

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

A2. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σ-Λ

α. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

γ. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της είναι θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται $\mathbf{z} = \mathbf{t} + (\mathbf{t} - 1)\mathbf{i}, \mathbf{t} \in [0, 1]$. Να βρεθούν:

B1. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του \mathbf{z} .

B2. Το ελάχιστο $|\mathbf{z}|$.

Αν $\mathbf{w} = (\mathbf{k}^2 + 2) + (\mathbf{k}^2 - 1)\mathbf{i}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν:

B3. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του \mathbf{w} .

B4. Το ελάχιστο $|\mathbf{w}|$.

B5. Το ελάχιστο $|\mathbf{z} - \mathbf{w}|$.

B6. Οι μέγιστες τιμές των $|\mathbf{w}|$ και $|\mathbf{z} - \mathbf{w}|$ όταν $\mathbf{k} \in [0, 4]$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Γ3. Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbf{R}$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{kx}$, $x > 0$.

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $(\eta\mu x)^{\sigma\nu x} = (\sigma\nu x)^{\eta\mu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο **-2012**.

Γ6. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq e$ ισχύει $f(x+1) < \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2 x}{x} < f(x)$

Ε7. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x+1) - \ln^2 x)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $3f(x) - \int_{-2x}^x f\left(\frac{x-t}{3}\right) dt = x^3 - 6x + 6$,

για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι **1-1**.

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{2}{e^2}$ και $x=2$