ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γενικό Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1ο. α)Να αποδείξετε ότι $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ για $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

β)Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της να δείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ)Να σημειώσετε (Σ) ή (Λ) στις παρακάτω προτάσεις

1.Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της　Σ　Λ

2.Αν $\bar{z} = z^2$ τότε $z^3 \ge 0$　Σ　Λ

3.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = 4$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -2$　Σ　Λ

4.Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$　Σ　Λ

5.Αν f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε το μέτρο του μιγαδικού $z = 1 + f(x)i$ έχει μέγιστη τιμή.　Σ　Λ

ΘΕΜΑ 2ο. Δίνεται ο μιγαδικός z = α + βi, και η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \int_1^{x^2+1} |tz + z|\,dt - 3x + 2$$

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο για $x_0 = 1$ να αποδείξετε ότι

1. $|z| = \dfrac{1}{2}$

2.Οι εικόνες του μιγαδικού w = 2z + i στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(0 , -1) και ακτίνα ρ = 1.

3.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ = 0 και χ = 1.

ΘΕΜΑ 3ο. Δίδεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \dfrac{2}{\alpha + e^t}\,dt$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \succ 0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z = g(x) + xi$ με $|\bar{z} + i| \le |z - 1|$.

Να αποδείξετε ότι:

A. 1.Η g αντιστρέφεται

2.Οι εικόνες του z ανήκουν στη γραφική παράσταση της g^{-1}.

Β. 1. $\mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2. α=1

3. $\frac{1}{1+e^2} \prec \int_0^2 \frac{1}{\alpha+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{\alpha+e^t}dt \prec \frac{1}{1+e}$.

ΘΕΜΑ 4^{o}: Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=1$ και $f'(x)=g^2(x)\neq 0$ και $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α)Να αποδείξετε ότι

1. $g'(x) = -g(x)\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

2.Η g είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0],[0,+\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

Β)1.Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

2.Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(0, f(0))$.

Γ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την εφαπτομένη του παραπάνω ερωτήματος, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x=1$ να δείξετε ότι Ε = $\frac{1}{2}+\ln\left[g(1)\right]$.

Καλή επιτυχία