

12. Έστω $z\in C$ που η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο και
$f(x)=|xz+\bar{z}|^2, x\in R$

i. Αποδείξτε ότι $f(x)=x^2+2x\mathrm{Re}(z^2)+1$

ii. Αν $f(x)\geq 1$για κάθε x πραγματικό τότε :

α. ο $z^2\in I$

β. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{e^x}\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]$

13. Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^x+(x-1)i$

i. Να δείξετε ότι Re(z)>Im(z) για κάθε x πραγματικό

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε ο αριθμός $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός

iii. Να βρείτε το μιγαδικό z που έχει το ελάχιστο μέτρο

14. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}, x\in R$ όπου z= α + βi, α, β ∈R με α > 0

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x), \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και **το** πλήθος των ριζών της f.

15. i. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f Δ→R είναι κυρτή στο Δ και α <β<γ να δείξετε ότι:

$$\frac{f(\ \ )-f(\sim)}{-a}<\frac{f(¥)-f(\ \ )}{¥\ -}$$

ii. Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x)= x^x$, x>0 ως προς τη κυρτότητα

iii. Αν 0 < α < β < γ να δείξετε ότι: $(\alpha-\beta)\gamma^{\gamma}+(\beta-\gamma)\alpha^{\alpha}+(\gamma-\alpha)\beta^{\beta}<0$

16.Έστω f (0,+∞)→R παραγωγίσιμη με $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x, \forall x>0$

i. Να βρείτε την f και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της $g(x)=f(x).f\left(\dfrac{e}{x}\right), x>0$

iii. Αν 0<α<β<γ να δείξετε ότι :

a. $\ln^2 a+\ln^2\ \ +\ln^2 ¥+\dfrac{3}{4}\geq\ln(a\ \ ¥)$

b. $\left(\dfrac{—}{\sim}\right)^{¥-}>\left(\dfrac{¥}{—}\right)^{-\sim}$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^x+\quad{}^x+\text{¥}^x-3}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ $,a,\quad,\text{¥}\in\Delta=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Αν η f είναι συνεχής στο R να αποδείξετε ότι:

i. αβγ=1

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(0,f(0)).

18. Δίνεται η συνάρτηση f: (0, +∞) → R για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι κυρτή στο (0,+ ∞)
- Η ευθεία με εξίσωση y= 3x + 4 είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞

  i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$

  ii. Να δείξετε ότι:

$$f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x), \forall x>1$$

  iii. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$

19. α. Έστω ο μιγαδικός z∈C. Αν για τον z ισχύει η σχέση: $(1+i)z+(1-i)\overline{z}+4=0$

να δείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται σε ευθεία (ε).

β. Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος είναι πλάγια ασύμπτωτη

της $f(x)=ax+\quad+\dfrac{x^2}{e^x}$ όταν χ→ +∞, να βρείτε τις τιμές των α, β∈R

γ. Να βρείτε την ασύμπτωτη της $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, καθώς x→+∞

20. Έστω η συνάρτηση: f(x) = x 1η x - λx+1, x>0 λ∈R

i. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων καθώς και την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1-e^{\lambda-1}$ για κάθε χ>0.

iii.**Ν**α δείξετε ότι η f είναι κυρτή και για α,β>0 με α + β =2, είναι αlnα + βlnβ≥0

21.Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο (0,+∞) για τις οποίες ισχύει:
$\boldsymbol{f(x)=g(x)+axe^{\frac{1}{x}}}$ για κάθε x>0 όπου α<0, β>0 και $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{g(x)}=$

i. Να δείξετε ότι η ευθεία y=αx+α+β είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f +∞

ii.. Αν η εικόνα του μιγαδικού z =α + βi βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία

της C_f όταν x→+∞ και $|\boldsymbol{z}|=\sqrt{2}$ να γράψετε τους μιγαδικούς $\boldsymbol{w}_1=\frac{\boldsymbol{z}^2}{2},\boldsymbol{w}_2=\frac{\boldsymbol{z}^{2006}}{2^{1003}}$ στη μορφή x+yi

iii. Να δείξετε ότι: f(x)≤g(x)+αe για κάθε x > 0

22. Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$ και $w=f(\alpha)+i\cdot f(\beta)$ με $f(\beta)\neq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι:

a. Ο αριθμός $z_1=\frac{1+\beta-i\cdot\overline{z}}{1+f(\beta)-i\cdot\overline{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(\alpha)=\alpha$.

b. Αν $z=-i\,w$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή 0 των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

B. Έστω ότι ισχύει $|z-i\,w|^2=|z|^2+|i\,w|^2$. Να αποδείξετε ότι:

a. $\alpha\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(\alpha)=0$.

b. Οι εικόνες των z, w και η αρχή 0 είναι συνευθειακά σημεία.

c. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0,\ f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $0\,(0,\,0)$.

23. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R* με $f(0)=\frac{1}{2}$ και:

$$f'(x)+f^{2}(x)e^{x}=0, \forall x\in R$$

α. Να βρείτε την f και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+e^{x}}+\frac{1}{1+e^{y}}\geq\frac{2}{1+e^{\frac{x+y}{2}}}, \text{ για κάθε } x,y\geq 0$$

γ. $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+\ }\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sim}},\forall\sim,\quad\geq 1$

24. Έστω οι συναρτήσεις f,g R→R για τις οποίες ισχύει για κάθε x∈R

$$f(x)+ig(x)=(1-xi)^{3}.$$

α. Βρείτε τους τύπους των δύο συναρτήσεων

β. Βρείτε τις τιμές του α ∈R ώστε η εξίσωση g(x) = α να έχει ακριβώς μια λύση στο (-1, 1).

γ. Βρείτε τα λ,β∈R ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{f(x)}-\text{ª}\,x\right]=$

25. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+a, a\in R$ Αν ισχύει: $f(x)\geq 0$ για κάθε x∈(0, + ∞)

τότε:

α) να αποδείξετε ότι α = -1,

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα,

γ) να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0,

δ) να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(2k^2+2\right)-\frac{1}{k^2+3}>\ln\left(k^2+3\right)-\frac{1}{2k^2+2}$

26. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (0,+∞) τέτοια ώστε :

- Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o=1$
- Ισχύει $f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)=e^{-\frac{1}{x}}, \forall x>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{\frac{1}{x}}f(x)$

α. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞)

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 f'(x)}{x-1}$

γ. να βρείτε τις ασύμπτωτες της f

27. Δίνεται η συνάρτηση f :(0, +∞) με τύπο f (x) = x lnx για κάθε x∈ (0, +∞) .

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
b) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A(l, 0).
c) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 1-\frac{1}{x}$, για κάθε x>0
d) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση

$$α\cdot β\cdot γ = 1,$$

να αποδείξετε ότι $\frac{1}{a}+\frac{1}{}+\frac{1}{¥}\geq 3$

28. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, -1<x<0 ή x>0\\ e, x=0\end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii Να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\left[\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right]$ για κάθε $x\in D_f$ με $x\neq 0$.

iii. Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο διάστημα $A = (-1,0)\cup(0,+\infty)$

iv. Για κάθε $t\in(0,1)$ να δείξετε ότι ισχύει: $(1+t)^{\frac{1}{t}}<e<(1-t)^{-\frac{1}{t}}$

29. α.Έστω ο μιγαδικός $z\in C$ με $|z|<\frac{1}{2}$ και $W=iz(2z^2+1)$. Να δείξετε ότι: $|w|<\frac{3}{4}$

β.Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R → R για την οποία ισχύει:
$f^3(x)+4\sqrt{|w|}f^2(x)+3f(x)=x^{2013}+x^{2011}-1, \forall x\in R$ Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, 1).

30. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : [α, β] →R για την οποία ισχύει: f '(x) > 0 για κάθε x∈ [α, β].

Έστω ακόμα οι μιγαδικοί z = x + f(x)i, x∈[α, β]

για τους οποίους ισχύει: |z-f(α)i|≤|z-f(β)i| για κάθε x∈ [α,β]

α. Να δείξετε ότι $f(x)\leq\frac{f(a)+f(\ )}{2}, \forall x\in[a,\ ]$

β. Αν $f'\left(\frac{f(a)+f(\ )}{2}\right)=0$

i.Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-2\,f\left(\frac{a+}{2}\right)f(x)+2014$ ως προς τη μονοτονία στο [α,β]

ii. Να δείξετε ότι $\frac{f(a)+f(\ )}{2}<f\left(\frac{a+}{2}\right)$