

Εσωτερικό γινόμενο

- 1) Αν $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{5}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 120^\circ$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε:
 - i) το $|\vec{v}|$
 - ii) τις γωνίες $\widehat{(\vec{\beta}, \vec{v})}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{v})}$.
- 2) Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{4}$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων
 - i) $\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta}$.
- 3) Οι διανυσματικές ακτίνες $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ και $\vec{OG} = \vec{\gamma}$ των σημείων A, B και Γ είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$, $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.
 - i) Δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.
 - ii) Βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και την γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.
 - iii) Αν για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$:
 - (a) $\vec{x} = -\frac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$
 - (b) Να βρείτε το $|\vec{x}|$
- 4) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$, να αποδείξετε ότι:
 - i) $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$
 - ii) $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
- 5) Για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} - 3\vec{\beta}) \perp (\vec{a} + 2\vec{\beta})$ και $|\vec{a}| = \sqrt{6}$. Να αποδειχθεί ότι $|2\vec{a} - \vec{\beta}| = 5$.
- 6) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 2 = 0$, να αποδειχθεί $\vec{a} = \vec{\gamma} = -\vec{\beta}$.
- 7) Αν $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ όπου $|\vec{\gamma}| = \sqrt{3}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα, να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.
- 8) Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{x}$ ισχύει $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ και $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
 - i) Να αποδειχθεί ότι: $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$.
 - ii) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.
- 9) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(λ-1, -1), B(λ, 2) και Γ(7, -λ), λ ∈ R. Αν ισχύει: $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = -15$, να βρείτε:
 - α. τον αριθμό λ
 - β) τη γωνία $\hat{B}$
- 10) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{a}$ με μέτρο 2 που σχηματίζει με τα $\vec{i}, \vec{j}$ γωνία 30° και 60° αντίστοιχα

Εσωτερικό γινόμενο

11) Δίνονται μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Θεωρούμε επίσης παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $\vec{AB} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AD} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Η διαγώνιος ΑΓ έχει μήκος 6 και ισχύει: $\vec{AG} \cdot \vec{AB} = 36$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΔΒ.

γ) Να βρείτε την περίμετρο του ABΓΔ.

δ) Να βρείτε τη γωνία Α του ABΓΔ.

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

12) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να

υπολογίσετε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

13) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (9, 7)$. Να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

14) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(\lambda, -2)$, $B(\lambda+8, -1)$ και $\Gamma(5, -\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = 13$ να βρείτε:

α. Τον αριθμό λ

β. την προβολή του $\vec{AB}$ πάνω στο $\vec{AG}$

15). Δίνεται τρίγωνο ABΓ στο οποίο είναι $|\vec{AB}| = 4$, $|\vec{AG}| = 6$ και η γωνία των

διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ το μέσο του ευθυγραμμου τμήματος

ΒΓ, τότε:

I. Να υπολογίσετε το $|\vec{AM}|$

II. Να δείξετε την προβολή του διανύσματος $\vec{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{AM}$ είναι $\frac{14}{19}\vec{AM}$

16) Σε τρίγωνο ABΓ είναι $|\vec{AB}| = |\vec{MG}| = 1$ όπου Μ το μέσο της ΑΒ. Αν ισχύει

$\sin(\widehat{AB, AG}) = \sin(\widehat{AB, BG})$, να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές

17) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (-4, 2)$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 5$ και $|\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}| = 10\sqrt{2}$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ii) Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ και να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{u} = -5\vec{\beta}$

iii) Να βρείτε το $\vec{\beta}$