ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

1. **Να αποδειχθούν οι ισότητες**

α. $25^{\log_5 10} = 100$ β. $3^{1+\log_3 11} + 12 = 45$ γ. $36^{\log_6 4-2} = \frac{1}{81}$

2. **Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων**

Κ= $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$, **Λ =** $e^{\frac{1}{2}\ln 4} \bullet e^{-\ln\frac{1}{2}}$, **Μ =** $\frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}}$, **Ν =** $\frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$.

3. **Να αποδειχθεί η ισότητα** $\ln(e^x + 1) = x + l\,n(1 + e^{-x})$.

1. **Η παράσταση** $\sqrt{(\log 3)^2 + (\log\frac{1}{3})^2}$ **είναι ίση με**

Α. 0 **Β.** $\log\sqrt{3}$ **Γ.** $\sqrt{2}\log 3$ **Δ.** $\sqrt{2}\log\frac{1}{3}$ **Ε.** 2log3.

2. **Αν** $\log_2 3 = m$, **τότε ο** $\log_3 18$ **είναι**

Α. 2+m **Β.** $\frac{1+m}{m}$ **Γ.** $\frac{2+m}{m}$ **Δ.** $\frac{m}{1+m}$ **Ε.** $\frac{2m+1}{m}$

3. **Αν είναι** $\log_2(2^x x^2) = \log_3(3^x.x^y)$ **τότε να δείξετε ότι** $2^y=9$

4. **Ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου είναι ο log3 και ο δεύτερος ο log27**
   - **I.** **Να υπολογίσετε τη διαφορά ω**
   - **II.** **Να δείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι** $S_\nu = \nu^2.\log 3$

5. **Αν** $x = 2^{\ln 2}.4^{\ln 4}.8^{\ln 8}$ **και** $y = 3^{\ln 3}.9^{\ln 9}.27^{\ln 27}$ **τότε :**
   - **I.** **Να δείξετε ότι** $x = 2^{\ln(2^{14})}$ **και** $y = 3^{\ln(3^{14})}$
   - **II.** **Να δείξετε ότι** $\sqrt{\log_x y} = \frac{\log 3}{\log 2}$

6. **Η ένταση ενός σεισμού στην κλίμακα Richter , ως συνάρτηση της ενέργειας Ε που ελευθρώνεται κατά την διάρκεια του σεισμού, δίνεται από τον τύπο**

$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ **όπου** $E_0 = 10^{4,4}$ **Joules είναι η ενέργεια στο επίπεδο αναφοράς. Να βρεθεί η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού 4,2 Richter.**

7. **Οι πωλήσεις P(t) (σε χιλιάδες μονάδες) ενός προιόντος, σε διάστημα t χρόνων μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνονται από τον τύπο** $P(t) = 50(1 - e^{kt})$.

Α. Αν τον πρώτο χρόνο οι πωλήσεις ανέβηκαν σε 12.000 μονάδες, να βρεθεί ο αριθμός κ.

Β. Πόσες είναι οι πωλήσεις στα 3 πρώτα χρόνια ;

8. Σε αριθμητική πρόοδο, ο πρώτος όρος είναι logα και ο δεύτερος logβ. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

9. Αν οι αριθμοί $\log_\alpha x,\log_\beta x,\log_\gamma x,$ όπου χ>0 και οι α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί και διάφοροι της μονάδας, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι $\gamma^2=(\alpha\gamma)^{\log_\alpha\beta}$.

10. Αν α, β θετικοί αριθμοί και $a^2+\beta^2=7a\beta$, να δειχθεί ότι

$$\log\frac{a+\beta}{3}=\frac{1}{2}(\log a+\log\beta)$$

11. Αν $\log_2(axy)=m+2,\log_2(\beta xy)=m-1,$ να αποδειχθεί ότι

$$\log_4\left(\frac{\beta}{a}\right)=-\frac{3}{2}.$$

12.Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με α_3 = log125 και η διαφορά της είναι ίση με ω = log5.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A=\alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{29}$.

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1=\alpha_1$ και $\beta_2=\alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B=\beta_1+\beta_3+\beta_5+\ldots+\beta_{1999}+\beta_{2001}$.

13. Αν ισχύει $\frac{\ln a}{\beta-\gamma}=\frac{\ln\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\ln\gamma}{a-\beta}$ όπου α,β,γ>0 διαφορετικοί μεταξύ τους

Να δείξετε ότι

i. αβγ=1 ii. $\alpha^\alpha.\beta^\beta.\gamma^\gamma=1$

5. Να αποδείξετε ότι:

i. 4log2+log5-log8=1

ii. $\frac{1}{2}\log 9+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{2}\log 16-\log 3=3\log 2$

iii. $\ln 4+\ln 5-2\ln 2-\ln\frac{5}{e}=1$

iv. $\log\left(3+2\sqrt{2}\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)^4-\log\left(\sqrt{2}-1\right)=-\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

v. $\log\left(4-2\sqrt{3}\right)+2\log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=0$

vi. $\frac{1}{e}\ln\sqrt[\frac{1}{e}]{e}+1-e\ln\sqrt[e]{e}+\ln(e\sqrt{e})=\frac{5}{2}$

14. Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A=-\log 70+\log\left(3+\sqrt{2}\right)+\log\left(2+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)+\log\left(2-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$$

15. Θεωρούμε το άθροισμα S = logx+log^{2}x+log^{3}x+…+log^{ν}x με 0<x≠10

i. Να υπολογίσετε το S

ii. Αν το άθροισμα των3 πρώτων όρων είναι 14 να βρείτε το x

8. Μια αριθμητική πρόοδος ($α_ν$) έχει πρώτο όρο $α_1$ = log(συνx) και 2^ο όρο $α_2$ = log(συν^{2}x),

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

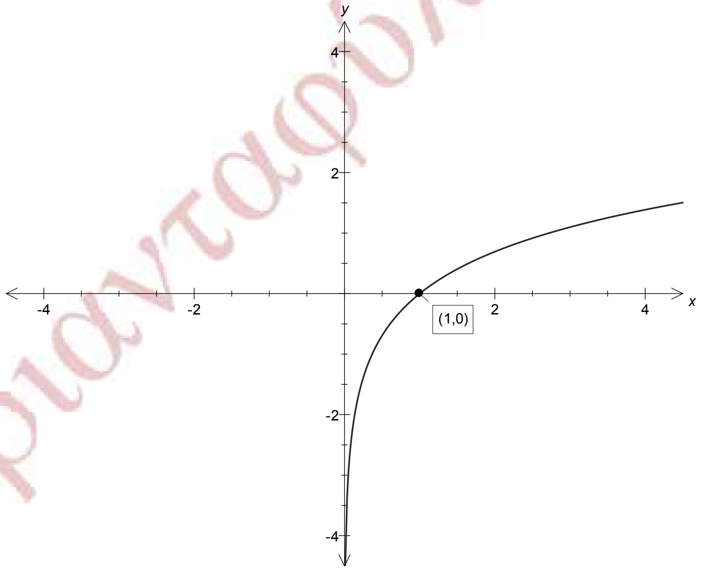
i. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου

ii. Αν ισχύει $S_5=-\dfrac{15}{2}\log 2$ **να βρείτε τον x**

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η συνάρτηση f(x) = lnx

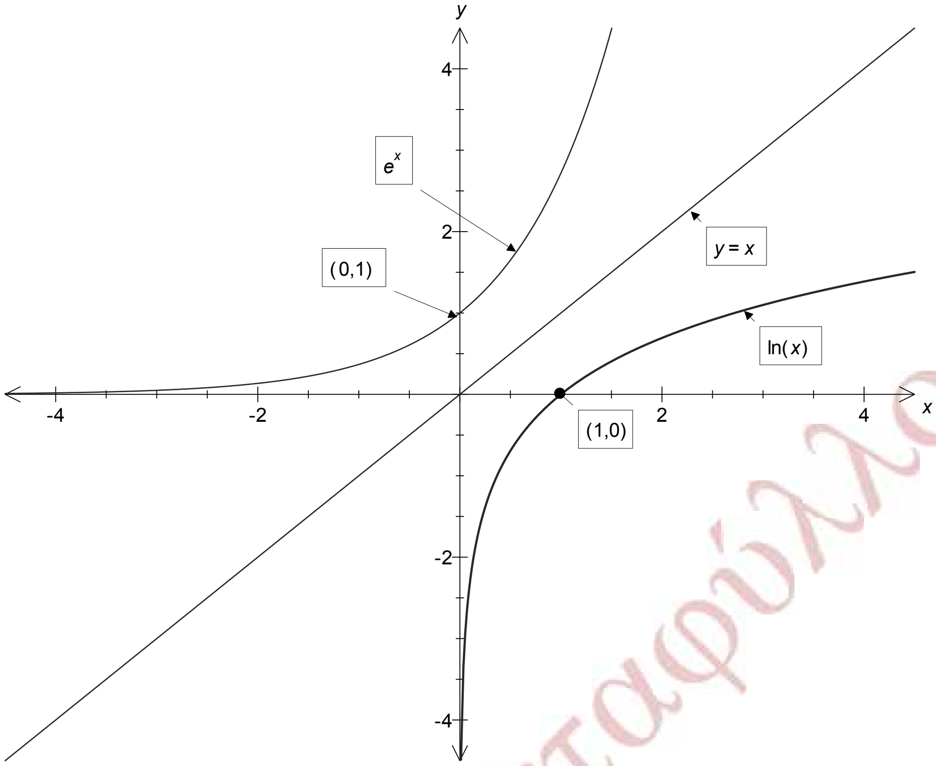
έχει πεδίο ορισμού το(0,+∞)
και συνολο τιμών το R



- **Είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή**
  Για κάθε x_1,x_2 ∈ (0,+∞) με x_1<x_2
  ⇔ lnx_1<lnx_2 Είναι 1-1 δηλαδή
- **Για κάθε x_1,x_2 ∈ (0,+∞) με x_1≠x_2**
  ⇔ lnx_1≠lnx_2 ή αντιθετοαντίστροφα για κάθε **x_1 , x_2 ∈ (0,+∞) με lnx_1=lnx_2 ⇔ x_1=x_2.**
- **Τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(1,0) αφού f(1)=ln1=0**
- **Δεν τέμνει τον y΄y και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄**

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Σχόλιο: Οι εκθετικές συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ ειναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.Α. Αν $f(x) = \ln x$ να λυθεί η εξίσωση $f(x+1) = f(3x+1) - f(x)$
Β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)= 2\log(4-x)+\log(x^2-4)-\log x$

2. **Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2\log(4-x)+\log(x^2-4)-\log x$**

3. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$
   I. **Βρείτε το πεδίο ορισμού της**
   II. **Να δείξετε ότι είναι περιττή**
   III. **Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$**

4. **Να λύσετε τις εξισώσεις:**
   a. $5^x=2^{3-x}$
   b. $3^{x-2}=2^{x+2}$

5. **Αν οι αριθμοί $\log 2$, $\log(2^x-5)$ και** $\log\left(2^x-\dfrac{7}{2}\right)$ **είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρεθεί ο x**

6. **Να λυθεί η ανίσωση** $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{4x+6}{x}\right)\geq 0$

7. **Να λυθεί το σύστημα :** $\begin{cases} \log_y x = \dfrac{3}{2} \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$

8. **Α. Να λυθεί η εξίσωση** $\log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, 0 < x, y \neq 1$

   Β. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2} \\ x.y = 64 \end{cases}$

9. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x) = x^{\frac{1}{\log x}}.\log x$
   Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
   ΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση f(x) < 1

10. **Να λυθεί η εξίσωση** $1000^{x^2}.100^x = 2$

11. **Α. Έστω α > 0 και η εξίσωση $\alpha^x = x^\alpha$ (1) , x>0**
    Β. Να δείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$

12. **Έστω το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^4 + (\ln^2 k)\chi^3 + (\ln k)x^2 - 2x - 1$, k>0 Αν το P(x) έχει παράγοντα το x-1 να βρείτε τις τιμές k_1, k_2 του k με $k_1 > k_2$ Στη συνέχεια να λυθεί η ανισότητα $\log(k_1 x) < \log(k_1 k_2) - \log(k_2 x) + 2k_1$, x>0**

13. **Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = log(x-2) και g(x) = 1-log(x+1)**
    Ι.Βρείτε τα πεδία ορισμού αυτών
    ΙΙ. Να βρείτε το σημεία τομής των C_f και C_g

14. **Την 1η Ιανουαρίου 1995 μια πόλη Α είχε 200.000 κατοίκους Την ίδια ημερομηνία η πόλη Β είχε 150.000κατοίκους Διαπιστώθηκε ότι ο πληθυσμός της πόλης Α μικραίνει κατά 3% κάθε έτος , ενώ της πόλης Β αυξάνει κατά 5% κάθε έτος**

Α. Να βρεθεί ο πληθυσμός των 2 πόλεων :
Ι. το 1996 ΙΙ. το 1997

Β. Με α_ν συμβολίζουμε τον πληθυσμό της πόλης Α την 1η Ιανουαρίου του έτους 1995+ν και με β_ν τον πληθυσμό της πόλης Β το ίδιο έτος
Ι. δείξτε ότι οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) είναι γεωμετρικές πρόοδοι και να βρείτε τους λόγους τους
ΙΙ. Να εκφραστούν οι όροι α_ν , β_ν συναρτήσει του ν
ΙΙΙ. Ποιο έτος ο πληθυσμός της πόλης Α θα είναι μεγαλύτερος από τον πληθυσμό της πόλης Β ; (Δίνεται ότι $\dfrac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{105}{97}} \simeq 3,63$**)**

15. **Να λύσετε τις εξισώσεις :**

Ι. $\log(4^x + 15.2^x + 27) = 2\log(4.2^x - 3)$

ΙΙ. $\ln(1+x) = \ln_{e^2}(6x-2)$

16. Δίνεται η συνάρτηση **f(x)= ln|x-1|**

Ι.Βρείτε το πεδίο ορισμού

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 1

ΙΙΙ.Να λυθεί η ανίσωση f(x)< 0

17. Δίνεται η συνάρτηση **$f(x)=\ln^2 x^2-1$**

Ι.Να Βρείτε το πεδίο ορισμού της

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=0

ΙΙΙ.Να λυθεί η ανίσωση f(x)>0

18. Δίνεται το πολυώνυμο **$P(x) = 3x^3-19x^2+38x-24$**

Ι.Να λυθεί η εξίσωση P(x)=0

ΙΙ.Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(2^x)$ =0 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$

Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ΙΙ. Να λύσετε την ανίσωση f(x)+2ln2≤ 0

ΙΙΙ.Να λύσετε την εξίσωση f(x) = - 1

20. Αν **ln2, $\ln(e^x-1)$** και **$\ln(e^x+3)$** αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου να βρείτε το x

21. Η ατμοσφαιρική πίεση **P** σε ύψος **h** σε **Km** δίνεται από τη σχέση **$P(h)=P_o e^{-\lambda h}$** με αρχική πίεση **P_o=760** μονάδες στην επιφάνεια της θάλασσας

a. Αν σε ύψος **h = 1** η πίεση είναι **P=670** να δείξετε ότι $e^{-2\lambda} = \left(\dfrac{67}{76}\right)^2$

b. Βρείτε την πίεση σε ύψος **h = 2Km**

c. Να βρείτε το ύψος που η πίεση είναι το μισό της αρχικής

22. Ένα κομμάτι μετάλλου χάνει θερμότητα σύμφωνα με τη συνάρτηση

$\Theta(t) = t_o \cdot e^{-0,2t}$ όπου **Θ(t)** η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του μετάλλου και του περιβάλλοντος ατμόσφαιρας μετά από **t sec** ενώ **t_o** είναι η αρχική διαφορά θερμοκρασίας του μετάλλου που έχει **330°C** και της ατμόσφαιρας που έχει θερμοκρασία **30_oC**

Α. Βρείτε τη θερμοκρασία του μετάλλου μετά από **5s , 10s** και **20s**

Β. Μετά από πόσα λεπτά η διαφορά της θερμοκρασίας θα είναι το μισό της αρχικής διαφοράς ;

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$

Α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β. Να δείξετε ότι είναι περιττή

C. Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τις ευθείες $y = \dfrac{2}{3}$ και $y = -\dfrac{2}{3}$

24. Έστω **Q(t)** η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), **t** έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν **300.000**

δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου α, β $\in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}, \quad t \geq 0$,

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.

25. Έστω η ακολουθια $\alpha_\nu = \ln\sqrt{e^5.2^\nu}$

I. Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον 1^o όρο

II. Να δείξετε ότι $S_{40} = \ln(2^{800}.e^{100})$

III. Βρείτε ποιος όρος της ακολουθίας ισούται $\dfrac{5}{2} + \ln 16$

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$3^{x-1}=e^{2-x}$ $\qquad$ $\ln(e^x+2^x)=x+\ln 3$

$x^{\ln 3} = e^2 x$ $\qquad$ $\ln(1-x)>1+\ln x$

1. να λυθεί η εξίσωση $2\ln(2x-1) - \dfrac{1}{2}\ln 9 = \ln(x-1) + \ln(x+1)$

26. Αν $\log_x y = \dfrac{3}{2}$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση $A = \dfrac{\ln x - \ln y}{\ln x + \ln y}$

27. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii Να δείξετε ότι $f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

iii. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η C_f είναι πάνω από την y=1

28. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) =\ln(2e^{3x}-e^x)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(2e^{2x}-1)+x$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι πάνω από την ευθεία ε:y=x.

δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι κάτω από τον x'x.

ε. Αν α η ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 τότε να δείξετε ότι η ανίσωση $e^{f(x)}-2e^{3x-\alpha}>0$ είναι αδύνατη.

29. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=ln2.

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x)<0.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α, της f.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x + f(-x)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii.Να λύσετε την εξίσωση f(x) =ln2.
iii.Να λύσετε την ανίσωση f(x) < 0.

32.Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(2e^{3x} - e^x)$.

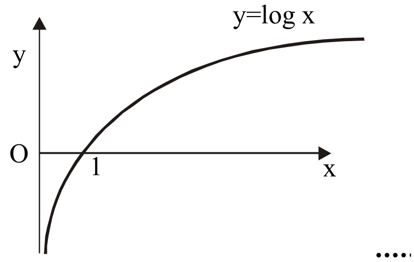
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $f(\chi) = \ln(2e^{2x} - 1) + x$.
iii. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι πάνω από την ευθεία ε : y = x.
iv. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι κάτω από τον χ'χ.
v. Αν α η ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 τότε να δείξετε ότι η ανίσωση $e^{f(x)} - 2e^{3x-2\alpha} > 0$ είναι αδύνατη

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

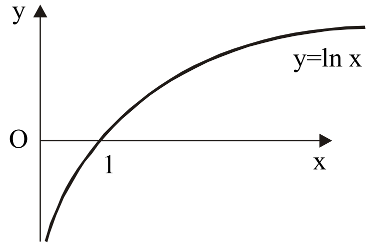
1. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο f (x) = $\log_2 x$ (Σχ.1) είναι

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$
Β. το διάστημα $(0,+\infty)$
Γ. το σύνολο **R**
Δ. το σύνολο **R***
Ε. το σύνολο **R -{1}**



.....

2. * Η συνάρτηση με τύπο f (x) = lnx (Σχ.9) είναι
Α. γνησίως αύξουσα
Β. άρτια
Γ. περιττή
Δ. γνησίως φθίνουσα
Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 9

3. **** Για την συνάρτηση με τύπο f (x) = |lnx| (Σχ.10) δεν ισχύει ότι**

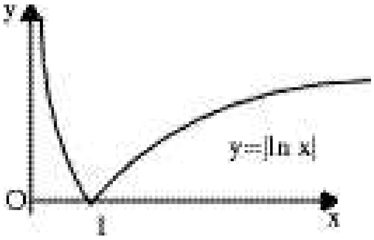
   Α. έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

   Β. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,+\infty)$

   Γ. έχει ελάχιστο το 0 για x =1

   Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

   Ε. τέμνει τον άξονα y΄y.



Σχ. 10

4. *** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = e^x είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x)= lnx (Σχ.13) ως προς**

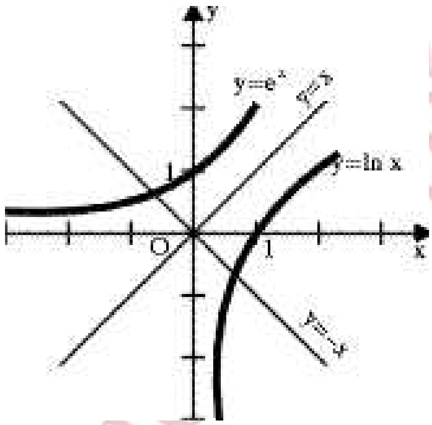
   Α. τον άξονα y΄y.

   Β. το σημείο (0,0)

   Γ. την ευθεία y= x

   Δ. την ευθεία y= -x

   Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 13

5. *** Η ισοδυναμία $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow x = \alpha^y$ ισχύει πάντοτε με τις προϋποθέσεις**

   Α. $x \in \mathbf{R}$ και $\alpha > 0$ **Β.** $x \in [0,+\infty)$ και $0 \le \alpha \ne 1$

   Γ. $x \in (0,+\infty)$ και $0 < \alpha \ne 1$ **Δ.** $x \in \mathbf{R}$ και $\alpha \ne 1$

   Ε. $x \ge 0$ και $\alpha \ge 0$

6. *** Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με**

   Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 10 **Δ.** 100 **Ε.** 10.000

7. *** Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με**

   Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

8. *** Η παράσταση log12 - log3 είναι ίση με**

   Α. log9 **Β.** log15 **Γ.** log36 **Δ.** 12log3 **Ε.** log4

9. *** Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με**

   Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

10. * Η παράσταση $\frac{\log 2}{\log 3}$ **είναι ίση με**

Α. $\log\frac{2}{3}$ **Β.** $\log_2 3$ **Γ.** $\log_3 2$ **Δ.** $\log\frac{3}{2}$ **Ε. τίποτα από τα προηγούμενα**

11. * Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8$ **είναι ίση με**

Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ. 1** **Ε. log200**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x)=\log(1-x)$ **ii)** $\log(1+x)=1+\log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$ **iv)** $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$

2. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$ **ii)** $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

iii) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$

3. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$ **ii)** $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$

4. ** α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$.

5. ** Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1=\log_3 3$ **και ο δεύτερος όρος της είναι** $\alpha_2=\log_3 81$.

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_\omega x^3}-9\cdot 3^{\log_\omega x^2}-9\cdot 3^{\log_\omega x}+81=0$.

6. ** i) Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x}=x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x}=54-x^{\log 3}$

7. ** **i) Να αποδείξετε ότι:** $x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$ **αν** $0 < x \neq 1$

   ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$

   iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $\alpha^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta \alpha}$ **με** $(0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1)$

8. ** **i) Να αποδείξετε ότι** $x^{\log y} = y^{\log x}$ **με** $x, y > 0$

   ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

   iii) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:

   $\log[\log(x^2 + x\log\theta - 110)] = 0$ **να βρείτε το** $\theta \in R^*_+$

9. ** **Δίνεται η συνάρτηση με τύπο** $f(x) = \log_2 \dfrac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot [\log_{\frac{1}{2}}(x-1)]$.

   i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

   ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \log_2 \dfrac{(x-2)(x-1)}{x}$

   iii) Να λύσετε ως προς λ∈R την εξίσωση: $2\lambda f(4) = \log_2 3^{\lambda-2} + (2-\lambda)\cdot\log_2 2$.

10. ** **Να λύσετε την εξίσωση:** $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

11. ** **Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.**

12. ** **Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:**

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \cdots + \log x^{2\nu-1} = 2\nu^2$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * **Αν** $0 < \alpha \neq 1$ **και** $\theta > 0$ **ισχύει η ισοδυναμία.**
   $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$.   **Σ   Λ**
2. * **Αν** $0 < \alpha \neq 1$ **ισχύει ότι** $\log_\alpha \alpha^x = \alpha$ **Σ   Λ**
3. * **Αν** $0 < \alpha \neq 1$ **ισχύει ότι** $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ **Σ   Λ**
4. * **Αν** $0 < \alpha \neq 1$ **ισχύει ότι** $\log_\alpha 1 = 1$ **Σ   Λ**
5. * **Αν** $0 < \alpha \neq 1$ **ισχύει ότι** $\log_\alpha \alpha = 1$ **Σ   Λ**
6. * **Αν** $\theta > 0$ **ισχύει ότι** $\log(10\theta) = 1 + \log\theta$ **Σ   Λ**
7. * **Αν** $\theta > 0$ **και** $\theta \neq 10$ **ισχύει ότι** $\log\left(\dfrac{\theta}{10}\right) = 1 - \log\theta$ **Σ   Λ**

8. * Αν θ > 0 και θ ≠ 10 ισχύει ότι $\log\theta^{10}=\theta$ **Σ Λ**

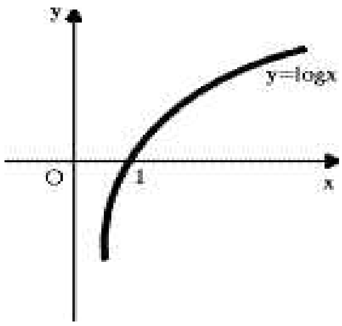
9. * Ισχύει ότι $\log_2 3=\dfrac{\log 3}{\log 2}$ **Σ Λ**

10. * Ισχύει ότι $\ln 27=\left(e^3\right)^9$ **Σ Λ**

11. * Στο σχήμα 17 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\log x$$

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



Σχ. 17

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$ **. Σ Λ**

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R Σ Λ

iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R Σ Λ

iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x. Σ Λ

v) Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των y΄y Σ Λ

vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφι-κής παράστασης της $g(x)=10^x$ **ως προς την ευθεία y = x. Σ Λ**

vii) Ισχύει ότι $f(2)<f(3)$ **Σ Λ**

viii) Το σημείο (1,0) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

ix) Το σημείο (0,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

x) Το σημείο (10,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

12. * Ισχύει ότι:

i) $\log x>\ln e$**, για κάθε x > 0 Σ Λ**

ii) $\log x^{-2}<\ln e^{-2}$ **για κάθε x > 0 Σ Λ**

iii) $\log 10^2=2$ **Σ Λ**

iv) $\ln e^3=3$ **Σ Λ**

v) $\log\dfrac{10}{e}=1-\log e$ **Σ Λ**

13. * I) Αν x < y τότε $\log x<\log y$ **Σ Λ**

ii) Αν x < y τότε lnx > lny Σ Λ