## *ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ*

1. *Να αποδειχθούν οι ισότητες*

*α.* $25^{\log_5 10} = 100$ *β.* $3^{1+\log_3 11} + 12 = 45$ *γ.* $36^{\log_6 4 - 2} = \frac{1}{81}$

2. *Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων*

$K = e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ , $\Lambda = e^{\frac{1}{2}\ln 4} \bullet e^{-\ln\frac{1}{2}}$ , $M = \frac{e^{3+\ln 5}}{e^{4+\ln 4}}$, $N = \frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$.

3. *Να αποδειχθεί η ισότητα* $\ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

1. *Η παράσταση* $\sqrt{(\log 3)^2 + (\log\frac{1}{3})^2}$ *είναι ίση με*

*Α.* 0 *Β.* $\log\sqrt{3}$ *Γ.* $\sqrt{2}\log 3$ *Δ.* $\sqrt{2}\log\frac{1}{3}$ *Ε.* 2log3.

2. *Αν* $\log_2 3 = m$, *τότε ο* $\log_3 18$ *είναι*

*Α.* 2+m *Β.* $\frac{1+m}{m}$ *Γ.* $\frac{2+m}{m}$ *Δ.* $\frac{m}{1+m}$ *Ε.* $\frac{2m+1}{m}$

3. *Αν είναι* $\log_2(2^x x^2) = \log_3(3^x . x^y)$ *τότε να δείξετε ότι* $2^y = 9$

4. *Ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου είναι ο log3 και ο δεύτερος ο log27*
   I. *Να υπολογίσετε τη διαφορά ω*
   II. *Να δείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι* $S_\nu = \nu^2 . \log 3$

5. *Αν* $x = 2^{\ln 2} . 4^{\ln 4} . 8^{\ln 8}$ *και* $y = 3^{\ln 3} . 9^{\ln 9} . 27^{\ln 27}$ *τότε :*
   I. *Να δείξετε ότι* $x = 2^{\ln(2^{14})}$ *και* $y = 3^{\ln(3^{14})}$
   II. *Να δείξετε ότι* $\sqrt{\log_x y} = \frac{\log 3}{\log 2}$

6. *Η ένταση ενός σεισμού στην κλίμακα Richter , ως συνάρτηση της ενέργειας Ε που ελευθρώνεται κατά την διάρκεια του σεισμού, δίνεται από τον τύπο*

$M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ *όπου* $E_0=10^{4,4}$ *Joules είναι η ενέργεια στο επίπεδο αναφοράς. Να βρεθεί η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη διάρκεια ενός σεισμού 4,2 Richter.*

7. *Οι πωλήσεις P(t) (σε χιλιάδες μονάδες ) ενός προιόντος, σε διάστημα t χρόνων μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνονται από τον τύπο* $P(t)=50(1-e^{kt})$.

*Α. Αν τον πρώτο χρόνο οι πωλήσεις ανέβηκαν σε 12.000 μονάδες, να βρεθεί ο αριθμός κ.*

*Β. Πόσες είναι οι πωλήσεις στα 3 πρώτα χρόνια ;*

8. *Σε αριθμητική πρόοδο, ο πρώτος όρος είναι logα και ο δεύτερος logβ. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα* $S_\nu$ *των ν πρώτων όρων της είναι*

$$S_\nu=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}.$$

9. *Αν οι αριθμοί* $\log_\alpha x,\log_\beta x,\log_\gamma x,$ *όπου χ>0 και οι α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί και διάφοροι της μονάδας, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι* $\gamma^2=(\alpha\gamma)^{\log_\alpha \beta}$.

10. *Αν α, β θετικοί αριθμοί και* $a^2+\beta^2=7a\beta,$ *να δειχθεί ότι*

$$\log\frac{a+\beta}{3}=\frac{1}{2}(\log a+\log\beta)$$

11. *Αν* $\log_2(axy)=m+2,\log_2(\beta xy)=m-1,$ *να αποδειχθεί ότι*

$$\log_4\left(\frac{\beta}{a}\right)=-\frac{3}{2}.$$

*12.Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου ($\alpha_\nu$) είναι ίσος με $\alpha_3$ = log125 και η διαφορά της είναι ίση με ω = log5.*

**α.** *Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος $\alpha_1$ της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.*

**β.** *Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$ .*

**γ.** *Έστω ($\beta_\nu$) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου $\alpha_1$ και $\alpha_2$ ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$ .*

*13. Αν ισχύει* $\frac{\ln a}{\beta-\gamma}=\frac{\ln\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\ln\gamma}{a-\beta}$ *όπου α,β,γ>0 διαφορετικοί μεταξύ τους*

*Να δείξετε ότι*

*i. αβγ=1* *ii.* $\alpha^\alpha.\beta^\beta.\gamma^\gamma=1$

*5. Να αποδείξετε ότι:*

*i.* $4\log2+\log5-\log8=1$

*ii.* $\frac{1}{2}\log 9+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{2}\log 16-\log 3=3\log 2$

*iii.* $\ln 4+\ln 5-2\ln 2-\ln\frac{5}{e}=1$

*iv.* $\log\left(3+2\sqrt{2}\right)-\log\left(\sqrt{2}+1\right)^4-\log\left(\sqrt{2}-1\right)=-\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

*v.* $\log\left(4-2\sqrt{3}\right)+2\log\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=0$

*vi.* $\frac{1}{e}\ln\sqrt[\frac{1}{e}]{e}+1-e\ln\sqrt[e]{e}+\ln(e\sqrt{e})=\frac{5}{2}$

*14. Να υπολογίσετε την παράσταση*

$A=-\log 70+\log\left(3+\sqrt{2}\right)+\log\left(2+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)+\log\left(2-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$

*15. Θεωρούμε το άθροισμα* $S = \log x+\log^2 x+\log^3 x+\ldots+\log^\nu x$ *με* $0<x\neq10$

*i. Να υπολογίσετε το S*

*ii. Αν το άθροισμα των3 πρώτων όρων είναι 14 να βρείτε το x*

*8. Μια αριθμητική πρόοδος* $(\alpha_\nu)$ *έχει πρώτο όρο* $\alpha_1 = \log(\sigma\upsilon\nu x)$ *και* $2^o$ *όρο* $\alpha_2 = \log(\sigma\upsilon\nu^2 x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

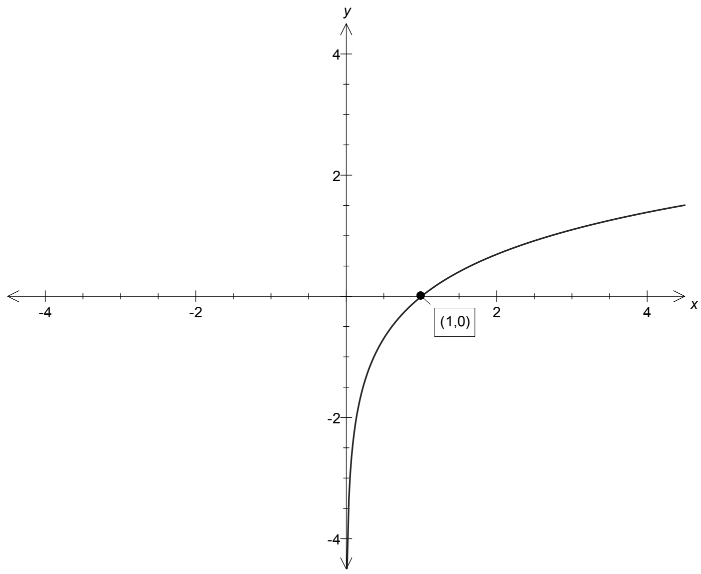
*i. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου*

*ii. Αν ισχύει* $S_5=-\frac{15}{2}\log 2$ *να βρείτε τον x*

## ***ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ***

***Η συνάρτηση f(x) = lnx***

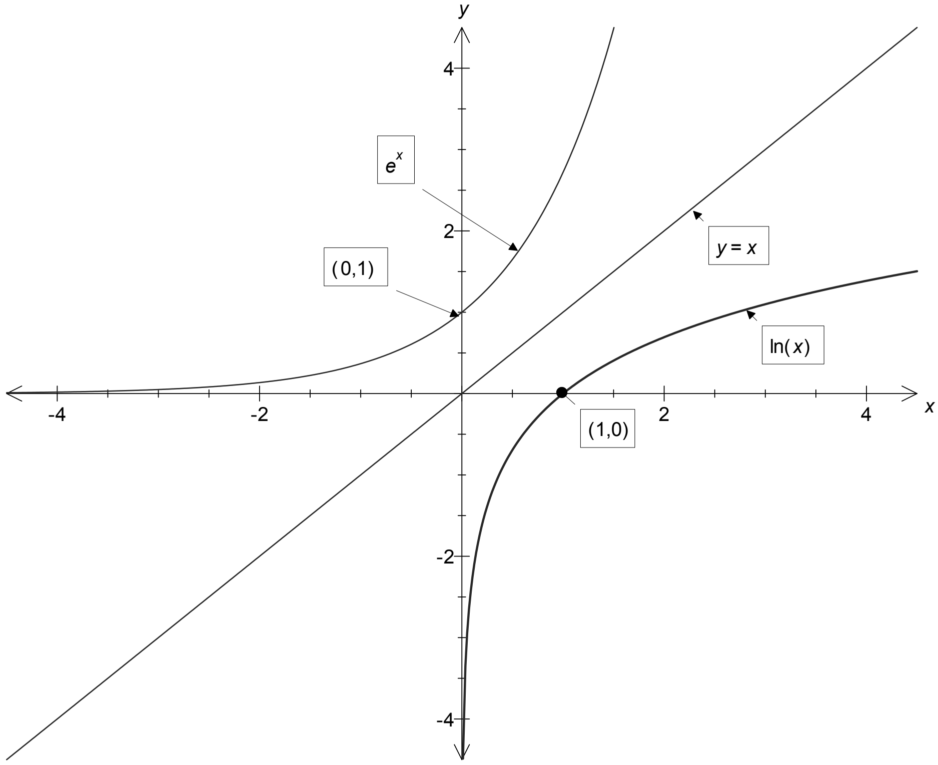
***έχει πεδίο ορισμού το(0,+∞)***
***και συνολο τιμών το R***




- *Είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή*
  *Για κάθε* $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ *με* $x_1<x_2$
  $\Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$ *Είναι 1-1 δηλαδή*
- *Για κάθε* $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ *με* $x_1\neq x_2$
  $\Leftrightarrow \ln x_1\neq \ln x_2$ *ή αντιθετοαντίστροφα για κάθε* $x_1$ , $x_2\in(0,+\infty)$ *με* $\ln x_1=\ln x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$.
- *Τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(1,0) αφού f(1)=ln1=0*

- *Δεν τέμνει τον y΄y και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy΄*

***Σχόλιο: Οι εκθετικές συναρτήσεις f(x) =e$^x$ και g(x) = lnx  ειναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x***




***ΑΣΚΗΣΕΙΣ***

*1.Α.  Αν f(x) = lnx να λυθεί η εξίσωση  f(x+1) = f(3x+1) –f(x)*
*Β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x)= 2log(4-x)+log(x$^2$-4)-logx*

*2.  Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  f(x) = 2log(4-x)+log(x$^2$-4)-logx*

*3.  Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \ln\frac{3-x}{3+x}$

*I.  Βρείτε το πεδίο ορισμού της*
*II.  Να δείξετε ότι είναι περιττή*
*III.  Να λυθεί η ανίσωση  f(x) > 0*

*4.  Να λύσετε τις εξισώσεις:*

*a.*  $5^x=2^{3-x}$
*b.*  $3^{x-2}=2^{x+2}$

5. *Αν οι αριθμοί* $\log 2$ , $\log(2^x-5)$ *και* $\log\left(2^x-\dfrac{7}{2}\right)$ *είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρεθεί ο* $x$

6. *Να λυθεί η ανίσωση* $\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{4x+6}{x}\right)\geq 0$

7. *Να λυθεί το σύστημα :* $\begin{cases}\log_y x=\dfrac{3}{2}\\ \log_2 x+\log_2 y=5\end{cases}$

8. *Α. Να λυθεί η εξίσωση* $\log_x y+\log_y x=\dfrac{5}{2}, 0<x,y\neq 1$

   *Β. Να λύσετε το σύστημα* $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\dfrac{5}{2}\\ x.y=64\end{cases}$

9. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=x^{\frac{1}{\log x}}.\log x$
   *Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της*
   *ΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση* $f(x) < 1$

10. *Να λυθεί η εξίσωση* $1000^{x^2}.100^x=2$

11. *Α. Έστω* $\alpha > 0$ *και η εξίσωση* $\alpha^x=x^\alpha$ *(1) ,* $x>0$
    *Β. Να δείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση* $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$

12. *Έστω το πολυώνυμο* $P(\chi) = \chi^4 +(\ln^2 k)\chi^3+ (\ln k)x^2-2x-1$, $k>0$ *Αν το* $P(x)$ *έχει παράγοντα το* $x-1$ *να βρείτε τις τιμές* $k_1$, $k_2$ *του* $k$ *με* $k_1 > k_2$ *Στη συνέχεια να λυθεί η ανισότητα* $\log(k_1x)<\log(k_1k_2) -\log(k_2x) +2k_1$ , $x>0$

13. *Δίνονται οι συναρτήσεις* $f(x) = \log(x-2)$ *και* $g(x) = 1-\log(x+1)$
    *Ι.Βρείτε τα πεδία ορισμού αυτών*
    *ΙΙ. Να βρείτε το σημεία τομής των* $C_f$ *και* $C_g$

14. *Την* $1^η$ *Ιανουαρίου 1995 μια πόλη Α είχε 200.000 κατοίκους Την ίδια ημερομηνία η πόλη Β είχε 150.000κατοίκους Διαπιστώθηκε ότι ο πληθυσμός της πόλης Α μικραίνει κατά 3% κάθε έτος , ενώ της πόλης Β αυξάνει κατά 5% κάθε έτος*

*Α. Να βρεθεί ο πληθυσμός των 2 πόλεων :*
   *Ι. το 1996*          *ΙΙ. το 1997*

*Β. Με $α_ν$ συμβολίζουμε τον πληθυσμό της πόλης Α την 1η Ιανουαρίου του έτους 1995+ν και με $β_ν$ τον πληθυσμό της πόλης Β το ίδιο έτος*

*Ι. δείξτε ότι οι ακολουθίες ($α_ν$) και ($β_ν$) είναι γεωμετρικές πρόοδοι και να βρείτε τους λόγους τους*

*ΙΙ. Να εκφραστούν οι όροι $α_ν$ , $β_ν$ συναρτήσει του ν*

*ΙΙΙ. Ποιο έτος ο πληθυσμός της πόλης Α θα είναι μεγαλύτερος από τον πληθυσμό της πόλης Β ;* (*Δίνεται ότι* $\dfrac{\ln\frac{4}{3}}{\ln\frac{105}{97}} \simeq 3{,}63$)

*15. Να λύσετε τις εξισώσεις :*

*Ι. $\log(4^x+15.2^x+27) = 2\log(4.2^x-3)$*

*ΙΙ.* $\ln(1+x) = \ln_{e^2}(6x-2)$

*16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= \ln|x-1|$*

*Ι.Βρείτε το πεδίο ορισμού*

*ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$*

*ΙΙΙ.Να λυθεί η ανίσωση $f(x)< 0$*

*17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2x^2-1$*

*Ι.Να Βρείτε το πεδίο ορισμού της*

*ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$*

*ΙΙΙ.Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$*

*18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3-19x^2+38x-24$*

*Ι.Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$*

*ΙΙ.Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(2^x) =0$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου*

*19. Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \ln\dfrac{e^x - e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$

*Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της*

*ΙΙ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+2\ln 2 \leq 0$*

*ΙΙΙ.Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$*

*20. Αν $\ln 2$, $\ln(e^x-1)$ και $\ln(e^x+3)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου να βρείτε το x*

*21. Η ατμοσφαιρική πίεση P σε ύψος h σε Km δίνεται από τη σχέση $P(h)=P_oe^{-λh}$ με αρχική πίεση $P_o$=760 μονάδες στην επιφάνεια της θάλασσας*

*a. Αν σε ύψος h = 1 η πίεση είναι P=670 να δείξετε ότι*

$$e^{-2λ} = \left(\frac{67}{76}\right)^2$$

*b. Βρείτε την πίεση σε ύψος h = 2Km*

*c. Να βρείτε το ύψος που η πίεση είναι το μισό της αρχικής*

22. *Ένα κομμάτι μετάλλου χάνει θερμότητα σύμφωνα με τη συνάρτηση $\Theta(t) = t_o.e^{-0,2t}$ όπου Θ(t) η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του μετάλλου και του περιβάλλοντος ατμόσφαιρας μετά από t sec ενώ $t_o$ είναι η αρχική διαφορά θερμοκρασίας του μετάλλου που έχει $330^oC$ και της ατμόσφαιρας που έχει θερμοκρασία $30_oC$*
A. *Βρείτε τη θερμοκρασία του μετάλλου μετά από 5s , 10s και 20s*
B. *Μετά από πόσα λεπτά η διαφορά της θερμοκρασίας θα είναι το μισό της αρχικής διαφοράς ;*

23. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$
   A. *Βρείτε το πεδίο ορισμού της*
   B. *Να δείξετε ότι είναι περιττή*
   C. *Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τις ευθείες* $y = \dfrac{2}{3}$ *και* $y = -\dfrac{2}{3}$

24. *Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει*

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

*όπου* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, τότε:*

**α.** *να δείξετε ότι* $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}, \quad t \geq 0$ ,

**β.** *να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με 1/16 της αρχικής του τιμής,*

**γ.** *να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το 1/9 της αρχικής του τιμής.*

25. *Έστω η ακολουθια* $\alpha_\nu = \ln\sqrt{e^5.2^\nu}$
I. *Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον $1^o$ όρο*
II. *Να δείξετε ότι* $S_{40} = \ln(2^{800}.e^{100})$
III. *Βρείτε ποιος όρος της ακολουθίας ισούται* $\dfrac{5}{2} + \ln 16$

1. *Να λύσετε τις εξισώσεις :*
   $3^{x-1}=e^{2-x}$ $\quad$ $\ln(e^x+2^x)=x+\ln3$
   $x^{\ln3} = e^2x$ $\quad$ $\ln(1-x)>1+\ln x$

1. *να λυθεί η εξίσωση* $2\ln(2x-1) - \dfrac{1}{2}\ln 9 = \ln(x-1) + \ln(x+1)$

*26. Αν* $\log_x y = \frac{3}{2}$ *τότε να υπολογίσετε την παράσταση* $A = \frac{\ln x - \ln y}{\ln x + \ln y}$

*27. Έστω η συνάρτηση f(x)=*$\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$

*i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της*

*ii Να δείξετε ότι f(x).* $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

*iii. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η* $C_f$ *είναι πάνω από την y=1*

*28. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο* $f(x) = \ln(2e^{3x} - e^{x})$.

*α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.*

*β. Να δείξετε ότι* $f(x) = \ln(2e^{2x} - 1) + x$.

*γ. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι πάνω από την ευθεία ε:y=x.*

*δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f, είναι κάτω από τον x'x.*

*ε. Αν α η ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 τότε να δείξετε ότι η ανίσωση* $e^{f(x)} - 2e^{3x-\alpha} > 0$ *είναι αδύνατη.*

*29. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο*

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

*α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.*

*β. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=ln2.*

*γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x)<0.*

*30. Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \ln\frac{e^{x} - 1}{x}$

*α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α, της f.*

*β) Να δείξετε ότι για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $f(x) = x + f(-x)$.