[Ιταλία]
Η Ιταλία, επίσημα: Ιταλική Δημοκρατία (ιταλικά: Repubblica Italiana), είναι κυρίαρχο κράτος στην Ευρώπη. Έχει συνολική έκταση 301.340 τ.χλμ. και πληθυσμό 58.989.749 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2023. Πρωτεύουσα και μεγαλύτερη πόλη της Ιταλίας, είναι η Ρώμη. Αποτελείται από μία χερσόνησο σε σχήμα μπότας και δύο μεγάλα νησιά στη Μεσόγειο θάλασσα: τη Σικελία και τη Σαρδηνία. Άλλες μεγάλες πόλεις είναι το Μιλάνο, η Νάπολη και οι Συρακούσες.

Η Ιταλία είναι σε μεγάλο βαθμό ομοιογενής γλωσσικά και θρησκευτικά. Ο Καθολικισμός είναι η θρησκεία της πλειοψηφίας των κατοίκων (85% των κατοίκων αναπροσδιορίζονται ως καθολικοί).
Το προσδόκιμο ζωής στο σύνολο του πληθυσμού, σύμφωνα με εκτιμήσεις του 2019 του Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας ήταν 83,0 χρόνια (80,9 χρόνια οι άνδρες και 84,9 οι γυναίκες).

[Πολιτισμός]

Η Ιταλία είναι γνωστή για τις τέχνες, τον πολιτισμό και πολλά μνημεία της, όπως ο Πύργος της Πίζας και το Ρωμαϊκό Κολοσσαίο, όπως και για την κουζίνα της (πίτσα, μακαρονάδες, κλπ.), κρασί, τρόπος ζωής, μόδα, σχέδιο, κινηματογράφος, θέατρο, λογοτεχνία, ποίηση, εικαστικές τέχνες, μουσική (κυρίως όπερα)

Η Αναγεννησιακή περίοδος της Ευρώπης ξεκίνησε στην Ιταλία το 14ο και 15ο αιώνα. Λογοτεχνικά αριστουργήματα, όπως η ποίηση του Δάντη, Πετράρχη, Τορκουάτο Τάσσο και Λουδοβίκου Αριόστο και η πεζογραφία του Βοκάκκιου.

Η μουσική επιρροή των Ιταλών συνθετών Παλεστρίνα, Κλάουντιο Μοντεβέρντι, Αρκάντζελο Κορέλλι και Αντόνιο Βιβάλντι αποδείχτηκε τεράστια. Τον 19ο αιώνα, η ιταλική ρομαντική όπερα άνθισε με συνθέτες, όπως οι Τζοακίνο Ροσίνι, Τζουζέπε Βέρντι και Τζάκομο Πουτσίνι.

Οι σύγχρονοι Ιταλοί καλλιτέχνες, συγγραφείς, σκηνοθέτες, αρχιτέκτονες, συνθέτες και σχεδιαστές συνεχίζουν να συνεισφέρουν σημαντικά στο δυτικό πολιτισμό.

Το Ποδόσφαιρο είναι το εθνικό άθλημα των Ιταλών και το πάθος τους για το άθλημα αυτό είναι φανερό. Η Ιταλία έχει κερδίσει το Παγκόσμιο Κύπελλο Ποδοσφαίρου τέσσερις φορές: το 1934, 1938, 1982, 2006.

[Οικονομία]
Η γεωργία για τους Ιταλούς αποτελεί οικονομολογικά έναν ασήμαντο ρόλο (περίπου 2%), παρόλα αυτά έχει επιφέρει σημαντικά αποτελέσματα. Αξιοσημείωτη είναι η παραγωγή κρασιού, η οποία υπολογίζεται στα 49 εκατομμύρια εκατόλιτρα κάνοντας την Ιταλία την πρώτη χώρα παραγωγής κρασιού στον κόσμο, ακολουθούμενη από τη Γαλλία σύμφωνα με στατιστικές του 2015. Επίσης είναι ο δεύτερος μεγαλύτερος παραγωγός ελαιόλαδου μετά την Ισπανία με 442.000 τόνους κατά το έτος 2013. Διάσημη είναι επίσης για τη κατασκευή τυροκομικών προϊόντων όπως παρμεζάνα, μοτσαρέλα, πεκορίνο και ρικότα. Καλλιεργούνται και εξάγονται ακόμα εσπεριδοειδή όπως πορτοκάλια και λεμόνια, σολανό όπως η ντομάτα και η μελιτζάνα, κολοκυνθοειδή όπως κολοκυθάκια, καρπούζια και πεπόνια, λαχανικά για σαλάτες όπως ρόκα και ραδίκια, όσπρια καθώς και ξηρούς καρπούς.

Η δύναμη της ιταλικής οικονομίας εντοπίζεται στις κατασκευαστικές εταιρίες, κυρίως στις μικρές και στις μεσαίες οικογενειακές επιχειρήσεις. Σύμφωνα με την ISTAT, το επίσημο ιταλικό ινστιτούτο ανάλυσης στατιστικής έρευνας υπολογίζεται ότι το 95,2% των μικρών επιχειρήσεων απασχολούν λιγότερους από 10 εργαζόμενους. Ο όμιλος επιχειρήσεων Ένι που ασχολείται με την εξαγωγή πετρελαίου, ορυκτελαίου και ενέργειας αποτελεί την ιταλική επιχείρηση με τον μεγαλύτερο τζίρο.

Άλλες σημαντικές βιομηχανίες της χώρας είναι αυτές της παραγωγής μηχανών, αεροπλάνων (Leonardo), πλοίων (Fincantieri) και αμαξιών. Διάσημες ιταλικές βιομηχανίες αυτοκινήτων είναι ο όμιλος επιχειρήσεων Fiat, στον οποίο ανήκουν η Alfa Romeo, Iveco, Lancia και Maserati, η Ferrari, Piaggio και Pirelli. Φαρμακοβιομηχανίες και βιομηχανίες κατασκευής ηλεκτρικών προϊόντων όπως η Magneti Marelli επίσης βρίσκονται στην Ιταλία. Η κλωστοϋφαντουργία άνθησε στην Ιταλία και συνδέθηκε με την εσωτερική ετικέτα Made in Italy καθώς και με διάσημα ονόματα ιταλικών μάρκων όπως Armani, Benetton, Dolce & Cabbana, Gucci, Prada και Versace. Επιπλέον η Luxottica είναι η μεγαλύτερη εταιρία παγκοσμίως κατασκευής γυαλιών. Μια από τις σημαντικότερες ιταλικές εταιρίες εξαγωγής προϊόντων είναι οι βιομηχανίες παραγωγής τροφίμων όπως η Barilla, Campari, Lavazza και Parmala, ενώ η μεγαλύτερη επιχείρηση σε αυτόν τον κλάδο ονομάζεται Ferrero.

Στο τομέα παροχής υπηρεσιών η Ιταλία αντιπροσωπεύεται σε διεθνές επίπεδο από μεγάλες τράπεζες όπως η Unicredit και Intensa Sanpaolo, ενώ η Assicurazioni Generali αποτελεί τη μεγαλύτερη εταιρία ασφάλισης παγκοσμίως.

Ο τουρισμός αποτελεί εδώ και δεκαετίες κύρια πηγή εισοδήματος για τους Ιταλούς καθώς η Ιταλία παραμένει να είναι κλασσικός ταξιδιωτικός προορισμός. Αγαπημένοι προορισμοί είναι οι Άλπεις, οι ακτές στην Αδριατική θάλασσα και στη θάλασσα της Λιγουρίας, οι αμέτρητες ιστορικές πόλεις και μουσεία, αρχαιολογικά ευρήματα καθώς και παραδοσιακά έθιμα όπως το Καρναβάλι της Βενετίας.

Η Ιταλία μέχρι και τη δεκαετία του '70 κατείχε την πρώτη θέση σε επισκεψιμότητα στον κόσμο, ενώ σήμερα βρίσκεται στη πέμπτη θέση μετά τη Γαλλία, Αμερική, Ισπανία και Κίνα.

[Εκπαίδευση στην Ιταλία]

Η εκπαίδευση στην Ιταλία είναι υποχρεωτική από την ηλικία των 6 έως και την ηλικία των 16 ετών και χωρίζεται σε πέντε επίπεδα: το νηπιαγωγείο (scuola dell'infanzia), το δημοτικό (scuola primaria ή scuola elementare), την κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (scuola secondaria di primo grado ή scuola media inferiore), την ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (scuola secondaria di secondo grado ή scuola media superiore) και το πανεπιστήμιο (università), και διαθέτει τόσο δημόσια, όσο και ιδιωτικά εκπαιδευτικά ιδρύματα.

[Πρωτοβάθμια εκπαίδευση]

Συνήθως, πριν από το δημοτικό σχολείο (scuola primaria ή scuola elementare) προηγούνται 3 χρόνια μη υποχρεωτικής εκπαίδευσης στο νηπιαγωγείο (“asilo”). Το scuola elementare διαρκεί 5 χρόνια. Μέχρι την μέση εκπαίδευση το ωρολόγιο πρόγραμμα παραμένει ίδιο για όλους τους μαθητές και, ενώ υπάρχει η δυνατότητα φοίτησης σε δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο, τα γνωστικά αντικείμενα παραμένουν ίδια, με εξαίρεση τα ειδικά σχολεία. Οι μαθητές αποκτούν βασικές γνώσεις πάνω στην Ιταλική, τα Αγγλικά, τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες, την ιστορία, την γεωγραφία, τις κοινωνικές επιστήμες, την φυσική αγωγή, τα εικαστικά και την μουσική.

Μέχρι το 2004, προβλέπονταν εισαγωγικές εξετάσεις για την ένταξη στο «γυμνάσιο» (Scuola secondaria di primo grado), κατά τις οποίες προβλεπόταν η σύνθεση μιας σύντομης έκθεσης στην Ιταλική, ένα τεστ μαθηματικών και προφορικές εξετάσεις στα υπόλοιπα γνωστικά αντικείμενα. Μετά από την κατάργηση των εξετάσεων, η εισαγωγή στο γυμνάσιο γίνεται πλέον ελεύθερα.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ιταλία διαρκεί 8 χρόνια και είναι χωρισμένη σε δύο επίπεδα: τη Scuola secondaria di primo grado ή Scuola media inferiore, που αντιστοιχεί στην κατώτατη μέση εκπαίδευση, δηλαδή το γυμνάσιο, και τη Scuola secondaria di secondo grado ή Scuola media superiore, που αντιστοιχεί στην ανώτατη μέση εκπαίδευση, δηλαδή το λύκειο.

Το «γυμνάσιο» διαρκεί τρία χρόνια (περίπου από την ηλικία των 11 έως τα 13) και το λύκειο πέντε (περίπου από την ηλικία των 14 έως τα 19). Κάθε επίπεδο περιλαμβάνει μια αξιολόγηση στο τέλος του τελευταίου έτους, που ονομάζεται esame di maturità και απαιτείται για την απόκτηση απολυτηρίου και για την πρόσβαση σε μια περαιτέρω πανεπιστημιακή εκπαίδευση.

Για ιστορικούς λόγους, υπάρχουν τρία είδη λυκείου με διαφορετική ειδίκευση. Επί του παρόντος, όλα τα ιδρύματα ανώτατης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ιταλία ακολουθούν ως επί το πλείστων κοινή δομή και γνωστικά αντικείμενα (όπως η ιταλική γραμματική, η ιστορία και τα μαθηματικά), ενώ υπάρχουν και ορισμένα ιδιαίτερα μαθήματα που ακολουθούν τη δομή συγκεκριμένου προγράμματος σπουδών (όπως τα Αρχαία Ελληνικά στο Κλασικό Λύκειο, τα Οικονομικά των Επιχειρήσεων στο Τεχνικό-Οικονομικό Λύκειο, ή η σκηνογραφία στο Καλλιτεχνικό Λύκειο):

Liceo (Λύκειο): οι γνώσεις που αποκτούνται στο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό ίδρυμα είναι κατά κύριο λόγο θεωρητικές, με ειδίκευση σε κάποιο συγκεκριμένο τομέα σπουδών (ανθρωπιστικές, φυσικές επιστήμες ή τέχνες).
Istituto tecnico (Τεχνικό Λύκειο): η εκπαίδευση που προσφέρεται εδώ καλύπτει τόσο τα θεωρητικά προαπαιτούμενα όσο και την εξειδίκευση σε κάποιο συγκεκριμένο τομέα (π.χ. οικονομικές επιστήμες, ανθρωπιστικές, διοίκηση επιχειρήσεων, νομική, τεχνολογία, τουρισμός), ενώ συνήθως περιλαμβάνει και μια τρίμηνη ή εξάμηνη πρακτική άσκηση σε εταιρεία, οργανισμό ή πανεπιστημιακό ίδρυμα, κατά τη διάρκεια του πέμπτου και τελευταίου έτους φοίτησης.
Istituto proffesionale (Επαγγελματικό Λύκειο): αυτός ο τύπος ιδρύματος προσφέρει ένα είδος δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που προσανατολίζεται σε εργασίες πρακτικής φύσης (μηχανική, γεωργία, γαστρονομία, τεχνική υποστήριξη) και επιτρέπει στους μαθητές να ξεκινήσουν την αναζήτηση εργασίας απευθείας μετά την αποφοίτηση τους ή και νωρίτερα, καθώς ορισμένα ιδρύματα προσφέρουν πτυχίο στα 3 αντί στα 5 χρόνια.
Κάθε τύπος δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διαρκεί 5 χρόνια επιτρέπει πρόσβαση στην τελική εξέταση, esame di maturità ή esame di stato, που πραγματοποιείται κάθε χρόνο κατά την περίοδο Ιουνίου-Ιουλίου και προσφέρει πρόσβαση στο πανεπιστήμιο. Ένας Ιταλός φοιτητής, λοιπόν, όταν εισέρχεται στο πανεπιστήμιο είναι 19 ετών, ενώ στις υπόλοιπες χώρες η συνήθης ηλικία είναι 18.

Το 2013, το Διεθνές πρόγραμμα αξιολόγησης μαθητών Pisa, υπό τον συντονισμό του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (OECD), τοποθετεί την ιταλική δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην 21η θέση παγκοσμίως, πάνω από τις Ηνωμένες Πολιτείες και πάνω από τον μέσο όρο του OECD. Από την άλλη, όμως, παρατηρείται μεγάλο χάσμα ανάμεσα στα αποτελέσματα των σχολείων της

Νότιας και της Βόρειας Ιταλίας, καθώς τα τελευταία παρουσίασαν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις, άνω του εθνικού μέσου όρου (και ανάμεσα στις καλύτερες παγκοσμίως σε ορισμένα γνωστικά αντικείμενα). Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές που φοιτούν σε δημόσια σχολεία αποδίδουν καλύτερα από τους μαθητές των ιδιωτικών.

[Η τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Η ανώτατη εκπαίδευση στην Ιταλία είναι δομημένη σε ένα σύστημα, το οποίο αποτελείται από δύο κύριους άξονες: α) την πανεπιστημιακή εκπαίδευση, β) μη πανεπιστημιακή εκπαίδευση.

Η πανεπιστημιακή εκπαίδευση παρέχεται από 83 πανεπιστημιακά ιδρύματα τα οποία υπάγονται σους ακόλουθους τύπους: 58 Universities (Κρατικά Πανεπιστήμια), 17 non-State Universities (μη Κρατικά Πανεπιστήμια), 2 Universities for foreigners (Πανεπιστήμιο Ξένων Φοιτητών) 3 higher schools specialized in postgraduate university studies (Ανώτατα Ιδρύματα Μεταπτυχιακών Σπουδών) 3 telematic universities (Ανοικτά Πανεπιστήμια).

Η μη πανεπιστημιακή εκπαίδευση περιλαμβάνει 4 διαφορετικές κατηγορίες σπουδών: ανώτατες σχολές τεχνών - σχεδίου, ανώτατη εκπαίδευση στη σχολή μεταφραστών (language mediators), ανώτατη σχολή παιδαγωγικής εκπαίδευσης (σπουδές για την τεχνολογική εκπαίδευση) και σε αρκετούς ειδικευμένους τομείς (βιβλιοθηκονομία, διπλωματία, συντήρηση - αναστήλωση, στρατιωτικές σπουδές) όπου μαζί με τα αντίστοιχα ινστιτούτα σπουδών συμμετέχουν και τα αντίστοιχα υπουργεία που εμπλέκονται στους τομείς αυτούς εκτός του υπουργείου Παιδείας.

Τα Κρατικά Πανεπιστήμια (Università statali) τα οποία προσφέρουν γνώσεις και επιστημονική έρευνα και οργανώνουν κύκλο μεταπτυχιακών σπουδών με παρακολούθηση μαθημάτων - σεμιναρίων και έρευνας.

Τα Μη Κρατικά Πανεπιστήμια Università non statali) είναι αναγνωρισμένα από το κράτος και προσφέρουν αντίστοιχου επιπέδου σπουδές όπως τα κρατικά.

Τα Τεχνολογικά Πανεπιστήμια (Politecnici) τα οποία επικεντρώνονται κυρίως στους τομείς της Αρχιτεκτονικής και Μηχανικής και υιοθετούν το ίδιο εκπαιδευτικό σύστημα όπως τα κρατικά πανεπιστήμια.

Το Πανεπιστήμιο Ξένων Φοιτητών Foreigners (Università per Stranieri) είναι κρατικά ινστιτούτα που είναι ειδικευμένα στην διδασκαλία και έρευνα για την ανάπτυξη και διάδοση της ιταλικής γλώσσας, πολιτισμού και λογοτεχνίας.

Τα Ανώτατα Ιδρύματα Scuole Superiori) είναι αναγνωρισμένα με ειδική νομοθετική ρύθμιση από το κράτος ως ινστιτούτα ειδικευμένα στην παροχή στους φοιτητές μεταπτυχιακών σπουδών και επιστημονικής έρευνας. Προσφέρουν κυρίως διδακτορικές σπουδές.

Τα Ανοικτά Πανεπιστήμια (Università telematiche) είναι μη-κρατικά πανεπιστήμια ειδικευμένα στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση τα οποία είναι αναγνωρισμένα από το κράτος.

Η μη-πανεπιστημιακή ανώτατη εκπαίδευση παρέχεται κυρίως από τα ιδρύματα:

Ακαδημίες Καλών Τεχνών (Academie di Belle Arti)
Ανώτατη Σχολή Σχεδίου (Instituti Superiori per le Industrie Artistiche) Εθνική Ακαδημία Θεάτρου (Accademia Nazionale di Arte Drammatica)
Εθνική Ακαδημία Χορού(Accademia Nazionale di Danza)
Κρατικό Μουσικό Ωδείο και αναγνωρισμένα Μουσικά Ινστιτούτα(Conservatori di Musica e Istituti Musicali Pareggioti)
Ανώτατα Ινστιτούτα Σπουδών Μουσικής και Χορογραφίας (Istituti Superiori di Studi Musicali e Coreutici)
Ανώτατα Ινστιτούτο Σπουδών Χορογραφίας(Istituto Superiore de Studi Coreutici)
Πολυτεχνικές Σχολές των Τεχνών (Politecnici delle Arti)
Ανώτατες Σχολές Μεταφραστών (Scuole Superiori per Mediatori Linguistici)
Προγράμματα Σπουδών Ανώτατης Τεχνολογικής Εκπαίδευση (Instruzione e Formazione Tecnica Superiore)
Εθνική Σχολή Κινηματογράφου (Sperimentale di Cinematografice)
Κρατικό Ινστιτούτο Συντήρησης (Istituto Centrale per il Restauro)
Σχολή Συντήρησης Ψηφιδωτών (Scuola di Restauro del Mosaico)
Σχολή Συντήρησης και Αποκατάστασης Λίθινων Αντικειμένων και Μνημείων (Opificio delle Pietre Dure)
Κρατικό Ινστιτούτο Συντήρησης Βιβλιακού-Αρχειακού Υλικού (Istituto Centrale per la Patologia del Libro "Alfonso Gallo").
ΣχολέςΑρχειοθέτησης,Παλαιογραφίας,Διπλωματών (Scuole di Archivistica, Paleografia e Diplomatica)
Στρατιωτικές Ακαδημίες και Ινστιτούτα της Αστυνομίας (Accademie Militari e Istituti di Poizia)
Περιφεριακή μεταδευτεροβάθμια επαγγελματική εκπαίδευση(Formazione Professionale Regionale)

[Τα καλύτερα Πανεπιστήμια]

Η Ιταλία διαθέτει ένα μεγάλο και διεθνώς αναγνωρισμένο δίκτυο δημόσιων πανεπιστημίων και σχολών που προσφέρουν πτυχία ανώτερης εκπαίδευσης. Τα κρατικά πανεπιστήμια καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο τμήμα της ανώτατης εκπαίδευσης στην Ιταλία και η διαχείριση τους γίνεται υπό την εποπτεία του Ιταλού Υπουργού Παιδείας.

Τα ιταλικά πανεπιστήμια είναι ανάμεσα στα παλαιότερα πανεπιστήμια του κόσμου. Πιο συγκεκριμένα, το Πανεπιστήμιο της Μπολόνια (ιδρύθηκε το 1088), το Πανεπιστήμιο της Πάντοβα (ιδρύθηκε το 1222) και το Πανεπιστήμιο της Νάπολης Federico II, το παλαιότερο δημόσιο και λαϊκό πανεπιστήμιο παγκοσμίως, είναι τα παλαιότερα πανεπιστήμια στην Ευρώπη.

Υπάρχουν επίσης και αρκετές Ανώτατες Σχολές (Scuola Superiore Universitaria), οι οποίες προσφέρουν επίσημα αναγνωρισμένους τίτλους, συμπεριλαμβανομένου και του Διπλώματος Αριστείας (Diploma di Perfezionamento), αντίστοιχο του διδακτορικού διπλώματος (Dottorato di Ricerca), όπως το Ph.D (Doctor Philosophiae). Μερικές από τις ανώτατες σχολές οργανώνουν επίσης προγράμματα μεταπτυχιακού κύκλου (Master's degree). Υπάρχουν τρεις Ανώτατες Σχολές πανεπιστημιακού επιπέδου, τρία ιδρύματα διδακτορικού επιπέδου (Doctoral College), τα οποία λειτουργούν και σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο και εννέα άλλες σχολές, οι οποίες αποτελούν παρακλάδια πανεπιστημίων. Η πρώτη απ' αυτές είναι η Scuola Normale Superiore di Pisa, η οποία ιδρύθηκε από τον Ναπολέοντα το 1810, ως παρακλάδι της École Normale Supérieure. Αυτά τα ιδρύματα αναφέρονται συνήθως ως «Σχολές Αριστείας» ("Scuole di Eccellenza").

Τα ιταλικά πανεπιστήμια κατέχουν, επίσης, σημαντικές θέσεις στις διεθνείς κατατάξεις. Το Πανεπιστήμιο της Μπολόνια (ίσως το παλαιότερο πανεπιστήμιο παγκοσμίως), σύμφωνα με την εφημερίδα The Times, είναι το μοναδικό ιταλικό πανεπιστήμιο που έχει συγκαταλεχθεί στα 200 καλύτερα πανεπιστήμια παγκοσμίως, ενώ το Πανεπιστήμιο Bocconi του Μιλάνο έχει συγκαταλεχθεί στις 20 καλύτερες σχολές διοίκησης επιχειρήσεων παγκοσμίως, σύμφωνα με τις διεθνείς κατατάξεις της εφημερίδας The Wall Street Journal. Τη θέση του αυτή τη χρωστάει κυρίως στο μεταπτυχιακό του πρόγραμμα στη Διοίκηση Επιχειρήσεων (Μ.Β.Α.), το οποίο το 2007 κατατάχθηκε 17ο παγκοσμίως, όσον αφορά την προτίμηση σε προσλήψεις πτυχιούχων από μεγάλες πολυεθνικές εταιρείες. Επιπλέον, το πανεπιστήμιο Bocconi κατατάχθηκε ως το καλύτερο παγκοσμίως στην κατηγορία Value for Money από το περιοδικό Forbes, ενώ τον Μάιο του 2008 ξεπέρασε ορισμένες από τις καλύτερες κατά παράδοση σχολές διοίκησης επιχειρήσεων στην κατάταξη του Financial Times Executive education και έφτασε στην 5η θέση Ευρωπαϊκώς και στην 15η παγκοσμίως.

Άλλα κορυφαία πανεπιστήμια και πολυτεχνικές σχολές είναι το LUISS στην Ρώμη, η Πολυτεχνική Σχολή του Τορίνο (Polytechnic University of Turin), το Πολυτεχνείο του Μιλάνου (Politecnico di Milano), το οποίο το 2011 κατατάχθηκε ως το 48ο καλύτερο πολυτεχνείο στον κόσμο από το QS World University Rankings, και το Πανεπιστήμιο της Ρώμης La Sapienza (University of Rome La Sapienza), το οποίο το 2005 ήταν το 33ο καλύτερο πανεπιστήμιο της Ευρώπης και ανάμεσα στα 150 καλύτερα πανεπιστήμια παγκοσμίως, ενώ το 2013 το Διεθνές Κέντρο Πανεπιστημιακών Κατατάξεων, το τοποθέτησε στην 62η θέση παγκοσμίως και πρώτο στην Ιταλία στη Διεθνή Κατάταξη Πανεπιστημίων.

Ανάμεσα στα κορυφαία συγκαταλέγεται επίσης και το Πανεπιστήμιο του Μιλάνο, του οποίου η έρευνα και οι διδακτικές του δραστηριότητες αναπτύχθηκαν σε μεγάλο βαθμό τα τελευταία χρόνια, ενώ έχει δεχτεί σημαντική διεθνή αναγνώριση. Το Πανεπιστήμιο του Μιλάνο είναι και το μοναδικό ιταλικό πανεπιστήμιο που είναι μέλος του LERU (League of European Research Universities), το οποίο αποτελεί μια υψηλού κύρους ομάδα 20 Ευρωπαϊκών Πανεπιστημίων, που ασχολούνται εντατικά με την έρευνα. Επίσης, έχει καταταχθεί 1ο στην Ιταλία και 7ο στην Ευρώπη, σύμφωνα με την κατάταξη του πανεπιστημίου του Λέιντεν (The Leiden Ranking – Universiteit Leiden).

Σύμφωνα με τη βάση δεδομένων National Science Indicators (1981-2002), που αναπτύχθηκε από την Ομάδα Ερευνητικών Υπηρεσιών και περιέχει λίστες δημοσιεύσεων και στατιστικές παραπομπών για περισσότερες από 90 χώρες, η Ιταλία έχει αριθμό δημοσιεύσεων επιστημονικών μελετών άνω του μέσου όρου (όσον αφορά μελέτες με τουλάχιστον έναν από τους συγγραφείς να κατάγεται από την Ιταλία) στους παρακάτω τομείς: στην επιστήμη του διαστήματος (με ποσοστό 9,75% των επιστημονικών μελετών παγκοσμίως να προέρχονται από την Ιταλία), στις μαθηματικές επιστήμες (με ποσοστό 5,51%), στην πληροφορική, τη νευροεπιστήμη και τη φυσική. Το χαμηλότερο ποσοστό δημοσιεύσεων, αλλά και πάλι άνω του μέσου όρου, εντοπίζεται στις κοινωνικές επιστήμες, την ψυχολογία, την ψυχιατρική, τις οικονομικές επιστήμες και τη διοίκηση επιχειρήσεων.

[Προαγωγικές εξετάσεις]

Esame di Stato -Maturità

Υπάρχουν δύο γραπτές δοκιμασίες εθνικού χαρακτήρα (που αποφασίζονται, δηλαδή, από το Υπουργείο) και μια συνέντευξη. Οι επιτροπές αποτελούνται από εσωτερικούς και εξωτερικούς επιτρόπους και προεδρεύονται από εξωτερικό πρόεδρο.

Η πρώτη δοκιμασία

Το πρώτο τεστ αξιολογεί τόσο την εκμάθηση της ιταλικής γλώσσας (ή της διαφορετικής γλώσσας στην οποία πραγματοποιείται η διδασκαλία) όσο και τις εκφραστικές, λογικές-γλωσσικές και κριτικές δεξιότητες των μαθητών.
Πραγματοποιείται την Τετάρτη 19 Ιουνίου 2024 και ώρα 8:30 π.μ. με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα ινστιτούτα και έχει μέγιστη διάρκεια έξι ωρών.
Οι υποψήφιοι μπορούν να επιλέξουν μεταξύ διαφορετικών τύπων και θεμάτων: το Υπουργείο διαθέτει για όλους τους τομείς σπουδών επτά κατευθύνσεις που αναφέρονται στον καλλιτεχνικό, λογοτεχνικό, ιστορικό, φιλοσοφικό, επιστημονικό, τεχνολογικό, οικονομικό και κοινωνικό τομέα. Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν, μεταξύ των επτά κομματιών, αυτό που πιστεύουν ότι ταιριάζει καλύτερα στην προετοιμασία και τα ενδιαφέροντά τους.
Η εξέταση μπορεί να δομηθεί σε διάφορα μέρη. Αυτό καθιστά δυνατή την επαλήθευση διαφορετικών δεξιοτήτων, ιδίως την κατανόηση γλωσσικών, εκφραστικών και λογικών επιχειρηματολογικών πτυχών, καθώς και τον κριτικό προβληματισμό από τον υποψήφιο.

Η δεύτερη δοκιμασία

Το δεύτερο τεστ αφορά έναν ή περισσότερους από τους κλάδους που χαρακτηρίζουν το πρόγραμμα σπουδών. Στα νέα επαγγελματικά ινστιτούτα, από την άλλη πλευρά, το τεστ επικεντρώνεται σε δεξιότητες και θεμελιώδεις θεματικούς πυρήνες διεύθυνσης και όχι σε κλάδους.
Το Υπουργείο, με ειδικό διάταγμα, έχει καθορίσει τους κλάδους που καλύπτονται από αυτή τη δεύτερη δοκιμασία.

Τρίτη δοκιμασία μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις

Για τα τμήματα τεχνολογίας ESABAC και ESABAC, τμήματα με διεθνή επιλογή, για σχολεία στην αυτόνομη περιφέρεια Valle d'Aosta και στην αυτόνομη επαρχία του Bolzano, για σχολεία με σλοβενική γλώσσα διδασκαλίας και με δίγλωσση διδασκαλία σλοβενικών/ιταλικών στο Friuli Venezia Giulia, υπάρχει μια τρίτη γραπτή δοκιμασία.

Η συνέντευξη

Η συνέντευξη πραγματοποιείται μετά τις γραπτές εξετάσεις και καλύπτει επίσης την διδασκαλία της αγωγής του πολίτη.
Πρόκειται για μια διεπιστημονική συνέντευξη: με λίγα λόγια, η επιτροπή αξιολογεί τόσο την ικανότητα του υποψηφίου να κατανοήσει τις συνδέσεις μεταξύ των γνώσεων που αποκτήθηκαν όσο και του εκπαιδευτικού, πολιτιστικού και επαγγελματικού προφίλ του μαθητή.
Θα ξεκινήσει με ένα αρχικό σημείο εκκίνησης που θα επιλέξει η Επιτροπή. Αυτή είναι η φάση της εξέτασης στην οποία ενισχύεται η πορεία κατάρτισης και ανάπτυξης του μαθητή, οι δεξιότητες, τα ταλέντα και η ικανότητα να επεξεργαστεί, σε μια διεπιστημονική προοπτική, τα πιο σημαντικά θέματα κάθε κλάδου. Το τελευταίο θα αναφέρεται στο έγγραφο του Συμβουλίου Τάξης κάθε μαθητή.
Στο πλαίσιο της συνέντευξης, ο υποψήφιος παρουσιάζει, μέσω μιας σύντομης έκθεσης ή/και μιας εργασίας πολυμέσων, την εμπειρία του PCTO (διαδρομές για εγκάρσιες δεξιότητες και προσανατολισμό) που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια των σπουδών.

Η αξία προσανατολισμού της συνέντευξης

Σύμφωνα με όσα ορίζονται στις κατευθυντήριες γραμμές προσανατολισμού - που εκδόθηκαν κατ' εφαρμογή της μεταρρύθμισης που προβλέπεται από το Εθνικό Σχέδιο Ανάκαμψης και Ανθεκτικότητας (PNRR) - η συνέντευξη για τις κρατικές εξετάσεις αποκτά αξία προσανατολισμού: δεδομένης της διεπιστημονικής της διάστασης, δίνει στον υποψήφιο τη δυνατότητα να εμβαθύνει τους κλάδους που του

αρέσουν περισσότερο. Για το λόγο αυτό, η εξεταστική επιτροπή λαμβάνει υπόψη τις πληροφορίες που περιλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών του μαθητή: από εδώ, στην πραγματικότητα, προκύπτουν οι εκπαιδευτικές εμπειρίες του υποψηφίου στο σχολείο και στα διάφορα μη τυπικά και άτυπα πλαίσια.
Στο μέρος της συνέντευξης που είναι αφιερωμένο στα PCTOs (μονοπάτια για δεξιότητες και προσανατολισμό), ο φοιτητής μπορεί να τονίσει τη σημασία αυτής της εμπειρίας όσον αφορά τον προσανατολισμό και, ως εκ τούτου, μπορεί να τη συνδέσει με τις μελλοντικές επιλογές του (είτε αφορούν τη συνέχιση των σπουδών είτε την είσοδο στον κόσμο της εργασίας).

Συντελεστές & Βαθμοί

Στον τελικό έλεγχο, το συμβούλιο της τάξης αποδίδει τη βαθμολογία κατά τα τρία τελευταία έτη έως σαράντα μονάδες: δώδεκα μονάδες για το τρίτο έτος, δεκατρείς για το τέταρτο έτος και δεκαπέντε για το πέμπτο έτος.
Η αξιολόγηση της συμπεριφοράς συμβάλλει στον καθορισμό της σχολικής μονάδας.
Ο τελικός βαθμός της κρατικής εξέτασης εκφράζεται σε εκατοστά που κατανέμονται ως εξής:

- Μέγιστο 40 βαθμοί για τη σχολική βαθμολογία
- 20 μονάδες κατ' ανώτατο όριο για την πρώτη γραπτή δοκιμασία
- 20 μονάδες κατ' ανώτατο όριο για τη δεύτερη γραπτή δοκιμασία
- Μέγιστη βαθμολογία 20 βαθμοί για τη συνέντευξη.

Η επιτροπή μπορεί να απονείμει έως και 5 πόντους "μπόνους" για όσους είναι επιλέξιμοι. Από το άθροισμα όλων αυτών των βαθμών προκύπτει ο τελικός βαθμός της εξέτασης.
Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 (υπάρχει η δυνατότητα τιμητικών διακρίσεων). Η ελάχιστη βαθμολογία για να περάσετε τις εξετάσεις είναι 60/100.

[Ύλη]

5ο έτος

Όρια συναρτήσεων

Θεωρήματα Ορίων
Πεπερασμένο όριο μιας συνάρτησης στο άπειρο
Άπειρο όριο μιας συνάρτησης στο άπειρο

Συνεχείς συναρτήσεις και ασύμπτωτες

Αξιοσημείωτα όρια
Σημεία ασυνέχεια
Απειροελάχιστα και άπειρο

Η παράγωγος μιας συνάρτησης

Θεώρημα de l'Hopital
Γεωμετρική έννοια του παραγώγου, εξίσωση εφαπτομένης σε καμπύλη
Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων

Τα ακρότατα μιας συνάρτησης

Απόλυτα μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης
Σχετικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης
Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης

Αόριστα ολοκληρώματα
Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος
Αρχικές συναρτήσεις
Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Ορισμένα ολοκληρώματα
Θεώρημα μέσης τιμής
Όγκος περιστροφικών στερεών
Όγκος στερεών: μέθοδος τομής

4ο έτος
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Οι συναρτήσεις τέμνουσας και συντέμνουσας
Συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου
Η συνάρτηση συνεφαπτομένης

Τριγωνομετρικοί τύποι
Μερικοί γωνιομετρικοί τύποι

Τριγωνομετρία
Θεώρημα χορδών (δηλ. νόμος ημιτόνου)
Θεώρημα Carnot (δηλ. νόμος συνημιτόνου)
Θεωρήματα σε οποιαδήποτε τρίγωνα: ημίτονα, προβολές

Εκθετικές συναρτήσεις
Η εκθετική συνάρτηση
Η συνάρτηση x^n
Εκθετικές ανισότητες

Λογάριθμοι
Η λογαριθμική καμπύλη
Η συνάρτηση λογαρίθμου και οι ιδιότητες των λογαρίθμων
Λογαριθμικές ανισότητες (περίπτωση $0 < \alpha < 1$)

Συνδυαστικός λογισμός
Παραλλαγές
Απλές μεταθέσεις
Επαναλαμβανόμενες μεταθέσεις

Πιθανότητα
Σύνθετη πιθανότητα για ανεξάρτητα συμβάντα
Πιθανότητες υπό όρους
Συνολικές πιθανότητες για ασύμβατα γεγονότα

Αριθμητικές συναρτήσεις: ιδιότητες και λειτουργίες
Η εκθετική συνάρτηση

Η λογαριθμική συνάρτηση
Η συνάρτηση ακέραιου μέρους

3ο έτος
Πίνακες και Ορίζουσες
Τάξη ενός πίνακα
Άθροισμα πινάκων
Αντίστροφοι πίνακες

Γραμμικά συστήματα
Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Cramer
Επίλυση γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο Gauss
Γραμμικά συστήματα και ομοιογενή συστήματα

Αναλυτική γεωμετρία σημείου και γραμμής
Μετατόπιση άξονα
Μέσο
Ευθεία γραμμή για δύο σημεία

Η περιφέρεια και η έλλειψη
Ιδιότητες της έλλειψης
Εφαπτομένες από ένα σημείο σε έναν κύκλο
Εφαπτομένη γραμμή σε έλλειψη

Η υπερβολή και η παραβολή
Η Παραβολή ως γεωμετρικός τόπος
Παραβολή με άξονα παράλληλο προς τον άξονα y
Παραβολές σε συγκεκριμένες θέσεις

Περιγραφική στατιστική
Εύρος δείγματος ή εύρος διακύμανσης
Γραμμή γραμμικής παλινδρόμησης
Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

Υπουργείο Παιδείας και Αξιών - ΤΕΛΙΚΗ ΚΡΑΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ιούνιος 2024
Θέμα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο υποψήφιος λύνει ένα από τα δύο προβλήματα και απαντά σε 4 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.
Μέγιστη διάρκεια της εξέτασης: 6 ώρες.
Η χρήση επιστημονικών αριθμομηχανών ή αριθμομηχανών γραφημάτων επιτρέπεται εφόσον δεν είναι εξοπλισμένες με δυνατότητα αλγεβρικής συμβολικής επεξεργασίας και δεν διαθέτουν σύνδεση στο διαδίκτυο.
Η χρήση του δίγλωσσου λεξικού (ιταλική γλώσσα της χώρας προέλευσης) επιτρέπεται στους υποψηφίους των οποίων η μητρική γλώσσα δεν είναι η ιταλική.
Δεν επιτρέπεται η έξοδος από το Ινστιτούτο πριν παρέλθουν 3 ώρες από την παράδοση των θεμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θεωρήστε $\boldsymbol{f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}}$, με $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$

a) Προσδιορίστε τις τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε η γραμμή $\boldsymbol{t}$, με εξίσωση $\boldsymbol{7x + y - 12 = 0}$, να εφάπτεται στο γράφημα της $\boldsymbol{f_{a,b}(x)}$ στο σημείο $\boldsymbol{P}$ με τετμημένη $\boldsymbol{x = 1}$.
Από τώρα και στο εξής, ας υποθέσουμε $\boldsymbol{a = 1}$ και $\boldsymbol{b = 4}$.

b) Μελετήστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}}$ και σχεδιάστε το γράφημα της, $\boldsymbol{\gamma}$. Γράψτε την εξίσωση της πρόσθετης γραμμής που εφάπτεται στην καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ και διέρχεται από το P.

c) Καθώς η πραγματική παράμετρος $\boldsymbol{m}$ αλλάζει, προσδιορίστε τον αριθμό των διασταυρώσεων μεταξύ της γραμμής με εξίσωση $\boldsymbol{y - 5 = m(x - 1)}$ και της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$.

d) Έστω $\boldsymbol{S(k)}$, με $\boldsymbol{k > \frac{3}{2}}$, είναι το εμβαδόν της πεπερασμένης περιοχής του επιπέδου μεταξύ της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$, την πλάγια ασύμπτωτη, την γραμμή $\boldsymbol{t}$ και την ευθεία με εξίσωση $\boldsymbol{x = k}$. Υπολογίστε το $\boldsymbol{\lim_{k\to+\infty} S(k)}$, παρέχοντας μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος που λαμβάνεται.

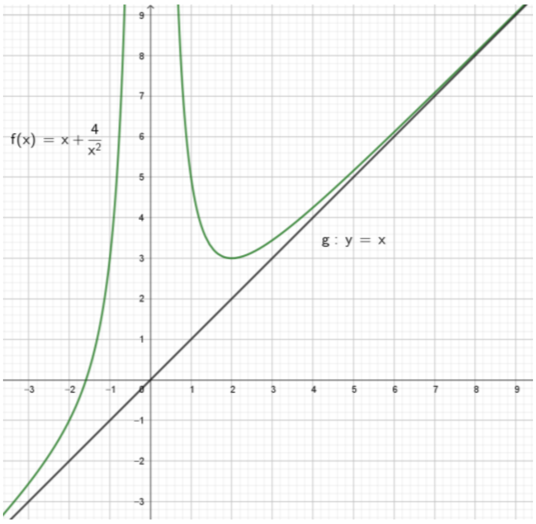
Λύση

a) Το σημείο $\boldsymbol{P(1, y_P)}$ της καμπύλης ανήκει επίσης στην εφαπτομένη γραμμή $\boldsymbol{t}$, άρα $\boldsymbol{7 \cdot 1 + y_p - 12 = 0 \Leftrightarrow y_P = 5}$, δηλαδή οι συντεταγμένες του $\boldsymbol{P}$ είναι $\boldsymbol{(1, 5)}$. Συνεπώς $\boldsymbol{f_{a,b}(1) = 5 \Leftrightarrow a + b = 5 (1)}$. Επιπλέον η παράγωγος της συνάρτησης που υπολογίζεται στο σημείο $\boldsymbol{P}$ είναι ίση με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης γραμμής στο $\boldsymbol{P}$, που είναι ίσος με $\boldsymbol{-7}$. Έχω $\boldsymbol{f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2} = ax + \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'_{a,b}(x) = a - \frac{2b}{x^3} \Rightarrow f'_{a,b}(1) = a - 2b \Rightarrow a - 2b = -7\ (2)}$. Από (1) και (2) έχω $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$ και $\boxed{\boldsymbol{b = 4}}$.

b) Έχω $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0, x \neq 0}$. Ο πίνακας μεταβολών είναι

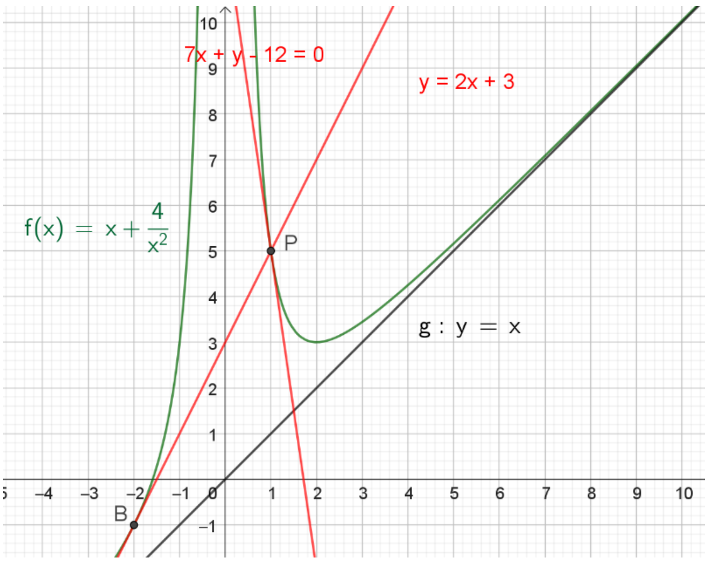
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(2)=3$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$							

Κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $\boldsymbol{x = 0}$, ενώ έχει και πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την $\boldsymbol{y = x}$, αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2} = 0$ άρα η γραφική παράσταση είναι ως ακολούθως.



Έστω ότι η δεύτερη εφαπτομένη που ζητείται εφάπτεται σε σημείο $\boldsymbol{B}$ της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$ σε σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{x_B \neq 1}$. Έχω ότι η εξίσωσή της είναι $\boldsymbol{y - f(x_B) = f'(x_B)(x - x_B)}$.

Αφού περνά από το σημείο $\boldsymbol{P(1,5)}$ έχω $5 - f(x_B) = f'(x_B)(1 - x_B) \Rightarrow 5 - x_B - \frac{4}{x_B^2} = \left(1 - \frac{8}{x_B^3}\right)(1 - x_B) \Leftrightarrow 5x_B^3 - x_B^4 - 4x_B = (x_B^3 - 8)(1 - x_B) \Leftrightarrow 5x_B^3 - x_B^4 - 4x_B = x_B^3 - x_B^4 - 8 + 8x_B \Leftrightarrow 4x_B^3 - 12x_B + 8 = 0 \Leftrightarrow x_B^3 - 3x_B + 2 = 0 \Leftrightarrow (x_B - 1)(x_B^2 + x_B - 2) = 0 \Leftrightarrow (x_B - 1)(x_B - 1)(x_B + 2) = 0 \Leftrightarrow (x_B - 1)^2(x_B + 2) = 0 \overset{x_B \neq 1}{\Longleftrightarrow} x_B = -2$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y + 1 = 2(x + 2) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x + 3}$

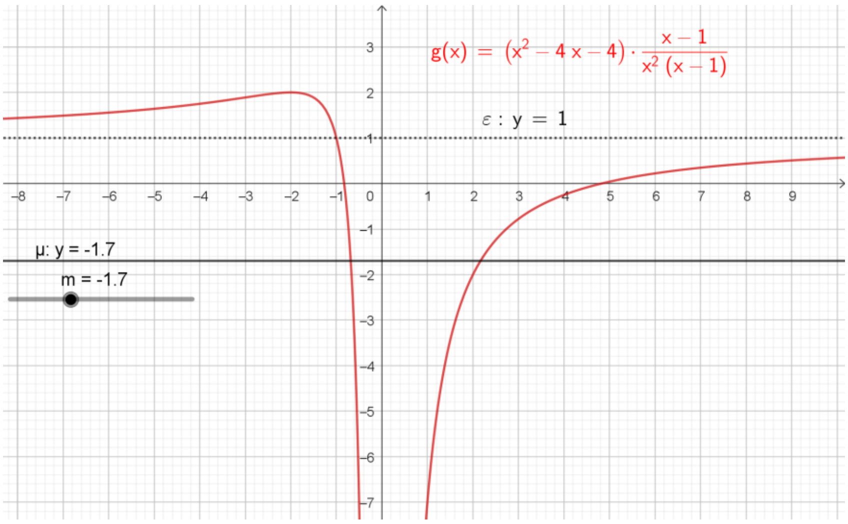


c) Η εξίσωση $\boldsymbol{y - 5 = m(x - 1), m \in R}$ εκφράζει την οικογένεια ευθειών που περνά από το σημείο $\boldsymbol{P(1,5)}$. Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημά μας γραφικά στρέφοντας την ευθεία που περνά από το $\boldsymbol{P}$ και καταγράφοντας για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{m}$ το πλήθος των σημείων τομής με την γραμμή $\boldsymbol{\gamma}$. Το σημείο p(1,5) είναι ένα προφανές σημείο τομής. Θα ψάξουμε τα άλλα σημεία τομής αλγεβρικά. Αρκεί να βρούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) - 5 =}$

$\boldsymbol{m(x-1), x \neq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3+4}{x^2} - 5 = m(x-1) \Leftrightarrow \frac{x^3-5x^2+4}{x^2} = m(x-1) \Leftrightarrow \frac{x^3-5x^2+4}{x^2(x-1)} = m \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\frac{(x^2-4x-4)(x-1)}{x^2(x-1)} = m}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = \frac{(x^2-4x-4)(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{x^2-4x-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}, x \neq 0, x \neq 1}$. Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{g}$ και της ευθείας $\boldsymbol{y = m}$ για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{m \in R}$. Έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη της $\boldsymbol{g}$ στο $\pm\infty$ την $\boldsymbol{y = 1}$, αφού $\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} = 1}$. Επιπλέον $\boldsymbol{\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x-4}{x^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty}$ άρα έχουμε και κατακόρυφη ασύμπτωτη την $\boldsymbol{x = 0}$, ενώ ισχύει ότι $\boldsymbol{g'(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 4\frac{x+2}{x^3}}$ με πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow$	$g(-2) = 2$	$\searrow -\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow 1$

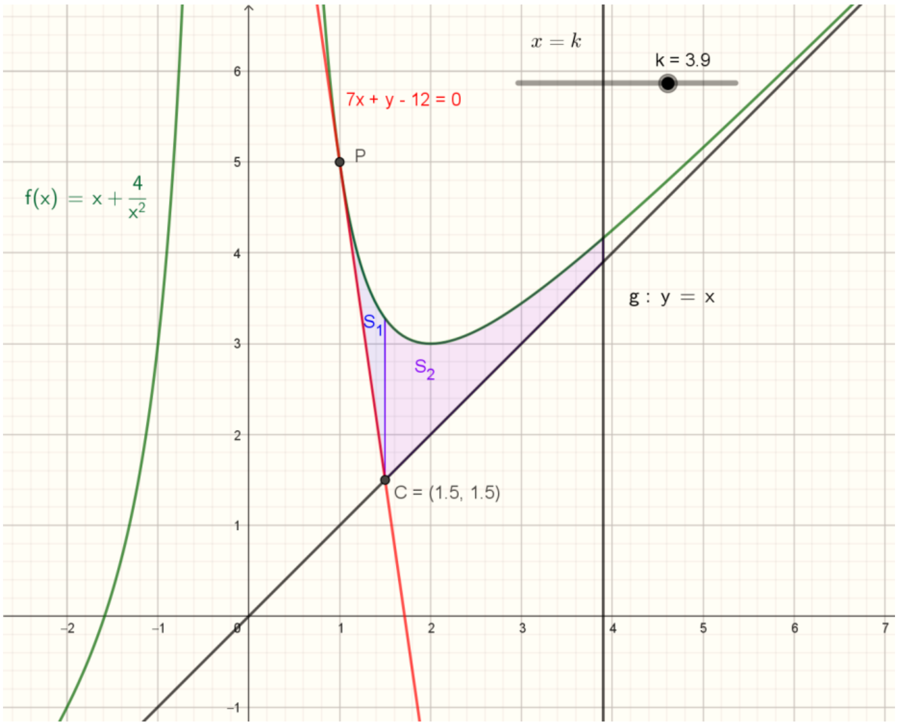
Άρα το γράφημα της g είναι ως εξής:



Συνοπτικά έχουμε :

	πλήθος των σημείων τομής της $\boldsymbol{g}$ με την $\boldsymbol{y = m}$	πλήθος των σημείων τομής της f με την $\boldsymbol{y - 5 = m(x-1)}$
Για $\boldsymbol{m > 2}$	Κανένα	ένα, το σημείο $\boldsymbol{P}$
Για $\boldsymbol{m = 2}$	Ένα, **το** $\boldsymbol{Q(-2, 2)}$	Δύο, το $\boldsymbol{B(-2, f(-2))}$ και το $\boldsymbol{P}$
Για $\boldsymbol{1 < m < 2}$	Δύο	Τρία
Για $\boldsymbol{m = 1}$	Ένα, **το** $\boldsymbol{R(-1, 1)}$	Δύο, το $\boldsymbol{(-1, f(-1)}$ και το $\boldsymbol{P}$
Για $\boldsymbol{m < 1, m \neq -7}$	Δύο	Τρία
Για $\boldsymbol{m = -7}$	Ένα, **το** $\boldsymbol{S\left(-\frac{1}{2}, -7\right)}$	Δύο, το $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$ και το $\boldsymbol{P}$

d) Οι ευθείες $\boldsymbol{t: 7x + y - 12 = 0}$ και η ασύμπτωτη ευθεία $\boldsymbol{y = x}$ εύκολα βρίσκουμε ότι τέμνονται στο σημείο $\boldsymbol{C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}$. Άρα έχουμε την εξής εικόνα



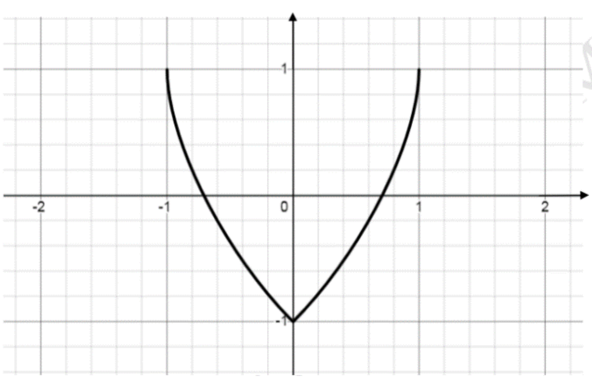
Η πεπερασμένη περιοχή αποτελείται από το χωρίο με εμβαδόν $S_1 = \int_1^{\frac{3}{2}} (f(x) - (-7x+12))dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (\frac{x^3+4}{x^2} - (-7x+12))dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (8x + \frac{4}{x^2} - 12)dx = 4\int_1^{\frac{3}{2}} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 3\right)dx = 4\cdot\left[x^2 - \frac{1}{x} - 3x\right]_1^{\frac{3}{2}} = 4\left[\left(\frac{9}{4} - \frac{2}{3} - \frac{9}{2}\right) - (-3)\right] = 4\left[-\frac{35}{12} + 3\right] = \frac{1}{3}$ και το χωρίο με εμβαδόν $S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right)dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \frac{4}{x^2}dx = 4\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k} = \frac{8}{3} - \frac{4}{k}$. Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι $S(k) = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{k} = 3 - \frac{4}{k}$ με $\boxed{\lim_{k\to+\infty} S(k) = 3}$. Αυτό, γεωμετρικά, σημαίνει ότι το εμβαδόν της οριοθετημένης περιοχής του επιπέδου μεταξύ της καμπύλης, της εφαπτομένης t και της πλάγιας ασύμπτωτης, καθώς η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $x = k$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά, είναι πεπερασμένο και τείνει στις 3 τ.μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

«Στην αρχή και στο τέλος, έχουμε το μυστήριο. […] Τα μαθηματικά μας φέρνουν πιο κοντά σε αυτό το μυστήριο, ακόμα κι αν δεν το διαπερνά». (Ε. Ντε Τζόρτζι)

Εξετάστε την οικογένεια συναρτήσεων $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, με $n \in N, n > 1$ και $a, b \in R, a < 0$.

a) Επαληθεύστε ότι, όποια και αν είναι η τιμή του n, η συνάρτηση f_n δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη $x = 0$. Προσδιορίστε την τιμή του n στην οποία το γράφημα f_n έχει γωνιακό σημείο. Για τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων a, b, το γράφημα α, στο σχήμα, αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Προσδιορίστε τις παραμέτρους a και b, λαμβάνοντας υπόψη ότι η f_2 ορίζεται στο $[-1; 1]$ και ότι το γράφημά του είναι συμμετρικό σε σχέση με τον άξονα y.



Από τώρα και στο εξής, ας υποθέσουμε $\boldsymbol{a = -1, b = 0}$.

b) Μελετήστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}}$, επαληθεύοντας ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του Πεδίου ορισμού και στο σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{x = 0}$. Υποδείξτε το γράφημά του με $\boldsymbol{\beta}$ και σχεδιάστε την καμπύλη $\boldsymbol{\gamma = \alpha \cup \beta}$.

c) Η γραμμή $\boldsymbol{r}$, της εξίσωσης $\boldsymbol{x = k}$, με $\boldsymbol{-1 < k < 1}$, τέμνει την $\boldsymbol{\gamma}$ στα σημεία $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$. Αποδείξτε ότι το μέτρο του τμήματος $\boldsymbol{PQ}$ είναι μέγιστο όταν είναι ο άξονας συμμετρίας της $\boldsymbol{\gamma}$.

d) Βεβαιωθείτε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{H(x) = \frac{1}{2}(arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2})}$ είναι αρχική της συνάρτησης $\boldsymbol{h(x) = \sqrt{1 - x^2}}$. Με τη μέθοδο που θεωρείτε καταλληλότερη, υπολογίστε το εμβαδόν της πεπερασμένης περιοχής του επιπέδου που οριοθετείται από την $\boldsymbol{\gamma}$.

«Οι μορφές που δημιουργούνται από τον μαθηματικό, όπως αυτές που δημιουργούνται από τον ζωγράφο ή τον ποιητή, πρέπει να είναι όμορφες: οι ιδέες, όπως τα χρώματα ή οι λέξεις, πρέπει να συνδέονται αρμονικά. Η ομορφιά είναι η θεμελιώδης προϋπόθεση: δεν υπάρχει μόνιμη θέση στον κόσμο για άσχημα μαθηματικά». (Γ. Χ. Χάρντι)

Λύση

a) Έχουμε $\boldsymbol{f_n(0) = 0 - \sqrt{1} = -1}$. Επιπλέον $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[n]{x^2}-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[n]{x^2}}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{2}{n}}}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \frac{2}{n}\lim_{x\to 0^+}x^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} - \lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}$. Για $\boldsymbol{n > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{n} - 1 < 0}$ έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} = +\infty$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} = \frac{b}{2}$, άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = +\infty$. Όμοια έχω $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{2}{n}}}{x} + \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x}$ με $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{2}{n}}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{2}{n}}}{x} = -\frac{2}{n}\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} = -\infty$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} = \frac{b}{2}$, άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = -\infty$. Συνεπώς για $\boldsymbol{n > 2}$ η $\boldsymbol{f_n(x)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (έχει κατακόρυφη εφαπτομένη, εκτός ύλης στο ελληνικό σχολείο). Για $\boldsymbol{n = 2}$ έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f_2(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} - \lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} = \boldsymbol{1 - \frac{b}{2}}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f_2(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-\sqrt{ax^2+bx+1}+1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} - \lim_{x\to 0^+}\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} = \boldsymbol{-1 - \frac{b}{2} \neq 1 - \frac{b}{2}}$. Άρα και η $\boldsymbol{f_2(x)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (οι πλαϊνές εφαπτόμενες δεν συμπίπτουν, οπότε έχουμε γωνιακό σημείο).

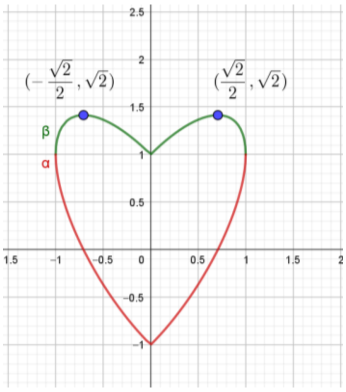
Αφού το γράφημα της $\boldsymbol{f_2(x)}$ είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $\boldsymbol{y}$ έχουμε για $\boldsymbol{x \in [-1, 1]}$ ότι $\boldsymbol{f_2(x) = f_2(-x) \Leftrightarrow |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1} = |-x| - \sqrt{a(-x)^2 + b(-x) + 1} \Leftrightarrow \sqrt{ax^2 + bx + 1} = \sqrt{ax^2 - bx + 1} \Leftrightarrow ax^2 - bx + 1 = ax^2 + bx + 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 0}}$. Από το σχήμα έχουμε $\boldsymbol{f_2(1) = 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{a + 0 + 1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}}$.

b) Έχουμε ότι $\boldsymbol{g(0) = |0| + \sqrt{1 - 0} = 1}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|+\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{1 - 0 = 1}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|+\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \boldsymbol{-1 - 0 = -1 \neq 1}$ άρα η $\boldsymbol{g(x)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{0}$. Ακόμα έχουμε για το δεξί άκρο του πεδίου ορισμού ότι $\boldsymbol{g(1) = |1| + \sqrt{1 - 1} = 1}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+\sqrt{1-x^2}-1}{x-1} = \boldsymbol{1} + \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \boldsymbol{1} + \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}} = \boldsymbol{1} + \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$, άρα η $\boldsymbol{g(x)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{1}$(έχει κατακόρυφη εφαπτομένη). Λόγω συμμετρίας η $\boldsymbol{g(x)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{-1}$.

Για το γράφημα της g, έχω για $0<x<1$ ότι $g'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Έχουμε $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leq 1 - x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ακόμα έχουμε $g''(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$, άρα κοίλη.

Προκύπτει ότι ο πίνακας προσήμων είναι ο ακόλουθος

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$
$g''(x)$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	‖
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	1	↗	$g(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$	↘	1	↗	$g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$	↘	1

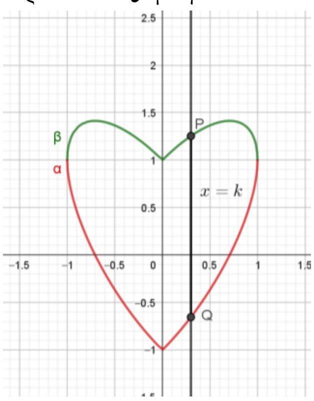


Τελικά έχουμε για την καμπύλη γ

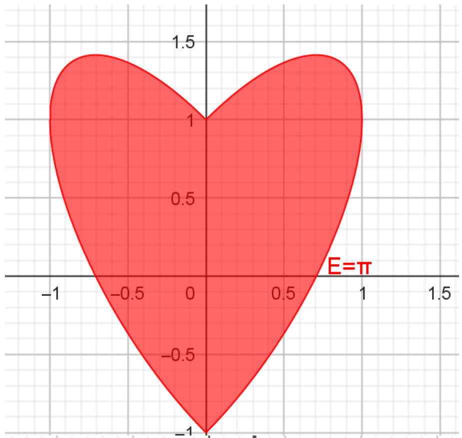
c) Έχω $PQ(k) = g(k) - f(k) = |k| + \sqrt{1-k^2} - \left(|k| - \sqrt{1-k^2}\right) = 2\sqrt{1-k^2}, k \in [-1, 1]$ με $PQ'(k) = \frac{2(-2k)}{2\sqrt{1-k^2}} = \frac{-2k}{\sqrt{1-k^2}}, k \in (-1, 1)$ με πίνακα προσήμων

k	-1		0		$+1$
$PQ'(k)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$PQ(k)$	0	↗	$PQ(0) = 2$	↘	1

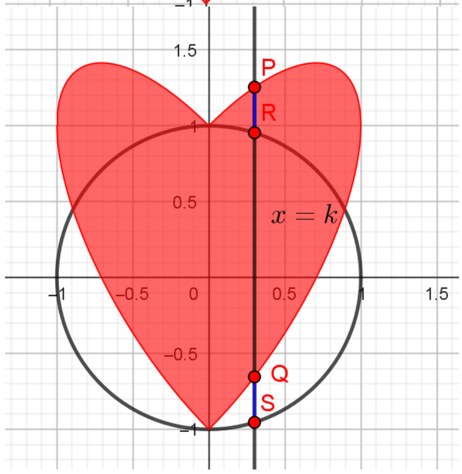
Άρα το PQ μεγιστοποιείται, για $k = 0$, δηλαδή όταν το PQ είναι ο άξονας συμμετρίας της γ



d) Έχω $\boldsymbol{H'(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-x^2} = h(x)$. Άρα η $\boldsymbol{H(x)}$ είναι αρχική της $\boldsymbol{h(x)}$. Για το εμβαδόν του χωρίου που εσωκλείεται στην καμπύλη $\boldsymbol{\gamma}$ έχω, αφού λάβουμε υπόψην τη συμμετρίας της ως προς τον άξονα $\boldsymbol{y}$, ότι $E = \int_{-1}^{1} (g(x) - f_2(x))dx = 2\int_0^1 (g(x) - f_2(x))dx =$
$2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}dx = 4\int_0^1 \mathrm{h(x)}dx = 4[H(x)]_0^1 = 2\left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \boxed{\pi}$.



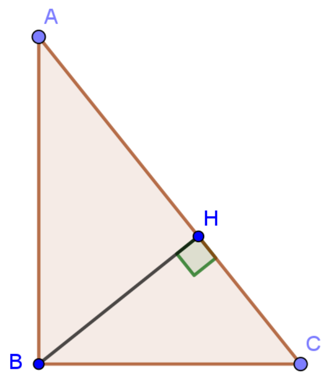
Μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος είναι η εξής:
Θεωρούμε τον κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνας $\boldsymbol{r = 1}$. Καθώς το $\boldsymbol{k}$ διατρέχει τις τιμές από το $\boldsymbol{-1}$ έως το $\boldsymbol{1}$, το τμήμα $\boldsymbol{PQ}$ καλύπτει ακριβώς όλο το χωρίο που βρίσκεται εντός της καμπύλης $\boldsymbol{\gamma}$. Όμως, όπως εύκολα συμπεραίνουμε από το σχήμα, ισχύει ότι $\boldsymbol{PQ = RS}$ και καθώς το $\boldsymbol{k}$ διατρέχει τις τιμές από το $\boldsymbol{-1}$ έως το $\boldsymbol{1}$, το τμήμα $\boldsymbol{RS}$ καλύπτει ακριβώς τον κυκλικό δίσκο εμβαδού $\boldsymbol{E_{κύκλου} = \pi r}$^$\boldsymbol{2 = \pi}$. Συνεπώς $\boldsymbol{E_\gamma = E_{κυκλου} = \pi}$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ένα τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$, ορθή γωνία η $\boldsymbol{B}$. Αποδείξτε ότι ένα τέτοιο τρίγωνο είναι ισοσκελές εάν και μόνο εάν το ύψος $\boldsymbol{BH}$ προς την υποτείνουσα είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας.

   Λύση

   Έστω ότι το $\boldsymbol{ABC}$ είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο $\boldsymbol{B}$ και το $\boldsymbol{BH}$ είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, βλέπε σχήμα.

   ($\Rightarrow$) Εάν το $\boldsymbol{ABC}$ είναι ισοσκελές, τότε το ύψος $\boldsymbol{BH}$ προς την βάση $\boldsymbol{AC}$ θα είναι και διάμεσος, άρα ίσο με το μισό της υποτείνουσας.

   ($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, αν $\boldsymbol{BH} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{2}}$, τότε επειδή και η διάμεσος προς την υποτείνουσα $\boldsymbol{BM} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{2}}$, έχω ότι $\boldsymbol{BH} = \boldsymbol{BM}$ δηλαδή η διάμεσος από το $\boldsymbol{B}$ ίση με το ύψος από το $\boldsymbol{B}$, άρα το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι ισοσκελές με βάση το $\boldsymbol{AC}$.

2. Στρίβετε ένα μη δίκαιο νόμισμα $\boldsymbol{5}$ φορές που δίνει κορώνα με πιθανότητα $\boldsymbol{p}$.

   a) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρετε κορώνα ακριβώς $\boldsymbol{2}$ φορές;

   b) Για ποια τιμή του $\boldsymbol{p}$ είναι η πιθανότητα να πάρει κορώνα ακριβώς $\boldsymbol{2}$ φορές η μέγιστη;

   Λύση

   a) Έχουμε την διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{\mathcal{B}(5;0,2)}$ με $\boldsymbol{P(X=k)=\binom{5}{k}p^k(1-p)^{5-k}}$. Άρα $\boldsymbol{P(X=2)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3}$

   b) Θεωρώ την συνάρτηση $\boldsymbol{f(p)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3, 0<p<1}$ με $\boldsymbol{f'(p)=\binom{5}{2}[2p(1-p)^3-3p^2(1-p)^2]=\binom{5}{2}p(1-p)^2[2(1-p)-3p]=\binom{5}{2}p(1-p)^2(2-5p)}$. Έχω $\boldsymbol{f'(p)>0 \Leftrightarrow 0<p<\frac{2}{5}}$ και $\boldsymbol{f'(p)<0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}<p<1}$. Άρα $\boldsymbol{f} \uparrow \boldsymbol{\left(0,\frac{2}{5}\right]}$ και $\boldsymbol{f} \downarrow \boldsymbol{\left[\frac{2}{5},1\right)}$. Συνεπώς η $\boldsymbol{f}$ μεγιστοποιείται για $\boxed{\boldsymbol{p=\frac{2}{5}}}$.

3. Στον ορθογώνιο καρτεσιανό χώρο αναφοράς $\boldsymbol{Oxyz}$, δίνεται το επίπεδο $\boldsymbol{\pi : 3x-2y+5=0}$.

   a) Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου $\boldsymbol{H}$, που είναι η ορθογώνια προβολή του $\boldsymbol{P(4,2,1)}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{\pi}$.

   b) Προσδιορίστε την τομή της γραμμής $\boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x-y+1=0} \\ \boldsymbol{z-2=0} \end{cases}$ με το επίπεδο $\boldsymbol{\pi}$.

   Λύση

   a) Το διάνυσμα $\boldsymbol{\vec{n}(3,-2,0)}$ είναι κάθετο στο επίπεδο $\boldsymbol{\pi : 3x-2y+5=0}$. Έστω $\boldsymbol{H(a,b,c)}$ το ζητούμενο σημείο. Θα έχω ότι $\boldsymbol{PH \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{PH} // \vec{n} \Rightarrow (4-a,2-b,1-c)=(3k,-2k,0k)}$ για κάποιο $\boldsymbol{k \in R}$. Συνεπώς έχω $\boldsymbol{c=1, \frac{4-a}{3}=\frac{2-b}{-2} \Leftrightarrow 2a+3b=14(1)}$. Επειδή $\boldsymbol{H(a,b,c) \in \pi \Leftrightarrow 3a-2b+5=0(2)}$. Από (1) και (2) προκύπτει $\boldsymbol{a=1, b=4 \Rightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{H(1,4,1)}}$

   b) Αρκεί να λύσω το σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{x-y+1=0} \\ \boldsymbol{z-2=0} \\ \boldsymbol{3x-2y+5=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-2x+2y-2=0} \\ \boldsymbol{z=2} \\ \boldsymbol{3x-2y+5=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-2x+2y-2=0} \\ \boldsymbol{z=2} \\ \boldsymbol{x=-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y=-2} \\ \boldsymbol{z=2} \\ \boldsymbol{x=-3} \end{cases}$. Άρα το ζητούμενο σημείο τομής είναι το $\boxed{\boldsymbol{A(-3,-2,2)}}$

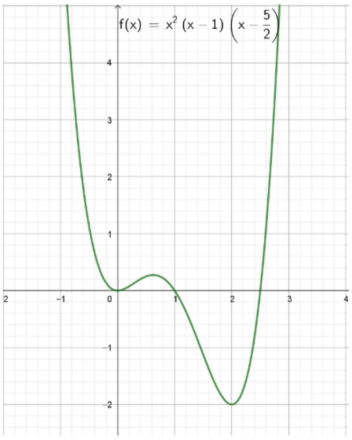
4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\boldsymbol{x^3+x-\cos x=0}$ δέχεται μόνο μία θετική λύση.

   Λύση

   Θεωρώ την συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=x^3+x-\cos x}$ που είναι συνεχής στο $\boldsymbol{R}$ και αύξουσα καθώς $\boldsymbol{f'(x)=3x^2+1+\sin x>0 \; \forall x \in R}$. (ισχύει ότι $\boldsymbol{3x^2>0}$, $\boldsymbol{1+\sin x>0 \; \forall x \in R}$). Έχω $\boldsymbol{f(0)=-1<0}$ και $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}(x^3+x-\cos x)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x^3}\right)=+\infty}$, αφού $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0}$, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}=0}$. Έχω $\boldsymbol{0 \in f(0,+\infty)=(-1,\infty)}$, άρα υπάρχει $\boldsymbol{x_0 \in (0,+\infty)}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{f(x_0)=0}$, που λόγω της μονοτονίας της $\boldsymbol{f}$ είναι μοναδικό. Άρα η $\boldsymbol{f}$ έχει μόνο μία θετική λύση.

5. Προσδιορίστε την πολυωνυμική συνάρτηση τέταρτου βαθμού $\boldsymbol{y = p(x)}$ γνωρίζοντας ότι, σε ένα καρτεσιανό πλαίσιο αναφοράς, το γράφημά του επαληθεύει τις ακόλουθες συνθήκες:
   a) εφάπτεται στον άξονα x στην αρχή των αξόνων .
   b) διέρχονται από το σημείο $(\mathbf{1},\mathbf{0})$,
   c) έχει κρίσιμο σημείο στο $(\mathbf{2},\mathbf{-2})$

   Λύση



   Αφού το γράφημα περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(\mathbf{1},\mathbf{0})$, έχουμε $\boldsymbol{f(0)=f(1)=0}$ άρα η πολυωνυμική συνάρτηση έχει παράγοντες τα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{x-1}$. Αφού εφάπτεται στην αρχή των αξόνων η $\boldsymbol{f}$ έχει διπλή ρίζα το 0, συνεπώς
   $\boldsymbol{f(x)=x^2(x-1)(ax+b)=(x^3-x^2)(ax+b)}$ με $\boldsymbol{f'(x)=(3x^2-2x)(ax+b)+a(x^3-x^2)}$.

   Αφού έχει κρίσιμο σημείο το $(\mathbf{2},\mathbf{-2})$ θα έχουμε $\begin{cases} \boldsymbol{f(2)=-2} \\ \boldsymbol{f'(2)=0} \end{cases} \Rightarrow$
   $\begin{cases} \boldsymbol{8a+4b=-2} \\ \boldsymbol{16a+8b+4a=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{8a+4b=-2} \\ \boldsymbol{a=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b=-\frac{5}{2}} \\ \boldsymbol{a=1} \end{cases},$
   άρα $\boldsymbol{f(x)=x^2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)}$.

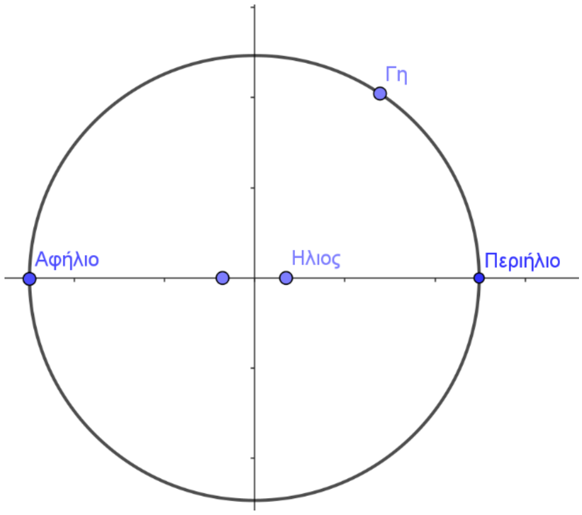
6. Εξετάστε την συνάρτηση ολοκληρώματος $\boldsymbol{F(x)=\int_a^x \frac{cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt}$, με $\boldsymbol{x \geq a}$, όπου $\boldsymbol{a}$ είναι μια θετική πραγματική παράμετρος. Προσδιορίστε τη μεγαλύτερη τιμή του $\boldsymbol{a}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}}$.

   Λύση

   Έχω για $\boldsymbol{\frac{2}{\pi} \geq \alpha > 0}$ ότι $\boldsymbol{F\left(\frac{2}{\pi}\right)=\int_a^{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt=\int_a^{\frac{2}{\pi}} -\cos\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)'dt=\left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^{\frac{2}{\pi}}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{a}\right)=-1+\sin\frac{1}{a} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}=-1+\sin\frac{1}{a} \Leftrightarrow \sin\frac{1}{a}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}}$. Άρα $\boldsymbol{\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{1}{a}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \mathbb{N}}$. Ζητάμε τη μεγαλύτερη τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ ή ισοδύναμα τη μικρότερη τιμή του $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}$. Αφού $\boldsymbol{\frac{2}{\pi} \geq \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{\alpha}}$ άρα η $\boldsymbol{\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}}$ απορρίπτεται. Συνεπώς $\boldsymbol{\frac{1}{a}=\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha=\frac{6}{5\pi}}}$

7. Στις 5 Ιουλίου, η Γη θα φτάσει στο αφήλιο, το σημείο στην τροχιά της όπου η απόσταση από τον Ήλιο είναι μέγιστη, ίση με περίπου $\mathbf{1,52 \cdot 10^{11}}\,\boldsymbol{m}$. Το περιήλιο, από την άλλη πλευρά, είναι το σημείο στην ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο, ίσο με περίπου $\mathbf{1,47 \cdot 10^{11}}\,\boldsymbol{m}$. Προσδιορίστε, σε ένα κατάλληλο πλαίσιο αναφοράς, την εξίσωση που αντιπροσωπεύει την τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο.

   Λύση



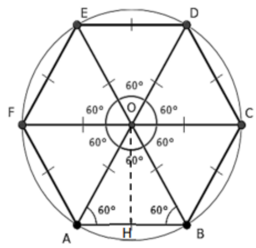
   Θεωρούμε ένα πλαίσιο αναφοράς $\boldsymbol{Oxy}$ στο οποίο ο κύριος άξονας της ελλειπτικής τροχιάς συμπίπτει με το τμήμα, ΑΠ, αφηλίου-περιηλίου και έχει κέντρο το μέσο αυτού του τμήματος, βλέπε σχήμα. Ο Ήλιος βρίσκεται σε μια από τις εστίες της έλλειψης, έστω την $\boldsymbol{H(\gamma,0)}$. Το άθροισμα των αποστάσεων του Ήλιου από το αφήλιο και το περιήλιο είναι ίσο με το μήκος του κύριου άξονα της έλλειψης. Άρα $\boldsymbol{AH+H\Pi=2\alpha=(1,52+1,47)\cdot 10^{11}m=2,99\cdot 10^{11}m \Rightarrow \alpha=1,495\cdot 10^{11}m}$. Έχω $\boldsymbol{H\Pi=\alpha-\gamma \Leftrightarrow 1,47\cdot 10^{11}=1,495\cdot 10^{11}-\gamma \Leftrightarrow \gamma=0,025\cdot 10^{11}m \Rightarrow \beta^2=\alpha^2-\gamma^2=(1,495^2-0,025^2)\cdot(10^{11})^2=}$

$\mathbf{2,2344} \cdot (\mathbf{10^{11}})^2 = (\mathbf{1,4979} \cdot \mathbf{10^{11}})^2$. Άρα η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς της Γης γύρω από τον ήλιο είναι $\boxed{\frac{x^2}{(1{,}495\cdot 10^{11})^2} + \frac{y^2}{(1{,}49479\cdot 10^{11})^2} = 1}$

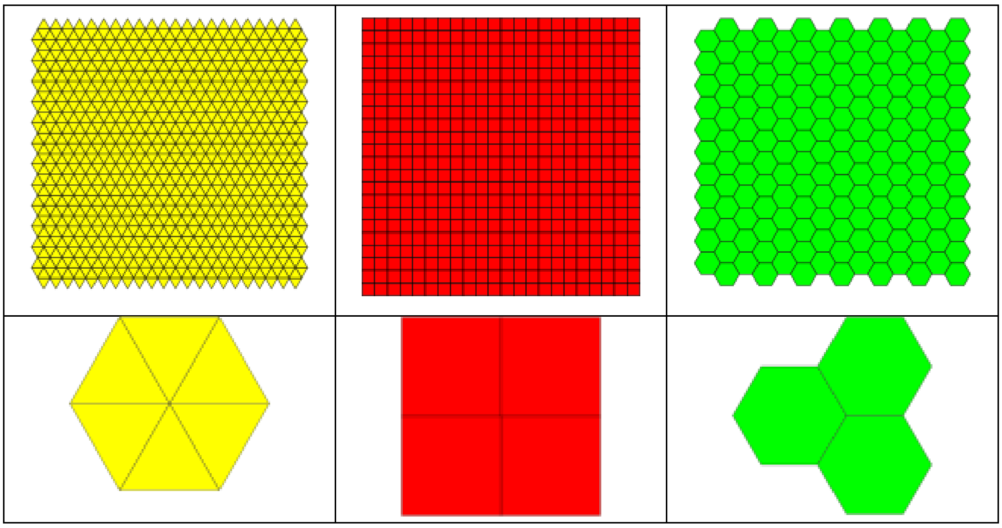
8. Ο Carlo Emilio Gadda γράφει σε μία από τις ιστορίες του L'Adalgisa – Disegni milanesi: «Τα δωμάτια υπηρεσίας, το μπάνιο, οι διάδρομοι, ο προθάλαμος και μία από τις δύο τουαλέτες, ήταν στρωμένα με κόκκινα πλακάκια μικρού μεγέθους: εξαγωνικά [...]. Το απόστημα αυτών των πλακιδίων ήταν $\mathbf{5,196}$ εκατοστά: ενώ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου έφτανε τα $\mathbf{60}$ χιλιοστά». Εκφράστε την ακριβή σχέση μεταξύ της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου και του αποστήματος (δηλαδή, της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου) για ένα κανονικό εξάγωνο. Ελέγξτε το αποτέλεσμα που προέκυψε υπό το πρίσμα των μετρήσεων που υποδεικνύει ο συγγραφέας. Εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας κανονικά εξαγωνικά πλακάκια που είναι όλα ίσα μεταξύ τους, είναι δυνατό να καλύψετε ένα δάπεδο. Με ποια άλλα κανονικά πολύγωνα, ίσα μεταξύ τους, είναι δυνατόν να καλύψετε ένα επίπεδο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Στο κανονικό εξάγωνο έχω για το απόστημα $\boldsymbol{\alpha_6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου. Άρα $\frac{\alpha_6}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \mathbf{0,866}$. Από τις μετρήσεις του συγγραφέα έχω $\frac{\alpha_6}{R} = \frac{5{,}196cm}{60mm} = \frac{5{,}196cm}{6cm} \approx \mathbf{0,866}$ που επαληθεύουν το αποτέλεσμα.



Έστω $\boldsymbol{\nu} \geq \mathbf{3}$ το πλήθος των πλευρών του κανονικού πολυγώνου που θα χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη. Η γωνία του πολυγώνου $\boldsymbol{\varphi_\nu} = \mathbf{180°} - \frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{\nu}}$ Αν $\boldsymbol{k}$ τέτοια κανονικά ν-γωνα έχουν την ίδια κορυφή και καλύπτουν το επίπεδο γύρω από το σημείο της κοινής κορυφής τότε θα ισχύει ότι $\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi_\nu} = \mathbf{360°} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa}\left(\mathbf{180°} - \frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{\nu}}\right) = \mathbf{360°} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{180°} \cdot \frac{\boldsymbol{\nu}-\mathbf{2}}{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{360°} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{2} + \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\nu}-\mathbf{2}}$ και επειδή ο $\boldsymbol{\kappa}$ είναι θετικός ακέραιος θα πρέπει το $\boldsymbol{\nu} - \mathbf{2}$ να είναι ακέραιος διαιρέτης του 4, άρα $\boldsymbol{\nu} - \mathbf{2} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$ ή $\mathbf{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{\nu} = \mathbf{3}, \mathbf{4}$ ή $\mathbf{6}$. Άρα μπορούμε να καλύψουμε το επίπεδο με κανονικά τρίγωνα (δηλαδή ισόπλευρα τρίγωνα) , με τετράγωνα ή με κανονικά εξάγωνα. Βλέπε παρακάτω σχήματα

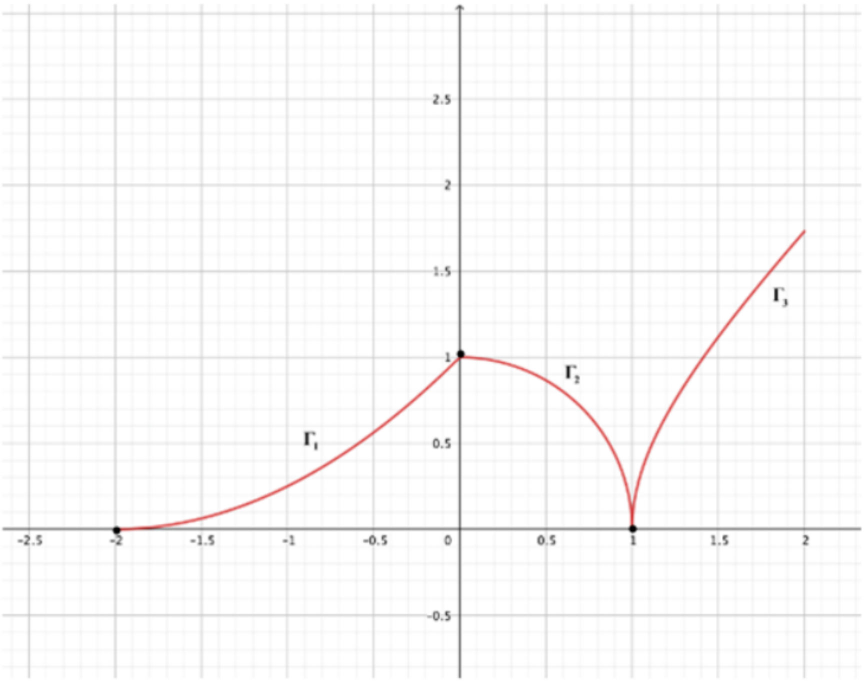


Υπουργείο Παιδείας και Αξιών - ΤΕΛΙΚΗ ΚΡΑΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Ιούνιος 2023
Θέμα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο υποψήφιος πρέπει να λύσει ένα από τα δύο προβλήματα και να απαντήσει σε 4 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Το γράφημα στο σχήμα, που αντιπροσωπεύει τη συνεχή συνάρτηση $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, είναι η ένωση του τόξου της παραβολής $\boldsymbol{\Gamma_1}$, του τόξου της περιφέρειας $\boldsymbol{\Gamma_2}$ και του τόξου της υπερβολής $\boldsymbol{\Gamma_3}$.



α) Γράψτε μια αναλυτική έκφραση της τμηματικής συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ στο διάστημα $[-\mathbf{2};\ \mathbf{2}]$, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2$ $\quad$ $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}\ \boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ και προσδιορίστε τις κατάλληλες τιμές για τις πραγματικές παραμέτρους $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Μελετήστε την παραγωγιμότητα της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ και γράψτε τις εξισώσεις οποιωνδήποτε εφαπτόμενων γραμμών στα σημεία με τετμημένη $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2},\ \ \boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{x} = \mathbf{1},\ \ \boldsymbol{x} = \mathbf{2}$.

β) Ξεκινώντας από το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$, συμπεραίνετε το γράφημα της παραγώγου της $\boldsymbol{f}'$ και βρείτε τα διαστήματα κοιλότητας και κυρτότητας της $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \int_{-2}^{x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$.

γ) Θεωρήστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2$, που ορίζεται στο διάστημα $[-\mathbf{2};\ \mathbf{0}]$, του οποίου το $\boldsymbol{\Gamma_1}$ είναι το αντιπροσωπευτικό γράφημα. Εξηγήστε γιατί είναι αντιστρέψιμη και γράψτε την αναλυτική έκφραση της αντίστροφης συνάρτησής της, $\boldsymbol{h}$. Μελετήστε την παραγωγιμότητα της $\boldsymbol{h}$ και σχεδιάστε το γράφημά της.

δ) Έστω $\boldsymbol{S}$ η οριοθετημένη περιοχή του δεύτερου τεταρτημορίου, μεταξύ του γραφήματος $\boldsymbol{\Gamma_1}$ και των καρτεσιανών αξόνων. Προσδιορίστε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $\boldsymbol{k}$ έτσι ώστε η γραμμή της εξίσωσης $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$ να διαιρέσει το $\boldsymbol{S}$ σε δύο ισοεμβαδικές περιοχές.

Λύση

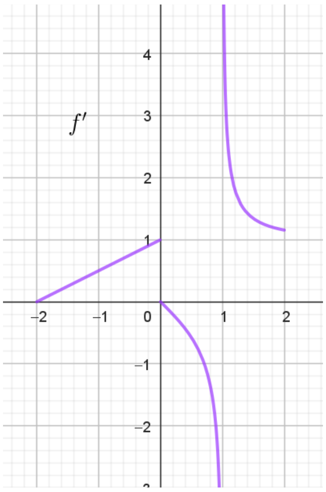
α) Έχω $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}) \in \boldsymbol{\Gamma_1}$ άρα $\boldsymbol{1} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{2})^{\boldsymbol{2}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$. Ακόμα έχω $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}) \in \boldsymbol{\Gamma_2}$ άρα $\boldsymbol{0}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{1}$. Τέλος έχω $(\boldsymbol{1},\boldsymbol{0}) \in \boldsymbol{\Gamma_3}$ άρα $\boldsymbol{1}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{0}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{1}$. Άρα $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & -2 \le x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ με $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & -2 \le x < 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Στο $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{2}$ έχω οριζόντια εφαπτομένη τον άξονα των $\boldsymbol{x}$, δηλαδή την $\boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}}$.

Στο $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ έχω από αριστερά πλάγια εφαπτομένη την $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{0}^-)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}}$ ενώ από δεξιά πλάγια εφαπτομένη την $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{0}^+)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}}$. Άρα είναι γωνιακό σημείο-punto angoloso.

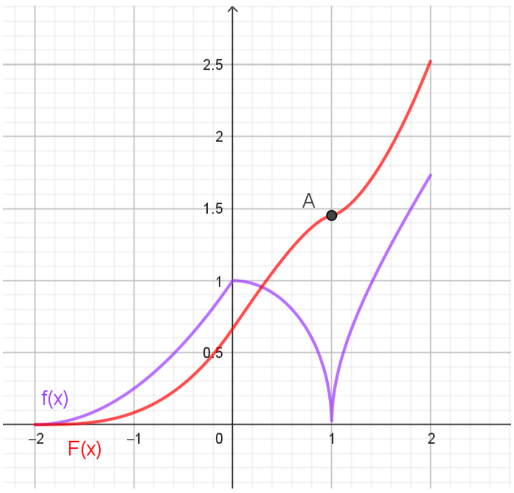
Στο $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$ έχω από αριστερά κατακόρυφη εφαπτομένη την $\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}}$, αφού $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ καθώς και από δεξιά , αφού $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (Είναι δηλαδή σημείο ακμής-punto cuspidale).

Στο $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2}$ έχω $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{2}) = \sqrt{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ και εφαπτομένη την $\boldsymbol{y} - \sqrt{\boldsymbol{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2}) \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$

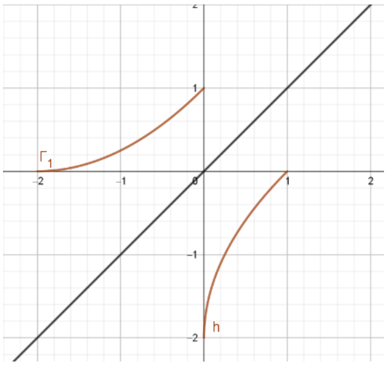


β) Το γράφημα της f' φαίνεται στο σχήμα.

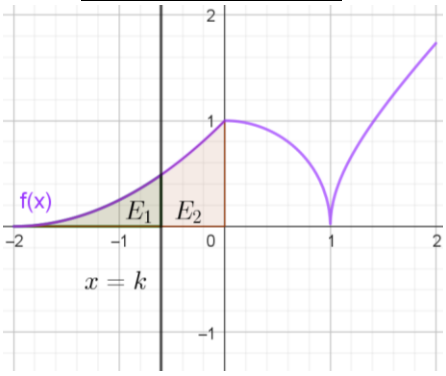
Έχω $\boldsymbol{f} \uparrow [-\boldsymbol{2},\boldsymbol{0}] \Rightarrow \boldsymbol{f'} > \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{2} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{F''} > \boldsymbol{0}, -\boldsymbol{2} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{F}$ κυρτή στο $[-\boldsymbol{2},\boldsymbol{0}]$. Όμοια έχω $\boldsymbol{f} \downarrow [\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}] \Rightarrow \boldsymbol{f'} < \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{1} \Rightarrow \boldsymbol{F''} < \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{1} \Rightarrow \boldsymbol{F}$ κοίλη στο $[\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]$. Τέλος έχω $\boldsymbol{f} \uparrow [\boldsymbol{1},\boldsymbol{2}] \Rightarrow \boldsymbol{f'} > \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{1} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{2} \Rightarrow \boldsymbol{F''} > \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{1} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{2} \Rightarrow \boldsymbol{F}$ κυρτή στο $[-\boldsymbol{2},\boldsymbol{0}]$. Επαληθεύουμε στο διάγραμμα παρακάτω



γ) Η $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ στο διάστημα $[-2; 0]$ είναι αύξουσα άρα 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμη. Έχω για $-2 \le x \le 0$ και $0 \le y \le 1$ ότι $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \Leftrightarrow 4y = (x+2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4y} = |x+2| \Leftrightarrow \sqrt{4y} = x+2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{y} - 2$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $h(x) = 2\sqrt{x} - 2, x \in [0,1]$ με $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1]$, στο $x = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη. Η γραφική παράσταση της h είναι συμμετρική της Γ_1 ως προς την ευθεία $y = x$.



δ) Έχω $E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{12}(x+2)^3\right]_{-2}^{k} = \left[\frac{1}{12}(x+2)^3\right]_{k}^{0} \Leftrightarrow [(x+2)^3]_{-2}^{k} = [(x+2)^3]_{k}^{0} \Leftrightarrow (k+2)^3 - 0 = 2^3 - (k+2)^3 \Leftrightarrow 2(k+2)^3 = 2^3 \Leftrightarrow (k+2)^3 = 4 \Leftrightarrow k+2 = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \boxed{k = -2 + \sqrt[3]{4} \simeq 0,41}$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δεδομένης μιας πραγματικής παραμέτρου α, με $\alpha \neq 0$, θεωρήστε τη συνάρτηση f_a που ορίζεται ως εξής: $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ της οποίας το γράφημα θα συμβολίζεται με Ω_a.

α) Καθώς η παράμετρος a μεταβάλλεται, προσδιορίστε το πεδίο ορισμού της f_a, μελετήστε τις πιθανές ασυνέχειές της και γράψτε τις εξισώσεις όλων των ασυμπτώτων της.

β) Δείξτε ότι, για $a \neq 1$, όλα τα γραφήματα Ω_a τέμνουν την οριζόντια ασύμπτωτη τους στο ίδιο σημείο και μοιράζονται την ίδια εφαπτομένη γραμμή στην αρχή των αξόνων.

γ) Καθώς το $a < 1$ μεταβάλλεται, βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f_a. Μελετήστε τη συνάρτηση $f_{-1}(x)$ και σχεδιάστε το γράφημά της Ω_{-1} .

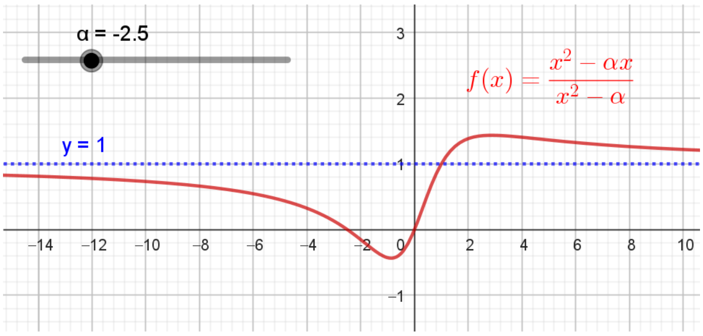
δ) Προσδιορίστε το εμβαδόν της οριοθετημένης περιοχής μεταξύ του γραφήματος Ω_{-1} , της γραμμής που εφάπτεται σε αυτό στην αρχή των αξόνων και της γραμμής $x = \sqrt{3}$.

Λύση

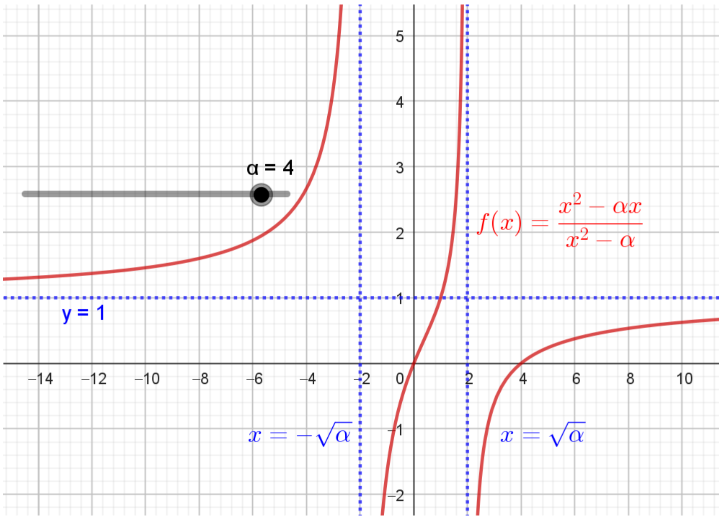
α) Η συνάρτηση έχει, για κάθε $a \neq 0$, ως οριζόντια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την ευθεία $y = 1$, αφού $\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

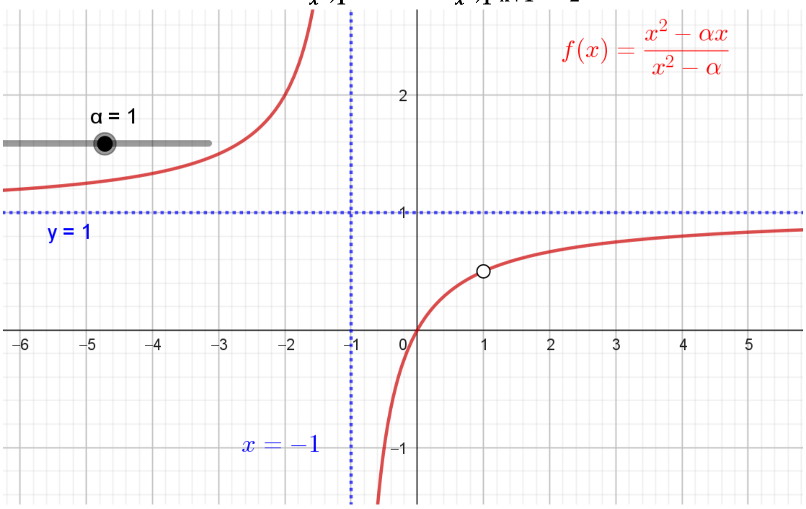
Εάν $a < 0$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f_a είναι το $\mathbb{R}$, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.



Εάν $\boldsymbol{a > 0 \wedge a \neq 1}$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{\boldsymbol{a}}\}$ στο οποίο είναι συνεχής. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ασυνέχεια στα $\pm\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Η συνάρτηση έχει δύο κατακόρυφες ασύμπτωτες, τις $\boldsymbol{x = \sqrt{a}}$ και $\boldsymbol{x = -\sqrt{a}}$, αφού για παράδειγμα ισχύει ότι $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to \sqrt{a}^-} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{\alpha - a\sqrt{a}}{0^-} = \begin{cases} -\infty \ \alpha\nu \ \alpha < 1 \\ +\infty \ \alpha\nu \ \alpha > 1 \end{cases}}$.



Εάν $\boldsymbol{a = 1}$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{\pm\boldsymbol{1}\}$ στο οποίο είναι συνεχής. Ο τύπος της είναι $\boldsymbol{f_1(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1}}$, η γραφική παράσταση είναι υπερβολή με κατακόρυφη ασύμπτωτη την $\boldsymbol{x = -1}$, αφού για παράδειγμα $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -1^-} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty}$ ενώ έχει και μια (πρώτου τύπου ή αιρούμενη) ασυνέχεια στο $\boldsymbol{x = 1}$, με $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}}$.



β) Λύνω την $\boldsymbol{f_\alpha(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - \alpha x}{x^2 - \alpha} = 1 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x = x^2 - \alpha \Leftrightarrow -\alpha x = -\alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1}$. Άρα όλα τα γραφήματα $\boldsymbol{\Omega_\alpha, a \neq 0, a \neq 1}$ τέμνουν την οριζόντια ασύμπτωτη $\boldsymbol{y = 1}$ στο σημείο $\boxed{\boldsymbol{(1, 1)}}$.

Για την πρώτη παράγωγο έχω $f'_a(x) = \frac{(2x-a)(x^2-a)-(x^2-ax)2x}{(x^2-a)^2} = \frac{2x^3-2xa-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2} = \frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}, a \neq 0 \wedge a \neq 1$ και $f'_a(0) = \frac{0-0+a^2}{(0-a)^2} = 1$. Ακόμα έχω $f_a(0) = \frac{0-0}{0-a} = 0$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στην αρχή των αξόνων είναι η $y - f_a(0) = f'_a(0)(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y = x}$

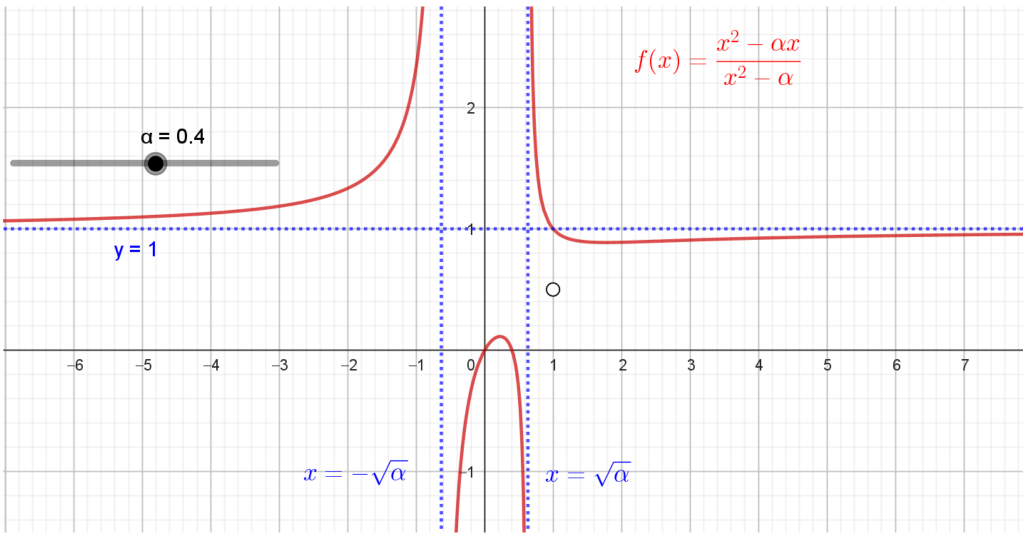
γ) Έχω $f'_a(x) = \frac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2}, a \neq 0 \wedge a \neq 1$ με διακρίνουσα $\Delta = 4 - 4a = 4(1-a) > 0$ αφού $a < 1$ και ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-a)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $a < 0$, τότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$1-\sqrt{1-a}$		$1+\sqrt{1-a}$		$+\infty$
x^2-2x+a		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(1-\sqrt{1-a})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{1-a})$	$\searrow$	1

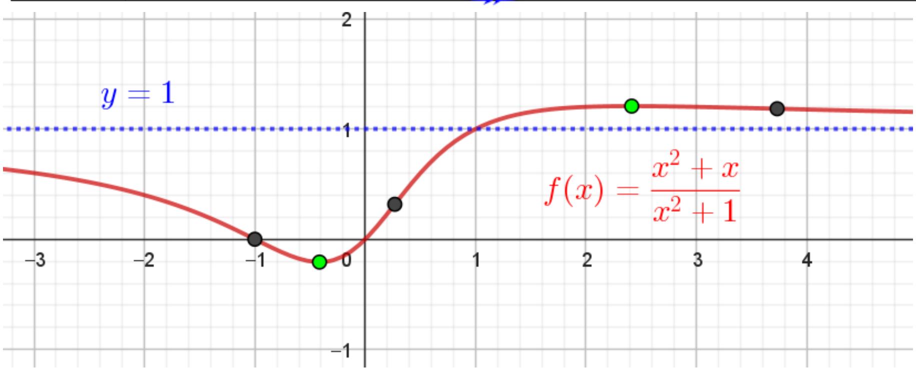
Αν $0 < a < 1$, τότε $1 - \sqrt{1-a} < \sqrt{a} < 1 + \sqrt{1-a} \Leftrightarrow -\sqrt{1-a} < \sqrt{a} - 1 < \sqrt{1-a} \Leftrightarrow \left|\sqrt{a} - 1\right| < \sqrt{1-a} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 < 1 - a \Leftrightarrow a - 2\sqrt{a} + 1 < 1 - a \Leftrightarrow 2a - 2\sqrt{a} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1$ που ισχύει. Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		$1-\sqrt{1-a}$		$\sqrt{a}$		$1+\sqrt{1-a}$		$+\infty$
x^2-2x+a		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(1-\sqrt{1-a})$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(1+\sqrt{1-a})$	$\nearrow$	1

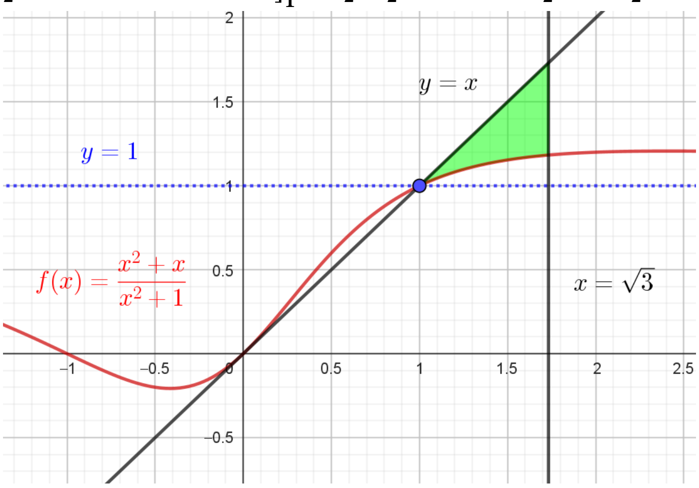


Για $\boldsymbol{a=-1}$, έχουμε $\boldsymbol{f_{-1}(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}}$, συνεχής με πεδίο ορισμού το ℝ. Έχουμε $\boldsymbol{f'_{-1}(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}}$ με ρίζες $\boldsymbol{x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}}$ και $\boldsymbol{f''_{-1}(x)=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-(-x^2+2x+1)2\cdot 2x\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{(-2x+2)(x^2+1)-(-x^2+2x+1)4x}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3-2x+2x^2+2+4x^3-8x^2-4x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}}$ με ρίζες $\boldsymbol{x_0=-1, x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}}$. Ο πίνακας προσήμων είναι ο ακόλουθος

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		$2-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		↘		↘		↗		↗		↘		↘	

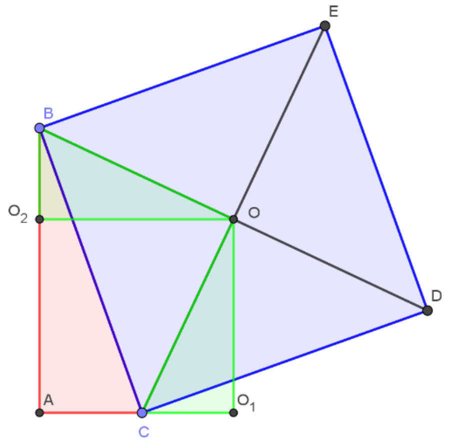


δ) Στο β) ερώτημα δείξαμε ότι η εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων είναι η $\boldsymbol{y=x}$. Αυτή τέμνει την $\boldsymbol{\Omega_{-1}}$ όταν $\boldsymbol{f_{-1}(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x^2+1}=x \Leftrightarrow x^2+x=x^3+x \Leftrightarrow x=0 \vee x=1}$. Η ζητούμενη περιοχή είναι η πράσινη του σχήματος με εμβαδόν $\boldsymbol{E=\int_1^{\sqrt{3}} x-\frac{x^2+x}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}} x-\frac{x^2+1-1+x}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}} x-1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}+1-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=2-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{12}\approx\boxed{0,18}}$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι το $\boldsymbol{ABC}$ είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο $\boldsymbol{A}$. Έστω $\boldsymbol{O}$ είναι το κέντρο του τετραγώνου $\boldsymbol{BCDE}$ χτισμένο στην υποτείνουσα πλευρά, στην αντίθετη πλευρά της κορυφής $\boldsymbol{A}$. Αποδείξτε ότι το $\boldsymbol{O}$ βρίσκεται σε ίση απόσταση από τις γραμμές $\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{AC}$.



Λύση

Έστω $\boldsymbol{O_1}$ και $\boldsymbol{O_2}$ οι προβολές του $\boldsymbol{O}$ στις ευθείες $\boldsymbol{AC}$ και $\boldsymbol{AB}$ αντίστοιχα. Αρκεί να δείξω ότι $\boldsymbol{OO_1 = OO_2}$. Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $\boldsymbol{OO_1C}$ και $\boldsymbol{OO_2B}$. Αυτά έχουν $\boldsymbol{OC = OB}$ (ως ημιδιαγώνιοι τετραγώνου) και $\boldsymbol{O_2\widehat{O}B = O_1\widehat{O}C}$ (ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες). Άρα $\triangle\, \boldsymbol{O_2OB} = \triangle\, \boldsymbol{O_1OC}$, οπότε $\boldsymbol{OO_2 = OO_1}$

2. Ένα μη δίκαιο ζάρι, με έδρες αριθμημένες από το 1 έως το 6, έχει την ιδιότητα να έχει κάθε έδρα με ζυγό αριθμό δύο φορές πιο πιθανή από κάθε έδρα με μονό αριθμό. Υπολογίστε την πιθανότητα ρίψης, κυλώντας το ζάρι μία φορά, αντίστοιχα:

α) ενός πρώτου αριθμού

β) ενός αριθμού τουλάχιστον ίσου με 3

γ) ενός αριθμού το πολύ ίσου με 3

Λύση

Έχω $\boldsymbol{P(X=2) = P(X=4) = P(X=6) = 2P(X=1) = 2P(X=3) = 2P(X=5) = p}$ και $\boldsymbol{\sum_{\kappa=1}^{6} P(X=k) = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{2} + p + \frac{p}{2} + p + \frac{p}{2} + p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{2}{9}}$

α) Έχω $\boldsymbol{P(X = \pi\rho\acute{\omega}\tau o\varsigma) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}}$

β) Έχω $\boldsymbol{P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}}$

γ) Έχω $\boldsymbol{P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}}$

3. Λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμή $\boldsymbol{r}$ που διέρχεται από τα δύο σημεία $\boldsymbol{A(1,-2,0)}$ και $\boldsymbol{B(2,3,-1)}$, προσδιορίστε την καρτεσιανή εξίσωση της σφαιρικής επιφάνειας με κέντρου $\boldsymbol{C(1,-6,7)}$ που εφάπτεται στην $\boldsymbol{r}$.

Λύση

Έστω $\boldsymbol{D(x,y,z)}$ η κάθετη προβολή του σημείου $\boldsymbol{C}$ στην ευθεία $\boldsymbol{r}$. Έχω

$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{DB}, \lambda \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ (x-1, y+2, z) = \lambda(2-x, 3-y, -1-z), \lambda \in R \end{cases} \Rightarrow$$

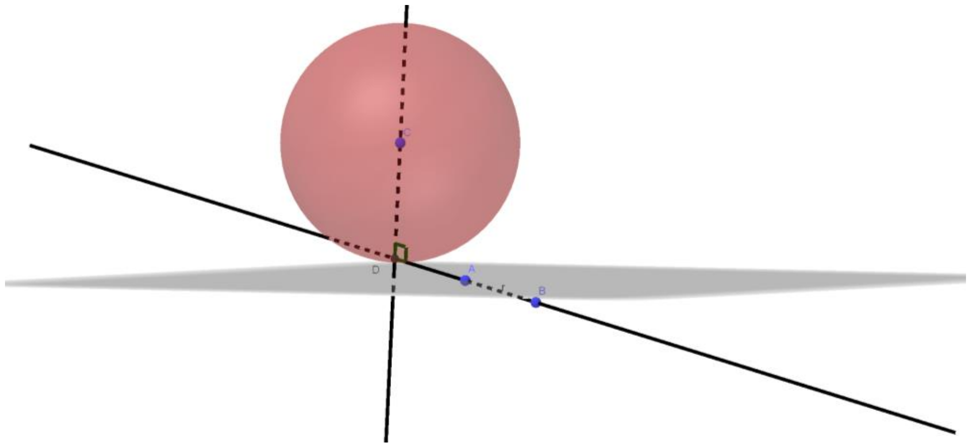
$$\begin{cases} (x-1, y+6, z-7)\cdot(1,5,-1) = 0 \\ (x-1, y+2, z) = \lambda(2-x, 3-y, -1-z), \lambda \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + 5y + 30 - z + 7 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{y+2}{3-y} = \dfrac{z}{-1-z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{y+2}{3-y} \\ \dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{z}{-1-z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ 3x - 3 - xy + y = 2y + 4 - xy - 2x \\ -x + 1 - zx + z = 2z - zx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ 5x - 7 = y \\ -x + 1 = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 25x - 35 + x - 1 + 36 = 0 \\ 5x - 7 = y \\ -x + 1 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -7 \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (-1,-1,6) \\ z = 1 \end{cases}$$

Η ακτίνα της σφαίρας είναι η απόσταση $\boldsymbol{|\overrightarrow{CD}| = |(-1,-1,6)| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{38}}$.

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης σφαίρας είναι η $\boldsymbol{(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38 \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0}}$.



4. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με τετραγωνική βάση όγκου $\boldsymbol{V}$, προσδιορίστε εάν αυτό με την ελάχιστη συνολική επιφάνεια έχει επίσης διαγώνιο ελάχιστου μήκους.

Λύση

1ος τρόπος (με χρήση διαφορικού λογισμού)

Έστω $\boldsymbol{x}$ η πλευρά της τετραγωνικής βάσης και $\boldsymbol{h}$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Έχω $V = hx^2 \Leftrightarrow h = \frac{V}{x^2}$. Η συνολική επιφάνεια του στερεού θα είναι $E(x) = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{4V}{x}, x > 0$ με $E'(x) = 4x - \frac{4V}{x^2} = 4\frac{x^3 - V}{x^2} \le 0$ για $0 < x \le \sqrt[3]{V}$ και $E'(x) > 0$ για $x > \sqrt[3]{V}$. Άρα η $E(x) \downarrow (0, \sqrt[3]{V}]$ και $E(x) \uparrow [\sqrt[3]{V}, +\infty)$, συνεπώς η συνολική επιφάνεια του στερεού ελαχιστοποιείται για $x = \sqrt[3]{V}$.

Για την διαγώνιο, $\boldsymbol{d}$, του στερεού έχω ότι είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες το ύψος του στερεού και την διαγώνιο της τετραγωνικής βάσης μέτρου $\sqrt{2}x$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι $d^2(x) = h^2 + \left(\sqrt{2}x\right)^2 = h^2 + 2x^2 = \frac{V^2}{x^4} + 2x^2$. Θεωρώ την $\delta(x) = \frac{V^2}{x^4} + 2x^2$ με $\delta'(x) = -4\frac{V^2}{x^5} + 4x = 4\frac{x^6 - V^2}{x^5}$ και $\delta'(x) \le 0$ για $0 < x \le \sqrt[3]{V}$ και $\delta'(x) > 0$ για $x > \sqrt[3]{V}$. Άρα η $\delta(x) \downarrow (0, \sqrt[3]{V}]$ και $\delta(x) \uparrow [\sqrt[3]{V}, +\infty)$, συνεπώς η διαγώνιος του στερεού ελαχιστοποιείται για $x = \sqrt[3]{V}$, όπως προηγουμένως.

2ος τρόπος (χωρίς χρήση διαφορικού λογισμού)

Όπως πριν έχουμε $E(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x} = 2x^2 + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{x} \ge 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{2V}{x} \cdot \frac{2V}{x}} = 6V^{\frac{2}{3}}$ από την ανισότητα AM-GM. Το άθροισμά αυτό ελαχιστοποιείται όταν οι όροι του είναι ίσοι δηλαδή όταν $2x^2 = \frac{2V}{x} = \frac{2V}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$.

Όπως πριν έχουμε $d^2(x) = \frac{V^2}{x^4} + 2x^2 = \frac{V^2}{x^4} + x^2 + x^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{x^4} \cdot x^2 \cdot x^2} = 3V^{\frac{2}{3}}$ από την ανισότητα AM-GM. Το άθροισμά αυτό ελαχιστοποιείται όταν οι όροι του είναι ίσοι δηλαδή όταν $\frac{V^2}{x^4} = x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{V}$.

5. Προσδιορίστε την εξίσωση της γραμμής που εφάπτεται στην καμπύλη της εξίσωσης $y = \sqrt{25 - x^2}$ στο σημείο της με τετμημένη $\boldsymbol{3}$, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μεθόδους.

Λύση

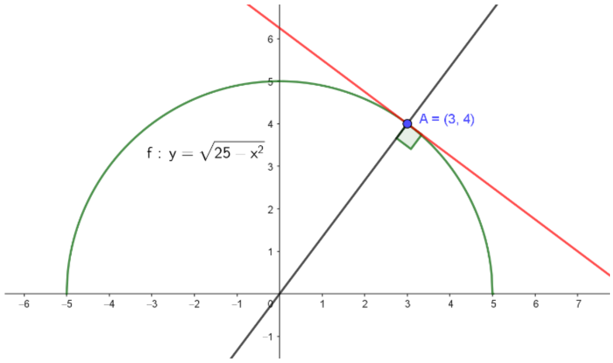
1ος τρόπος

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ με $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$, $f(3) = \sqrt{25 - 3^2} = 4$ και $f'(3) = \frac{-3}{4}$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x = 3$ είναι η $y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Leftrightarrow$

$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$

2ος τρόπος

Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$ έχει εφαπτομένη στο σημείο (x_1, y_1) την ευθεία $x_1 x + y_1 y = 25$. Εδώ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ και $r^2 = 25$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\boxed{3x + 4y = 25}$, όπως πριν.



3ος τρόπος

Η ακτίνα επαφής από το κέντρο του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$ έχει κλίση $\frac{4}{3}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη επειδή είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής θα έχει κλίση $-\frac{3}{4}$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$, όπως πριν.

6. Προσδιορίστε τις τιμές των πραγματικών παραμέτρων a και b έτσι ώστε: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$

Λύση

Έχω $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - bx}{x^3} - a = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - bx}{x^3} = a + 1 \overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - b}{3x^2} = a + 1 \in R$. Αν $b \neq 1$, τότε $a + 1 = \frac{1 - b}{0^+} = \infty$, άτοπο. Άρα $\boxed{b = 1}$. Τότε έχω $a + 1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{7}{6}}$

7. Εξετάστε τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$

Προσδιορίστε για ποιες τιμές των πραγματικών παραμέτρων a, b είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση. Προσδιορίστε αν υπάρχει ένα διάστημα του R στο οποίο η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

Για να είναι παραγωγίσιμη πρέπει να είναι και συνεχής και στο $x = 0$, άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} -1 + \arctan x = \lim\limits_{x\to 0^+} ax + b = 0 + b \Leftrightarrow \boxed{-1 = b}$. Άρα $f(0) = -1$. Για να είναι παραγωγίσιμη και στο $x = 0$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\arctan}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ax}{x} \Leftrightarrow \boxed{1 = a}$. Άρα $f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ με $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x^2} & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

Επειδή $f'(x) > 0 \; \forall \, x \in R$, η συνάρτηση f είναι αύξουσα, άρα και 1-1, συνεπώς δεν υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$, που είναι προϋπόθεση για το θεώρημα Rolle, άρα δεν υπάρχει διάστημα του R στο οποίο η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

8. Δεδομένης της συνάρτησης $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, προσδιορίστε για ποιες τιμές της παραμέτρου $a > 0$ η συνάρτηση έχει τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες.

Λύση

Έχω $f'_a(x) = 5x^4 - 5a = 5(x^4 - a)$ με πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		$+\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt[4]{a}) = a + 4a\sqrt[4]{a}$	↘	$f(\sqrt[4]{a}) = a - 4a\sqrt[4]{a}$	↗	$+\infty$

Αφού $x^4 - a < 0 \Leftrightarrow -\sqrt[4]{a} < x < \sqrt[4]{a}$, $f(-\sqrt[4]{a}) = (-\sqrt[4]{a})^5 - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = a + 4a\sqrt[4]{a}$ και $f(\sqrt[4]{a}) = (\sqrt[4]{a})^5 - 5a(\sqrt[4]{a}) + a = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a - 4a\sqrt[4]{a}$. Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -\sqrt[4]{a}], \Delta_2 = [-\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}], \Delta_3 = [\sqrt[4]{a}, +\infty)$. Τότε λόγω της μονοτονίας στα επιμέρους διαστήματα έχω $f(\Delta_1) = (-\infty, a + 4a\sqrt[4]{a}], f(\Delta_2) = [a - 4a\sqrt[4]{a}, a + 4a\sqrt[4]{a}], f(\Delta_3) = [a - 4a\sqrt[4]{a}, +\infty)$. Για να έχω τρεις διακριτές ρίζες πρέπει και αρκεί $a - 4a\sqrt[4]{a} < 0 < a + 4a\sqrt[4]{a} \overset{a>0}{\Longleftrightarrow} a - 4a\sqrt[4]{a} < 0 \Leftrightarrow 1 - 4\sqrt[4]{a} < 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{a > \frac{1}{256}}$

[Πηγές]

[Ιταλία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)]
[Εκπαίδευση στην Ιταλία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)]
http://kesyp-korop.att.sch.gr/spoudes_2007/professions/ekswteriko/Italy.htm
https://www.istruzione.it/esami-di-stato/tutto-sulla-maturita-2024.html

https://www.matematica.it/tomasi/matls/index.htm
Matematica | Esame di Stato | Liceo Scientifico | Prova scritta
Esercizi e Lezioni di Matematica per le Superiori | Studenti.it