[IB AA - IB AI]

[Το ολοκληρωμένο πρόγραμμα σπουδών του IB]

Το ολοκληρωμένο πρόγραμμα σπουδών του IB περιλαμβάνει τέσσερα εκπαιδευτικά προγράμματα:

- το Primary Years Programme (3-12 ετών) για μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης,
- το Middle Years Programme (11-16 ετών) για μαθητές Γυμνασίου έως και Α' Λυκείου,
- το Diploma Programme (16-19 ετών) για μαθητές Β' και Γ' Λυκείου και
- το Career-relater Programme (16-19 ετών) που βοηθά μαθητές στον επαγγελματικό προσανατολισμό τους.

[Το International Baccalaureate (IB) Diploma Programme (DP)]

Το International Baccalaureate (IB) Diploma Programme (DP) είναι το Διεθνές Απολυτήριο το οποίο χορηγεί ο Οργανισμός Διεθνούς Απολυτηρίου (International Baccalaureate Organization) και θεωρείται ισότιμο και αντίστοιχο του απολυτήριου τίτλου που χορηγούν τα λύκεια της ημεδαπής. Είναι ένα διεθνώς αναγνωρισμένο εκπαιδευτικό πρόγραμμα και απευθύνεται σε μαθητές που στοχεύουν σε σπουδές σε Πανεπιστήμια του εξωτερικού. Το IB Diploma Programme είναι διετές πρόγραμμα σπουδών και προσφέρεται σε μαθητές που έχουν ολοκληρώσει την Α' Λυκείου. Δεν εξασφαλίζει ωστόσο την πρόσβαση των μαθητών σε ελληνικά Πανεπιστήμια.

[Το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών του IB Diploma Programme]

Το πρόγραμμα σπουδών του IB Diploma Programme διδάσκεται στην Αγγλική γλώσσα και αποτελείται από τον κορμό (core) που είναι υποχρεωτικός για όλους τους μαθητές και από έξι ομάδες μαθημάτων:

1. Μητρική Γλώσσα και Λογοτεχνία,
2. Ξένες Γλώσσες,
3. Ανθρωπιστικές Επιστήμες,
4. Επιστήμες,
5. Μαθηματικά και
6. Τέχνες.

Ο μαθητής επιλέγει συνολικά 6 μαθήματα, ένα μάθημα από καθεμία από τις πέντε πρώτες ομάδες και ακόμη ένα μάθημα που μπορεί να είναι από οποιαδήποτε ομάδα. Τρία ή τέσσερα μαθήματα πρέπει να είναι HL (high level) και τα υπολειπόμενα να είναι SL (standard level). Ο κορμός περιλαμβάνει μια προφορική παρουσίαση και μια εργασία 1600 λέξεων που σχετίζονται με τη θεωρία της γνώσης (TOK), μια εκτενής πραγματεία 4000 λέξεων (Extended essay) και τη συμμετοχή σε προγράμματα δημιουργικότητας, δραστηριότητας και υπηρεσίας (CAS projects). Πέραν του προγράμματος του IB Dilpoma, στους μαθητές διδάσκεται οπωσδήποτε το μάθημα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας και της Ιστορίας των τάξεων Β' και Γ' Λυκείου κατά το πρόγραμμα των δημόσιων σχολείων που ισχύει.

Βαθμολόγηση και εξετάσεις IB

Ο μαθητής για κάθε μάθημα που επιλέγει βαθμολογείται με άριστα τις 7 μονάδες, άρα η μέγιστη βαθμολογία για τα έξι μαθήματα είναι 42 μονάδες. Επιπλέον, ο μαθητής λαμβάνει μέχρι και άλλες 3 μονάδες από το TOK και το Extended essay (EE), άρα η τελική βαθμολογία διαμορφώνεται με άριστα τις 45 μονάδες. Το CAS project δεν βαθμολογείται, ωστόσο είναι υποχρεωτικό. Στη διάρκεια της διετίας η αξιολόγηση του μαθητή γίνεται μέσα από εργασίες και εξετάσεις, προφορικές και γραπτές. Η βάση για την απόκτηση του IB Diploma είναι οι 24 μονάδες με την προϋπόθεση ελάχιστης επίδοσης στα επιμέρους μαθήματα. Στο τέλος της διετίας οι μαθητές συμμετέχουν σε διεθνείς γραπτές εξετάσεις για τα έξι μαθήματα της επιλογής τους. Τα θέματα είναι κοινά για όλους και ορίζονται από τον οργανισμό IB. Οι εξετάσεις γίνονται δυο φορές τον χρόνο, Μάιο και Νοέμβριο, σε ημερομηνία που είναι κοινή για όλους. Η αξιολόγηση γίνεται από το IB Global Center στο Cardiff του Ηνωμένου Βασιλείου. Στην τελική βαθμολογία για κάθε μάθημα συμμετέχει και η αξιολόγηση που πραγματοποιείται στο σχολείο και εποπτεύεται από τον οργανισμό IB.

[Ποια Πανεπιστήμια αναγνωρίζουν το IB Diploma]
Το IB Diploma αναγνωρίζεται από κορυφαία Πανεπιστήμια σε όλο τον κόσμο. Κάθε χρόνο τελειόφοιτοι του IB Dilpoma Programme αιτούνται την εισαγωγή τους σε 3.300 ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, σε περίπου 90 χώρες. Τα πιο δημοφιλή από αυτά τα ιδρύματα κατατάσσονται μεταξύ των καλύτερων Πανεπιστημίων στον κόσμο. Από την Ελλάδα οι απόφοιτοι του IB Diploma Programme έχουν εισαχθεί ενδεικτικά στα εξής Πανεπιστήμια: Cambridge, Harvard, Oxford, UCL κ.α. Ωστόσο, τα κριτήρια εισαγωγής ποικίλουν σε μεγάλο βαθμό στα διάφορα πανεπιστημιακά ιδρύματα, καθώς πέραν του διπλώματος IB μπορεί να έχουν επιπλέον προϋποθέσεις εισαγωγής, όπως για παράδειγμα ελάχιστη βαθμολογία σε μαθήματα βαρύτητας, πιστοποίηση IELTS, TOEFL, SAT, ACT κ.α. Συγκεκριμένα, για τα Πανεπιστήμια της Μεγάλης Βρετανίας χρειάζεται αίτηση μέσω του συστήματος UCAS και λοιπά έγγραφα (συνολικός βαθμός IB Diploma, personal statement, συστατική επιστολή, φοιτητική visa κλπ).

[Διαφορά μεταξύ των προσφερόμενων μαθημάτων/Πώς να αποφασίσετε ποιο μάθημα να παρακολουθήσετε]
Το μάθημα Ανάλυση και Προσεγγίσεις (**AA=Analysis and Approaches**) είναι κατάλληλο για μελλοντικούς μαθηματικούς, μηχανικούς, επιστήμονες και οικονομολόγους. Απαιτεί μια πιο αφηρημένη και εννοιολογική κατανόηση και συνιστάται σε φοιτητές που έχουν φυσική μαθηματική ικανότητα και απολαμβάνουν την επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων. Επικεντρώνεται στην ανάπτυξη αναλυτικών δεξιοτήτων και δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων. Αν είστε ο τύπος του μαθητή που του αρέσει η άλγεβρα (παραγοντοποίηση, επίλυση γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων και ανισώσεων, αλγεβρικά κλάσματα και δείκτες), η τριγωνομετρία, η γεωμετρία και ο λογισμός (διαφοροποίηση και ολοκλήρωση), τότε αυτό το μάθημα είναι για εσάς. Παρέχει ισχυρά θεμέλια στη μαθηματική συλλογιστική και την απόδειξη, καθιστώντας το μια καλή επιλογή για μαθητές που τους αρέσουν τα θεωρητικά μαθηματικά, καθώς εστιάζει στη θεωρία και δίνει στους μαθητές την ικανότητα να αναλύουν αφηρημένες μαθηματικές θεωρίες που αποτελούν τη βάση όλων των υπολογισμών. Οι μαθητές που τους αρέσει να κάθονται και να λύνουν εξισώσεις και να λαμβάνουν ικανοποίηση από την επίλυση πολύπλοκων εξισώσεων θα πρέπει να επιλέξουν αυτό το μάθημα. Με άλλα λόγια, το μάθημα αυτό δίνει έμφαση σε:

- Αλγεβρικές μέθοδοι
- στην ανάπτυξη ισχυρών δεξιοτήτων μαθηματικής σκέψης
- στην επίλυση πραγματικών και αφηρημένων μαθηματικών προβλημάτων

Το μάθημα Εφαρμογές και Ερμηνεία (AI=Applications and interpretation) απευθύνεται σε φοιτητές που έχουν μεγαλύτερο πάθος για τις ανθρωπιστικές και κοινωνικές επιστήμες, τις φυσικές επιστήμες, την ιατρική, τη στατιστική, τις επιχειρήσεις, την ψυχολογία και το σχεδιασμό. Είναι σχεδιασμένο για φοιτητές που έχουν λιγότερες φυσικές μαθηματικές ικανότητες και απολαμβάνουν θέματα τύπου εφαρμογής, όπως συναρτήσεις, μοντελοποίηση, στατιστική και πιθανότητες. Το Applications and

Interpretation επικεντρώνεται κυρίως στην πρακτική εφαρμογή και υλοποίηση των μαθηματικών σε πραγματικές συνθήκες. Έχει σχεδιαστεί για φοιτητές που προτιμούν να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες σε πρακτικά σενάρια και δίνει στον φοιτητή την "τεχνογνωσία" και την ικανότητα να εφαρμόζει τα μαθηματικά σε τεχνικές του πραγματικού κόσμου και να επιλύει προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Εάν είστε ασθενέστερος μαθηματικός φοιτητής, αλλά έχετε έντονο ενδιαφέρον για τις ανθρωπιστικές επιστήμες ή τις τέχνες, όπου τα εφαρμοσμένα μαθηματικά και η στατιστική ανάλυση είναι πιο σημαντικά, τότε αυτό το μάθημα είναι για εσάς. Οι φοιτητές που θα παρακολουθήσουν αυτό το μάθημα θα είναι καλά εξοπλισμένοι για να αναλύουν δεδομένα, να ερμηνεύουν μαθηματικά μοντέλα και να επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας καθορισμένες μαθηματικές τεχνικές. Με άλλα λόγια, αυτό το μάθημα δίνει έμφαση σε:

- μοντελοποίηση και στατιστική
- στην ανάπτυξη ισχυρών δεξιοτήτων στην εφαρμογή των μαθηματικών στον πραγματικό κόσμο και στην κατασκευή και επικοινωνία τους με μαθηματικό τρόπο και στην ερμηνεία συμπερασμάτων ή γενικεύσεων
- στην επίλυση πραγματικών μαθηματικών προβλημάτων με τη χρήση της τεχνολογίας. Η TN αναμένει από εσάς να γίνετε ειδικός στη χρήση της γραφικής αριθμομηχανής σας.

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο μαθημάτων όσον αφορά τις ώρες διδασκαλίας.

Θέμα	**AI HL**	**AI SL**	**AA HL**	**AA SL**
Αριθμοί & Άλγεβρα	29	16	39	19
Συναρτήσεις	42	31	32	21
Γεωμετρία & Τριγωνομετρία	46	18	51	25
Στατιστική Πιθανότητες	52	36	33	27
Ανάλυση	41	19	55	28
ΙΑ (μαθήματα)	30	30	30	30
Σύνολο ωρών	**240**	**150**	**240**	**150**

Υπάρχουν ορισμένα κοινά θέματα για την AA και την AI, τα οποία καλύπτονται στις πρώτες 60 ώρες του μαθήματος. Το SL απαιτεί 150 ώρες διδασκαλίας και το HL 240 ώρες διδασκαλίας.

Συνοψίζοντας:

Το Applications and Interpetation καλύπτει ένα ευρύτερο φάσμα θεμάτων, ωστόσο το Analysis and Approaches καλύπτει ένα στενότερο φάσμα και σε μεγαλύτερο βάθος. Στο AI HL εξακολουθείτε να εκτίθεστε στην αυστηρότητα των μαθηματικών/θεμάτων που θα περιμένατε σε ένα κανονικό μάθημα HL, απλά όχι τόσο πολύ όσο στο AA HL. Όσοι επιθυμούν να εισέλθουν σε επαγγέλματα με μαθηματικό προσανατολισμό, όπως η μηχανική, η μηχανική μάθηση, η επιστήμη των υπολογιστών, η επιστήμη των δεδομένων κ.λπ. θα διαπιστώσουν ότι το AA θα τους δώσει τα εργαλεία που χρειάζονται. Όσοι αναζητούν επαγγέλματα όπου η εφαρμογή των μαθηματικών είναι πιο σημαντική από τη θεωρία, όπως τα οικονομικά, η διοίκηση κ.λπ. θα βρουν ότι το AI είναι το κατάλληλο γι' αυτούς. Η Ανάλυση και προσεγγίσεις εστιάζει στην ανάπτυξη αναλυτικών και βαθύτερων δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, ενώ το Εφαρμογές και Διερμηνεία εστιάζει στην πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών τεχνικών. Το Analysis and Approaches θεωρείται ως ένα καθαρά θεωρητικό μάθημα με πολλή άλγεβρα, ενώ το

Applications and Interpetation είναι ένα εφαρμοσμένο μάθημα με πολλή στατιστική και μοντελοποίηση. Αν σας αρέσουν τα μαθηματικά (λύνοντας εξισώσεις και πρέπει να σκέφτεστε βαθύτερα απαιτώντας έτσι περαιτέρω δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων) και είστε εκ φύσεως καλοί στα μαθηματικά και σας γοητεύει το "γιατί" πίσω από τις θεωρίες επιλέξτε το Analysis and Approaches, αλλά αν προτιμάτε να χρησιμοποιείτε την αριθμομηχανή και να ακολουθείτε καθορισμένες μεθόδους/τεχνικές και θέλετε να μάθετε το "πώς" να χρησιμοποιείτε τα μαθηματικά και δεν σας ενδιαφέρει η θεωρία πίσω από αυτά, τότε επιλέξτε το Applications and Interpetation. Το AI HL είναι για τον γρήγορο μαθητή και το AA HL για τον περίεργο μαθητή. Εάν δεν είστε τόσο δυνατοί στα μαθηματικά, η σύσταση είναι AA SL. Το AI SL εξακολουθεί να είναι αρκετά πιο εύκολο από το AA SL και επιλέξτε το μόνο αν δεν έχετε πρόβλημα να ασχοληθείτε με πολλά δεδομένα.

"Τα μαθηματικά AA είναι σαν να βουτάς με το κεφάλι στα βαθιά του μαθηματικού ωκεανού. Είναι για όσους αποζητούν μια πρόκληση και θέλουν να εξερευνήσουν τα περίπλοκα βάθη των μαθηματικών. Από την άλλη πλευρά, το Maths AI είναι σαν να βουτάς τα δάχτυλα των ποδιών σου στην πρακτική πλευρά των μαθηματικών, με έμφαση στις εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο. Είναι ιδανικό για μαθητές που θέλουν να δουν πώς τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε τομείς όπως τα οικονομικά, οι επιχειρήσεις ή οι κοινωνικές επιστήμες. Το θέμα είναι να βρεις το μονοπάτι που εξάπτει την περιέργειά σου και ευθυγραμμίζεται με τους μελλοντικούς σου στόχους"

Να θυμάστε ότι θα περάσετε δύο χρόνια σπουδάζοντας αυτό το μάθημα, οπότε βεβαιωθείτε ότι σας αρέσει αυτό που κάνετε και ότι θα τα πάτε καλά στις εξετάσεις του IB. Οι επιδόσεις και η στάση σας στη μελέτη των μαθηματικών, καθώς και τα ατομικά σας πλεονεκτήματα ή αδυναμίες σε επιμέρους στοιχεία που μπορεί να σας οδηγήσουν στην επιλογή του ενός ή του άλλου μαθήματος. Αν είστε ένας από αυτούς που έχουν όλα τα προσόντα στα μαθηματικά, τότε ίσως θα μπορούσατε να επιλέξετε με βάση τα πανεπιστημιακά σας σχέδια (βλ. ενότητα αναγνώρισης πανεπιστημίων παρακάτω). Εάν δεν είστε σίγουροι για τις ικανότητές σας στα μαθηματικά, αλλά παρόλα αυτά θέλετε να ακολουθήσετε πτυχία που σχετίζονται με τα μαθηματικά, είναι επίσης ένας σημαντικός παράγοντας που πρέπει να λάβετε υπόψη σας.

Συμβουλευτείτε τους καθηγητές και τους φίλους σας για περαιτέρω συμβουλές σχετικά με την επιλογή του θέματος. Αν δεν είστε σίγουροι για το ποια ενότητα να επιλέξετε και αν η σχολή σας επιτρέπει την αλλαγή ενότητας, σκεφτείτε να επιλέξετε το HL. Επειδή τα αρχικά στάδια του HL και του SL είναι παρόμοια, η πτώση στο SL, αν το HL είναι υπερβολικό, δεν θα είναι πρόβλημα. Πολλά σχολεία θα σας αφήσουν ακόμη και να ξεκινήσετε με SL και να μεταβείτε σε HL, ωστόσο είναι ΠΑΝΤΑ ευκολότερο να μεταβείτε από HL σε SL παρά από SL σε HL. Ορισμένα σχολεία θα σας αφήσουν επίσης να αλλάξετε μαθήματα και να ξεκινήσετε με AA και στη συνέχεια να κατεβείτε σε AI πριν από το τέλος του πρώτου τετραμήνου, αν θεωρείτε το AA πολύ δύσκολο.

[Δομή εξετάσεων]

Τα μαθήματα ανώτερου επιπέδου έχουν 3 γραπτά και τα μαθήματα κανονικού επιπέδου έχουν 2 γραπτά. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής για την εργασία 1 για το AA, αλλά το AI επιτρέπει τη χρήση αριθμομηχανής και στις 3 εργασίες. Υπάρχει επίσης μια εσωτερική αξιολόγηση (IA) με βάση την εργασία μαθημάτων. Η διάταξη των γραπτών και για τα δύο μαθήματα ανώτερου επιπέδου είναι η ίδια και η διάταξη και για τα δύο μαθήματα τυπικού επιπέδου είναι η ίδια.

Τα γραπτά 1 και 2 του AA (HL και SL) χωρίζονται και τα δύο σε 2 ενότητες. Η ενότητα A περιλαμβάνει ερωτήσεις σύντομης απάντησης και η ενότητα B ερωτήσεις εκτεταμένης απάντησης. Το χαρτί 1 του AI (HL και SL) αποτελείται αποκλειστικά από ερωτήσεις σύντομης διάρκειας και το χαρτί 2 αποτελείται αποκλειστικά από ερωτήσεις εκτεταμένης απάντησης. Το έγγραφο 3 του HL τόσο για το AA όσο και για το AI αποτελείται από ερωτήσεις εκτεταμένης απάντησης και οι δύο έχουν την ίδια μορφή, αλλά διαφορετικές ερωτήσεις προφανώς λόγω των διαφορετικών προγραμμάτων σπουδών τους.

Analysis and Approaches SL setup:

	Βαθμοί	Συντελεστής	Τύπος	Διάρκεια
Paper 1	80	40%	Χωρίς calc	90 λεπτά
Paper 2	80	40%	Με Calc	90 λεπτά
IA	20	20%	-	-

Analysis and Approaches HL setup:

	Βαθμοί	Συντελεστής	Τύπος	Διάρκεια
Paper 1	110	30%	Χωρίς calc	120 λεπτά
Paper 2	110	30%	Με Calc	120 λεπτά
Paper 3	55	20%	Με Calc	60 λεπτά
IA	20	20%	-	-

Applications and Interpretation SL setup:

	Βαθμοί	Συντελεστής	Τύπος	Διάρκεια
Paper 1	80	40%	Χωρίς calc	90 λεπτά
Paper 2	80	40%	Με Calc	90 λεπτά
IA	20	20%	-	-

Applications and Interpretation HL setup:

	Βαθμοί	Συντελεστής	Τύπος	Διάρκεια
Paper 1	110	30%	Χωρίς calc	120 λεπτά
Paper 2	110	30%	Με Calc	120 λεπτά
Paper 3	55	20%	Με Calc	60 λεπτά
IA	20	20%	-	-

Για να υπολογίσετε το βαθμό σας:

HL Final Grade = (Paper 1 Score) x 30% + (Paper 2 Score) x 30 % + (Paper 3 Score) x 20 % + (IA) * 20 %

SL Final Grade = (Paper 1 Score) x 40% + (Paper 2 Score) x 40% + (IA) * 20%

[Πανεπιστημιακή αναγνώριση]

Δεν θα πρέπει μόνο να λάβετε υπόψη το δικό σας μαθηματικό υπόβαθρο όταν αποφασίζετε ποιο μάθημα να επιλέξετε, αλλά θα πρέπει επίσης να λάβετε υπόψη τη μελλοντική ακαδημαϊκή και επαγγελματική σας πορεία και τη βαθμίδα των πανεπιστημίων στα οποία θα υποβάλετε αίτηση, καθώς και τις ειδικές απαιτήσεις των πανεπιστημίων. Ούτε το HL ούτε το SL είναι εγγενώς "πιο" χρήσιμο, καθώς εξαρτάται εξ ολοκλήρου από την περιοχή σας και τις φιλοδοξίες σας στο κολέγιο ή το πανεπιστήμιο. Για τα περισσότερα πανεπιστήμια αρκεί το AA SL. Οποιοδήποτε ανταγωνιστικό κορυφαίο πανεπιστήμιο θα απαιτήσει μαθηματικά HL.

Πτυχία Μαθηματικών: Αν υπάρχει προτίμηση για το ΑΑ ή το ΑΙ όσον αφορά τα μαθήματα, αυτή υπάρχει για μαθήματα μηχανικής ή με «βαριά» μαθηματικά, όπως η φυσική, τα μαθηματικά και τα πτυχία επιστήμης δεδομένων. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το ΑΑ προτιμάται ή ακόμη και απαιτείται, αλλά αυτό ισχύει μόνο για χώρες που κάνουν διάκριση μεταξύ ΑΑ ή ΑΙ. Όταν έχετε δύο άτομα με τους ίδιους βαθμούς στο ΑΙ ή στο ΑΑ HL, τα πανεπιστήμια τείνουν να προτιμούν αυτόν με το ΑΑ HL.

Πτυχία οικονομικών επιστημών: Εάν σχεδιάζετε να σπουδάσετε οικονομικά στο πανεπιστήμιο, το ΑΑ HL εστιάζει περισσότερο στην αναλυτική σκέψη, η οποία αποτελεί κεντρικό στοιχείο στα οικονομικά. Θα μάθετε ένα ευρύτερο φάσμα μαθηματικών στο ΑΙ HL, αλλά τα περισσότερα από αυτά δεν θα εμφανιστούν στα Οικονομικά. Ωστόσο, οποιοδήποτε από τα δύο μαθήματα HL είναι απολύτως εντάξει.

Πτυχία ιατρικής: Εφόσον έχετε πάρει Βιολογία Higher και Χημεία Higher, συνήθως δεν έχει μεγάλη σημασία ποιο μάθημα ή επίπεδο μαθηματικών θα επιλέξετε. Βεβαιωθείτε όμως ότι έχετε συνεννοηθεί με το πανεπιστήμιό σας.

Πτυχία Πληροφορικής: Αν σκοπεύετε να σπουδάσετε επιστήμη υπολογιστών στο πανεπιστήμιο, συνιστάται ανεπιφύλακτα να πάρετε HL μαθηματικά, ειδικά αν σκοπεύετε να σπουδάσετε στο Ηνωμένο Βασίλειο. Τόσο το ΑΑ HL όσο και το ΑΙ HL είναι κατάλληλες επιλογές, αλλά το AL HL συχνά προτιμάται για πεδία που σχετίζονται με την επιστήμη των υπολογιστών, κυρίως λόγω όλων των διακριτών μαθηματικών.

Πτυχία οικονομικών, διοίκησης και επιχειρήσεων: Συνήθως δεν έχει σημασία ποιο μάθημα ή επίπεδο μαθηματικών επιλέγετε, αλλά οι περισσότεροι φοιτητές που υποβάλλουν αίτηση για αυτά τα μαθήματα επιλέγουν ΑΙ.

Ο μόνος λόγος που πολλές σχολές δεν εκτιμούν ιδιαίτερα το ΑΙ HL οφείλεται σε ένα παραπλανητικό έγγραφο που λέει ότι το ΑΙ HL είναι Σπουδές αλλά πιο προχωρημένες. Η αλήθεια είναι ότι το ΑΙ HL έχει σχεδόν τη μισή διδακτέα ύλη του Further Math HL. Κανένα από τα δύο μαθήματα στο HL δεν προορίζεται για μαθητές που είναι "απλά εντάξει" στα μαθηματικά, αλλά η παρακολούθηση του ΑΑ SL θα σας θέσει σε σημαντικό μειονέκτημα όταν κάνετε αίτηση για μηχανικούς υπολογιστών/επιστήμες. Όπως είπα και παραπάνω, το ΑΙ HL είναι πιο κατάλληλο για CS λόγω όλων των διακριτών μαθηματικών, και είναι πιο δύσκολο από το ΑΑ HL.

Παρακάτω παρατίθεται μια πολύ σύντομη περίληψη για ορισμένες δημοφιλείς χώρες για περαιτέρω μελέτες και τις τάσεις τους για την προτίμηση της ΑΑ ή της ΑΙ. Έχετε υπόψη σας ότι υπάρχουν πάρα πολλές εξαιρέσεις, οπότε φροντίστε να κάνετε έρευνα και μόνοι σας - ελέγξτε ποια μαθήματα απαιτούν ή προτιμούν τα πανεπιστήμια στα οποία στοχεύετε.

Ηνωμένο Βασίλειο: Υπάρχουν περιπτώσεις διαφοροποίησης σε σημαντικό αριθμό πανεπιστημίων. Σε γενικές γραμμές, το ΑΑ HL είναι το μάθημα που ανοίγει τις περισσότερες πόρτες, καθώς σχεδόν όλα τα πτυχία μηχανικής και μαθηματικών βαρέων σπουδών (ακόμη και τα πτυχία ιατρικής) απαιτούν ΑΑ HL. Πολλά ανταγωνιστικά προγράμματα οικονομικών προτιμούν ή απαιτούν ακόμη και το ΑΑ HL. Φυσικά, υπάρχουν σημαντικές εξαιρέσεις, με πιο σημαντική αυτή του Oxbridge, το οποίο δεν έχει καμία προτίμηση μεταξύ των δύο, καθώς έχει ήδη τις δικές του εισαγωγικές εξετάσεις που περιλαμβάνουν μαθηματικά.

Ηνωμένες Πολιτείες: Δεν υπάρχει διαφοροποίηση AA/AI, αλλά μπορεί να απαιτείται/προτιμάται το HL έναντι του SL για πτυχία με μεγάλη βαρύτητα στα μαθηματικά. Για τους Αμερικανούς φοιτητές που σχεδιάζουν ένα φορτίο μαθημάτων γύρω από την ειδικότητά τους στο κολέγιο, θα συνιστούσα ανεπιφύλακτα το AA για το 90% των STEM Majors (ειδικά για οποιαδήποτε μηχανική και προ-ιατρική). Αν θέλετε να κάνετε αίτηση σε κορυφαία πανεπιστήμια όπου ο ανταγωνισμός είναι μεγάλος, πάρτε HL Math. Οι περισσότεροι σπουδαστές επιχειρήσεων και οικονομικών σπουδών παίρνουν AI.

Καναδάς: Πολλά καναδικά πανεπιστήμια έχουν μεγάλη προτίμηση στο AA. Αν σκοπεύετε να σπουδάσετε επιχειρήσεις, επιστήμες, μηχανική, μαθηματικά κ.λπ. είναι πολύ καλύτερο να πάρετε οποιοδήποτε επίπεδο του AA. Εάν όχι, τότε τα καναδικά σχολεία δεν είναι γενικά αυστηρά όσον αφορά τις προαγωγικές εξετάσεις και οποιοδήποτε από τα δύο στο HL είναι εντάξει.

Αυστραλία: Δεν υπάρχει διαφοροποίηση AA/AI.

International Baccalaureate Organization 2023-22237106

Μαθηματικά: ανάλυση και προσεγγίσεις - Mathematics: analysis and approaches

Ανώτερο επίπεδο - Higher level

8 May 2023

Zone A afternoon | Zone ***B*** morning | Zone ***C*** afternoon

2 ώρες

Οδηγίες προς τους υποψηφίους

- Γράψτε τον αριθμό μητρώου σας στα αντίστοιχα πεδία.
- Μην ανοίξετε αυτό το εξεταστικό χαρτί μέχρι να σας δοθεί σχετική εντολή.
- Δεν επιτρέπεται η πρόσβαση σε αριθμομηχανή για την εξέταση αυτή.
- Τμήμα A: απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να γράφονται στα προβλεπόμενα πλαίσια απαντήσεων.
- Τμήμα B: απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις στο τετράδιο απαντήσεων που σας παρέχεται. Συμπληρώστε τον αριθμό σας στο μπροστινό μέρος του τετραδίου απαντήσεων, και επισυνάψτε το στο παρόν εξεταστικό έγγραφο και στο τετράδιό σας με το συνοδευτικό φύλλο, χρησιμοποιώντας το παρεχόμενο καρτελάκι.
- Εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά στην ερώτηση, όλες οι αριθμητικές απαντήσεις πρέπει να δίνονται ακριβώς ή με τρία σημαντικά ψηφία.
- Ένα καθαρό αντίγραφο του «**τυπολόγιο μαθηματικών: ανάλυση και προσεγγίσεις**» απαιτείται για αυτήν την εξέταση.
- Ο μέγιστος βαθμός για αυτήν την εξέταση είναι [110 βαθμοί].

Δεν είναι απαραίτητο να δοθεί πλήρης βαθμολογία για μια σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πρέπει να υποστηρίζονται από πράξεις ή/και εξηγήσεις. Σε περίπτωση λανθασμένης απάντησης, μπορούν να δοθούν μερικοί βαθμοί για τη σωστή μέθοδο, υπό την προϋπόθεση ότι αυτή υποστηρίζεται με γραπτή εργασία. Συνεπώς, συνιστάται να παρουσιάσετε όλες τις εργασίες σας.

Μέρος Α

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να γραφούν στα φύλλα απαντήσεων που παρέχονται.

1. [Μέγιστη Βαθμολογία: 7]

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει τύπο $\boldsymbol{f(x) = \frac{7x+7}{2x-4}}$ όπου $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}, x \neq 2}$.

(a) Βρείτε την ρίζα της $\boldsymbol{f(x)}$. [2]

(b) Για το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$, γράψτε την εξίσωση

(i) Της κατακόρυφης ασύμπτωτης

(ii) Της οριζόντιας ασύμπτωτης. [2]

(c) Βρείτε την $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$, την αντίστροφη συνάρτηση της $\boldsymbol{f(x)}$. [3]

(a) Για την ρίζα της $\boldsymbol{f}$, έχω $\boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{7x+7}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}}$

(b)

(i) Έχω $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{7x+7}{2x-4} = \frac{9}{0^+} = \infty}$, άρα έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη την $\boldsymbol{\boxed{x = 2}}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{7x+7}{2x-4} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x\left(7+\frac{7}{x}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)} = \frac{7}{2}}$, άρα έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την $\boldsymbol{\boxed{y = \frac{7}{2}}}$

(c) Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι 1-1 αφού αν $\boldsymbol{f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{7x_1+7}{2x_1-4} = \frac{7x_2+7}{2x_2-4} \Leftrightarrow 14x_1x_2 + 14x_2 - 28x_1 - 28 = 14x_1x_2 + 14x_1 - 28x_2 - 28 \Leftrightarrow 40x_2 = 40x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$. Για $\boldsymbol{x \neq 2}$ έχω $\boldsymbol{y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{7x+7}{2x-4} \Leftrightarrow 2xy - 4y = 7x + 7 \Leftrightarrow 2xy - 7x = 4y + 7 \Leftrightarrow (2y-7)x = 4y + 7}$. Αν $\boldsymbol{y = \frac{7}{2}}$, έχω $\boldsymbol{0y = 14}$, άτοπο. Αν $\boldsymbol{y \neq \frac{7}{2}}$, έχω $\boldsymbol{x = \frac{4y+7}{2y-7}}$. Άρα $\boldsymbol{\boxed{f^{-1}(x) = \frac{4x+7}{2x-7}, x \neq \frac{7}{2}}}$

2. [Μέγιστη Βαθμολογία: 6]

Μια Δευτέρα σε ένα λούνα παρκ, ένα δείγμα 40 ατόμων επισκεπτών επιλέχθηκε τυχαία καθώς έφευγαν από το πάρκο. Ρωτήθηκαν πόσες φορές εκείνη την ημέρα είχαν ανέβει σε ένα παιχνίδι που ονομαζόταν "Ο Δράκος". Αυτές οι πληροφορίες συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων

Πόσες φορές πήγαν στο *The Dragon*	Συχνότητα
0	6
1	16
2	13
3	2
4	3

Μπορεί να θεωρηθεί ότι το δείγμα αυτό είναι αντιπροσωπευτικό όλων των επισκεπτών του πάρκου για την επόμενη ημέρα.

(a) Για την επόμενη μέρα, Τρίτη, εκτιμήστε

(i) Την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος επισκέπτης να ανέβηκε στο The Dragon

(ii) Τον αναμενόμενο αριθμό φορών που ένας επισκέπτης θα ανέβει στο The Dragon. [4]

Είναι γνωστό ότι **1000** επισκέπτες θα επισκεφθούν το λούνα παρκ την Τρίτη. Ο Δράκος μπορεί να μεταφέρει το πολύ **10** άτομα κάθε φορά που τρέχει.

(b) Υπολογίστε τον ελάχιστο αριθμό των φορών που πρέπει να τρέξει ο Δράκος για να ικανοποιήσει τη ζήτηση. [2]

(a)

(i) Από τους **40** επισκέπτες του δείγματος οι **6** δεν ανέβηκαν στο παιχνίδι, άρα ανέβηκαν σ' αυτό οι **34** στους **40** άρα ποσοστό $\frac{34}{40}\% = \boxed{85\%}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{\mu} = \frac{0\cdot(6)+1\cdot(16)+2\cdot(13)+3\cdot(2)+4\cdot(3)}{40} = \frac{16+26+6+12}{40} = \frac{60}{40} = \boxed{1,5}$ φορές ένας επισκέπτης θα ανέβει στο The Dragon

(b) Από το προηγούμενο ερώτημα αναμένεται ότι οι **1000** επισκέπτες αναμένεται να ανέβουν στο παιχνίδι $\mathbf{1000 \cdot 1,5 = 1500}$ φορές. Αφού ο Δράκος μπορεί να μεταφέρει το πολύ 10 άτομα κάθε φορά που τρέχει, συμπεραίνουμε ότι θα χρειαστεί να τρέξει τουλάχιστον $\frac{1500}{10} = \boxed{150}$ φορές.

3. [Μέγιστη Βαθμολογία: 6]

Να λυθεί η εξίσωση $\cos 2x = \sin x$, όπου $-\pi \le x \le \pi$.

Έχω $\cos 2x = \sin x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2}}$

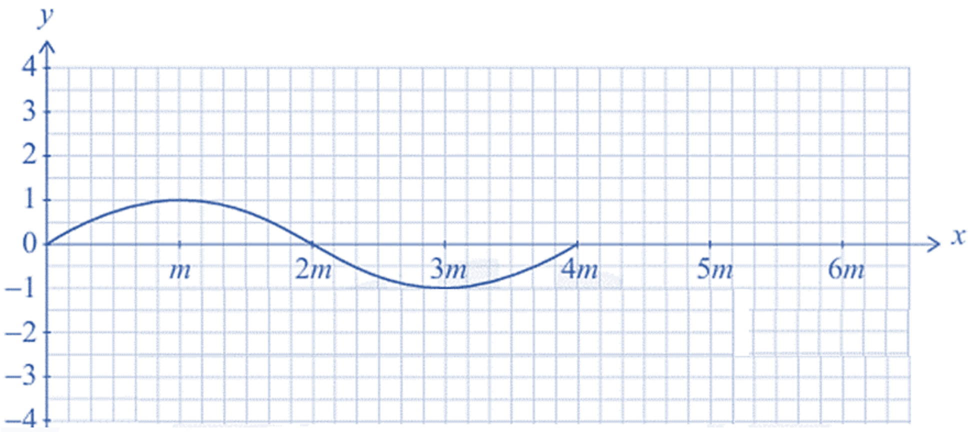
4. [Μέγιστη Βαθμολογία: 6]

Βρείτε το σύνολο τιμών του k έτσι ώστε η εξίσωση $e^{2x} + \ln k = 3e^x$ να έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

Έχω για $k > 0$ ότι $e^{2x} + \ln k = 3e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + \ln k = 0$. Θέτω $e^x = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 3\omega + \ln k = 0$ με $\Delta = 9 - 4\ln k \ge 0 \Leftrightarrow \ln k \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow k \le e^{\frac{9}{4}}$. Παρατηρώ ότι το άθροισμα των ριζών , $\omega_1 + \omega_2 = 3 > 0$, άρα τουλάχιστον ένα από τα ω_1, ω_2 είναι θετικό, άρα η αρχική θα έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση. Τελικά $\boxed{k \in \left(0, e^{\frac{9}{4}}\right]}$

5. [Μέγιστη Βαθμολογία: 6]

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin qx$, όπου $q > 0$. Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει μέρος του γραφήματος της f για $0 \le x \le 4m$, όπου x σε ακτίνια. Υπάρχουν τομές με τον x-άξονα για $x = 0$,



$2m$ και $4m$. [2]

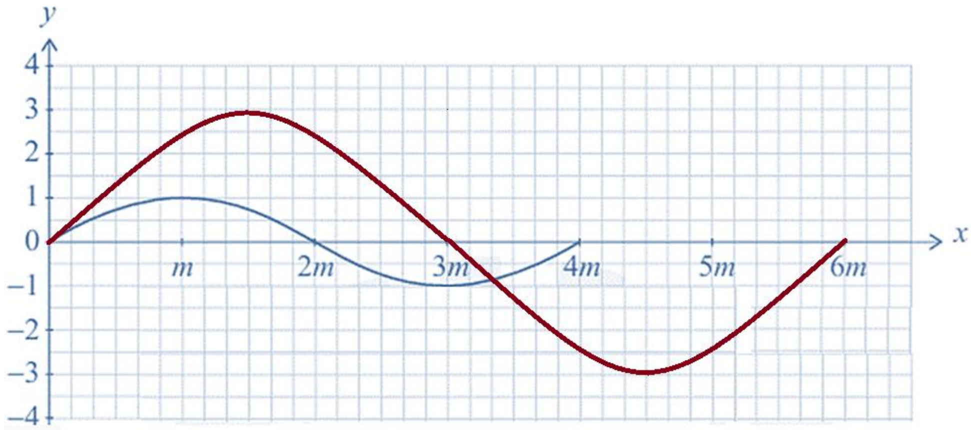
(a) Βρείτε έναν τύπο του m ως προς q.

Η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x) = 3\sin\frac{2qx}{3}$, για $0 \le x \le 6m$.

(b) Στους παραπάνω άξονες, σχεδιάστε το γράφημα της g. [4]

(a) Η f έχει περίοδο $4m$, όπως φαίνεται από το διάγραμμα, άρα $T_f = \frac{2\pi}{q} \Leftrightarrow 4m = \frac{2\pi}{q} \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{\pi}{2q}}$

(b) Έχω $T_g = \frac{2\pi}{\frac{2q}{3}} = \frac{6\pi}{2q} = 6m$, άρα το γράφημα της g είναι ημιτονοειδής καμπύλη με περίοδο $6m$ και μέγιστη τιμή το 3.



6. [Μέγιστη Βαθμολογία: 5]
Το μήκος των πλευρών, $\boldsymbol{x}$ cm, ενός ισόπλευρου τριγώνου αυξάνεται με ρυθμό $\boldsymbol{4cm \cdot s^{-1}}$
Βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο το εμβαδόν του τριγώνου, $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{cm^2}$, αυξάνεται όταν οι πλευρές έχουν μήκος $\boldsymbol{5\sqrt{3}}$ cm.

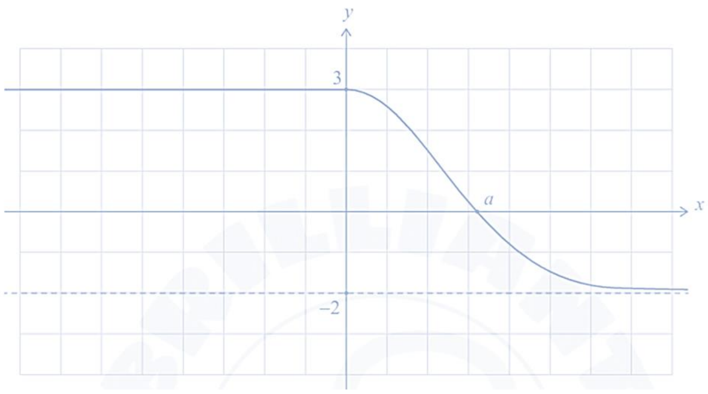
Έχω για τα ισόπλευρα τρίγωνα ότι $\boldsymbol{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x(t) * x'(t)}$Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου όταν οι πλευρές έχουν μήκος $\boldsymbol{5\sqrt{3}}$ cm είναι $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 4 = \boxed{30cm^{\cdot} \cdot s^{-1}}}$

7. [Μέγιστη Βαθμολογία: 6]
Έστω $\boldsymbol{P(z) = 4m - mz + \frac{36}{m}z^2 - z^3}$, όπου $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ και $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^+$.

Αν ο $\boldsymbol{z - 3i}$ είναι παράγοντας του $\boldsymbol{P(z)}$, βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $\boldsymbol{P(z) = 0}$.

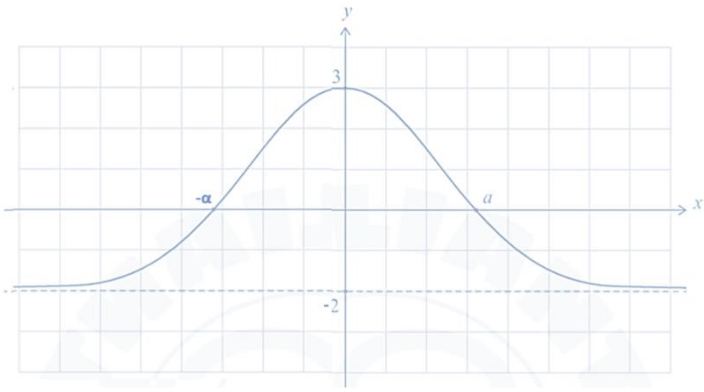
Αφού οι συντελεστές του τριτοβάθμιου πολυωνύμου είναι πραγματικοί, εκτός από τον $\boldsymbol{z - 3i}$, θα είναι παράγοντας του και ο $\boldsymbol{z + 3i}$. Άρα $\boldsymbol{P(z) = 4m - mz + \frac{36}{m}z^2 - z^3 \Leftrightarrow (z - 3i)(z + 3i)(az + b) = 4m - mz + \frac{36}{m}z^2 - z^3 \Leftrightarrow (z^2 + 9)(az + b) = 4m - mz + \frac{36}{m}z^2 - z^3 \Leftrightarrow az^3 + bz^2 + 9az + 9b = 4m - mz + \frac{36}{m}z^2 - z^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{36}{m} \\ 9a = -m \\ 9b = 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{36}{m} \\ 9 = m \\ b = 4 \end{cases}}$ Άρα $\boldsymbol{P(z) = (z - 3i)(z + 3i)(-z + 4)}$, με ρίζες $\boldsymbol{\boxed{z = \pm 3i \vee z = 4}}$

8. [Μέγιστη Βαθμολογία: 7]
Μέρος του γραφήματος μιας συνάρτησης, $\boldsymbol{f}$, διακρίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$ τέμνει τον $\boldsymbol{y}$-άξονα στο $\boldsymbol{(0, 3)}$, τον $\boldsymbol{x}$-άξονα στο $\boldsymbol{(a, 0)}$ και έχει μια οριζόντια ασύμπτωτη $\boldsymbol{y = -2}$.
Θεωρήστε την συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = f(|x|)}$.



(a) Σχεδιάστε το γράφημα της $\boldsymbol{y = g(x)}$, με τις τυχόν τομές του με τους άξονες και την εξίσωση της ασύμπτωτης. [4]
(b) Βρείτε τις πιθανές τιμές του $\boldsymbol{k}$ τέτοιες ώστε η $\boldsymbol{(g(x))^2 = k}$ να έχει ακριβώς 2 ρίζες. [3]

(a) Έχω $g(x) = f(x), x \geq 0$, άρα για $x \geq 0$ οι γραφικές παραστάσεις των f και g ταυτίζονται. Επειδή η g είναι προφανώς άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον x-άξονα. Άρα έχουμε το ακόλουθο γράφημα.

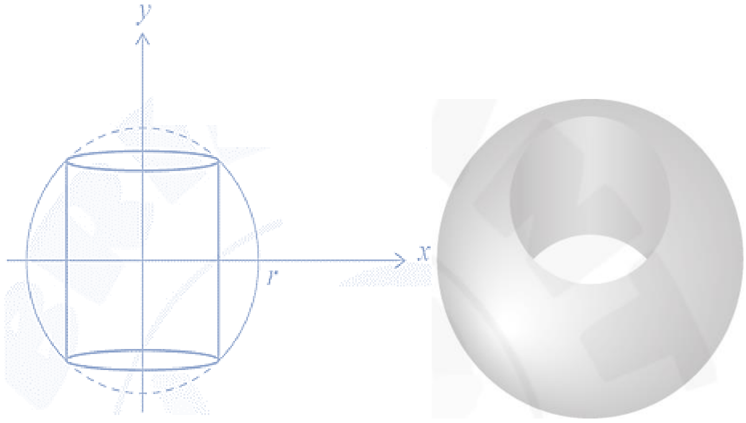


(b) Έχω $(g(x))^2 = k \geq 0 \Leftrightarrow g(x) = \pm\sqrt{k}$. Αλλά, από το γράφημα έχω $-2 < g(x) \leq 3$, άρα πρέπει $\sqrt{k} \leq 3 \wedge -\sqrt{k} > -2 \Leftrightarrow \sqrt{k} \leq 3 \wedge \sqrt{k} < 2 \Rightarrow k < 4$. Άρα $\boxed{k \in [0,4)}$. Επαλήθευση: οι ευθείες της μορφής $y = \pm\sqrt{k}, k \in [0,4)$ τέμνουν το γράφημα της g σε δύο σημεία ακριβώς, άρα η $g(x) = \pm\sqrt{k}$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, το ίδιο και η ισοδύναμή της, $(g(x))^2 = k$.

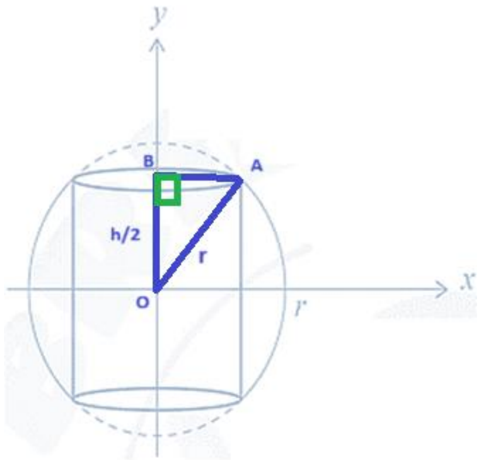
9. [Μέγιστη Βαθμολογία: 7]

Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ για $-r \leq y \leq r$.

Το χωρίο που περιέχεται ανάμεσα στο γράφημα της $x = f(y)$ και τον y-άξονα περιστρέφεται κατά 360^o ως προς τον y-άξονα και σχηματίζει μια σφαίρα. Η σφαίρα κόβεται κατά μήκος του y-άξονα, και δημιουργεί μια κυλινδρική οπή. Ο τελικός σφαιρικός δακτύλιος έχει ύψος, h. Η πληροφορία αυτή παρουσιάζεται στο ακόλουθο διάγραμμα, που δεν είναι υπό κλίμακα.



Ο σφαιρικός δακτύλιος έχει όγκο π κυβικές μονάδες. Βρείτε την τιμή του h.Έστω B το κέντρο της κυκλικής άνω βάσης του αφαιρούμενου κυλίνδρου. Από το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος έχω $AB^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$, άρα $x_A = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$. Ο όγκος του σφαιρικού δακτυλίου είναι ο όγκος από περιστροφή κατά 360° ως προς τον y- άξονα του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στον κύκλο και την $x = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$, άρα $V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi\left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 - \pi\left(\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}\right)^2 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi(r^2 - y^2) - \pi\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\pi y^2 + \pi\frac{h^2}{4} dy = \pi\left[-\frac{y^3}{3} + \frac{h^2}{4}y\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \pi\left[-\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{8}\right] = \frac{\pi h^3}{6} \Rightarrow \frac{\pi h^3}{6} = \pi \Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{6}}$



Μέρος Β

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

10. [Μέγιστη Βαθμολογία: 14]

Έστω η αριθμητική πρόοδος $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $S_n = n^2 + 4n$.

(a)

(i) Βρείτε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων.

(ii) Αν $S_6 = 60$, βρείτε το u_6. [4]

(b) Βρείτε το u_1. [2]

(c) Συνεπώς ή με άλλον τρόπο, γράψτε έναν τύπο για το u_n ως προς n. [3]

Θεωρήστε μια γεωμετρική πρόοδο, v_n, όπου $v_2 = u_1$ και $v_4 = u_6$.

(d) Βρείτε τις πιθανές τιμές του λόγου, r. [3]

(e) Αν $v_{99} < 0$, βρείτε το v_5. [2]

(a)

(i) Έχω $S_5 = 5^2 + 4 \cdot 5 = \boxed{45}$

(ii) Έχω $u_6 = S_6 - S_5 = 60 - 45 = \boxed{15}$

(b) Έχω $S_6 = \frac{6(u_1+u_6)}{2} \Leftrightarrow 60 = 3(u_1 + 15) \Leftrightarrow \boxed{u_1 = 5}$

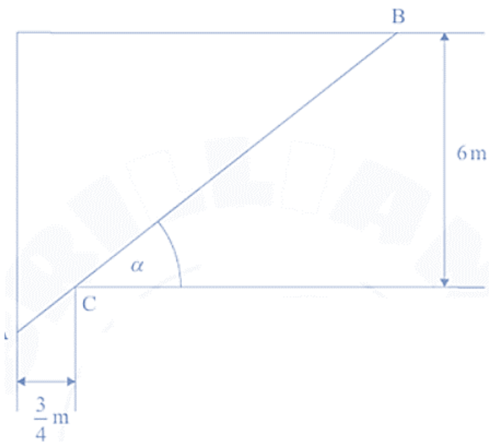
(c) Έχω $u_6 = u_1 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 15 = 5 + 5\omega \Leftrightarrow \omega = 2$.

Άρα $u_n = u_1 + (n-1)\omega = 5 + 2(n-1) = \boxed{2n+3}$

(d) Έχω $r^2 = \frac{v_4}{v_2} = \frac{u_6}{u_1} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

(e) Έχω $\frac{v_{99}}{v_4} = r^{99-4} \Rightarrow r^{95} = \frac{v_{99}}{15} < 0 \Rightarrow r < 0 \Rightarrow r = -\sqrt{3}$. Άρα $v_5 = r \cdot v_4 = \boxed{-15\sqrt{3}}$

11. [Μέγιστη Βαθμολογία: 19]



Θεωρήστε το ακόλουθο διάγραμμα, που δείχνει το σχέδιο ενός σπιτιού. Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.

Ένας στενός διάδρομος με πλάτος $\frac{3}{4}m$ είναι κάθετος σε ένα δωμάτιο πλάτους $6m$. Υπάρχει μια γωνία στο σημείο C. Τα σημεία A και B είναι μεταβλητά και πάνω στους τοίχους έτσι ώστε τα A, C και B να είναι στην ίδια ευθεία.

Έστω L το μήκος του AB σε μέτρα.

Έστω a η γωνία που σχηματίζει το AB με τον τοίχο του δωματίου, όπου $0 < a < \frac{\pi}{2}$

(a) Δείξτε ότι $L = \frac{3}{4}\sec a + 6\operatorname{cosec} a$. [2]

Έχω $L = AC + CB = \frac{\frac{3}{4}}{\cos a} + \frac{6}{\sin a} = \frac{3}{4}\sec a + 6\operatorname{cosec} a$

(b)

(i) Βρείτε το $\frac{dL}{da}$.

(ii) Όταν $\frac{dL}{da} = 0$, δείξτε ότι $a = \arctan 2$. [5]

Υπενθυμίζουμε ότι

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$

$\mathbf{cosec}x = \frac{1}{\sin x}$	$-\mathbf{cosec}x \cdot \mathbf{cot}x$
$\mathbf{sec}x = \frac{1}{\cos x}$	$\mathbf{sec}x \cdot \mathbf{tan}x$
$\mathbf{cot}x = \frac{1}{\tan x}$	$-\mathbf{cosec}^2 x$

(i) Έχω $\boxed{\frac{dL}{da} = \frac{3}{4}\tan a \sec a - 6cosec\, a \cdot \cot a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin a}{\cos^2 a} - 6\frac{\cos a}{\sin^2 a}$

(ii) Έχω $\frac{dL}{da} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin a}{\cos^2 a} - 6\frac{\cos a}{\sin^2 a} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} = 8 \Leftrightarrow \tan a = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = arctan\, 2}$

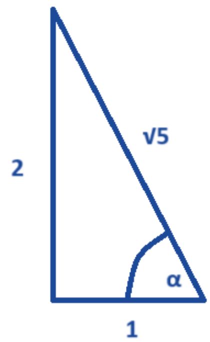
(c)

(i) Βρείτε το $\frac{d^2L}{d\alpha^2}$

(ii) Όταν $\alpha =$ **arctan 2**, δείξτε ότι $\frac{d^2L}{d\alpha^2} = \frac{45}{4}\sqrt{5}$. [7]

(i) Έχω $\frac{d^2L}{d\alpha^2} = \left(\frac{3}{4}\tan a \sec a - 6cosec\, a \cdot \cot a\right)' = \frac{3}{4}((\tan a)' \sec a + \tan a\,(\sec a)') - 6((cosec\, a)' \cdot \cot a + \mathrm{cosec}\, a\,(cot\, a)') = \frac{3}{4}(\sec^3 a + \tan^2 a \cdot \sec a) - 6(-cosec\, a \cdot \cot^2 a - \mathrm{cosec}^3 a) = \boxed{\frac{3}{4}(\sec^3 a + \tan^2 a \cdot \sec a) + 6(cosec\, a \cdot \cot^2 a + \mathrm{cosec}^3 a)}$

(ii) Από το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο έχω:



$\tan a = 2$, $\sec a = \sqrt{5}$, $\mathrm{cosec}\, a = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot a = \frac{1}{2}$, άρα

$\frac{d^2L}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}(\sec^3 a + \tan^2 a \cdot \sec a) + 6(cosec\, a \cdot \cot^2 a + \mathrm{cosec}^3 a) = \frac{3}{4}\left(\left(\sqrt{5}\right)^3 + 4 \cdot \sqrt{5}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) = \frac{3}{4}\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{3}{4}\left(9\sqrt{5}\right) + 6\left(\frac{6\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{27\sqrt{5}}{4} + \frac{18\sqrt{5}}{4} = \boxed{\frac{45\sqrt{5}}{4}}$.

(d)

(i) Συνεπώς, δείξτε ότι το L έχει ελάχιστο για $\alpha =$ **arctan 2**.

(ii) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του L. [3]

(i) Αφού $\left.\frac{dL}{da}\right|_{a=\arctan 2} = 0$ και $\left.\frac{d^2L}{d\alpha^2}\right|_{a=\arctan 2} = \frac{45\sqrt{5}}{4} > 0$ έχω ότι το L έχει ελάχιστο για $\alpha =$ **arctan 2**

(ii) Για $\alpha =$ **arctan 2**, έχω $L(\arctan 2) = \frac{3}{4}\sec(\arctan 2) + 6\, cosec\,(\arctan 2) = \frac{3}{4}\sqrt{5} + 6\,\frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{15}{4}\sqrt{5}}$

Δύο άτομα πρέπει να μεταφέρουν ένα κοντάρι μήκους **11, 25** μέτρων από το διάδρομο στο δωμάτιο. Το κοντάρι πρέπει να μεταφέρεται οριζόντια.

(e) Προσδιορίστε αν αυτό είναι εφικτό, αιτιολογώντας την απάντησή σας. [2]

Αφού η L παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $\frac{15}{4}\sqrt{5}$ έπεται ότι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος της σκάλας, που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια να στρίψει στη γωνία, είναι $\frac{15}{4}\sqrt{5}$. Όμως $\frac{15}{4}\sqrt{5} < \frac{15}{4}\sqrt{9} = \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4} = 11,25$. (Βλέπε και Κεφάλαιο 2ο /άσκηση 5/Γ′ ομάδας από το ελληνικό σχολικό βιβλίο Γ′ Λυκείου!). Άρα **δεν** είναι εφικτό να μεταφερθεί με τον τρόπο αυτό ένα κοντάρι μήκους 11,25 μέτρων από το διάδρομο στο δωμάτιο.

12. [Μέγιστη Βαθμολογία: 21]

Δύο ευθείες, $\boldsymbol{L_1}$ και $\boldsymbol{L_2}$, τέμνονται στο σημείο $\boldsymbol{P}$. Το σημείο $\boldsymbol{A(2t, 8, 3)}$, όπου $\boldsymbol{t > 0}$, βρίσκεται στην $\boldsymbol{L_2}$.
Τα παραπάνω διακρίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα, που δεν είναι υπό κλίμακα

Η οξεία γωνία ανάμεσα στις γραμμές είναι $\frac{\pi}{3}$

Το διάνυσμα κατεύθυνσης της $\boldsymbol{L_1}$ είναι το $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, και

$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}2t\\0\\3+t\end{pmatrix}$

(a) Δείξτε ότι $\boldsymbol{4t = \sqrt{10t^2+12t+18}}$ [4]

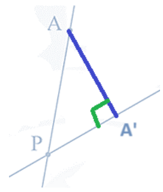
Έχω $\overrightarrow{PA}\cdot \vec{v}_{L_1} = |\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{v}_{L_1}|\cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$
$\begin{pmatrix}2t\\0\\3+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{(2t)^2+0^2+(3+t)^2}\cdot$
$\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 2t+0+0 = \sqrt{4t^2+t^2+6t+9}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 4t = \sqrt{5t^2+6t+9}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 4t =$
$\sqrt{10t^2+12t+18}$

(b) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{t}$. [4]

Από το προηγούμενο ερώτημα έχω $4t = \sqrt{10t^2+12t+18} \Rightarrow 16t^2 = 10t^2+12t+18 \Rightarrow 6t^2 -$
$12t - 18 = 0 \Rightarrow t^2-2t-3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \overset{t>0}{\Longrightarrow} \boxed{t=3}$

(c) Συνεπώς ή με άλλον τρόπο, βρείτε την συντομότερη απόσταση του $\boldsymbol{A}$ από την ευθεία $\boldsymbol{L_1}$. [4]

Για $t=3$ έχω $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}2\cdot 3\\0\\3+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{6^2+0^2+6^2} = 6\sqrt{2}$. Άρα, όπως φαίνεται κι από το σχήμα, έχω $\sin 60^\circ = \frac{AA'}{PA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AA'}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{AA' = 3\sqrt{6}}$



Ένα επίπεδο, $\boldsymbol{\Pi}$, περιέχει τις ευθείες $\boldsymbol{L_1}$ και $\boldsymbol{L_2}$.

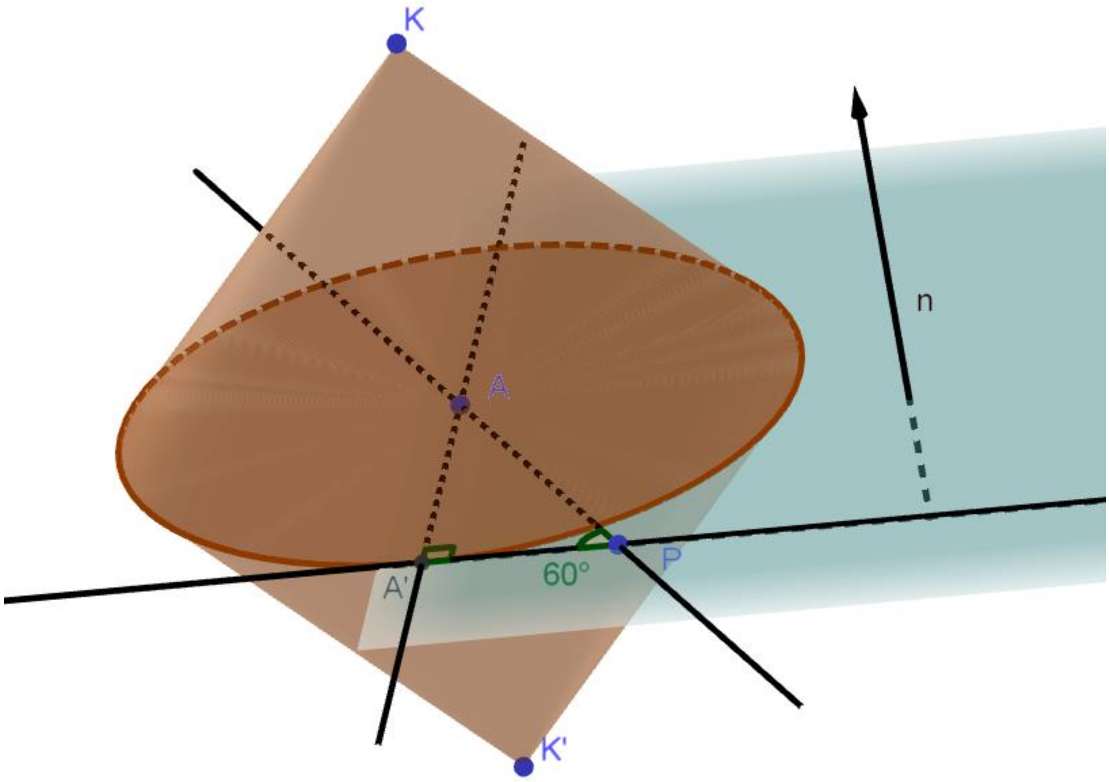
(d) Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στο $\boldsymbol{\Pi}$. [2]

Έχω $\vec{n}\perp L_1, L_2 \Leftrightarrow \vec{n} = \lambda\cdot\overrightarrow{PA}\times\vec{v}_{L_2} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{vmatrix}i & j & k\\6 & 0 & 6\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-6\\6\\6\end{pmatrix} = \boxed{6\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}}$

Η βάση ενός ορθού κώνου βρίσκεται στο $\boldsymbol{\Pi}$, με κέντρο το $\boldsymbol{A}$ έτσι ώστε η $\boldsymbol{L_1}$να εφάπτεται στην βάση.
Ο όγκος του κώνου είναι $\boldsymbol{90\pi\sqrt{3}}$ κυβικές μονάδες.

(e) Βρείτε δυο πιθανές τιμές της κορυφής του κώνου. [7]

Η βάση του κώνου έχει ακτίνα $r = AA' = 3\sqrt{6}$.Από τον τύπο του όγκου κώνου θα βρω το ύψος του κώνου. Έχω $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{270\pi\sqrt{3}}{\pi\cdot 9\cdot 6} = 5\sqrt{3}$. Αν $\boldsymbol{K}$ η κορυφή του κώνου, τότε έχω $\overrightarrow{KA} = k\vec{n} =$
$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}k \Rightarrow |\overrightarrow{KA}| = |k|\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} \Rightarrow h = |k|\sqrt{3} \Rightarrow 5\sqrt{3} = |k|\sqrt{3} \Rightarrow k = \pm 5 \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \begin{pmatrix}\pm 5\\\mp 5\\\mp 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}6\\8\\3\end{pmatrix} -$
$\begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm 5\\\mp 5\\\mp 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\pm 5\\\mp 5\\\mp 5\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\13\\8\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\3\\-2\end{pmatrix}}$



K
n
A
A'
60°
P
K'

International Baccalaureate Organization 2023 - 8823-7109

Μαθηματικά: ανάλυση και προσεγγίσεις - Mathematics: analysis and approaches

Τυπικό επίπεδο - Standard level

30 Οκτωβρίου 2023

Zone A afternoon | Zone ***B*** afternoon | Zone ***C*** afternoon

1 ώρα 30 λεπτά

Οδηγίες προς τους υποψηφίους

- Γράψτε τον αριθμό μητρώου σας στο αντίστοιχο πεδίο.
- Μην ανοίξετε αυτό το εξεταστικό χαρτί μέχρι να σας δοθεί σχετική εντολή.
- Δεν επιτρέπεται η πρόσβαση σε αριθμομηχανή για την εξέταση αυτή.
- Τμήμα Α: απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να γράφονται στα προβλεπόμενα πλαίσια απαντήσεων.
- Τμήμα Β: απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις στο τετράδιο απαντήσεων που σας παρέχεται. Συμπληρώστε τον αριθμό σας στο μπροστινό μέρος του τετραδίου απαντήσεων, και επισυνάψτε το στο παρόν εξεταστικό έγγραφο και στο τετράδιό σας με το συνοδευτικό φύλλο, χρησιμοποιώντας το παρεχόμενο καρτελάκι.
- Εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά στην ερώτηση, όλες οι αριθμητικές απαντήσεις πρέπει να δίνονται ακριβώς ή σωστές με τρία σημαντικά ψηφία.
- Ένα καθαρό αντίγραφο του «**τυπολόγιο μαθηματικών: ανάλυση και προσεγγίσεις**» απαιτείται για αυτήν την εξέταση.
- Ο μέγιστος βαθμός για αυτήν την εξέταση είναι **[80 βαθμοί]**.

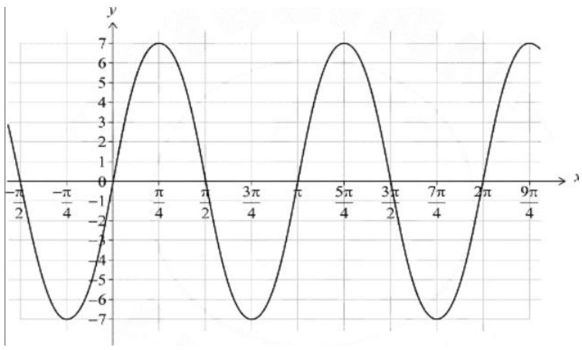
Δεν είναι απαραίτητο να δοθεί πλήρης βαθμολογία για μια σωστή απάντηση χωρίς τεκμηρίωση. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πρέπει να υποστηρίζονται από πράξεις ή/και εξηγήσεις. Σε περίπτωση λανθασμένης απάντησης, μπορούν να δοθούν μερικοί βαθμοί για τη σωστή μέθοδο, υπό την προϋπόθεση ότι αυτή αποδεικνύεται με γραπτή εργασία. Συνεπώς, συνιστάται να παρουσιάσετε όλες τις εργασίες σας.

Μέρος Α

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να γραφούν στα φύλλα απαντήσεων που παρέχονται.

1. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Θεωρήστε την συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = a\sin(bx)}$ με $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b \in Z^+}$. Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει μέρος του γραφήματος της $\boldsymbol{f}$.



(a) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{a}$. [1]

(b)

(i) Βρείτε την περίοδο της $\boldsymbol{f}$.

(ii) Συνεπώς, βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{b}$. [3]

(c) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{12}\right)}$ [3]

(a) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα η $\boldsymbol{f}$ έχει μέγιστη τιμή το $\boldsymbol{7}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{a = 7}}$

(b)

(i) Εύκολα έχω από το διάγραμμα ότι $\boxed{\boldsymbol{T = \pi}}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{b}}$ άρα $\boldsymbol{b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi}}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{b = 2}}$

(c) Από τα παραπάνω ερωτήματα έχω $\boldsymbol{f(x) = 7\sin(2x)}$, άρα $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 7\sin\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 7\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{7}{2}}}$

2. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Έστω οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x) = x + 2}$ και $\boldsymbol{g(x) = x^2 - k^2}$, όπου $\boldsymbol{k}$ είναι μια πραγματική σταθερά.

(a) Γράψτε τον τύπο της $\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$. [2]

(b) Αν $\boldsymbol{(g \circ f)(4) = 11}$, βρείτε τις πιθανές τιμές του $\boldsymbol{k}$. [3]

(a) Έχω $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - k^2}$ άρα $\boxed{\boldsymbol{(g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4 - k^2}}$

(b) Αφού $\boldsymbol{(g \circ f)(4) = 11}$ έχω $\boldsymbol{(4)^2 + 4(4) + 4 - k^2 = 11 \Leftrightarrow k^2 = 25 \Leftrightarrow \boxed{k = \pm 5}}$

3. [Μέγιστη βαθμολογία: 4]

Τα γεγονότα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι τέτοια ώστε $\boldsymbol{P(A) = 0.7}$, $\boldsymbol{P(B) = 0.75}$ και $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0.55}$.

(a) Βρείτε το $\boldsymbol{P(A \cup B)}$. [2]

(b) Συνεπώς ή με άλλον τρόπο, βρείτε το $\boldsymbol{P(A' \cap B')}$. [2]

(a) Έχω $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.75 - 0.55 = \boxed{0.9}}$

(b) Έχω από νόμο του Morgan ότι $\boldsymbol{(A \cup B)' = A' \cap B'}$, άρα $\boldsymbol{P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = \boxed{0.1}}$

4. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Το άθροισμα των $\boldsymbol{n}$ πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου $\boldsymbol{(u_n)}$ δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{S_n = pn^2 - qn}$, όπου $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι θετικές σταθερές.

Έστω $\boldsymbol{S_5 = 65}$ και $\boldsymbol{S_6 = 96}$.

(a) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{p}$ και του $\boldsymbol{q}$. [5]

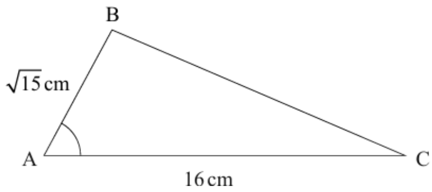
(b) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{u_6}$. [2]

(a) Έχω $\boldsymbol{\begin{cases} S_5 = 65 \\ S_6 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25p - 5q = 65 \\ 36p - 6q = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150p - 30q = 390 \\ 180p - 30q = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{p = 3} \\ \boxed{q = 2} \end{cases}}$

(b) Έχω $\boldsymbol{u_6 = S_6 - S_5 = 96 - 65 = \boxed{31}}$

5. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Στο παρακάτω τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$, έχω $\boldsymbol{AB} = \sqrt{\mathbf{15}}\ \boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{AC} = \mathbf{16}\ \boldsymbol{cm}$ και $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C} = \frac{1}{4}$, το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα



Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{ABC}$.

Έχω από την τριγωνομετρική ταυτότητα ότι $\cos^2 B\hat{A}C + \sin^2 B\hat{A}C = 1 \Leftrightarrow \sin^2 B\hat{A}C = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \xRightarrow{\sin B\hat{A}C>0} \sin B\hat{A}C = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(ABC) = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin B\hat{A}C = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 2 = \boxed{30\ cm^2}$

6. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Η διωνυμική επέκταση του $(\mathbf{1} + \boldsymbol{kx})^{\boldsymbol{n}}$ δίνεται από την παράσταση $\mathbf{1} + \frac{9x}{2} + \mathbf{15}\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \boldsymbol{k}^n\boldsymbol{x}^n$, όπου $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^+$ και $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Q}$.

Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{n}$ και του $\boldsymbol{k}$.

Έχω $(1 + kx)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i} \cdot (kx)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(kx)^n = 1 + \binom{n}{1}(kx)^1 + \binom{n}{2}(kx)^2 + \cdots + k^n x^n = 1 + nkx + \frac{n(n-1)}{2}k^2x^2 + \cdots + k^n x^n \equiv 1 + \frac{9x}{2} + 15k^2x^2 + \cdots + k^n x^n$

άρα $\begin{cases} nk = \frac{9}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2}k^2 = 15k^2 \end{cases} \xLeftrightarrow{k\neq 0,\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\ \acute{\alpha}\tau o\pi o} \begin{cases} nk = \frac{9}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} = 15 \end{cases} \overset{n>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6k = \frac{9}{2} \\ n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ n = 6 \end{cases}}$

Μέρος Β

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

7. [Μέγιστη βαθμολογία: 17]

Ένας θίασος παρουσιάζει την *Ωραία Κοιμωμένη* κάθε χρόνο. Πέρυσι έδωσαν συνολικά 60 παραστάσεις στο θέατρό τους που έχει μέγιστη χωρητικότητα 800 ατόμων.

Ο αριθμός των εισιτηρίων που πωλήθηκαν, $\boldsymbol{n}$, σε κάθε παράσταση φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα συχνοτήτων.

Number of tickets sold, n	Number of performances
$\mathbf{0 < n \leq 200}$	$\mathbf{3}$
$\mathbf{200 < n \leq 400}$	$\boldsymbol{p}$
$\mathbf{400 < n \leq 600}$	$\mathbf{18}$
$\mathbf{600 < n \leq 800}$	$\mathbf{30}$

(a)

(i) Να βρεθεί η τιμή του $\boldsymbol{p}$.

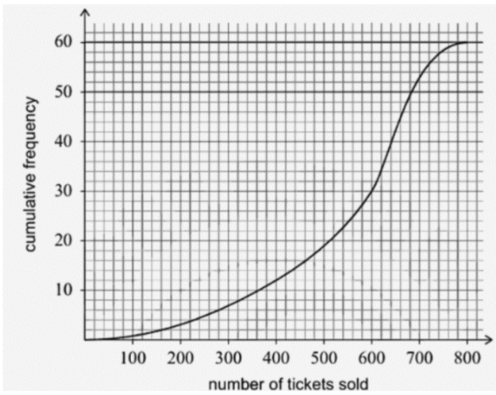
(ii) Να γράψετε τη επικρατούσα (modal) τάξη. [2]

(a)

(i) Έχω $\mathbf{60} = \boldsymbol{n} = \mathbf{3} + \boldsymbol{p} + \mathbf{18} + \mathbf{30} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \mathbf{60} - \mathbf{3} - \mathbf{18} - \mathbf{30} = \boxed{\mathbf{9}}$

(ii) Η επικρατούσα κλάση είναι το διάστημα κλάσης με την υψηλότερη συχνότητα, άρα η τέταρτη κλάση $\mathbf{600 < n \leq 800}$ με συχνότητα **30**.

Το ακόλουθο διάγραμμα αθροιστικής συχνότητας επίσης απεικονίζει αυτά τα δεδομένα.

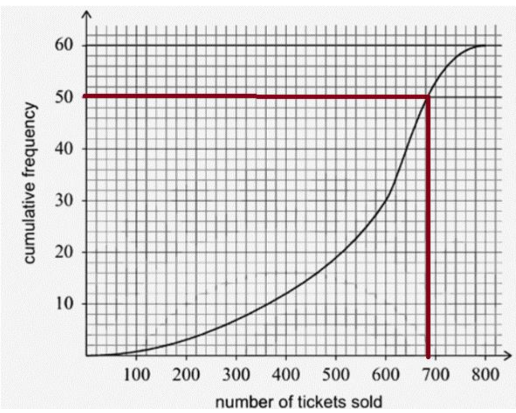


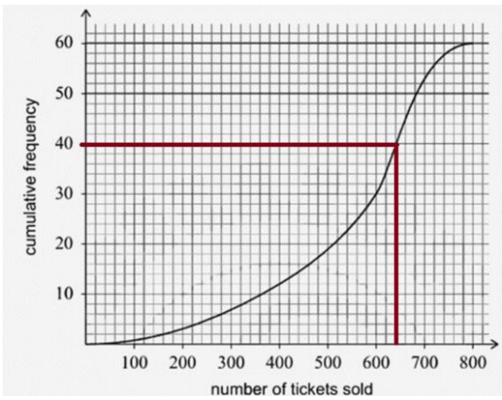
(b) Χρησιμοποιήστε την καμπύλη αθροιστικής συχνότητας για να εκτιμήσετε

(i) τον μέσο αριθμό των εισιτηρίων που πωλήθηκαν

(ii) Τον αριθμό των παραστάσεων όπου τουλάχιστον το **80%** των εισιτηρίων πωλήθηκαν. [4]

(b)





(i) Φέρουμε την οριζόντια ευθεία $\boldsymbol{y} = \mathbf{50\%}$ που τέμνει την γραφική παράσταση σε σημείο με τετμημένη **680**. Άρα ο μέσος αριθμός εισιτηρίων που πωλήθηκαν είναι $\boxed{\mathbf{680}}$.

(ii) Το **80%** του **800** είναι **640**. Άρα φέρουμε την κατακόρυφη ευθεία $\boldsymbol{x} = \mathbf{640}$ που τέμνει την γραφική παράσταση σε σημείο με τεταγμένη **40%**. Άρα ο αριθμός των παραστάσεων από τις **60** που έγιναν όπου κόπηκαν μέχρι το **640** εισιτήρια είναι $\mathbf{40\%} \cdot \mathbf{60} = \mathbf{24}$. Άρα οι παραστάσεις με παραπάνω από **640** εισιτήρια ήταν $\mathbf{60} - \mathbf{24} = \boxed{\mathbf{36}}$.

Μετά από μια παράσταση, η εταιρεία αποφασίζει να διεξάγει μια έρευνα για να λάβει ανατροφοδότηση από το κοινό.

(c)

(i) Να αναφέρετε ένα μειονέκτημα του γεγονότος ότι η εταιρεία διεξάγει έρευνα μόνο για το πρώτο **5** % του κοινού κατά την αποχώρησή του από το θέατρο.

(ii) Περιγράψτε εν συντομία πώς η εταιρεία θα μπορούσε να συλλέξει ανατροφοδότηση από το **5%** του κοινού χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της συστηματικής δειγματοληψίας.

(iii) Να αναφέρετε τη μέθοδο δειγματοληψίας που πρέπει να χρησιμοποιηθεί εάν η έρευνα πρόκειται να είναι αντιπροσωπευτική του αριθμού των παιδιών και του αριθμού των ενηλίκων στο κοινό. [4]

(c)

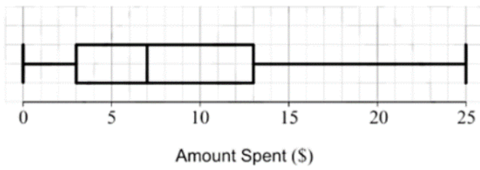
(i) Συνήθως αυτοί που αποχωρούν νωρίς είναι δυσαρεστημένοι από την παράσταση, άρα το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό.

(ii) Θα μπορούσε να ρωτά ένα ανά εικοσάδα θεατών που αποχωρούν από το θέατρο.

(iii) Στρωματική δειγματοληψία

Πέρυσι πωλήθηκαν 36000 εισιτήρια για την παράσταση *Η ωραία κοιμωμένη*.

(d) Το ακόλουθο θηκόγραμμα box and whisker απεικονίζει το ποσό που ξόδεψε το κοινό στο κατάστημα αναμνηστικών όταν παρακολούθησαν την παράσταση.



(i) Βρείτε τον αριθμό αυτών που ξόδεψαν από $3 έως και $25 .

(ii) Λιγότεροι από τους μισούς ξόδεψαν λιγότερο από $$\boldsymbol{a}$. Βρείτε την τιμή του a. [3]

(d) Στο θηκόγραμμα η αριστερή πλευρά της θήκης αντιστοιχεί στο 1ο τεταρτημόριο και η δεξιά πλευρά στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ η ενδιάμεση γραμμή αντιστοιχεί στην διάμεση τιμή.

(i) Έχω ότι το $\boldsymbol{Q_1} = \mathbf{25\%}$ αντιστοιχεί στα 3\$, τα 25\$ αντιστοιχούν στο **100%**. Συνεπώς από 3\$ έως 25\$ ξόδεψαν το **75%** των θεατών δηλαδή $\mathbf{75\%36000} = \boxed{\mathbf{27000}}$ θεατές.

(ii) Έχω από το θηκόγραμμα ότι η διάμεση τιμή $\boldsymbol{Q_2}$ αντιστοιχεί στην τιμή **7**, άρα $\boxed{\boldsymbol{a} = \mathbf{7}}$.

(e) Φέτος ο θίασος θα δώσει και πάλι 60 παραστάσεις και αναμένει να πουλήσει 18 επιπλέον εισιτήρια για κάθε παράσταση.

(i) Υπολογίστε τον μέσο αριθμό εισιτηρίων που η εταιρεία αναμένει να πουλήσει φέτος για κάθε παράσταση.

(ii) Να αναφέρετε ποια επίδραση, εάν υπάρχει, θα έχει αυτή η αύξηση των πωλήσεων εισιτηρίων στη διακύμανση του αριθμού των εισιτηρίων που πωλούνται για κάθε παράσταση. [4]

(e) Αν $\boldsymbol{Y}$ η τυχαία μεταβλητή που αναφέρεται στα φετινά εισιτήρια και $\boldsymbol{X}$ στα περσινά, τότε έχω $\boldsymbol{Y_i} = \boldsymbol{X_i} + \mathbf{18}$

(i) Άρα έχω $\boldsymbol{EY} = \boldsymbol{EX} + \mathbf{18} = \frac{3\cdot100+9\cdot300+18\cdot500+30\cdot700}{60} + \mathbf{18} = \mathbf{550} + \mathbf{18} = \boxed{\mathbf{568}}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{VarY} = \boldsymbol{VarX}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{\sigma_X} = \boldsymbol{\sigma_Y}}$ δηλαδή η διακύμανση δεν μεταβάλλεται.

8. [Μέγιστη βαθμολογία: 15]

Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ έχουν τύπο $\boldsymbol{f(x) = \ln(2x-7)}$, όπου $\boldsymbol{x > \frac{7}{2}}$ και $\boldsymbol{g(x) = 2\ln x - \ln d}$, όπου $\boldsymbol{x > 0, d \in \mathbb{R}^+}$.

(a) Βρείτε την εξίσωση της κατακόρυφης ασυμπτώτου στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{y = g(x)}$. [1]

Έχω $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x - \ln d = -\infty$, άρα κατακόρυφη ασύμπτωτη η $\boxed{x = 0}$

Τα γραφήματα των $\boldsymbol{y = f(x)}$ και $\boldsymbol{y = g(x)}$ τέμνονται σε δύο διακριτά σημεία.

(b)

(i) Δείξτε ότι, στα σημεία τομής, $\boldsymbol{x^2 - 2dx + 7d = 0}$.

(ii) Ως εκ τούτου, δείξτε ότι $\boldsymbol{d^2 - 7d > 0}$.

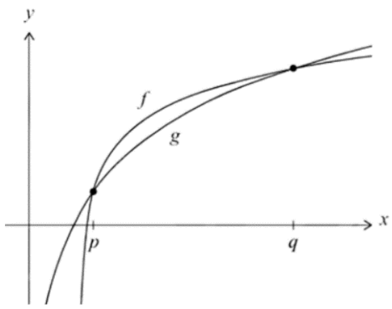
(iii) Βρείτε το εύρος των πιθανών τιμών του $\boldsymbol{d}$. [9]

(i) Στα σημεία τομής έχω $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(2x-7) = 2\ln x - \ln d \Leftrightarrow \ln(2x-7) = \ln\frac{x^2}{d} \Leftrightarrow$ $2x - 7 = \frac{x^2}{d} \Leftrightarrow 2xd - 7d = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2dx + 7d = 0$.

(ii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχω $x^2 - 2dx + 7d = 0$. Για να έχω δύο σημεία τομής σημαίνει ότι η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ $(-2d)^2 - 4\cdot 7d > 0 \Leftrightarrow 4d^2 - 4\cdot 7d > 0 \Leftrightarrow d^2 - 7d > 0$, όπως θέλαμε.

(iii) Έχω $d^2 - 7d > 0 \Leftrightarrow d(d-7) > 0 \Leftrightarrow d < 0 \vee d > 7 \Leftrightarrow \boxed{d \in (-\infty, 0) \cup (7, \infty)}$

Το ακόλουθο διάγραμμα δείχνει μέρος των γραφικών παραστάσεων των $\boldsymbol{y = f(x)}$ και $\boldsymbol{y = g(x)}$.



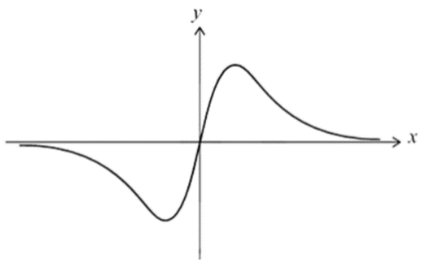
Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα $\boldsymbol{x = p}$ και $\boldsymbol{x = q}$, όπου $\boldsymbol{p < q}$.

(c) Στην περίπτωση που $\boldsymbol{d = 10}$, να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{q - p}$. Εκφράστε την απάντησή σας με τη μορφή $\boldsymbol{a\sqrt{b}}$, όπου $\boldsymbol{a, b \in Z^+}$. [5]

Για $d = 10 > 7$ έχω $x^2 - 20x + 70 = 0$ με $q - p = |x_1 - x_2| =$ $\left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{400 - 280} = \sqrt{120} = \sqrt{4\cdot 30} = \boxed{2\sqrt{30}}$

9. [Μέγιστη βαθμολογία: 13]

Θεωρήστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ με $\boldsymbol{f(x) = \frac{12x}{(x^2+2)^3}}$, where $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$. Η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



(a) Δείξτε ότι $\boldsymbol{f'(x) = \frac{12(2-5x^2)}{(x^2+2)^4}}$. [4]

(b) Βρείτε το $\boldsymbol{\int f(x)dx}$. [4]

Θεωρήστε μια συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)}$ που ορίζεται για $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$. Η παράγωγος της $\boldsymbol{g}$ είναι τέτοια ώστε $\boldsymbol{g'(x) = f'(x)}$, για κάθε $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$.

Έστω $\boldsymbol{R}$ είναι η περιοχή που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$, το γράφημα της $\boldsymbol{g}$, την ευθεία $\boldsymbol{x = 0}$ και την ευθεία $\boldsymbol{x = 3}$. Το εμβαδόν της $\boldsymbol{R}$ είναι $\boldsymbol{\frac{21}{2}}$.

(c) Βρείτε τις δύο πιθανές εκφράσεις για το $\boldsymbol{g(x)}$. [5]

(a) Έχω $f'(x) = \frac{12\cdot(x^2+2)^3 - 12x\cdot\left[(x^2+2)^3\right]'}{\left[(x^2+2)^3\right]^2} = \frac{12\cdot(x^2+2)^3 - 12x\cdot 3\cdot 2x\cdot(x^2+2)^2}{(x^2+2)^6} = \frac{12\cdot(x^2+2) - 12x\cdot 3\cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{12x^2 + 24 - 72x^2}{(x^2+2)^4} =$ $\frac{12(2-5x^2)}{(x^2+2)^4}$, όπως θέλαμε.

(b) Έχω $\int f(x)dx = \int \frac{12x}{(x^2+2)^3}dx = \int \frac{6\cdot(x^2+2)'}{(x^2+2)^3}dx = 6\cdot\int (x^2+2)'\cdot(x^2+2)^{-3}dx = 6\cdot\int\left[\frac{(x^2+2)^{-2}}{-2}\right]'dx =$ $6\cdot\frac{(x^2+2)^{-2}}{-2} + c = \boxed{\frac{-3}{(x^2+2)^2} + c}$

(c) Έχω $\boldsymbol{E_R} = \int_0^3 |\boldsymbol{g(x)} - \mathbf{f(x)}| \mathbf{d}\boldsymbol{x}$ αφού $\boldsymbol{g'(x)} = \boldsymbol{f'(x)} \Rightarrow \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{c_2} \Rightarrow \boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{c_2}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{E_R} = \int_0^3 |\boldsymbol{c_2}| \mathbf{d}\boldsymbol{x} \Rightarrow \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}} = \mathbf{3}|\boldsymbol{c_2}| \Rightarrow |\boldsymbol{c_2}| = \frac{7}{2} \Rightarrow \boldsymbol{c_2} = \pm\frac{7}{2}$. Άρα $\boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{f(x)} = \pm\frac{7}{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{f(x)} \pm \frac{7}{2}}$

International Baccalaureate Organization 2023 2223-7206

Mathematics: applications and interpretation - εφαρμογές και ερμηνεία

Higher level-Ανώτερο επίπεδο

Paper 1

8 Μαΐου 2023

Zone A afternoon | Zone $\boldsymbol{B}$ morning | Zone $\boldsymbol{C}$ afternoon

2 ώρες

Οδηγίες προς τους υποψηφίους

- Γράψτε τον αριθμό μητρώου σας στα αντίστοιχα πεδία.
- Μην ανοίξετε αυτό το εξεταστικό χαρτί μέχρι να σας δοθεί σχετική εντολή.
- **Επιτρέπεται** η πρόσβαση σε αριθμομηχανή για την εξέταση αυτή.
- Οι απαντήσεις πρέπει να γράφονται στα προβλεπόμενα πλαίσια απαντήσεων.
- Εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά στην ερώτηση, όλες οι αριθμητικές απαντήσεις πρέπει να δίνονται ακριβώς ή σωστές με τρία σημαντικά ψηφία.
- Ένα καθαρό αντίγραφο του **«τυπολόγιο μαθηματικών: εφαρμογές και ερμηνεία»** απαιτείται για αυτήν την εξέταση.
- Ο μέγιστος βαθμός για αυτήν την εξέταση είναι [110 βαθμοί].

Δεν είναι απαραίτητο να δοθεί πλήρης βαθμολογία για μια σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πρέπει να υποστηρίζονται από πράξεις ή/και εξηγήσεις. Οι λύσεις που βρίσκονται από μια αριθμομηχανή γραφικής απεικόνισης πρέπει να υποστηρίζονται από κατάλληλη εργασία. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιούνται γραφήματα για την εξεύρεση λύσης, θα πρέπει να τα σχεδιάσετε ως μέρος της απάντησής σας. Σε περίπτωση λανθασμένης απάντησης, μπορούν να δοθούν μερικοί βαθμοί για τη σωστή μέθοδο, υπό την προϋπόθεση ότι αυτή αποδεικνύεται με γραπτή εργασία. Συνεπώς, συνιστάται να παρουσιάσετε όλες τις εργασίες σας.

1. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]
Την 1η Ιανουαρίου 2022, η Μίνα κατέθεσε **1000** δολάρια σε τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο **4** % , με μηνιαίο ανατοκισμό. Στο τέλος του Ιανουαρίου και στο τέλος κάθε επόμενου μήνα, καταθέτει **100** δολάρια στον ίδιο λογαριασμό.

(a) Υπολογίστε το χρηματικό ποσό στο λογαριασμό της στις αρχές του 2024. Δώστε την απάντησή σας με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. [3]

Έστω $\boldsymbol{FV}$ είναι η μελλοντική αξία, $\boldsymbol{PV}$ είναι η παρούσα αξία, $\boldsymbol{N}$ είναι ο αριθμός των περιόδων ανατοκισμού στα 2 έτη, $\boldsymbol{r}$% το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο.

$\boldsymbol{N} = \mathbf{24}$ (2 έτη-24 μήνες)

$\boldsymbol{r}(\%) = \mathbf{4}\%$ (ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο)

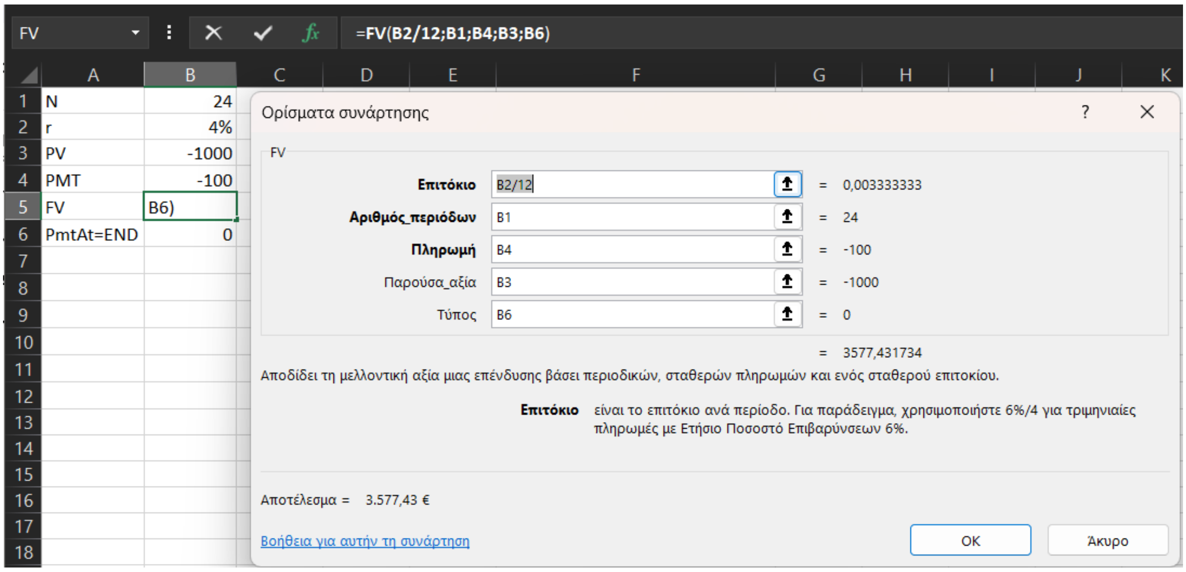
$\boldsymbol{PV} = -\mathbf{1000}$ (\$1000 πληρωμένα από τη Mina την 1η Ιανουαρίου 2022)

$\mathbf{PMT} = -\mathbf{100}$ (\$100 που καταβάλλει η Mina κάθε μήνα)

$\boldsymbol{FV} =$ (το ζητούμενο, δηλαδή το ποσό που θα διαθέτει η Mina στην αρχή του 2024)

PmtAt = END (βάζω 0 αν οι πληρωμές γίνονται στο τέλος του μήνα)

Το excel μας δίνει ότι στις αρχές του 2024, η Μίνα είχε $\boxed{\boldsymbol{FV} = \$\mathbf{3577,43}}$



(b) Βρείτε πόσους πλήρεις μήνες, μετρημένους από την 1η Ιανουαρίου 2022, θα χρειαστεί η Μίνα για να έχει περισσότερα από **5000** δολάρια στο λογαριασμό της. [2]

Τώρα έχω

$\boldsymbol{N} =$ (οι ζητούμενοι μήνες)

$\boldsymbol{r}(\%) = \mathbf{4}\%$ (ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο)

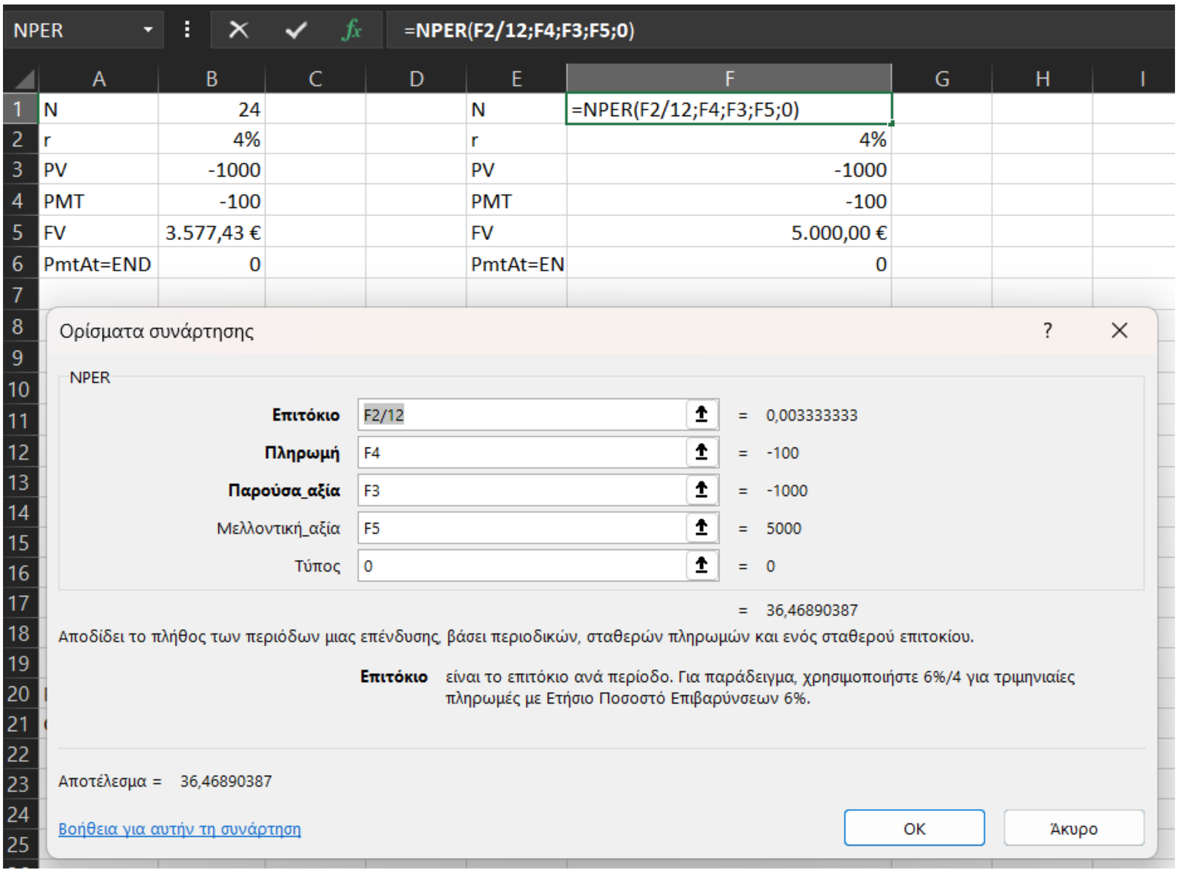
$\boldsymbol{PV} = -\mathbf{1000}$ (\$1000 πληρωμένα από τη Mina την 1η Ιανουαρίου 2022)

$\mathbf{PMT} = -\mathbf{100}$ (\$100 που καταβάλλει η Mina κάθε μήνα)

$\boldsymbol{FV} = \mathbf{5000}$ (Ποσό που θα διαθέτει η Mina μετά από $\boldsymbol{N}$ μήνες)

PmtAt = END (βάζω 0 αν οι πληρωμές γίνονται στο τέλος του μήνα)

Το excel μας δίνει ότι για να έχει η Μίνα περισσότερα από **5000** δολάρια στο λογαριασμό της, θα χρειαστεί να περάσουν πάνω από $\mathbf{36,46}$, άρα πάνω από $\boxed{\boldsymbol{N} = \mathbf{37}}$ πλήρεις μήνες.



2. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Ο Carys πιστεύει ότι, σε ένα τεστ διατήρησης μνήμης, η μέση βαθμολογία των δίγλωσσων ατόμων ($\boldsymbol{\mu_b}$) θα είναι υψηλότερη από τη μέση βαθμολογία των μονόγλωσσων ατόμων ($\boldsymbol{\mu_m}$). Η Carys έδωσε ένα τεστ διατήρησης μνήμης σε ένα τυχαίο δείγμα μαθητών στην τάξη της. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους δύο πίνακες.

	Σκορ									
Δίγλωσσοι	100	94	100	90	100	94	98	98	98	98

	Σκορ							
Μονόγλωσσοι	97	92	88	88	98	94	100	100

Η Carys εκτελεί μονόπλευρο τεστ $\boldsymbol{t}$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\mathbf{5}$ %. Θεωρείται ότι οι βαθμολογίες κατανέμονται κανονικά και τα δείγματα έχουν ίσες διακυμάνσεις.

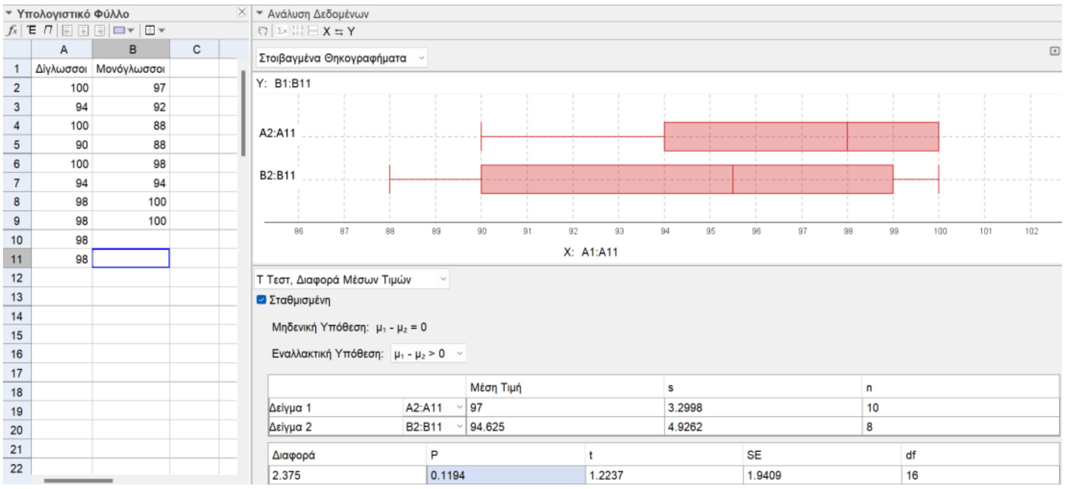
(a) Αναφέρετε τις μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις. [2].

$\mathbf{H_0}: \boldsymbol{\mu_b} = \boldsymbol{\mu_m}$:Δεν υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ των βαθμών των 2 ομάδων.

$\mathbf{H_1}: \boldsymbol{\mu_b} > \boldsymbol{\mu_m}$: Η μέση βαθμολογία των δίγλωσσων ατόμων ($\boldsymbol{\mu_b}$) είναι υψηλότερη από τη μέση βαθμολογία των μονόγλωσσων ατόμων ($\boldsymbol{\mu_m}$)

(b) Υπολογίστε την τιμή $\boldsymbol{p}$-value για την παρούσα δοκιμή. [2]

Από την σταθμισμένη (pooled) ανάλυση δεδομένων του Geogebra προκύπτει ότι η τιμή $\boldsymbol{p} = \mathbf{0.1194} \approx \boxed{\mathbf{0.119}}$

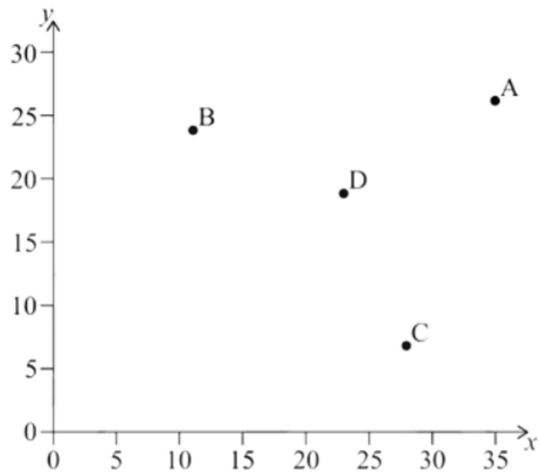


(c) Αναφέρετε το συμπέρασμα της δοκιμής στο πλαίσιο της ερώτησης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας. [2]

Έχουμε ότι $\boldsymbol{p = 0.119 > 0.05 = 5\%}$, άρα δεν υπάρχει λόγος να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση, άρα δεν υπάρχει σημαντικό στοιχείο για να υποστηρίξουμε ότι οι δίγλωσσοι έχουν καλύτερη μνήμη από τους μονόγλωσσους.

3. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Τρεις πόλεις έχουν θέση $\boldsymbol{A(35,26)}$, $\boldsymbol{B(11,24)}$, και $\boldsymbol{C(28,7)}$ σύμφωνα με το εικονιζόμενο σύστημα συντεταγμένων όπου οι αποστάσεις μετρώνται σε μίλια. Το αγρόκτημα του Dominique βρίσκεται στη θέση $\boldsymbol{D(24,19)}$.



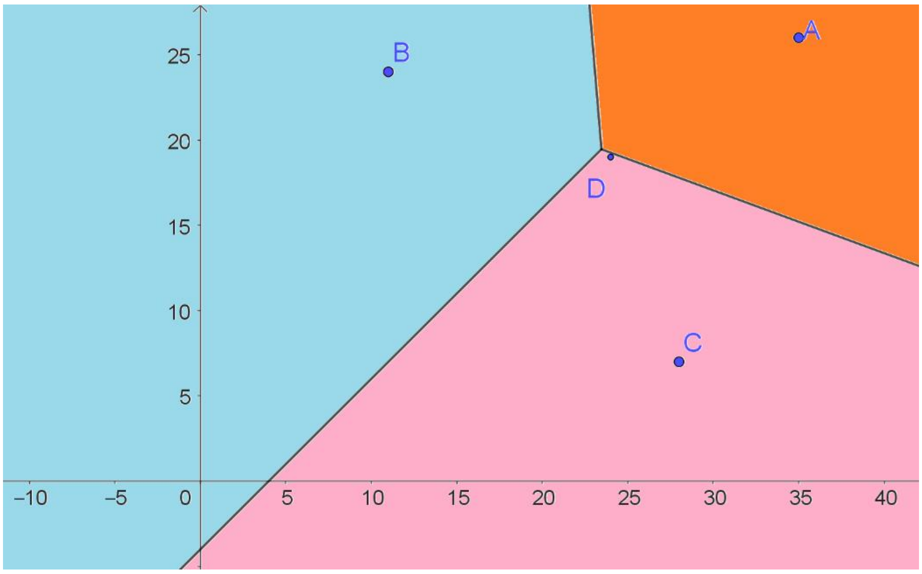
(a) Βρείτε το $\boldsymbol{AD}$. [2]

Έχω $\boldsymbol{AD = \sqrt{(35-24)^2+(26-19)^2} = \sqrt{121+49} = \boxed{\sqrt{170}}}$

Σε μια συγκεκριμένη ημέρα, οι μέσες θερμοκρασίες που καταγράφονται σε κάθε πόλη $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{C}$ είναι 34 °C , 29 °C and 30 °C αντίστοιχα.

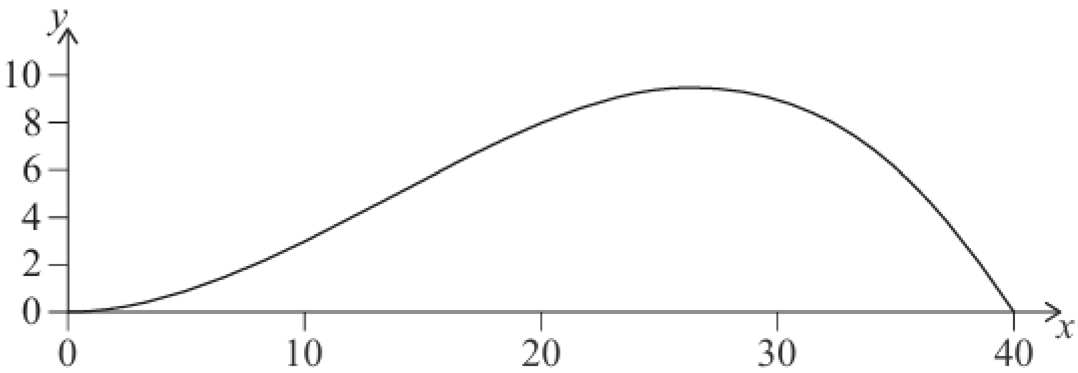
(b) Χρησιμοποιήστε την παρεμβολή του πλησιέστερου γείτονα για να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία στο αγρόκτημα του Ντομινίκ την συγκεκριμένη ημέρα. [3]

Έχω $\boldsymbol{BD = \sqrt{(11-24)^2+(24-19)^2} = \sqrt{169+25} = \sqrt{194}}$ και $\boldsymbol{CD = \sqrt{(28-24)^2+(7-19)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160}}$. Άρα ο Ντομινίκ βρίσκεται πλησιέστερα στην θέση $\boldsymbol{C}$, οπότε θα έχει θερμοκρασία $\boxed{\boldsymbol{30°\ C}}$. Δείτε παρακάτω και το αντίστοιχο διάγραμμα Voronoi, το σημείο D είναι στην περιοχή του C.



4. [Μέγιστη βαθμολογία: 8]

Η διατομή ενός μοντέλου κλίμακας ενός λόφου μοντελοποιείται από το ακόλουθο γράφημα.



Τα ύψη του μοντέλου μετρούνται ανά διαστήματα και δίνονται στον πίνακα.

Οριζόντια απόσταση x cm	0	10	20	30	40
Κάθετη απόσταση y cm	0	3	8	9	0

(a) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου με $h = 10$ για να βρείτε μια προσέγγιση για το εμβαδόν της διατομής του μοντέλου. [2]

Ως γνωστόν $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}h[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]$, όπου n το πλήθος των διαστημάτων που χωρίστηκε το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$, $x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$ και $y_i = f(x_i)$.

Άρα $E\tau = \int_0^{40} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} \cdot 10[0 + 0 + 2(3 + 8 + 9)] = 200$

Δίνεται η εξίσωση της καμπύλης $y = 0.04x^2 - 0.001x^3$, $0 \leq x \leq 40$.

(b)

(i) Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για την ακριβή εύρεση του εμβαδού της διατομής.

(ii) Υπολογίστε το εμβαδόν αυτό με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων. [4]

(i) Έχω $E = \int_0^{40} 0.04x^2 - 0.001x^3 dx$

(ii) Άρα $E = \left[\frac{0.04x^3}{3} - \frac{0.001x^4}{4}\right]_0^{40} = \frac{0.04 \cdot 40^3}{3} - \frac{0.001 \cdot 40^4}{4} = \frac{640}{3} = \boxed{213,33}$

(c) Βρείτε το ποσοστό λάθους του εμβαδού που βρίσκεται με τον κανόνα του τραπεζίου. [2]

Έχω $\varepsilon = \left|\frac{E\tau - E}{E}\right| \times 100\% = \left|\frac{200 - 213,33}{213,33}\right| \cdot 100\% = \boxed{6,25\%}$

5. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Ένα σκάφος ταξιδεύει **8** χιλιόμετρα σε διόπτευση (bearing) **315°** και στη συνέχεια άλλα **6** χιλιόμετρα σε bearing **045°**. Βρείτε το bearing στο οποίο πρέπει να ταξιδέψει το σκάφος για να επιστρέψετε απευθείας στο σημείο εκκίνησης.

Στη διόπτευση με βάση τον Βορρά (αληθή, μαγνητικό ή πυξίδας), η αντιστοιχία έχει ως εξής: 000°: Βορράς, 090°: Ανατολή, 180°: Νότος, 270°: Δύση

Αρχικά, μετατρέπουμε τις συντεταγμένες διόπτευσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

Για τα πρώτα $\mathbf{8}\ \boldsymbol{km}$ με διόπτευση $\mathbf{315°}$ $(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{135°})$ έχω:

$x_{\vec{v}} = 8\cos(135^{\circ}) = -8\cos(45^{\circ}) = -8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2} \approx -5.66 \text{ km}$

και $y_{\vec{v}} = 8\sin(135^{\circ}) = 8\sin(45^{\circ}) = 8 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} \approx 5.66 \text{ km}$

Για τα επόμενα $\mathbf{6}\ \boldsymbol{km}$ με διόπτευση $\mathbf{045°}$ $(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{45°})$ έχω:

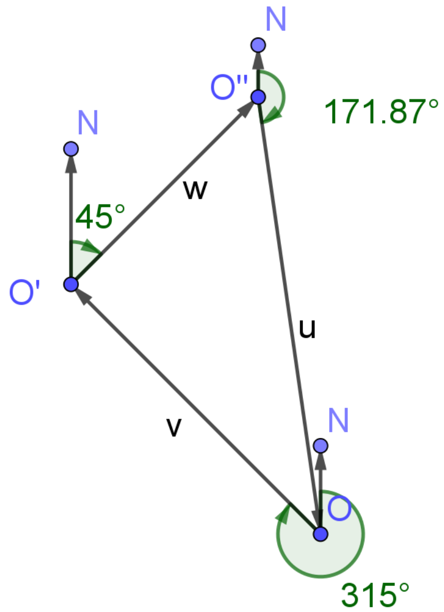
$x_{\vec{w}} = 6\cos(45^{\circ}) = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ km}$

και $y_{\vec{w}} = 6\sin(45^{\circ}) = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ km}$

Για το διάνυσμα επιστροφής έχω

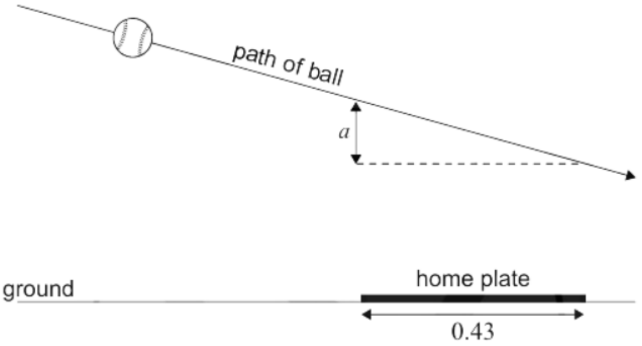
$\vec{u} = -\vec{v} - \vec{w} = -(-5.66\,, 5.66) - (4.24, 4.24) = (1.42, -9.9)$

- Υπολογίζουμε τη γωνία $\boldsymbol{\theta}$ του διανύσματος επιστροφής με τον οριζόντιο άξονα: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-9.90}{1.42}\right) = -81.8 \approx -81.8^{\circ}$
- Τέλος μετατρέπουμε αυτήν τη γωνία σε διόπτευση: $\text{Bearing} = 90^{\circ} + 81.8^{\circ} = 171.8^{\circ} \approx \boxed{172^{\circ}}$



6. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Σε έναν αγώνα μπέιζμπολ, η Sakura είναι ο batter που στέκεται δίπλα στο home plate. Η μπάλα ρίχνεται προς το home plate κατά μήκος μιας διαδρομής που μπορεί να μοντελοποιηθεί με την ακόλουθη συνάρτηση $\boldsymbol{y} = \mathbf{-0.045}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$. Σε αυτό το μοντέλο, $\boldsymbol{x}$ είναι η οριζόντια απόσταση της μπάλας από το σημείο που ρίχνεται η μπάλα και $\boldsymbol{y}$ είναι το κατακόρυφο ύψος της μπάλας πάνω από το έδαφος. Και τα δύο μετρημένα σε μέτρα. Το αποτέλεσμα της ρίψης ονομάζεται χτύπημα (strike) εάν το ύψος της μπάλας είναι μεταξύ $\mathbf{0,53}\ \boldsymbol{m}$ και $\mathbf{1,24}\ \boldsymbol{m}$ σε κάποιο σημείο ενώ ταξιδεύει πάνω από το home plate. Το μήκος του home plate είναι $\mathbf{0,43}\boldsymbol{m}$.



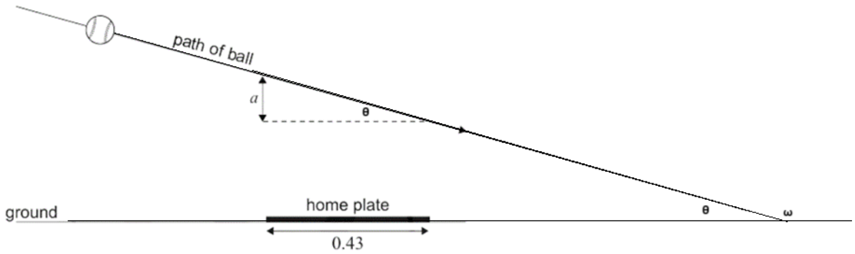
Όταν η μπάλα φτάσει στο μπροστινό μέρος του home plate, το ύψος της μπάλας πάνω από το έδαφος είναι 1,25 μ. Το ύψος της μπάλας αλλάζει κατά $\boldsymbol{a}$ μέτρα καθώς η μπάλα ταξιδεύει κατά μήκος του home plate.

(a)

(i) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{a}$.

Έχω $\boldsymbol{\lambda} = \tan\boldsymbol{\omega} \Rightarrow -0.045 = -\tan\boldsymbol{\theta} \Rightarrow 0.045 = \frac{\alpha}{0.43} \Rightarrow$

$\boldsymbol{\alpha = 0.045 \cdot 0.43 = 0,01935 = \boxed{1.935\ cm}}$



(ii) Δικαιολογήστε γιατί αυτή η ρίψη είναι strike.

Το ύψος της μπάλας όταν φτάνει στο πίσω μέρος του home plate είναι $\mathbf{1.25 - 0.01935 = 1.23065 \in (0.53, 1.24)}$ άρα είναι strike.

Στην επόμενη βολή, ο Sakura χτυπά την μπάλα προς έναν τοίχο ύψους **5** μέτρων. Η οριζόντια απόσταση του τοίχου από το σημείο όπου χτυπήθηκε η μπάλα είναι **96** μέτρα. Η διαδρομή της μπάλας μετά το χτύπημα μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση $\boldsymbol{h(d)}$.

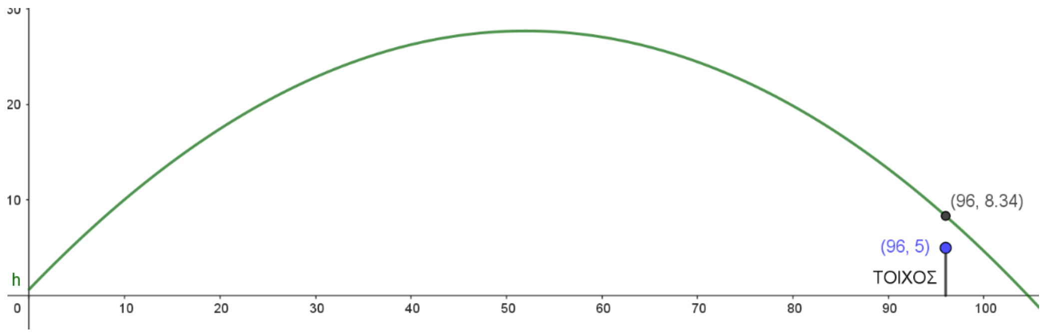
$\boldsymbol{h(d) = -0.01d^2 + 1.04d + 0.66}$, με $\boldsymbol{h, d > 0}$

Στο μοντέλο αυτό, $\boldsymbol{h}$ είναι το ύψος της μπάλας από το έδαφος και $\boldsymbol{d}$ είναι η οριζόντια απόσταση της μπάλας από το σημείο που χτυπήθηκε. Και το $\boldsymbol{h}$ και το $\boldsymbol{d}$ είναι μετρημένο σε μέτρα.

(b) Αποφασίστε αν η μπάλα θα περάσει πάνω από τον τοίχο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [3]

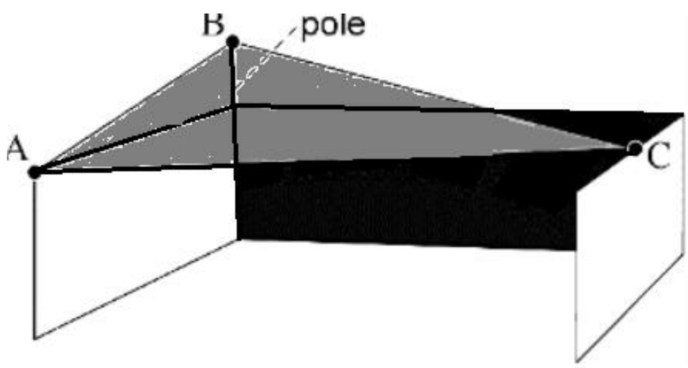
Έχω για $\boldsymbol{d = 96m}$, ότι $\boldsymbol{h(96) = -0.01 \cdot (96)^2 + 1.04 \cdot (96) + 0.66 = 8.34m > 5m}$.

Άρα η μπάλα θα περάσει πάνω από τον τοίχο.



7. [Μέγιστη βαθμολογία: 9]

Ένα τριγωνικό κάλυμμα τοποθετείται πάνω από έναν περιφραγμένο κήπο για να παρέχει σκιά. Είναι αγκυρωμένο στα σημεία $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{C}$, που βρίσκονται στην κορυφή ενός τοίχου $\mathbf{2}\boldsymbol{m}$, και σε ένα σημείο $\boldsymbol{B}$, που βρίσκεται στην κορυφή ενός κατακόρυφου στύλου $\mathbf{1}\ \boldsymbol{m}$ που είναι στερεωμένος στην επάνω γωνία του τοίχου.



Οι τρεις ακμές του καλύμματος μπορούν να αναπαρασταθούν με τα διανύσματα $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, όπου οι αποστάσεις μετριούνται σε μέτρα.

(a) Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$. [2]

Έχω $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -42 \end{pmatrix}}$

(b) Επομένως, βρείτε το εμβαδόν του τριγωνικού καλύμματος. [2]

Έχω $(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 7^2 + (-42)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1822} \approx 21.3m^2$

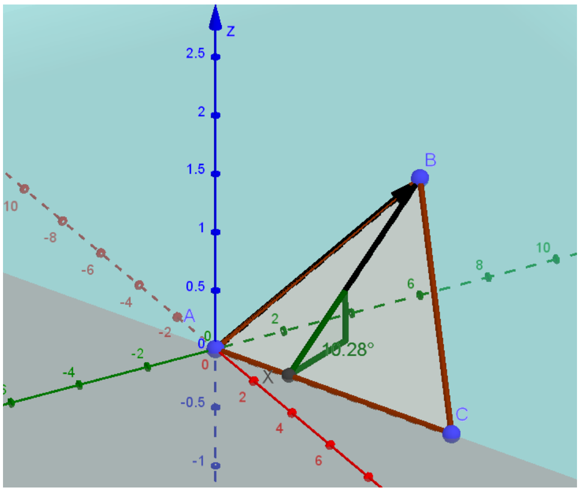
Το σημείο X στην πλευρά AC είναι τέτοιο ώστε η BX να είναι κάθετη στην AC.

(c) Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (b) για να βρείτε την απόσταση BX. [3]

Έχω $(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\| \cdot BX \Rightarrow \sqrt{1822} = \sqrt{7^2 + 3^2 + 0^2} \cdot BX \Rightarrow BX = \frac{\sqrt{1822}}{\sqrt{58}} \approx \boxed{5.6m}$

(d) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το κάλυμμα με το οριζόντιο επίπεδο. [2]

Τα κάθετα διανύσματα στο κάλυμμα και το οριζόντιο επίπεδο είναι αντίστοιχα τα $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -42 \end{pmatrix}$ και $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Έχω $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \vec{k} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \cdot \|\vec{k}\| \cdot cos\theta \Rightarrow -42 = \sqrt{1822} \cdot 1 \cdot cos\theta \Rightarrow cos\theta = -\frac{42}{\sqrt{1822}} = -0,9839547 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0,9839547) = 2,962\ rad = 169,7223°$.
Άρα η οξεία γωνία θ που σχηματίζει το κάλυμμα με το οριζόντιο επίπεδο είναι $180° - 169,7223° = \boxed{10,28°}$



8. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Οι τυχαίες μεταβλητές (X, Y) ακολουθούν διμεταβλητή κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης ρ . Οι τιμές έξι τυχαίων παρατηρήσεων των (X, Y) παρουσιάζονται στον πίνακα

X	6.3	4.1	5.6	9.2	7.8	8.2
Y	9.2	4.9	8.9	10.3	8.9	9.8

(a) Να αναφέρετε μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να ελεγχθεί αν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των X και Y . [2]

H_0 : ΔΕΝ υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των X και Y, με άλλα λόγια Ο συντελεστής συσχέτισης των δυο πληθυσμών ΔΕΝ διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. ΔΕΝ υπάρχει σημαντική γραμμική σχέση (συσχέτιση) μεταξύ των X και Y. Άρα $\rho = 0$.

H_1 : Υπάρχει σημαντική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των X και Y, άρα $\rho \neq 0$.

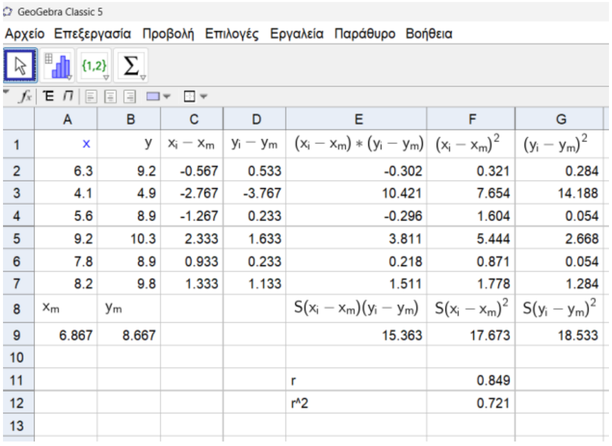
(b) Προσδιορίστε την τιμή

(i) του συντελεστή συσχέτισης, r, του δείγματος

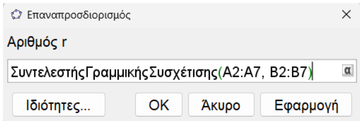
(ii) της αντίστοιχης τιμής p-value [3]

(i) Ο συντελεστή συσχέτισης, r, του δείγματος δίνεται από τη σχέση $r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$.

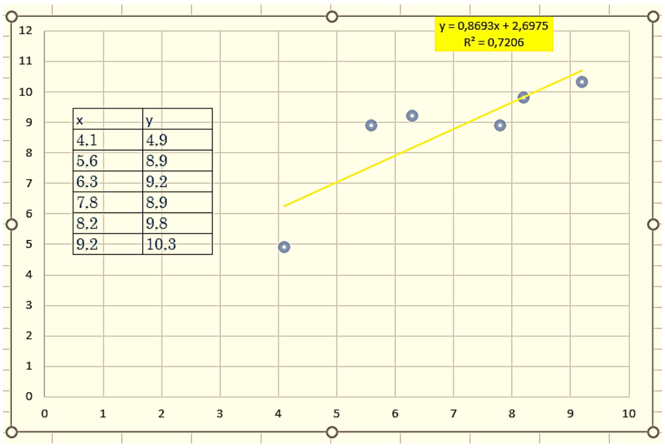
Το geogebra δίνει $r^2 = 0,721 \Rightarrow \boxed{r = 0,849}$



	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	$x_i - x_m$	$y_i - y_m$	$(x_i - x_m) * (y_i - y_m)$	$(x_i - x_m)^2$	$(y_i - y_m)^2$
2	6.3	9.2	-0.567	0.533	-0.302	0.321	0.284
3	4.1	4.9	-2.767	-3.767	10.421	7.654	14.188
4	5.6	8.9	-1.267	0.233	-0.296	1.604	0.054
5	9.2	10.3	2.333	1.633	3.811	5.444	2.668
6	7.8	8.9	0.933	0.233	0.218	0.871	0.054
7	8.2	9.8	1.333	1.133	1.511	1.778	1.284
8	x_m	y_m			$S(x_i - x_m)(y_i - y_m)$	$S(x_i - x_m)^2$	$S(y_i - y_m)^2$
9	6.867	8.667			15.363	17.673	18.533
10							
11					r	0.849	
12					r^2	0.721	
13							



Συμφωνεί και το excel.

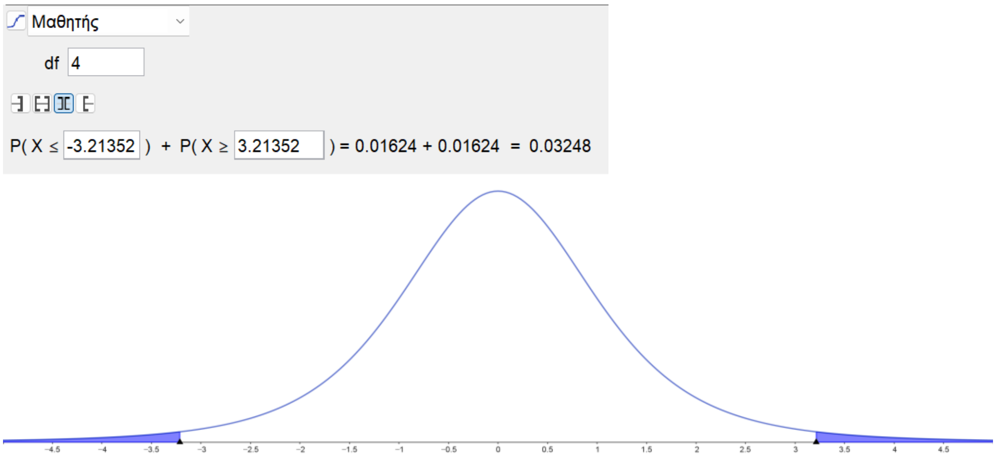


(ii) Μια τιμή p-value είναι ένα μέτρο πιθανότητας που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο υποθέσεων. Ο στόχος του ελέγχου υποθέσεων είναι να προσδιορίσετε εάν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να υποστηρίξετε μια συγκεκριμένη υπόθεση σχετικά με τα δεδομένα σας. Στην πραγματικότητα, διατυπώνουμε δύο υποθέσεις: τη μηδενική υπόθεση και την εναλλακτική υπόθεση. Στην περίπτωση της ανάλυσης συσχέτισης, η μηδενική υπόθεση είναι συνήθως ότι η παρατηρούμενη σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι το αποτέλεσμα καθαρής τύχης (δηλαδή ο συντελεστής συσχέτισης είναι πραγματικά μηδέν - δεν υπάρχει γραμμική σχέση). Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι η συσχέτιση που έχουμε μετρήσει είναι νόμιμα παρούσα στα δεδομένα μας (δηλαδή ο συντελεστής συσχέτισης είναι διαφορετικός από το μηδέν).

Η p-value είναι η πιθανότητα παρατήρησης ενός μη μηδενικού συντελεστή συσχέτισης στα δεδομένα του δείγματός μας, όταν στην πραγματικότητα η μηδενική υπόθεση είναι αληθής. Μια χαμηλή τιμή p-value θα σας οδηγούσε να απορρίψετε τη μηδενική υπόθεση. Ένα τυπικό όριο για την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης είναι μια τιμή $\boldsymbol{p} = \mathbf{0,05}$. Δηλαδή, εάν έχετε τιμή p-value μικρότερη από $\mathbf{0,05}$, θα απορρίψετε τη μηδενική υπόθεση υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης - ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Η τιμή p-value υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μια κατανομή $\boldsymbol{t}$ με $\boldsymbol{df} = \boldsymbol{n} - \mathbf{2}$ βαθμούς ελευθερίας. Ο τύπος για το στατιστικό τεστ είναι $\boldsymbol{t} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$. Άρα $\boldsymbol{t} =$

$\frac{0.849\cdot\sqrt{6-2}}{\sqrt{1-0.849^2}} \approx 3,213518 \approx \boxed{3,21}$ και το αντίστοιχο p-value είναι $0.03248 = \boxed{3.24\%}$

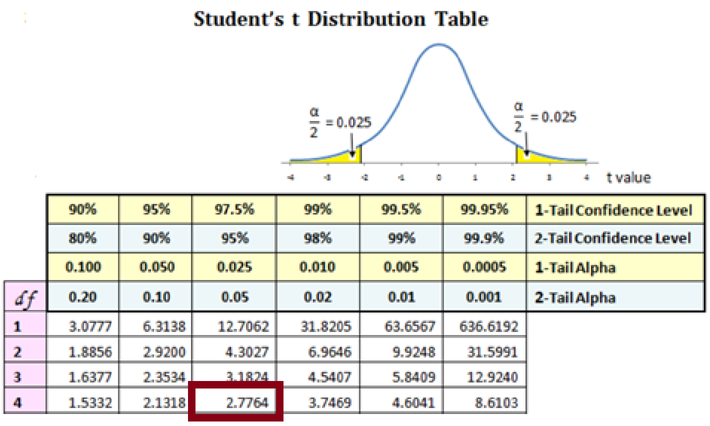


(c) Δηλώστε αν το αποτέλεσμά σας από το ερώτημα (b) ii) δείχνει ότι υπάρχουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για τον ισχυρισμό ότι, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5$ %, τα X και Y δεν συσχετίζονται γραμμικά. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Έχω ότι το αντίστοιχο p-value είναι $3.24\% < 5\%$ οπότε απορρίπτω την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή, υπάρχουν επαρκή στοιχεία, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, ότι υπάρχει συσχέτιση μεταξύ X και Y.

Αλλιώς με χρήση πίνακα (old school) .

Έχω $t = 3,21 > t_{4,0.05} = 2,7764$, οπότε υπάρχουν επαρκή στοιχεία για την απόρριψη του H_0.



	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.95%	1-Tail Confidence Level
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%	2-Tail Confidence Level
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005	1-Tail Alpha
df	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	2-Tail Alpha
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192	
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991	
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240	
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103	

9. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Σε μια συγκεκριμένη ημέρα, η ταχύτητα των αυτοκινήτων καθώς περνούν μια κάμερα ταχύτητας μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια κανονική κατανομή με μέσο όρο $67,3\ km\ h^{-1}$. Μια ταχύτητα $75,7\ km\ h^{-1}$ είναι δύο τυπικές αποκλίσεις μακριά από το μέσο όρο.

(a) Βρείτε την τυπική απόκλιση για την ταχύτητα των αυτοκινήτων. [2]

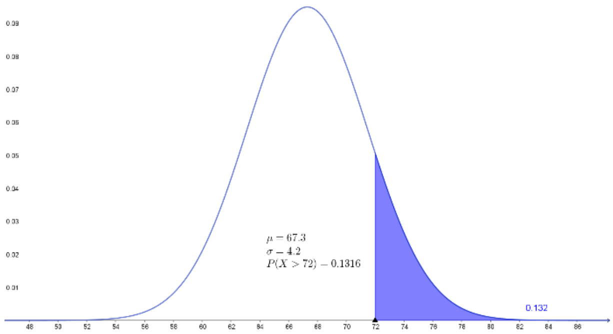
Έχω $2\sigma = 75,7 - 67,3 \Rightarrow \boxed{\sigma = 4,2}$

Τα πρόστιμα για υπερβολική ταχύτητα εκδίδονται σε όλους τους οδηγούς που ταξιδεύουν με ταχύτητα μεγαλύτερη από $72kmh^{-1}$.

(b) Βρείτε την πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος οδηγός που περνά από την κάμερα ταχύτητας λαμβάνει πρόστιμο για υπερβολική ταχύτητα.[2]

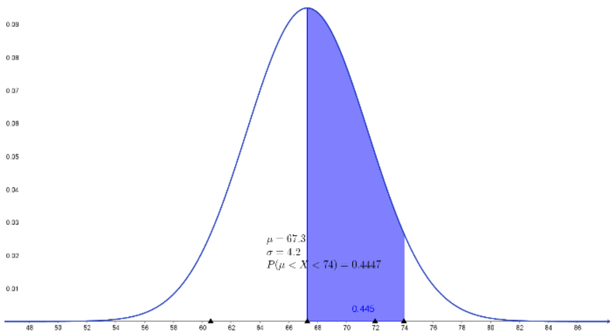
Ζητάμε την $\boldsymbol{P(X > 72)}$ όπου $\boldsymbol{X = N(67.3, 4.2)}$. Όπως προκύπτει από το διάγραμμα του geogebra παρακάτω έχω $\boldsymbol{P(X > 72) = 0.13}$

Διαπιστώνεται ότι το **82 %** των αυτοκινήτων σε αυτόν τον δρόμο ταξιδεύουν με ταχύτητες μεταξύ $\boldsymbol{p\ km\ h^{-1}}$ και $\boldsymbol{q\ km\ h^{-1}}$, όπου $\boldsymbol{p < q}$. Αυτό το διάστημα περιλαμβάνει αυτοκίνητα που ταξιδεύουν με ταχύτητα $\boldsymbol{74kmh^{-1}}$.



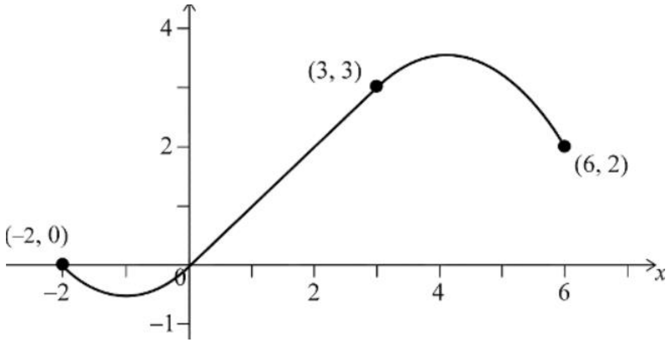
(c) Δείξτε ότι η περιοχή της κανονικής κατανομής μεταξύ $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δεν είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή. [3]

Έχω αναγκαστικά ότι $\boldsymbol{p < \mu < 74 < q}$. Έστω ότι η περιοχή είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή, τότε έχω με την βοήθεια του geogebra ότι $\boldsymbol{82\% = P(p < X < q) = 2 \cdot P(\mu < X < q) > 2 \cdot P(\mu < X < 74) = 2 \cdot 0.445 = 0.89 = 89\%}$, άτοπο. Άρα η περιοχή της κανονικής κατανομής μεταξύ $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δεν είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή.



10. [Μέγιστη βαθμολογία: 9]

Ένα διακοσμητικό άγκιστρο μπορεί να μοντελοποιηθεί από την καμπύλη με την εξίσωση $\boldsymbol{y = f(x)}$. Το γράφημα του $\boldsymbol{y = f(x)}$ φαίνεται παρακάτω και αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $\boldsymbol{(0, 0)}$ στο $\boldsymbol{(3, 3)}$ και δυο τμήματα που σχηματίζονται από τετραγωνικές καμπύλες.



(a) Γράψτε την εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος για $\boldsymbol{0 \le x \le 3}$. [1]

Αφού η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{y = ax}$ και επειδή περνά από το σημείο $\boldsymbol{(3, 3)}$ έχω $\boldsymbol{3 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1}$. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα έχει εξίσωση $\boxed{\boldsymbol{y = x, 0 \le x \le 3}}$.

Η τετραγωνική καμπύλη, με άκρα τα σημεία $\boldsymbol{(-2, 0)}$ και $\boldsymbol{(0, 0)}$, έχει την ίδια κλίση στο σημείο $\boldsymbol{(0, 0)}$ με αυτήν του ευθύγραμμου τμήματος.

(b) Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης μεταξύ $\boldsymbol{(-2, 0)}$ και $\boldsymbol{(0, 0)}$. [3]

Η τετραγωνική καμπύλη έχει ρίζες $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = -2}$, άρα έχει εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{f(x) = ax(x + 2)}$ με $\boldsymbol{f'(x) = a(x + 2) + ax}$. Αφού $\boldsymbol{f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x(x + 2), -2 \le x \le 0}}$

Η δεύτερη τετραγωνική καμπύλη, με τελικά σημεία $\boldsymbol{(3, 3)}$ και $\boldsymbol{(6, 2)}$, έχει την ίδια κλίση στο $\boldsymbol{(3, 3)}$ με αυτήν του ευθύγραμμου τμήματος.

(c) Βρείτε την εξίσωση αυτής της καμπύλης. [4]

Η τετραγωνική καμπύλη έχει εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c}$ με $\boldsymbol{f'(x)=2ax+b}$ και

$$\begin{cases} f(3)=3 \\ f(6)=2 \\ f'(3)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b+c=3 \\ 36a+6b+c=2 \\ 6a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b+c=3 \\ 36a+6b+c=2 \\ 36a+6b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b+c=3 \\ c=-4 \\ 36a+6b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b=7 \\ c=-4 \\ 36a+6b=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9a+3b=7 \\ c=-4 \\ 18a=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a+3b=7 \\ c=-4 \\ a=-\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{11}{3} \\ c=-4 \\ a=-\frac{4}{9} \end{cases} \text{άρα } \boxed{f(x)=-\frac{4}{9}x^2+\frac{11}{3}x-4, 3\le x\le 6}$$

(d) Γράψτε την $\boldsymbol{f}$ ως μια τμηματική συνάρτηση. [1]

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\boxed{f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x(x+2), & -2\le x\le 0 \\ x, & 0\le x\le 3 \\ -\frac{4}{9}x^2+\frac{11}{3}x-4, & 3\le x\le 6 \end{cases}}$

11. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Ένα κατάστημα πουλάει πορτοκάλια και λεμόνια. Τα βάρη των πορτοκαλιών υποτίθεται ότι είναι κατανεμημένα κανονικά με μέση τιμή **205** γραμμάρια και τυπική απόκλιση **5** γραμμάρια. Τα βάρη των λεμονιών θεωρούνται κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή **105** γραμμάρια και τυπική απόκλιση **3** γραμμάρια.

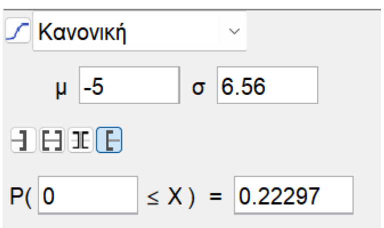
Η Nelia επιλέγει **1** πορτοκάλι και **2** λεμόνια τυχαία και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα το βάρος του πορτοκαλιού της να υπερβαίνει το συνολικό βάρος των λεμονιών της.

Έστω το βάρος του πορτοκαλιού, $\boldsymbol{X=N(205,\ 5)}$ γραμμάρια και τα βάρη των λεμονιών, $\boldsymbol{Y_1=Y_2=N(105,3)}$.

Το συνδυασμένο βάρος των δύο λεμονιών, $\boldsymbol{Y=Y_1+Y_2}$, κατανέμεται επίσης κανονικά. Έχω $\boldsymbol{\mu_Y=\mu_{Y_1}+\mu_{Y_2}=105+105=210}$ γραμμάρια, $\boldsymbol{\sigma_Y^2=\sigma_{Y_1}^2+\sigma_{Y_2}^2=3^2+3^2=9+9=18}$ και $\boldsymbol{\sigma_Y=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\approx 4.24}$ γραμμάρια.

Πρέπει να βρούμε την πιθανότητα ότι $\boldsymbol{X>Y\Leftrightarrow X-Y>0}$. Η διαφορά $\boldsymbol{D=X-Y}$ είναι επίσης κανονικά κατανεμημένη με: $\boldsymbol{\mu_D=\mu_X-\mu_Y=205-210=-5}$ γραμμάρια, $\boldsymbol{\sigma_D^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2=5^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2=25+18=43}$ και $\boldsymbol{\sigma_D=\sqrt{43}\approx 6.56}$ γραμμάρια. Άρα $\boldsymbol{D=N(-5,6.56)}$

Όπως προκύπτει από το διάγραμμα του geogebra παραπάνω έχω



Έχω $\boldsymbol{P(D>0)=0.2297}$. Επομένως, η πιθανότητα το βάρος του πορτοκαλιού της Νέλιας να υπερβαίνει το συνολικό βάρος των δύο λεμονιών της είναι περίπου $\boldsymbol{0,2297=\boxed{22,3\%}}$.

12. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Δύο ηλεκτρικές πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος (AC) με τις ίδιες συχνότητες συνδέονται. Οι τάσεις από αυτές τις πηγές μπορούν να εκφραστούν ως εξής $\boldsymbol{V_1=6\sin(at+30°)}$ και $\boldsymbol{V_2=6\sin(at+90^o)}$.

Η συνολική τάση μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή $\boldsymbol{V_1+V_2=V\sin(at+\theta^o)}$.

Καθορίστε την τιμή του $\boldsymbol{V}$ και του $\boldsymbol{\theta}$.

Έχω $\boldsymbol{V_1 + V_2 = 6\sin(at + 30°) + 6\sin(at + 90^o) = 6[\sin(at + 30°) + \sin(at + 90^o)] =}$
$\boldsymbol{6 \cdot 2\sin\left(\frac{(at+30°)+(at+90°)}{2}\right)\cos\left(\frac{(at+30°)-(at+90°)}{2}\right) = 12\sin(at + 60°)\cos(-30°) = 6\sqrt{3}\sin(at + 60°)}$.

Άρα $\boxed{\boldsymbol{V = 6\sqrt{3}}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\theta = 60°}}$. Έγινε χρήση της $\boldsymbol{\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}$.

Αλλιώς

Για $\boldsymbol{t = 0}$ έχω $\boldsymbol{V_1 = 6\sin(30°) = 3}$ και $\boldsymbol{V_2 = 6\sin(90^o) = 6}$, άρα η $\boldsymbol{V_1 + V_2 = V\sin(at + \theta^o)}$ γίνεται $\boldsymbol{9 = V\sin(\theta^o)}$. Για $\boldsymbol{at = 60°}$ έχω $\boldsymbol{V_1 = 6\sin(90°) = 6}$ και $\boldsymbol{V_2 = 6\sin(150^o) = 3}$, άρα η $\boldsymbol{V_1 + V_2 =}$ $\boldsymbol{V\sin(at + \theta^o)}$ γίνεται $\boldsymbol{9 = V\sin(60° + \theta^o)}$. Άρα $\boldsymbol{\sin(\theta^o) = \sin(60° + \theta^o) \Rightarrow \theta^o = 60°, V = \frac{9}{\sin\theta} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =}$

$\boldsymbol{6\sqrt{3}}$, όπως πριν.

13. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Η μετατόπιση, $\boldsymbol{x(cm)}$, του άκρου ενός ελατηρίου, τη στιγμή $\boldsymbol{t}$ (δευτερόλεπτα), δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0}$. Την $\boldsymbol{t = 0, x = 0.75}$ και $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 0}$.

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler, με μήκος βήματος 0,1 δευτερόλεπτα, για να εκτιμήσετε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ όταν $\boldsymbol{t = 0,5}$.

Πρώτα γράφουμε την διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης.

Έχω $\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - 10x}$.

Έστω $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = y = f_1(x, y, t)}$ και $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - 10x = -2y - 10x = f_2(x, y, t)}$.

Από την μέθοδο Euler ισχύουν οι $\boldsymbol{\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \times f_1(x_n, y_n, t_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \times f_2(x_n, y_n, t_n), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}}$

άρα έχω $\boldsymbol{\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,1 \times y_n \\ y_{n+1} = y_n + 0,1 \times (-2y_n - 10x_n) = -x_n + 0.8y_n \\ t_{n+1} = t_n + 0,1 \end{cases}}$

Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα.

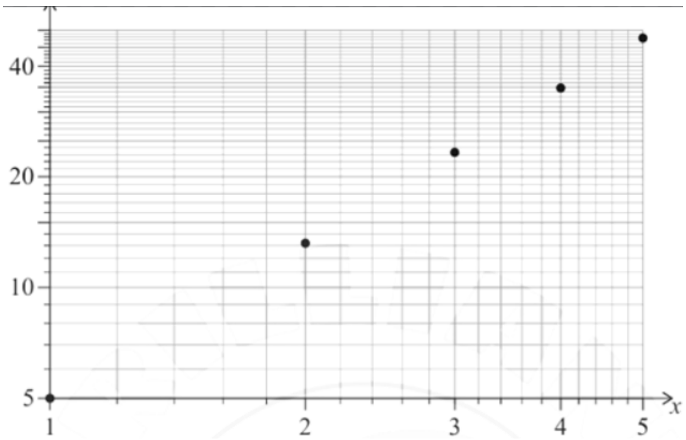
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{t_n}$	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{y_n}$
0	0	0.75	0
1	0,1	0,75	-0,75
2	0,2	0,675	-1,35
3	0,3	0,54	-1,755
4	0,4	0,3645	-1,944
5	0,5	0,1701	-1,9197

Άρα την $\boldsymbol{t = 0.5}$ έχω $\boxed{\boldsymbol{x = 0,170}}$ και $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -1,92}$

14. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Η Petra εξετάζει δύο ποσότητες, $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$, και τοποθετεί τα σημεία δεδομένων σε ένα γράφημα log-log.

Παρατηρεί ότι σε αυτό το γράφημα τα σημεία των δεδομένων ακολουθούν μια τέλεια ευθεία γραμμή. Δεδομένου ότι η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{(2, 13.1951)}$ και $\boldsymbol{(4, 34.822)}$, να βρείτε την εξίσωση της σχέσης που συνδέει τα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$. Η τελική σας απάντηση δεν πρέπει να περιλαμβάνει λογαρίθμους.



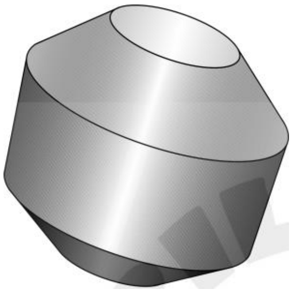
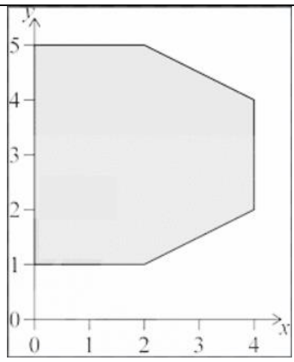
Ο οριζόντιος άξονας είναι λογαριθμικός βαθμού 2 με αρχή το 1, άρα $\boldsymbol{X = \log_2 x}$. Ο κάθετος άξονας είναι λογαριθμικός βαθμού 2 με αρχή το 5, άρα $\boldsymbol{Y = \log_2 \frac{y}{5}}$. Τα σημεία $(\boldsymbol{x_1, y_1}) = (\boldsymbol{2, 13.1951})$ και $(\boldsymbol{x_2, y_2}) = (\boldsymbol{4, 34.822})$ αντιστοιχούν στα σημεία $(\boldsymbol{X_1, Y_1}) = \left(\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{\log_2 \frac{13.1951}{5}}\right) = (\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{1.40})$ και $(\boldsymbol{X_2, Y_2}) = \left(\boldsymbol{2},\ \boldsymbol{\log_2 \frac{34.822}{5}}\right) = (\boldsymbol{2},\ \boldsymbol{2.80})$ του λογαριθμικού συστήματος αξόνων. Οπότε η κλίση της ευθείας είναι $\boldsymbol{\lambda = \frac{2.80-1.40}{2-1} = 1.40}$. Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $\boldsymbol{Y = 1.4X + b}(*)$. Άρα η εξίσωση $(*)$ γίνεται στο σύστημα αξόνων (x,y) ως εξής: $\boldsymbol{\log_2 \frac{y}{5} = 1.4 \cdot \log_2 x + b}$. Παρατηρούμε ότι και το σημείο $(\boldsymbol{x_0, y_0}) = (1, 5)$ είναι σημείο της ευθείας οπότε έχω $\boldsymbol{\log_2 \frac{1}{5} = 1.4 \cdot \log_2 1 + b \Rightarrow 0 = 0 + b}$, άρα $\boldsymbol{\log_2 \frac{y}{5} = 1.4 \cdot \log_2 x \Rightarrow \log_2 \frac{y}{5} = \log_2 x^{1.4} \Rightarrow \frac{y}{5} = x^{1.4} \Rightarrow \boxed{y = 5 \cdot x^{1.4}}}$

Παραθέτουμε ενδεικτικό πίνακα τιμών που επαληθεύουν τις κουκκίδες του γραφήματος.

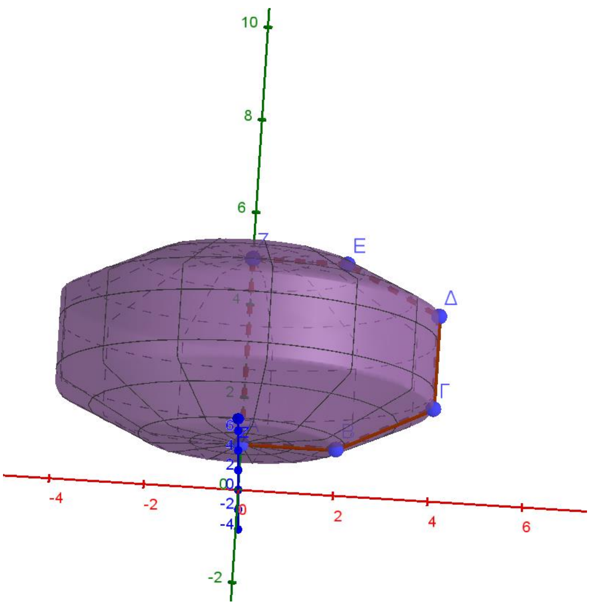
$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{y = 5 \cdot x^{1.4}}$	5	13.19508	23.27768	34.82202	47.59134

15. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Το στερεό που απεικονίζεται σχηματίζεται με την περιστροφή του εξαγώνου με κορυφές $\boldsymbol{(2,1)}$, $\boldsymbol{(0,1)}$, $\boldsymbol{(0,5)}$, $\boldsymbol{(2,5)}$, $\boldsymbol{(4,4)}$ και $\boldsymbol{(4,2)}$ γύρω από τον $\boldsymbol{y}$-άξονα.

Στερεό	Εξάγωνο
	

Βρείτε τον όγκο αυτού του στερεού.



Η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $\boldsymbol{(2,1)}$ και $\boldsymbol{(4,2)}$ είναι προφανώς η $\boldsymbol{y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}, 1 \le y < 2}$. Η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $\boldsymbol{(4,2)}$ και $\boldsymbol{(4,4)}$ είναι προφανώς η $\boldsymbol{x = 4}$. Η εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $\boldsymbol{(4,4)}$ και $\boldsymbol{(2,5)}$ είναι προφανώς η $\boldsymbol{x + 2y = 12 \Leftrightarrow x = 12 - 2y, 4 \le y \le 5}$

Άρα θεωρώ την $\boldsymbol{x = f(y)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{y}{2}, 1 \le y < 2} \\ \boldsymbol{4, 2 \le y < 4} \\ \boldsymbol{12 - 2y, 4 \le y \le 5} \end{cases}$. Το στερεό εκ περιστροφής του εξαγώνου ως προς τον $\boldsymbol{y}$-άξονα δίνεται από την σχέση $\boldsymbol{V = \int_1^5 \pi f^2(y) dy = \int_1^2 \pi \frac{y^2}{4} dy + \int_2^4 \pi 4^2 dy + \int_4^5 \pi (12-2y)^2 dy = \pi \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 + \pi[16y]_2^4 + \pi \left[\frac{(12-2y)^3}{3\cdot(-2)}\right]_4^5 = \pi \left\{\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 64 - 32 + \frac{8}{-6} - \frac{64}{-6}\right\} = \left\{\frac{131\,\pi}{3}\right\} \approx 137.1828792067543 \approx \boxed{138}}$ κυβικές μονάδες.

16. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Η σχέση μεταξύ της έντασης, $\boldsymbol{I}$, μιας φωτεινής πηγής και της απόστασης, $\boldsymbol{d}$, από την πηγή φωτός μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{d}^2}$.

Ο Pablo μετρά την ένταση μιας φωτεινής πηγής σε διαφορετικές αποστάσεις. Τα δεδομένα που συλλέγονται παρουσιάζονται στον πίνακα.

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{m})$	1	2	5
$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{lm})$	42	11	1.5

Ο Pablo βρίσκει το άθροισμα των τετραγωνικών υπολοίπων (residuals) να είναι της μορφής $\boldsymbol{1.0641k^2 - 89.62k + c}$.

(a) Βρείτε την ακριβή τιμή του $\boldsymbol{c}$. [4]

Έχω

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{m})$	1	2	5
Μετρημένο $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{lm})$	42	11	1.5
Αναμενόμενο $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{lm})$	$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{1^2}}$	$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{4}}$	$\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{25}}$
Residual	$(\boldsymbol{42 - k})^2$	$\left(\boldsymbol{11 - \frac{k}{4}}\right)^2$	$\left(\boldsymbol{1.5 - \frac{k}{25}}\right)^2$

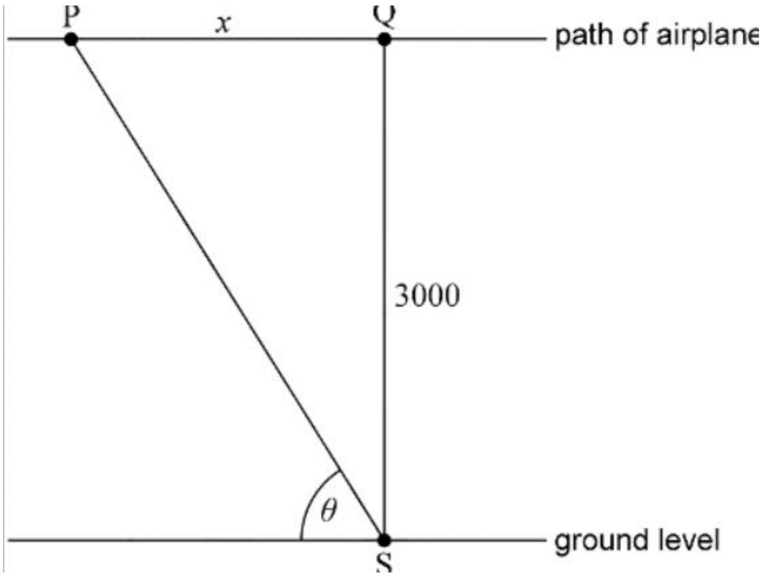
Άρα έχω $\boldsymbol{1.0641k^2 - 89.62k + c = (42 - k)^2 + \left(11 - \frac{k}{4}\right)^2 + \left(1.5 - \frac{k}{25}\right)^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow c = \frac{7549}{4}} =$ $\boxed{\boldsymbol{1887.25}}$

(b) Επομένως, βρείτε την καμπύλη παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων της μορφής $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{d}^2}$ [2].

Για να βρούμε την καμπύλη παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων, πρέπει να προσδιορίσουμε <u>την τιμή του $\boldsymbol{k}$ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγωνικών καταλοίπων</u>. Έχουμε ήδη το άθροισμα των τετραγωνικών καταλοίπων στη μορφή $\boldsymbol{1.0641k^2 - 89.62k + 1887.25}$. Το τριώνυμο αυτό ελαχιστοποιείται για $\boldsymbol{k = \frac{89.62}{2 \cdot 1.0641} \approx 42.11}$. Έτσι, η καμπύλη παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων είναι: $\boldsymbol{I = \frac{42.11}{d^2}}$. Αυτή η καμπύλη προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα σημεία που δίνονται ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων.

17. [Μέγιστη βαθμολογία: 9]

Ένα αεροπλάνο, $\boldsymbol{P}$, πετάει σε σταθερό ύψος $\mathbf{3000}\boldsymbol{m}$ με ταχύτητα $\mathbf{250}\boldsymbol{ms^{-1}}$. Η διαδρομή του περνάει πάνω από ένα σταθμό εντοπισμού, $\boldsymbol{S}$, στο επίπεδο του εδάφους. Έστω $\boldsymbol{Q}$ το σημείο που είναι $\mathbf{3000}\boldsymbol{m}$ ακριβώς πάνω από το σταθμό εντοπισμού. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $\boldsymbol{T}$, καθώς το αεροπλάνο πετάει προς το $\boldsymbol{Q}$, η γωνία ανύψωσης, $\boldsymbol{\theta}$, του αεροπλάνου από το $\boldsymbol{S}$ αυξάνεται με ρυθμό 0.075 ακτίνια ανά δευτερόλεπτο. Η απόσταση από το $\boldsymbol{Q}$ στο $\boldsymbol{P}$ είναι $\boldsymbol{x}$.



(a) Χρησιμοποιήστε το ρυθμό μεταβολής για να δείξετε ότι, τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$, $\frac{\mathbf{dx}}{\boldsymbol{d\theta}} = -\frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{3}}$ [2]

Έχω τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$, $\frac{\mathbf{dx}}{\boldsymbol{d\theta}} = \frac{\frac{\mathbf{dx}}{\boldsymbol{dt}}}{\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}} = -\frac{\mathbf{250}}{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}} = -\frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{3}}$, το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η οριζόντια απόσταση $\boldsymbol{x}$ μειώνεται καθώς το αεροπλάνο πλησιάζει το σταθμό.

(b) Βρείτε το $\boldsymbol{x(\theta)}$, $\boldsymbol{x}$ συνάρτηση του $\boldsymbol{\theta}$. [1]

Έχω $\boldsymbol{x(\theta)} = \boldsymbol{PQ} = \frac{\boldsymbol{QS}}{\tan \boldsymbol{Q\hat{P}S}} = \boxed{\frac{\mathbf{3000}}{\tan \boldsymbol{\theta}}}$

(c) Βρείτε μια έκφραση του $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{d\theta}}$ ως προς το $\sin \boldsymbol{\theta}$ [3]

Έχω $\boldsymbol{x(\theta)} = \frac{\mathbf{3000}}{\tan \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{3000}\boldsymbol{cot\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{d\theta}} = -\frac{\mathbf{3000}}{\sin^2 \boldsymbol{\theta}}}$

(d) Ως εκ τούτου, βρείτε την οριζόντια απόσταση από το σταθμό στο επίπεδο τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$. [3]

Από τα παραπάνω έχω ότι, τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$, $-\frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{3}} = -\frac{\mathbf{3000}}{\sin^2 \boldsymbol{\theta}} \Rightarrow \sin^2 \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}} \Rightarrow \sin \boldsymbol{\theta} = \sqrt{\mathbf{0.9}} \Rightarrow$ $\cos \boldsymbol{\theta} = \sqrt{\mathbf{0.1}} \Rightarrow \tan \boldsymbol{\theta} = \sqrt{\frac{\mathbf{0.9}}{\mathbf{0.1}}} = \mathbf{3} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{QS}}{\boldsymbol{PQ}} = \mathbf{3} \Rightarrow \frac{\mathbf{3000}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{1000}\boldsymbol{m}}$

International Baccalaureate Organization 2023-2237209

Μαθηματικά: εφαρμογές και ερμηνεία - Mathematics: applications and interpretation

Τυπικό επίπεδο - Standard level

Paper 1

8 Μαΐου 2023

Zone A afternoon | Zone ***B*** morning | Zone ***C*** afternoon

1 ώρα 30 λεπτά

Οδηγίες προς τους υποψηφίους

- Γράψτε τον αριθμό μητρώου σας στα παραπάνω πεδία.
- Μην ανοίξετε αυτό το εξεταστικό χαρτί μέχρι να σας δοθεί σχετική εντολή.
- **Απαιτείται** αριθμομηχανή γραφικής απεικόνισης για την εξέταση αυτή.
- Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.
- Οι απαντήσεις πρέπει να γράφονται μέσα στα πλαίσια απαντήσεων που παρέχονται.
- Εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά στην ερώτηση, όλες οι αριθμητικές απαντήσεις πρέπει να δίνονται ακριβώς ή σωστά σε τρία σημαντικά ψηφία.
- Ένα καθαρό αντίγραφο του «**τυπολόγιο μαθηματικών: εφαρμογές και ερμηνεία**» απαιτείται για αυτήν την εξέταση.
- Η μέγιστη βαθμολογία για αυτήν την εξέταση είναι [80 βαθμοί].

Δεν είναι απαραίτητο να δοθεί πλήρης βαθμολογία για μια σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πρέπει να υποστηρίζονται από πράξεις ή/και εξηγήσεις. Οι λύσεις που βρίσκονται από μια αριθμομηχανή γραφικής απεικόνισης πρέπει να υποστηρίζονται από κατάλληλη εργασία. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιούνται γραφήματα για την εξεύρεση λύσης, θα πρέπει να τα σχεδιάσετε ως μέρος της απάντησής σας. Σε περίπτωση λανθασμένης απάντησης, μπορούν να δοθούν μερικοί βαθμοί για τη σωστή μέθοδο, υπό την προϋπόθεση ότι αυτή αποδεικνύεται με γραπτή εργασία. Συνεπώς, συνιστάται να παρουσιάσετε όλες τις εργασίες σας.

1. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Το δέκαθλο είναι ένας διαγωνισμός όπου οι αθλητές αγωνίζονται σε δέκα αγωνίσματα. Δύο από αυτά τα αγωνίσματα είναι το άλμα εις μήκος και το άλμα εις ύψος. Και στις δύο διοργανώσεις, μεγαλύτερη απόσταση σημαίνει καλύτερη κατάταξη. Ο πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα για αυτά τα δύο αγωνίσματα στο Παγκόσμιο Πρωτάθλημα.

	Αγώνισμα		**Κατάταξη**	
Χώρα του αθλητή	**Άλμα σε μήκος (m)**	**Άλμα σε ύψος (m)**	**Κατάταξη στο μήκος**	**Κατάταξη στο ύψος**
Germany	7.64	2.11	1	
France	7.52	2.08	2	
Estonia	7.49	1.84	3	
Canada	7.44	2.02	4	
Netherlands	7.33	2.05	5	
Ukraine	7.28	2.02	6	
Algeria	7.22	1.90	7	
Austria	7.11	1.87	8	
Grenada	6.98	1.99	9	
Japan	6.64	1.96	10	

Ο συντελεστής συσχέτισης κατάταξης του Spearman χρησιμοποιείται για να καθορίσει εάν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της κατάταξης ενός αθλητή στο άλμα εις μήκος και της κατάταξής του στο άλμα εις ύψος.

(a) Συμπληρώστε τον πίνακα για να δείτε την κατάταξη των αθλητών στο άλμα εις ύψος. [2]

Χώρα του αθλητή	**Άλμα σε μήκος (m)**	**Άλμα σε ύψος (m)**	**Κατάταξη στο μήκος**	**Κατάταξη στο ύψος**
Germany	7.64	2.11	1	1
France	7.52	2.08	2	2
Estonia	7.49	1.84	3	10
Canada	7.44	2.02	4	4
Netherlands	7.33	2.05	5	3
Ukraine	7.28	2.02	6	5
Algeria	7.22	1.90	7	8
Austria	7.11	1.87	8	9
Grenada	6.98	1.99	9	6
Japan	6.64	1.96	10	7

(b) Βρείτε την τιμή του συντελεστή συσχέτισης κατάταξης του Spearman r_s. [2]

Συμπληρώνουμε τον παραπάνω πίνακα ως ακολούθως

Χώρα του αθλητή	**Άλμα σε μήκος (m)**	**Άλμα σε ύψος (m)**	**Κατάταξη στο μήκος**	**Κατάταξη στο ύψος**	d_i	$(d_i)^2$
Germany	7.64	2.11	1	1	0	0
France	7.52	2.08	2	2	0	0
Estonia	7.49	1.84	3	10	-7	49
Canada	7.44	2.02	4	4	0	0
Netherlands	7.33	2.05	5	3	2	4
Ukraine	7.28	2.02	6	4	2	4
Algeria	7.22	1.90	7	8	-1	1
Austria	7.11	1.87	8	9	-1	1
Grenada	6.98	1.99	9	6	3	9
Japan	6.64	1.96	10	7	3	9
					Sum	**77**

Ο συντελεστή συσχέτισης κατάταξης του Spearman δίνεται από τον τύπο $r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$. Άρα

$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 77}{10 \cdot (10^2 - 1)} = \frac{8}{15} = 0,5333333 \approx \boxed{0.533}$

Ο παρακάτω οδηγός χρησιμοποιείται από τον προπονητή για να καθορίσει το βαθμό της συσχέτισης μεταξύ των κατατάξεων στο άλμα εις μήκος και στο άλμα εις ύψος.

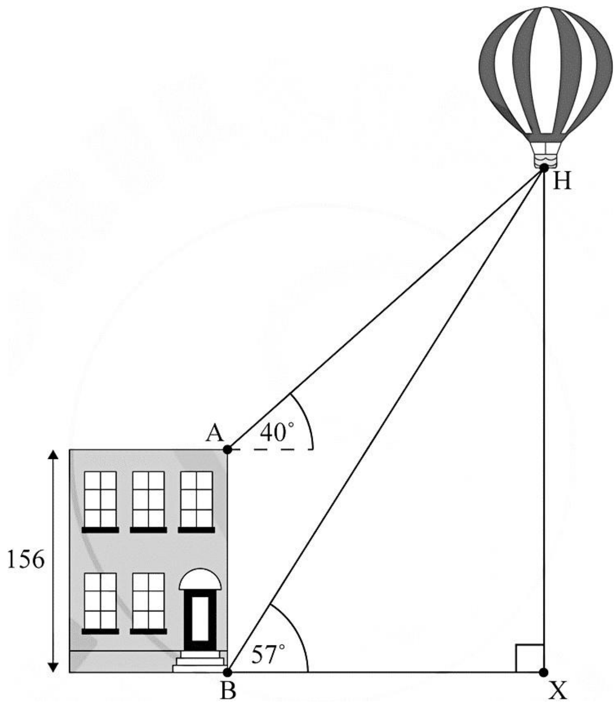
$\lvert r_s \rvert$	**Βαθμός συσχέτισης**
0.000 to 0.199	Πολύ Αδύναμος
0.200 to 0.399	Αδύναμος
0.400 to 0.599	Μέτριος
0.600 to 0.799	Δυνατός
0.800 to 1.000	Πολύ δυνατός

(c) Δηλώστε τη δύναμη της συσχέτισης μεταξύ των κατατάξεων όπως υποδεικνύεται από τον πίνακα και ερμηνεύστε την στο πλαίσιο της ερώτησης. [2]

Υπάρχει μέτρια συσχέτιση μεταξύ των κατατάξεων στο άλμα εις μήκος και στο άλμα εις ύψος, καθώς είναι δυο αρκετά διαφορετικά αθλήματα.

2. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Το σημείο $\boldsymbol{H}$ σε ένα αερόστατο είναι ορατό την ίδια στιγμή από δύο παρατηρητές. Ο ένας παρατηρητής είναι στην κορυφή ενός κάθετου κτιρίου με ύψος **156** μέτρα. Ο άλλος παρατηρητής είναι στο ισόγειο του κτιρίου. Η γωνία ανύψωσης από το σημείο $\boldsymbol{A}$ (στην κορυφή του κτιρίου) στο σημείο $\boldsymbol{H}$ είναι $\boldsymbol{40^o}$, και η γωνία ανύψωσης από το σημείο $\boldsymbol{B}$ (στην βάση του κτιρίου) στο σημείο $\boldsymbol{H}$ is $\boldsymbol{57^o}$. Το σημείο $\boldsymbol{X}$ είναι στο έδαφος ακριβώς κάτω από το σημείο Η. Τα παραπάνω εμφανίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα, που δεν είναι υπό κλίμακα.



(a) Βρείτε την γωνία $\boldsymbol{A}\hat{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}$. [2]

Έχω $\boldsymbol{A\hat{H}B = 180° - H\widehat{B}A - B\widehat{A}H = 180° - (90° - 57°) - (90° + 40°) =} \boxed{\boldsymbol{17°}}$

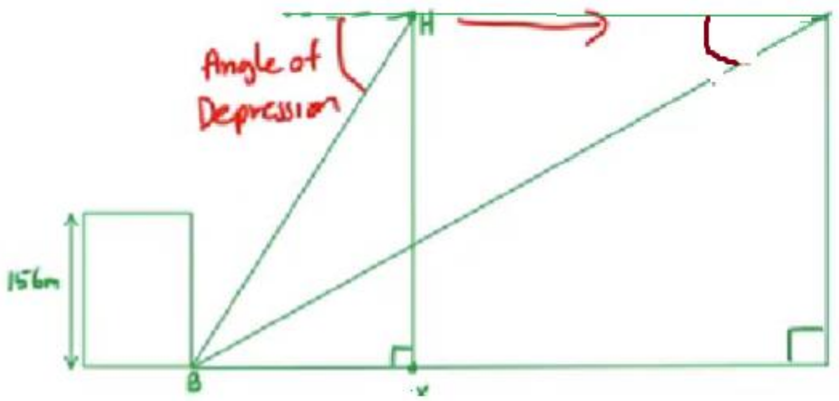
(b) Υπολογίστε την απόσταση από το σημείο $\boldsymbol{B}$ στο σημείο Η. [3]

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $\boldsymbol{AHB}$ έχω $\boldsymbol{\frac{HB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin H} \Rightarrow \frac{HB}{\sin 130°} = \frac{156}{\sin 17°} \Rightarrow HB = \frac{156 \cdot \sin 130°}{\sin 17°} = 408.736314 \approx} \boxed{\boldsymbol{409m}}$

Το αερόστατο παραμένει στο ίδιο ύψος καθώς απομακρύνεται από το κτίριο.

(c) Περιγράψτε, με λόγια, την μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης (depression) από το σημείο $\boldsymbol{H}$ στο σημείο $\boldsymbol{B}$ καθώς η οριζόντια απόσταση ανάμεσα στο αερόστατο και το κτίριο αυξάνει. [1]

Καθώς το σημείο $\boldsymbol{H}$ κινείται προς τα δεξιά η γωνία πρόσπτωσης ολοένα και μικραίνει, οριακά



μηδενίζεται.

3. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Την 1η Ιανουαρίου 2022, η Μίνα κατέθεσε 1000 \$ σε τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο 4% , ανατοκιζόμενο μηνιαίως. Στα τέλη Ιανουαρίου και στο τέλος κάθε μήνα μετά από αυτό, καταθέτει \$ 100 στον ίδιο λογαριασμό.

(a) Υπολογίστε το χρηματικό ποσό στον λογαριασμό της στις αρχές του 2024. Δώστε την απάντησή σας με δύο δεκαδικά ψηφία. [3]

(b) Βρείτε πόσοι πλήρεις μήνες, μετρημένους από την 1η Ιανουαρίου 2022, θα χρειαστούν για να έχει η Μίνα περισσότερα από 5000 \$ στον λογαριασμό της. [2]

Είναι η άσκηση 1 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

4. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Ο Carys πιστεύει ότι, σε ένα τεστ διατήρησης μνήμης, η μέση βαθμολογία των δίγλωσσων ατόμων (μ_b) θα είναι υψηλότερη από τη μέση βαθμολογία των μονόγλωσσων ατόμων (μ_m). Η Carys έδωσε ένα τεστ διατήρησης μνήμης σε ένα τυχαίο δείγμα μαθητών στην τάξη της. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους δύο πίνακες.

	Σκορ									
Δίγλωσσοι	100	94	100	90	100	94	98	98	98	98

	Σκορ							
Μονόγλωσσοι	97	92	88	88	98	94	100	100

Η Carys εκτελεί μονόπλευρο τεστ $\boldsymbol{t}$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\mathbf{5}$ %. Θεωρείται ότι οι βαθμολογίες κατανέμονται κανονικά και τα δείγματα έχουν ίσες διακυμάνσεις.

(a) Αναφέρετε τις μηδενικές και εναλλακτικές υποθέσεις. [2].

(b) Υπολογίστε την τιμή $\boldsymbol{p}$-value για την παρούσα δοκιμή. [2]

(c) Αναφέρετε το συμπέρασμα του τεστ στο πλαίσιο της ερώτησης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας. [2]

Είναι η άσκηση 1 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

5. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Η ευθεία $\boldsymbol{L_1}$ εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)}$ στο σημείο $\boldsymbol{P(3,-1)}$. Η ευθεία $\boldsymbol{L_2}$ με τύπο $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}$ είναι κάθετη στην $\boldsymbol{L_1}$.

(a) Γράψτε την κλίση της $\boldsymbol{L_1}$. [1]

Έχω $\boldsymbol{L_1 \perp L_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda_1 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2}}$

(b) Βρείτε την εξίσωση της $\boldsymbol{L_1}$ στην μορφή $\boldsymbol{y = mx + c}$. [2]

Η ευθεία $\boldsymbol{L_1}$ με εξίσωση $\boldsymbol{y = \lambda_1 x + c}$ περνά από το σημείο $\boldsymbol{P(3,-1)}$, άρα έχω $\boldsymbol{-1 = 2 \cdot 3 + c \Rightarrow c = -7}$. Άρα η ευθεία $\boldsymbol{L_1}$ έχει εξίσωση $\boxed{\boldsymbol{y = 2x - 7}}$

(c) Δείξτε ότι η $\boldsymbol{L_2}$ δεν είναι η κάθετη στην $\boldsymbol{f(x)}$ στο σημείο P. [2]

Έχω ότι το σημείο $\boldsymbol{P(3,-1)}$ δεν είναι σημείο της $\boldsymbol{L_2}$ αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν την εξίσωσή της $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{5}{2}}$. Πράγματι, έχω $\boldsymbol{-1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 = -4}$, άτοπο.

Άρα η $\boldsymbol{L_2}$ δεν είναι η κάθετη στην $\boldsymbol{f(x)}$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$.

6. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Όταν τα φρένα ενός αυτοκινήτου εφαρμοστούν πλήρως, το αυτοκίνητο θα συνεχίσει να διανύει κάποια απόσταση πριν σταματήσει εντελώς. Αυτή η απόσταση ακινητοποίησης, $\boldsymbol{d}$, σε μέτρα είναι ευθέως ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας του αυτοκινήτου, $\boldsymbol{v}$, σε χιλιόμετρα ανά ώρα ($\boldsymbol{km\ h^{-1}}$). Όταν ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{50\ km\ h^{-1}}$ θα διανύσει $\boldsymbol{12,3\ m}$ μετά την πλήρη ενεργοποίηση των φρένων πριν σταματήσει εντελώς.

(a) Προσδιορίστε μια εξίσωση για το $\boldsymbol{d}$ ως προς $\boldsymbol{v}$. [2]

Έχω $\boldsymbol{d = c \cdot v^2}$, όπου $\boldsymbol{c}$ η σταθερά αναλογίας. Άρα έχω $\boldsymbol{12.3 = c \cdot 50^2 \Rightarrow c = 0,00492}$.

Άρα $\boxed{\boldsymbol{d = 0,00492 \cdot v^2}}$

Η αστυνομία μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτή την εξίσωση για να εκτιμήσει εάν τα αυτοκίνητα υπερβαίνουν το όριο ταχύτητας. Ένα αυτοκίνητο βρέθηκε να έχει διανύσει **33** μέτρα, αφού πάτησε πλήρως τα φρένα του, πριν σταματήσει εντελώς.

(b) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση από το μέρος (α) για να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία κινούνταν αυτό το αυτοκίνητο πριν από την ενεργοποίηση των φρένων. [2]

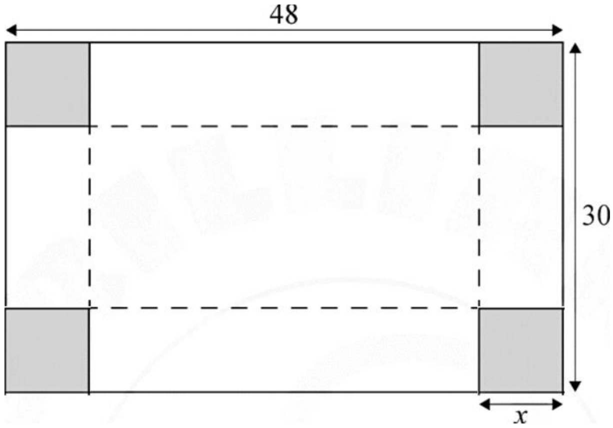
Έχω για $\boldsymbol{d} = \mathbf{33}$ ότι $\mathbf{33} = \mathbf{0,00492} \cdot \boldsymbol{v}^2 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \pm\mathbf{81,89821} \overset{v>0}{\Longrightarrow} \boxed{\boldsymbol{v} = \mathbf{81,9}\,\boldsymbol{km}\,\boldsymbol{h}^{-1}}$

(c) Αφού ενεργοποιηθούν πλήρως τα φρένα, προσδιορίστε μία άλλη μεταβλητή εκτός από την ταχύτητα που θα μπορούσε να επηρεάσει την απόσταση ακινητοποίησης. [1]

Η ολισθηρότητα του εδάφους, οι καιρικές συνθήκες κ.α.

7. [Μέγιστη βαθμολογία: 6]

Ένα ορθογώνιο κιβώτιο, με ανοιχτή κορυφή, πρόκειται να κατασκευαστεί από ένα κομμάτι χαρτόνι διαστάσεων 48 cm επί $\mathbf{30}\,\boldsymbol{cm}$. Τετράγωνα ίσου μεγέθους θα κοπούν από τις γωνίες του χαρτονιού, όπως υποδεικνύεται από τη σκίαση στο διάγραμμα. Στη συνέχεια, οι πλευρές θα διπλωθούν κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών για να σχηματίσουν το κουτί. Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.



Ο όγκος του κουτιού, σε κυβικά εκατοστά, μπορεί να μοντελοποιηθεί από την συνάρτηση $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{48} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\mathbf{30} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x})$, όπου $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{k}$, όπου $\boldsymbol{x}$ είναι το μήκος των πλευρών των τετραγώνων που κόβονται σε εκατοστά.

(a) Γράψτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{k}$ στο πλαίσιο του προβλήματος. [1]

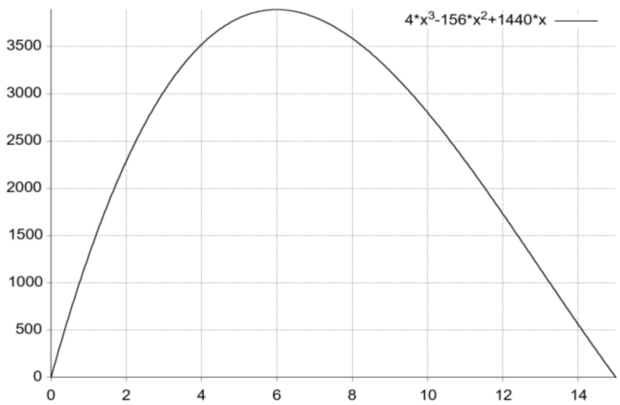
Προφανώς $\boldsymbol{k} = \frac{\min\{48,30\}}{2} = \mathbf{15}$.

(b) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ που μεγιστοποιεί τον όγκο του κουτιού. [2]

Έχω $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{48} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\mathbf{30} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}) =$
$\mathbf{4} \cdot \boldsymbol{x}^3 - \mathbf{156} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1440} \cdot \boldsymbol{x}, \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{15}$ με

$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{12}\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{312}\boldsymbol{x} + \mathbf{1440} =$
$\mathbf{12} \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{20}) \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{6}), \mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{15}$ και
$\boldsymbol{V}''(\boldsymbol{x}) = \mathbf{24} \cdot \boldsymbol{x} - \mathbf{312}$.

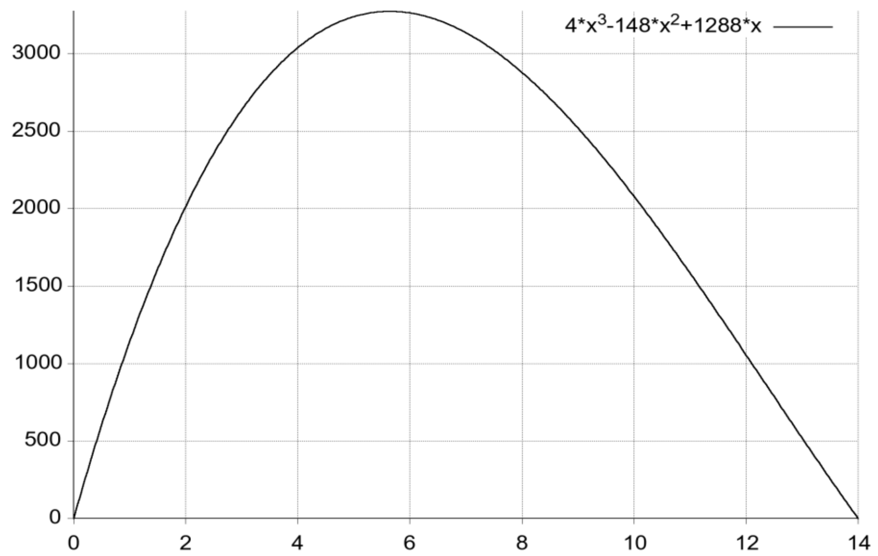
Έχω $\boldsymbol{V}'(\mathbf{6}) = \mathbf{0}$,
$\boldsymbol{V}''(\mathbf{6}) = \mathbf{144} - \mathbf{312} = -\mathbf{168} > \mathbf{0}$, άρα στο $\boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{6}}$ έχω τοπικό μέγιστο, που είναι και ολικό.



Ένα δεύτερο κομμάτι χαρτονιού διαστάσεων $\mathbf{48}\,\boldsymbol{cm}$ επί $\mathbf{30}\,\boldsymbol{cm}$ είναι σκισμένο και μια λωρίδα πλάτους $\mathbf{2}\,\boldsymbol{cm}$ πρέπει να αφαιρεθεί και από τις τέσσερις πλευρές. Στη συνέχεια, ένα κουτί θα κατασκευαστεί με παρόμοιο τρόπο από το υπόλοιπο χαρτόνι.

(c) Υπολογίστε τον μέγιστο δυνατό όγκο του κουτιού που κατασκευάζεται από το δεύτερο κομμάτι χαρτονιού. [3]

Τώρα ο όγκος του κουτιού μπορεί να μοντελοποιηθεί από την συνάρτηση $\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{46} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\mathbf{28} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x})$, όπου $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{14}$. Έχω $\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{46} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\mathbf{28} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{x}^3 - \mathbf{148} \cdot \boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1288} \cdot \boldsymbol{x}$ με $\boldsymbol{V}_2'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{12} \cdot \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{296}\boldsymbol{x} + \mathbf{1288} = \mathbf{0}$ για $\boldsymbol{x} = \frac{37-\sqrt{403}}{3} \approx \mathbf{5,641713}$ ή $\boldsymbol{x} = \frac{\sqrt{403}+37}{3} \approx \mathbf{19,02495} > \mathbf{14}$ απορρίπτεται. Οπότε η $\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x})$ μεγιστοποιείται για $\boldsymbol{x} = \mathbf{5,641713}$ και ο αντίστοιχος όγκος είναι $\boldsymbol{V}_2(\mathbf{5,641713}) \approx \mathbf{3274,124}\,\boldsymbol{cm}^3 \approx \boxed{\mathbf{3280}\,\boldsymbol{cm}^3}$



8. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Η "εντροπία κωδικού πρόσβασης" είναι ένα μέτρο της προβλεψιμότητας ενός κωδικού πρόσβασης υπολογιστή. Όσο υψηλότερη είναι η εντροπία, τόσο πιο δύσκολο είναι να μαντέψετε τον κωδικό πρόσβασης. Η σχέση μεταξύ της εντροπίας κωδικού πρόσβασης, $\boldsymbol{p}$, (μετρούμενη σε bits) και του αριθμού των εικασιών, $\boldsymbol{G}$, που απαιτούνται για την αποκωδικοποίηση του κωδικού πρόσβασης δίνεται από τον τύπο $\mathbf{0.301}\boldsymbol{p} = \mathbf{log_{10}}\boldsymbol{G}$.

(a) Υπολογίστε την τιμή του $\boldsymbol{p}$ για έναν κωδικό πρόσβασης που χρειάζεται 5000 εικασίες για να αποκωδικοποιηθεί. [2]

Έχω για $\boldsymbol{G} = \mathbf{5000}$ ότι $\mathbf{0.301} \cdot \boldsymbol{p} = \mathbf{log_{10}5000} \Rightarrow \boldsymbol{p} = \mathbf{12,28894}$

(b) Γράψτε το $\boldsymbol{G}$ ως συνάρτηση του p. [1]

Έχω $\mathbf{0.301} \cdot \boldsymbol{p} = \mathbf{log_{10}}\boldsymbol{G} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{G} = \mathbf{10^{0.30 \cdot \boldsymbol{p}}}}$

(c) Βρείτε τον αριθμό των εικασιών που απαιτούνται για την αποκωδικοποίηση ενός κωδικού πρόσβασης που έχει εντροπία 28 bit. Γράψτε την απάντησή σας με τη μορφή $\boldsymbol{a} \times \mathbf{10}^{\boldsymbol{k}}$, όπου $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{a} < \mathbf{10}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$. [3]

Για $\boldsymbol{p} = \mathbf{28}$ έχω $\boldsymbol{G} = \mathbf{10^{0.30 \cdot 28}} = \mathbf{10^{8.4}} = \mathbf{10^{0.4}} \times \mathbf{10^{8}} = \mathbf{2,511886 \cdot 10^{8}} \approx \boxed{\mathbf{2,51 \cdot 10^{8}}}$ εικασίες.

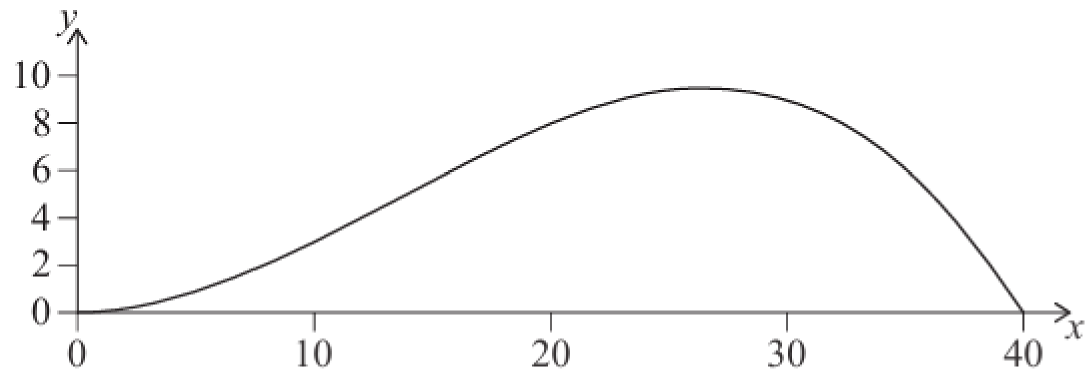
Υπάρχει ένα σημείο στο γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p})$ με συντεταγμένες $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

(d) Εξηγήστε τι σημαίνουν αυτές οι τιμές συντεταγμένων στο πλαίσιο των κωδικών πρόσβασης υπολογιστή. [1]

Αν ο κωδικός πρόσβασης δεν έχει bits ($\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$), τότε αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε ορίσει κωδικό πρόσβασης οπότε είναι βέβαιο ότι θα προβλέψουμε τον κωδικό αμέσως, ($\boldsymbol{G} = \mathbf{1}$).

9. [Μέγιστη βαθμολογία: 8]

Η διατομή ενός μοντέλου κλίμακας ενός λόφου μοντελοποιείται από το ακόλουθο γράφημα.



Τα ύψη του μοντέλου μετρώνται σε οριζόντια διαστήματα και δίνονται στον πίνακα.

Οριζόντια απόσταση x cm	0	10	20	30	40
Κάθετη απόσταση y cm	0	3	8	9	0

(a) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου με $h = 10$ για να βρείτε μια προσέγγιση για το εμβαδόν της διατομής του μοντέλου. [2]

Δίνεται η εξίσωση της καμπύλης $y = 0.04x - 0.001x$, $0 \leq x \leq 40$.

(b)

(i) Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για την εύρεση του ακριβούς εμβαδού της διατομής

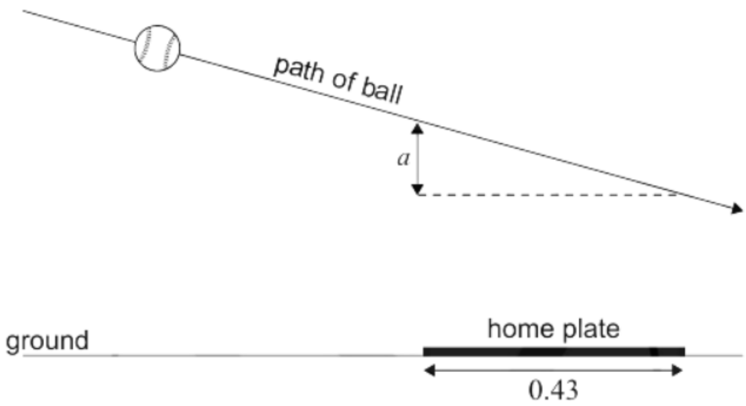
(ii) Υπολογίστε το εμβαδόν αυτό με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων. [4]

(c) Βρείτε το ποσοστό λάθους του εμβαδού που βρίσκεται με τον κανόνα του τραπεζίου. [2]

Είναι η άσκηση 4 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

10. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Σε έναν αγώνα μπέιζμπολ, η Sakura είναι ο batter που στέκεται δίπλα στο home plate. Η μπάλα ρίχνεται προς το home plate κατά μήκος μιας διαδρομής που μπορεί να μοντελοποιηθεί με την ακόλουθη συνάρτηση $y = -0.045x + 2$. Σε αυτό το μοντέλο, x είναι η οριζόντια απόσταση της μπάλας από το σημείο που ρίχνεται η μπάλα και y είναι το κατακόρυφο ύψος της μπάλας πάνω από το έδαφος. Και τα δύο μετρημένα σε μέτρα. Το αποτέλεσμα της ρίψης ονομάζεται χτύπημα (strike) εάν το ύψος της μπάλας είναι μεταξύ $0,53\ m$ και $1,24\ m$ σε κάποιο σημείο ενώ ταξιδεύει πάνω από το home plate. Το μήκος του home plate είναι $0,43m$.



Όταν η μπάλα φτάσει στο μπροστινό μέρος του home plate, το ύψος της μπάλας πάνω από το έδαφος είναι 1,25 μ. Το ύψος της μπάλας αλλάζει κατά a μέτρα καθώς η μπάλα ταξιδεύει κατά μήκος του home plate.

(a)

(i) Βρείτε την τιμή του a.

(ii) Δικαιολογήστε γιατί αυτή η ρίψη είναι strike.

Στην επόμενη βολή, ο Sakura χτυπά την μπάλα προς έναν τοίχο ύψους **5** μέτρων. Η οριζόντια απόσταση του τοίχου από το σημείο όπου χτυπήθηκε η μπάλα είναι **96** μέτρα. Η διαδρομή της μπάλας μετά το χτύπημα μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση $h(d)$.

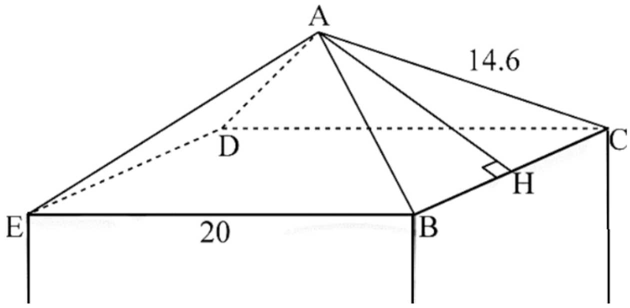
$h(d) = -0.01d^2 + 1.04d + 0.66$, με $h, d > 0$

Στο μοντέλο αυτό, h είναι το ύψος της μπάλας από το έδαφος και d είναι η οριζόντια απόσταση της μπάλας από το σημείο που χτυπήθηκε. Και το h και το d είναι μετρημένο σε μέτρα.

(b) Αποφασίστε αν η μπάλα θα περάσει πάνω από τον τοίχο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [3]

Είναι η άσκηση 6 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

11. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]



Μια σκηνή πρόκειται να τοποθετηθεί στην εξωτερική άκρη ενός παιδικού πάρκου. Η σκηνή σχηματίζεται από ένα κυβοειδές με μια τετραγωνικής βάσης πυραμίδα στην κορυφή. Το κυβοειδές τμήμα της σκηνής είναι φτιαγμένο με μηχανή έτσι ώστε το πλάτος του, και ως εκ τούτου το πλάτος της πυραμίδας, να είναι ακριβώς 20 cm . Το μήκος από την κορυφή της πυραμίδας, A , σε οποιαδήποτε γωνία της βάσης της πυραμίδας είναι $14,6\ cm$, αλλά αυτό είναι ακριβές μόνο στο πλησιέστερο δέκατο του εκατοστού. Η σκηνή φαίνεται στο διάγραμμα, που δεν είναι υπό κλίμακα.

(a) Γράψτε το άνω και το κάτω φράγμα των πιθανών μηκών της ακμής AC. [2]

Προφανώς $\boxed{14,55 \le AC < 14,65}$

Το σημείο H είναι το μέσο του BC.

(b) Βρείτε το άνω και το κάτω φράγμα του AH, το απόστημα της πυραμίδας. [3]

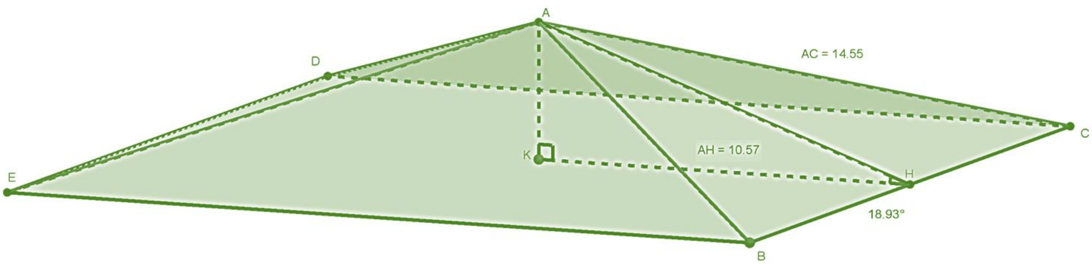
Από το Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο AHC έχω $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{AC^2 - \frac{BC}{2}^2} = \sqrt{AC^2 - 100}$.

Άρα $14,55 \le AC < 14,65 \Rightarrow 211,7025 \le AC^2 < 214,476 \Rightarrow 111,7025 \le AC^2 - 100 < 114,476 \Rightarrow$ $\sqrt{111.7025} \le \sqrt{AC^2 - 100} \Rightarrow 10,56894 \le \sqrt{AC^2 - 100} < 10,69935 \Rightarrow \boxed{10,57 \le AH < 10,70}$

Για να είναι η κατασκευή ασφαλής για τα παιδιά, η γωνία ανάμεσα στο απόστημα και την βάση της πυραμίδας πρέπει να είναι μικρότερη από 22^o.

(c) Δείξτε ότι η κατασκευή αυτή είναι ασφαλής για τα παιδιά. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [2]

Έστω K το κέντρο του τετραγώνου $BCDE$. Άρα $HK = \frac{EB}{2} = 10$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHK έχω $\cos A\hat{H}K = \frac{HK}{AH} = \frac{10}{AH}$. Έχω $10,56894 \le AH < 10,69935 \Rightarrow \frac{10}{10,56894} \ge \frac{10}{AH} > \frac{10}{10,69935} \Rightarrow$ $0,9461687 \ge \frac{10}{AH} > 0,9346362 \Rightarrow \arccos 0,9461687 \le \arccos \frac{10}{AH} < \arccos 0,9346362 \Rightarrow$ $18.885° \le A\hat{H}K < 20.8305° \Rightarrow \boxed{18.9° \le A\hat{H}K < 20.8° < 22°}$. Άρα η κατασκευή δεν είναι επικίνδυνη για τα παιδιά!



12. [Μέγιστη βαθμολογία: 7]

Σε μια συγκεκριμένη ημέρα, η ταχύτητα των αυτοκινήτων καθώς περνούν μια κάμερα ταχύτητας μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια κανονική κατανομή με μέσο όρο $\mathbf{67,3}\ \boldsymbol{km\ h^{-1}}$. Μια ταχύτητα $\mathbf{75,7}\ \boldsymbol{km\ h^{-1}}$ είναι δύο τυπικές αποκλίσεις μακριά από το μέσο όρο.

(a) Βρείτε την τυπική απόκλιση για την ταχύτητα των αυτοκινήτων. [2]

Τα πρόστιμα για υπερβολική ταχύτητα εκδίδονται σε όλους τους οδηγούς που ταξιδεύουν με ταχύτητα μεγαλύτερη από $\mathbf{72}\boldsymbol{kmh^{-1}}$.

(b) Βρείτε την πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος οδηγός που περνά από την κάμερα ταχύτητας λαμβάνει πρόστιμο για υπερβολική ταχύτητα.[2]

Διαπιστώνεται ότι το $\mathbf{82}\ \%$ των αυτοκινήτων σε αυτόν τον δρόμο ταξιδεύουν με ταχύτητες μεταξύ $\boldsymbol{p\ km\ h^{-1}}$ και $\boldsymbol{q\ km\ h^{-1}}$, όπου $\boldsymbol{p < q}$. Αυτό το διάστημα περιλαμβάνει αυτοκίνητα που ταξιδεύουν με ταχύτητα $\mathbf{74}\boldsymbol{kmh^{-1}}$.

(c) Δείξτε ότι η περιοχή της κανονικής κατανομής μεταξύ $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δεν είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή. [3]

Είναι η άσκηση 9 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

13. [Μέγιστη βαθμολογία: 5]

Ένα σκάφος ταξιδεύει **8** χιλιόμετρα σε bearing **315°** και στη συνέχεια άλλα **6** χιλιόμετρα σε bearing **045°**. Βρείτε το bearing στο οποίο πρέπει να ταξιδέψει το σκάφος για να επιστρέψετε απευθείας στο σημείο εκκίνησης.

Είναι η άσκηση 5 από την εξέταση στο ανώτερο επίπεδο.

[Πηγές]

https://www.ibo.org/programmes/diploma-programme/assessment-and-exams/sample-exam-papers/
https://www.tutorchase.com/past-papers/ib/maths-aa
https://www.mymathscloud.com/modules/ib/past-papers
https://brilliantlearning.in/2024/05/05/ib-dp-past-papers/
https://www.revisionvillage.com/ib-math/applications-and-interpretation-hl/past-papers/
www.hoddereducation.com/IBextras
https://www.savemyexams.com/dp/maths_ai-hl/ib/21/revision-notes/5-calculus/5-7-further-differential-equations/5-7-2-second-order-differential-equations/