[ΗΠΑ]

Οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής (αγγλικά: United States of America) αποκαλούμενες επίσης Ηνωμένες Πολιτείες (ενώ πολλές φορές αναγράφονται και με τη συντομογραφία ΗΠΑ) είναι μια χώρα που βρίσκεται κυρίως στην ήπειρο της Αμερικής. Είναι ομοσπονδιακή συνταγματική δημοκρατία που περιλαμβάνει πενήντα πολιτείες και μια ομοσπονδιακή περιφέρεια. Οι ΗΠΑ, έχουν έκταση 9.833.520 τ.χλμ. και πληθυσμό 334.914.895 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημες εκτιμήσεις για το 2023. Οι Ηνωμένες Πολιτείες είναι η τρίτη μεγαλύτερη χώρα σε συνολική έκταση, και η τρίτη μεγαλύτερη σε έκταση ξηράς και πληθυσμό.

Η ομοσπονδιακή πρωτεύουσα των ΗΠΑ, είναι η Ουάσινγκτον, ενώ η μεγαλύτερη πληθυσμιακά πόλη και το σημαντικότερο οικονομικό της κέντρο, είναι η Νέα Ύόρκη. Άλλες σημαντικές πόλεις της χώρας, είναι το Λος Άντζελες, το Σικάγο, το Χιούστον, το Ντάλας, το Φοίνιξ, η Ατλάντα, το Σαν Φρανσίσκο, η Φιλαδέλφεια, η Βοστώνη, το Μαϊάμι και το Σιάτλ.

Είναι ένα από τα πολυπολιτισμικότερα κράτη του κόσμου, προϊόν μεγάλης κλίμακας μετανάστευσης από πολλές χώρες. Η οικονομία των Ηνωμένων Πολιτειών είναι η μεγαλύτερη εθνική οικονομία του κόσμου, με υπολογιζόμενο ΑΕΠ για το 2022: $25,35 τρισεκατομμύρια (24% του ονομαστικού παγκόσμιου ΑΕΠ και άνω του 19% του παγκόσμιου ΑΕΠ σε ισοτιμία αγοραστικής δύναμης).

Οι Ηνωμένες Πολιτείες είναι η παλαιότερη επιβιώσασα ομοσπονδία. Είναι μια συνταγματική δημοκρατία και αντιπροσωπευτική δημοκρατία, στην οποία η πλειοψηφία κυβερνά, αλλά διατηρούνται και προστατεύονται τα δικαιώματα της μειοψηφίας από το νόμο. Η κυβέρνηση ρυθμίζεται από ένα σύστημα ελέγχων και ισορροπιών που ορίζεται από το Σύνταγμα των ΗΠΑ, το οποίο είναι το ανώτατο νομικό έγγραφο της χώρας.

Στο Αμερικανικό σύστημα, οι πολίτες συχνά υπόκεινται σε τρία επίπεδα κυβέρνησης, ομοσπονδιακό, πολιτειακό, και τοπικό· τα καθήκοντα της τοπικής αυτοδιοίκησης συχνά διαχωρίζονται μεταξύ των κομητειακών και των δημοτικών κυβερνήσεων. Σε σχεδόν όλες τις περιπτώσεις, οι εκτελεστικοί και οι νομοθετικοί αξιωματούχοι εκλέγονται από μία ψήφο πλειοψηφίας των πολιτών ανά περιφέρεια.

[Οικονομία]

Σύμφωνα με το Διεθνές Νομισματικό Ταμείο, το ΑΕΠ των Ηνωμένων Πολιτειών, ανέρχεται σε 24,79 τρισεκατομμύρια δολάρια (για το 2022), και αποτελεί το μεγαλύτερο ΑΕΠ ενός κράτους, και το 24% του Ακαθάριστου Παγκόσμιου Προϊόντος. Οι Ηνωμένες Πολιτείες, είναι ο μεγαλύτερος εισαγωγέας προϊόντων, και ο δεύτερος μεγαλύτερος εξαγωγέας στον κόσμο (μετά την Κίνα). Συνολικά, αποτελούν τη μεγαλύτερη και ισχυρότερη οικονομία του κόσμου.

Το κατά κεφαλήν ΑΕΠ, ιστορικά κατατάσσεται μεταξύ των υψηλότερων στον κόσμο. Για το 2022, το κατά κεφαλήν εισόδημα των ΗΠΑ, ανέρχεται σε 74.725$.

Η Αμερικανική οικονομία, χαρακτηρίζεται γενικά σταθερή, ανθεκτική, ευέλικτη και καινοτόμος. Παρόλα αυτά, η οικονομία των ΗΠΑ, με το πέρασμα των χρόνων ανέπτυξε αρκετές αδυναμίες, οι οποίες προμηνύουν πιθανούς κινδύνους στο μέλλον, όπως το χρόνιο εμπορικό έλλειμμα της χώρας, και το πολύ υψηλό χρέος της.

[Εκπαίδευση στην Ιταλία]

Η εκπαίδευση στην Ιταλία είναι υποχρεωτική από την ηλικία των 6 έως και την ηλικία των 16 ετών και χωρίζεται σε πέντε επίπεδα: το νηπιαγωγείο (scuola dell'infanzia), το δημοτικό (scuola primaria ή scuola elementare), την κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (scuola secondaria di primo grado ή scuola media inferiore), την ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (scuola secondaria di secondo grado ή scuola media superiore) και το πανεπιστήμιο (università), και διαθέτει τόσο δημόσια, όσο και ιδιωτικά εκπαιδευτικά ιδρύματα.

[Πρωτοβάθμια εκπαίδευση]

Το δημοτικό σχολείο αρχίζει στην ηλικία των 5-6 ετών. Το πρώτο έτος ονομάζεται νηπιαγωγείο. Ορισμένα σχολεία έχουν επίσης ομάδες προνηπίων για παιδιά ηλικίας 3-5 ετών. Συνήθως, το δημοτικό σχολείο διαρκεί μέχρι την 5η τάξη, λιγότερο συχνά μέχρι την 4η ή 6η τάξη.

Δεν υπάρχει αυστηρή πειθαρχία στην τάξη για τα πρώτα 2 χρόνια. Τα παιδιά παίζουν πολύ, επικοινωνούν, κατέχουν βασικές δεξιότητες όπως το μέτρημα, το διάβασμα και το γράψιμο. Στη συνέχεια, εισάγονται σταδιακά τα βασικά θέματα. Ένας δάσκαλος διεξάγει μαθήματα στα αγγλικά, τα μαθηματικά, την επιστήμη, τη γεωγραφία και την ιστορία. Ειδικά θέματα όπως η τέχνη, η μουσική, η φυσική αγωγή, η επιστήμη των υπολογιστών και μια ξένη γλώσσα (συνήθως ισπανικά) μελετώνται από μαθητές με άλλους δασκάλους. Επίσης, οι μαθητές μεταφέρονται τακτικά στη βιβλιοθήκη.

Σύστημα βαθμολόγησης

Στα περισσότερα σχολεία, η βαθμολόγηση αρχίζει στο 2ο έτος. Αρχικά, χρησιμοποιείται συχνά ένα απλοποιημένο σχήμα ESNU:

- E (άριστα);
- S (ικανοποιητική);
- N (χρειάζεται βελτίωση);
- U (μη ικανοποιητικό).

Στη συνέχεια, συνήθως μεταβαίνουν σε μια τυποποιημένη κλίμακα γραμμάτων (από το A έως το F).

Τυποποιημένα τεστ διεξάγονται κάθε έξι μήνες για κάθε μάθημα για την παρακολούθηση της προόδου του μαθητή και της συνολικής σχολικής επίδοσης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει άλλες μορφές ελέγχου απόδοσης κατά την κρίση του. Δεν υπάρχουν τελικές εξετάσεις στο τέλος του δημοτικού σχολείου στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Σχεδόν όλα τα δημοτικά σχολεία στις Ηνωμένες Πολιτείες είναι ημερήσια σχολεία. Τα παιδιά συχνά μένουν στο σχολείο μέχρι τις 6-7 μ.μ.: παρακολουθούν επιπλέον μαθήματα ή κάνουν τα μαθήματά τους.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Γυμνάσιο

Τα παιδιά εισέρχονται στο γυμνάσιο (Τάξεις 6-8) στην ηλικία των 11-12 ετών.
Εδώ, κάθε μάθημα διδάσκεται από ξεχωριστό δάσκαλο. Μεταξύ των μαθημάτων υπάρχουν σύντομα διαλείμματα διάρκειας 5-10 λεπτών. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, οι μαθητές πρέπει να φτάσουν στην επόμενη τάξη. Στη μέση της ημέρας, υπάρχει μεσημεριανό διάλειμμα για 1-2 ώρες.

Οι μαθητές γυμνασίου έχουν ένα πιο ευέλικτο πρόγραμμα σπουδών σε σύγκριση με τους νεότερους μαθητές. Τα υποχρεωτικά μαθήματα περιλαμβάνουν αγγλικά, μαθηματικά (άλγεβρα και γεωμετρία), επιστήμη και κοινωνικές επιστήμες, ιστορία και αθλητισμό. Ταυτόχρονα, οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν το επίπεδο εκπαίδευσης: βασικό ή προηγμένο. Στη δεύτερη περίπτωση, το πρόγραμμα θα είναι το ίδιο, αλλά οι μελέτες θα είναι πιο εμπεριστατωμένες. Επιπλέον, κάθε εκπαιδευτικό ίδρυμα έχει μια λίστα μαθημάτων επιλογής. Μπορείτε να πάρετε 1-2 νέους κλάδους ετησίως. Αυτό μπορεί να είναι η υποκριτική, η γραφιστική, η γαλλική λογοτεχνία, ακόμη και το γραφείο σύνταξης μιας σχολικής εφημερίδας. Με ένα τέτοιο σύστημα, όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό πρόγραμμα και δεν υπάρχουν μόνιμες ομάδες μελέτης.

Σύστημα βαθμολόγησης

Στο γυμνάσιο, οι μαθητές γράφουν τακτικά σύντομα τεστ για το υλικό που έχουν περάσει. Οι βαθμοί για αυτές τις δοκιμασίες τείνουν να επηρεάζουν την τελική βαθμολογία ακόμη περισσότερο από την τελική δοκιμασία. Ως εκ τούτου, οι μαθητές πρέπει πάντα να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η καλή ακαδημαϊκή απόδοση στο τέλος του έτους σας δίνει το δικαίωμα να παρακολουθήσετε πιο προχωρημένα μαθήματα το επόμενο έτος.

Κάθε σχολείο καθορίζει ανεξάρτητα τη μορφή αξιολόγησης: μπορεί να είναι ένα μοναδικό σύστημα πόντων ή μια τυποποιημένη κλίμακα γραμμάτων που υιοθετείται από πολλά σχολεία.
Για να αποφοιτήσετε πρέπει να πάρετε ικανοποιητικό βαθμό (σύμφωνα με τα πρότυπα του συγκεκριμένου σχολείου) σε κάθε υποχρεωτικό μάθημα.

Λύκειο

Το Λύκειο καλύπτει τις τάξεις 9-12. Οι έφηβοι ξεκινούν αυτό το στάδιο στην ηλικία των 14 ετών και αποφοιτούν όταν είναι 18. Μερικές φορές τα γυμνάσια και τα λύκεια συνδυάζονται σε ένα και η εκπαίδευση διαρκεί από τις τάξεις 6-7 έως 12. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν δύο στάδια: Γυμνάσιο και Λύκειο.

Το λύκειο προετοιμάζει ενεργά τους μαθητές για την είσοδό τους σε κολέγια και πανεπιστήμια. Οι μαθητές έχουν δύο κύρια καθήκοντα:

1. Να συλλέξουν τον αριθμό των διδακτικών μονάδων που απαιτούνται για την αποφοίτηση. Εάν το μάθημα έχει μελετηθεί για ένα χρόνο, ο φοιτητής πιστώνεται 1 διδακτική μονάδα, έξι μήνες - 0,5 πίστωση. Κάθε πολιτεία έχει τις δικές της απαιτήσεις. Το υποχρεωτικό πρόγραμμα σπουδών συνήθως περιλαμβάνει:

- Αγγλικά
- Μαθηματικά (άλγεβρα και/ή γεωμετρία)
- Ιστορία και/ή άλλες κοινωνικές επιστήμες (γεωγραφία, παγκόσμιος πολιτισμός)
- Φυσικές επιστήμες (φυσική, χημεία, βιολογία)
- Τέχνη
- Φυσική αγωγή

   Επίσης, οι μαθητές μπορούν επιπλέον να επιλέξουν διάφορα μαθήματα που τους ενδιαφέρουν ή / και θα φαίνονται καλά στην αίτηση για εισαγωγή στο πανεπιστήμιο.

2. Να λάβουν επιπλέον διδακτικές μονάδες για προχωρημένα μαθήματα. Οι μαθητές μπορούν να πάνε σε μια προηγμένη θεματική ομάδα (Honors) ή να εγγραφούν σε ένα μάθημα πανεπιστημιακού επιπέδου - Advanced Placement (AP). Αυτό απαιτεί εξαιρετικές ακαδημαϊκές επιδόσεις: για παράδειγμα, για να παρακολουθήσει ένα μάθημα Προχωρημένης Κυτταρικής Βιολογίας, ένας φοιτητής πρέπει να επιδείξει υψηλές βαθμολογίες στη βασική βιολογία κατά το παρελθόν έτος. Όσο περισσότερα μαθήματα AP έχει ολοκληρώσει επιτυχώς ένας απόφοιτος,

τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να μπει σε ένα από τα κορυφαία αμερικανικά πανεπιστήμια.

Σύστημα βαθμολόγησης

Οι βαθμοί στα αμερικανικά λύκεια είναι σημαντικοί. Οι μαθητές γράφουν τακτικά τεστ, κάνουν ομαδικές εργασίες και παρακολουθούν εργαστηριακά μαθήματα. Αυτά αθροίζονται στην τελική βαθμολογία σε κάθε θέμα και στον γενικό μέσο όρο GPA, ένα από τα σημαντικά κριτήρια για την εισαγωγή στο κολέγιο ή το πανεπιστήμιο.

Ορισμένες πολιτείες έχουν τελικές εξετάσεις, αλλά τα αποτελέσματά τους δεν επηρεάζουν την εισαγωγή στα πανεπιστήμια των ΗΠΑ. Αντ' αυτού, οι μαθητές επικεντρώνονται στην προετοιμασία για τις εξετάσεις SAT και ACT, οι οποίες απαιτούνται για την εισαγωγή στα αμερικανικά πανεπιστήμια.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Το Εκπαιδευτικό σύστημα στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (Η.Π.Α.) είναι ένα από τα λίγα στον κόσμο που επιτρέπει στους φοιτητές να επιλέξουν τον κλάδο σπουδών τους αφού εισαχθούν στο Πανεπιστήμιο ακόμα και να αλλάξουν κατεύθυνση σπουδών κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους. Οι φοιτητές έχουν μέχρι και δύο χρόνια από την έναρξη της φοίτησής τους για να αποφασίσουν τον κλάδο επιλογής τους. Έχουν την δυνατότητα να αποκτήσουν Πτυχίο επιλέγοντας ένα τομέα με τον οποίο θα ασχοληθούν εκτενώς, γνωστό ως "Major". Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα να αποκτήσουν και μια μικρότερη πιστοποίηση σπουδών παράλληλα με το "Major" που επιλέγουν, γνωστή ως "Minor", είτε για να αυξήσουν τις γνώσεις τους, αν σχετίζεται με το Major που παρακολουθούν, ή για να εξερευνήσουν και ένα άλλο τομέα που τους ενδιαφέρει.

Τα Πανεπιστήμια των Η.Π.Α είναι παγκοσμίως γνωστά για την ποιότητα των προγραμμάτων τους, του διδακτικού και ερευνητικού προσωπικού τους και των τεχνολογικών υποδομών και εγκαταστάσεων. Η οργάνωση της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης των Η.Π.Α. είναι εξαιρετικά ποικιλόμορφη. Υπάρχει πληθώρα Ακαδημαϊκών Ιδρυμάτων, ιδιωτικών ή Δημόσιων, καθώς και μεγάλη ποικιλία εξειδικευμένων σπουδών. Οι Προπτυχιακές τετραετείς σπουδές που οδηγούν στην απόκτηση Πτυχίου Bachelor, προσφέρονται από τα Πανεπιστήμια (Universities), τα Κολέγια τετραετούς φοίτησης (Colleges) και τα Τεχνολογικά Ινστιτούτα (Technological Institutes). Επιπρόσθετα, υπάρχουν και τα Κοινοτικά ή Διετή Κολέγια (Community Colleges/ Two-year Colleges) τα οποία προσφέρουν Τεχνική και Επαγγελματική Κατάρτιση καθώς και Ακαδημαϊκή Επιμόρφωση σε διάφορους τομείς.

Επίσης, προσφέρονται πολλά προγράμματα Μεταπτυχιακών και Διδακτορικών σπουδών που οδηγούν σε τίτλους όπως το Master και το Doctoral/PhD αντίστοιχα.

Περίπου 4.900 κολέγια και πανεπιστήμια προσφέρουν προπτυχιακά προγράμματα στις Η.Π.Α., ενώ τουλάχιστον 2.000 πανεπιστήμια προσφέρουν μεταπτυχιακούς τίτλους σπουδών. Το εκπαιδευτικό σύστημα των Η.Π.Α. διαφέρει σημαντικά από το ελληνικό καθώς και από αυτά των ευρωπαϊκών χωρών.

Η ανώτατη εκπαίδευση στις Η.Π.Α. χωρίζεται κυρίως σε ιδιωτική και δημόσια ή πολιτειακή (state).

Και τα δύο είδη προσφέρουν αναγνωρισμένα πτυχία, ενώ διαφέρουν κυρίως ως προς τον τρόπο χρηματοδότησής τους. Η ποιότητα των σπουδών δεν έχει σχέση με τον ιδιωτικό ή δημόσιο χαρακτήρα των πανεπιστημίων, αλλά εξαρτάται από το επίπεδο του διδακτικού προσωπικού, τις εγκαταστάσεις και τις υπηρεσίες (βιβλιοθήκες, εργαστήρια, υποδομές, κ.ά.), την ύπαρξη και χρηματοδότηση ερευνητικών προγραμμάτων, πράγμα που πιστοποιείται μέσω αντικειμενικών διαδικασιών και φορέων με τα ίδια κριτήρια.

Ιδιωτικά και δημόσια κολέγια, πανεπιστήμια, ινστιτούτα (Private & Public colleges, Universities, institutes)
Οι όροι «πανεπιστήμιο», «κολέγιο» και «ινστιτούτο σπουδών» χρησιμοποιούνται στις Η.Π.Α. συνήθως εναλλακτικά. Τα κολέγια έχουν μικρότερο αριθμό φοιτητών και προσφέρουν συνήθως προπτυχιακούς τίτλους σπουδών χωρίς να αποκλείεται και η προσφορά μεταπτυχιακών σε ορισμένα, ενώ ένα πανεπιστήμιο προσφέρει πάντα και μεταπτυχιακούς τίτλους. Τα ινστιτούτα συνήθως εξειδικεύονται σε συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο (λ.χ., ινστιτούτο τεχνολογίας, ινστιτούτο τέχνης και σχεδίου, κ.ο.κ.)

Κοινοτικά ή Διετή (community), Τεχνικά και Επαγγελματικά (technical and vocational) κολέγια (colleges)
Οι σπουδές στα κοινοτικά κολέγια, γνωστά και ως κολέγια ανώτερης εκπαίδευσης (community colleges) ή διετή (two-year colleges), προσφέρουν πολύ καλή τεχνική και επαγγελματική κατάρτιση, καθώς και ακαδημαϊκή επιμόρφωση σε διάφορους τομείς. Υπάρχουν περίπου 2.500 κοινοτικά κολέγια στις Η.Π.Α., που κατά κανόνα συνεργάζονται με τα πανεπιστήμια της πολιτείας τους ή με την τοπική αγορά, ώστε να προετοιμάζουν τους φοιτητές είτε για περαιτέρω ακαδημαϊκές σπουδές, είτε για άμεση εύρεση εργασίας. Τα κοινοτικά κολέγια έχουν γενικά χαμηλό κόστος, και συνήθως δεν προσφέρουν φοιτητική στέγη.
Τα τεχνικά και επαγγελματικά κολέγια ειδικεύονται επίσης στην προετοιμασία των φοιτητών για την είσοδό τους στην αγορά εργασίας. Προσφέρουν συνήθως διετή προγράμματα σπουδών, που καλύπτουν τη θεωρία ενός συγκεκριμένου τεχνικού επαγγέλματος, παράλληλα με την πρακτική εξάσκησή του.
Εκκλησιαστικά κολέγια και κολέγια αποκλειστικά για άντρες ή για γυναίκες είναι πάντοτε ιδιωτικά.

[Προπτυχιακοί τίτλοι σπουδών]
Υπάρχουν δύο είδη προπτυχιακών τίτλων: το Associate Degree και το Bachelor's.

ASSOCIATE DEGREE
Υπάρχουν δύο τύποι Associate Degree: το πτυχίο τεχνών (Associate of Arts/A.A.) και το πτυχίο επιστημών (Associate of Science/A.S.). Τα πτυχία αυτά ονομάζονται και καταληκτικά (terminal degree), εφόσον δεν οδηγούν σε περαιτέρω σπουδές, αλλά προετοιμάζουν τους φοιτητές για άμεση πρόσληψη σε επαγγέλματα όπως επισκευές αυτοκινήτων, εσωτερική διακόσμηση, συντήρηση αεροσκαφών, βρεφοκομία, νοσηλευτική, πυροσβεστική, γραμματειακή εργασία, φωτογραφία, κ.ά. Αν οι απόφοιτοι μεταφέρουν τις διδακτικές μονάδες που κέρδισαν στα δύο αυτά χρόνια σε κάποιο ίδρυμα τετραετούς φοίτησης, τότε μπορούν να συνεχίσουν τις σπουδές τους για την απόκτηση πρώτου πτυχίου (Bachelor's). Σε κάποιες περιπτώσεις, Associate πτυχία προσφέρονται και από ιδρύματα τετραετούς φοίτησης.

ΠΤΥΧΙΟ BACHELOR'S
Το πτυχίο Bachelor's απονέμεται με τη συμπλήρωση συγκεκριμένου αριθμού διδακτικών μονάδων (credits), συνήθως μετά από τέσσερα χρόνια πλήρους (full-time) φοίτησης (1ο έτος: freshman· 2ο έτος: sophomore· 3ο έτος: junior· 4ο έτος: senior) και σε ορισμένες σπουδές μετά από πέντε χρόνια φοίτησης (π.χ. Αρχιτεκτονική, επαγγελματικό πτυχίο).
Ένα από τα κυριότερα πλεονεκτήματα των προγραμμάτων Bachelor's στις Η.Π.Α. είναι ότι μπορεί κανείς να διαλέξει από ευρύ φάσμα μαθημάτων και να δημιουργήσει ένα απολύτως προσωπικό πρόγραμμα σπουδών. Τα μαθήματα των δύο πρώτων ετών είναι γνωστά ως πρώτου κύκλου ή επιπέδου (lower division), ενώ των δύο τελευταίων ετών ως ανώτερου κύκλου ή επιπέδου (upper division). Οι οδηγοί σπουδών συνήθως προσδιορίζουν τις επιλογές μαθημάτων ως εξής:
100-199: Για πρωτοετείς
200-299: Για δευτεροετείς
300-399: Για τριτοετείς

400-499: Για τελειόφοιτους

Οι σπουδές είναι δυνατόν να παραταθούν αν κάποιος φοιτητής αλλάξει κατεύθυνση ειδίκευσης ή αντικείμενο στο μέσον των σπουδών του, οπότε οφείλει να συγκεντρώσει πάλι τον απαιτούμενο αριθμό διδακτικών μονάδων στο νέο αντικείμενο.

Πτυχιακά μαθήματα (Degree courses)

Τα διάφορα είδη μαθημάτων που απαρτίζουν το πρόγραμμα σπουδών στο αμερικανικό πανεπιστήμιο χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

α. μαθήματα κορμού (Core Courses): Αποτελούν τη βάση για το πανεπιστημιακό πρόγραμμα σπουδών και είναι υποχρεωτικά για όλους τους φοιτητές. Σε αυτά μεταξύ άλλων περιλαμβάνονται η αγγλική γλώσσα και λογοτεχνία, τα μαθηματικά, οι ανθρωπιστικές σπουδές, οι φυσικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Ο αριθμός των μαθημάτων κορμού που απαιτείται για το πτυχίο ποικίλλει.

β. μαθήματα κύριας κατεύθυνσης (Major Courses): Κατεύθυνση (major) είναι το αντικείμενο στο οποίο θα επιλέξετε να εστιάσετε τις σπουδές σας. Συνήθως επιλέγεται μία μόνο κατεύθυνση, υπάρχει όμως η δυνατότητα να ακολουθηθεί διπλή κατεύθυνση (double major) (λ.χ., λογοτεχνία-ψυχολογία, μαθηματικά-οικονομικά). Τα μαθήματα κατεύθυνσης αποτελούν συνήθως το 50% του συνόλου των μαθημάτων που απαιτούνται για το πτυχίο.

γ. μαθήματα δευτερεύουσας κατεύθυνσης (Minor Courses): Η δευτερεύουσα κατεύθυνση αναφέρεται στο αντικείμενο εκείνο στο οποίο ο φοιτητής επιλέγει τον δεύτερο μεγαλύτερο αριθμό μαθημάτων. Στη διπλή κατεύθυνση απαιτείται ίσος αριθμός σχετικών μαθημάτων, ενώ για τη δευτερεύουσα κατεύθυνση απαιτούνται τα μισά μαθήματα απ’ ό,τι στην κύρια κατεύθυνση.

δ. μαθήματα επιλογής: Αυτά μπορούν να επιλεγούν από οποιοδήποτε τμήμα του πανεπιστημίου. Παρέχουν τη δυνατότητα προσέγγισης άλλων αντικειμένων ή θεμάτων που μπορεί να σας ενδιαφέρουν, ενώ παράλληλα συμβάλλουν στην επιπλέον συμπλήρωση του απαραίτητου αριθμού διδακτικών μονάδων που απαιτούνται για το πτυχίο.

[Τα δημοφιλέστερα πανεπιστήμια]

1. New York University, New York, NY
2.University of Southern California, Los Angeles, CA
3. University of Illinois - Urbana-Champaign, Champaign, IL
4. Columbia University, New York, NY
5. Purdue University - Main Campus, West Lafayette, IN
6. University of California - Los Angeles, Los Angeles, CA
7. Northeastern University, Boston, MA
8. Arizona State University, Tempe, AZ
9. Michigan State University, East Lansing, MI
10. University of Washington, Seattle, WA
11. University of Michigan - Ann Arbor, Ann Arbor, MI
12. Boston University, Boston, MA
13. Penn State University - University Park, University Park, PA
14. Ohio State University - Main Campus, Columbus, OH
15. Indiana University – Bloomington, Bloomington, IN
16. University of Minnesota - Twin Cities, Minneapolis, MN
17. SUNY University at Buffalo, Buffalo, NY
18. University of California, Berkeley, CA
19. University of Texas-Dallas, Richardson, TX

20. University of Florida, Gainesville, FL

Πηγή: Open Doors, 2013-2014 Institute of International Education http://www.iie.org/en/Research-and-Publications/Open-Doors

[Τυποποιημένα τεστ εισαγωγής]

Τα τυποποιημένα τεστ εισαγωγής (standardized admission tests) απαιτούνται από σχεδόν όλα τα αμερικανικά πανεπιστήμια, ως μέρος της διαδικασίας επιλογής προπτυχιακών μόνο φοιτητών. Είναι κυρίως τεστ ικανοτήτων, με ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών, και στόχο έχουν να αξιολογήσουν τις δεξιότητες που είναι αναγκαίες για τις προπτυχιακές σπουδές. Το συνηθέστερο από αυτά είναι το Scholastic Assessment test/SAT του οποίου υπάρχουν δύο εκδοχές: SAT reasoning test (τεστ γλωσσικών και μαθηματικών ικανοτήτων) και SAT Subject tests (τεστ γνωστικών αντικειμένων όπως φυσική, χημεία, ιστορία, κ.ά). Εναλλακτικό τεστ εισαγωγής είναι το ACT (American college test).

[Εισαγωγικές εξετάσεις SAT]

Το SAT (Scholastic Assessment Test) είναι ένα τυποποιημένο τεστ που χρησιμοποιείται ευρέως για εισαγωγή στο κολέγιο στις Ηνωμένες Πολιτείες. Το SAT ανήκει, αναπτύσσεται και δημοσιεύεται εξ ολοκλήρου από το College Board, έναν ιδιωτικό, μη κερδοσκοπικό οργανισμό στις Ηνωμένες Πολιτείες. Το τεστ αποσκοπεί στην αξιολόγηση της ετοιμότητας των μαθητών για το κολέγιο.

Πολλοί μαθητές προετοιμάζονται για το SAT χρησιμοποιώντας βιβλία, μαθήματα, διαδικτυακά μαθήματα και διδασκαλία, τα οποία προσφέρονται από διάφορες εταιρείες και οργανισμούς. Το SAT λαμβάνεται συνήθως από μαθητές γυμνασίου και ηλικιωμένους. Το College Board δηλώνει ότι το SAT προορίζεται να μετρήσει τις δεξιότητες ανάγνωσης, αριθμητικής και γραφής που απαιτούνται για την ακαδημαϊκή επιτυχία στο κολέγιο. Δηλώνουν ότι το SAT αξιολογεί πόσο καλά οι υποψήφιοι αναλύουν και επιλύουν προβλήματα - δεξιότητες που έμαθαν στο σχολείο και θα χρειαστούν στο κολέγιο.

Το College Board ισχυρίζεται επίσης ότι το SAT, σε συνδυασμό με τον μέσο όρο βαθμολογίας γυμνασίου (GPA), παρέχει έναν καλύτερο δείκτη επιτυχίας στο κολέγιο από τους βαθμούς του γυμνασίου μόνο.

Το SAT είναι ένα τεστ που προορίζεται να δώσει βαθμολογίες που ακολουθούν μια κατανομή καμπύλης καμπάνας μεταξύ των υποψηφίων. Για να επιτευχθεί αυτή η κατανομή, οι σχεδιαστές των εξετάσεων περιλαμβάνουν προκλητικές ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με εύλογες αλλά λανθασμένες επιλογές, γνωστές ως «περισπασμούς», αποκλείουν ερωτήσεις που η πλειοψηφία των μαθητών απαντούν σωστά και επιβάλλουν αυστηρούς χρονικούς περιορισμούς κατά τη διάρκεια της εξέτασης.

Οι υποψήφιοι SAT έχουν στη διάθεσή τους δύο ώρες και 14 λεπτά για να ολοκληρώσουν τη δοκιμασία (συν ένα διάλειμμα 10 λεπτών μεταξύ της ενότητας Reading and Writing και της ενότητας Math), και από το 2024 το τεστ κοστίζει 60,00 δολάρια ΗΠΑ, συν πρόσθετα τέλη. Οι βαθμολογίες στο SAT κυμαίνονται από 400 έως 1600, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δοκιμασιών από δύο ενότητες 200 έως 800 βαθμών: την ενότητα Μαθηματικών και την ενότητα Ανάγνωσης και Γραφής. Παρόλο που η λήψη του SAT, ή του ανταγωνιστή του ACT, απαιτείται για την είσοδο πρωτοετών σε πολλά κολέγια και πανεπιστήμια στις Ηνωμένες Πολιτείες, κατά τα τέλη της δεκαετίας του 2010, πολλά ιδρύματα έκαναν αυτές τις εισαγωγικές εξετάσεις προαιρετικές. Ξεκινώντας από το σχολικό έτος 2015-16, το College Board άρχισε να συνεργάζεται με την Khan Academy για την παροχή δωρεάν διαδικτυακών μαθημάτων προετοιμασίας SAT.

Στο παρελθόν, το τεστ γινόταν χρησιμοποιώντας έντυπες φόρμες που συμπληρώνονταν με μολύβι νούμερο 2 και βαθμολογούνταν χρησιμοποιώντας τεχνολογία οπτικής αναγνώρισης σημάτων τύπου Scantron. Από τον Μάρτιο του 2023 για τους διεθνείς υποψηφίους και τον Μάρτιο του 2024 για όσους βρίσκονται εντός των ΗΠΑ, οι εξετάσεις διεξάγονται χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα υπολογιστή που ονομάζεται Bluebook που εκτελείται σε φορητό υπολογιστή ή υπολογιστή tablet που έφερε ο μαθητής ή παρέχεται στον χώρο εεξετάσεων. Το τεστ έγινε επίσης προσαρμοστικό, προσαρμόζοντας τις ερωτήσεις που παρουσιάζονται στον μαθητή με βάση την απόδοσή του σε ερωτήσεις που τέθηκαν νωρίτερα στο τεστ και μειώθηκε από τρεις ώρες σε δύο ώρες και 14 λεπτά.

Δομή

Το SAT έχει δύο κύριες ενότητες, δηλαδή την ανάγνωση και γραφή (συνήθως γνωστή ως το τμήμα "Αγγλικά" του τεστ) και την ενότητα Μαθηματικών. Και τα δύο αναλύονται περαιτέρω σε τέσσερις ενότητες: Ανάγνωση, Γραφή και Γλώσσα, Μαθηματικά (χωρίς αριθμομηχανή) και Μαθηματικά (επιτρέπεται η αριθμομηχανή). Ο συνολικός χρόνος για το βαθμολογημένο τμήμα του SAT είναι δύο ώρες και 14 λεπτά.

Δύο βαθμολογίες ενότητας προκύπτουν από τη λήψη του SAT: Ανάγνωση και γραφή και Μαθηματικά. Οι βαθμολογίες των ενοτήτων αναφέρονται σε κλίμακα από 200 έως 800 και κάθε βαθμολογία ενότητας είναι πολλαπλάσιο του δέκα. Μια συνολική βαθμολογία για το SAT υπολογίζεται προσθέτοντας τις δύο βαθμολογίες ενοτήτων, με αποτέλεσμα συνολικές βαθμολογίες που κυμαίνονται από 400 έως 1600.

Δεν υπάρχει ποινή ή αρνητική βαθμολογία για εικασία στο SAT: οι βαθμολογίες βασίζονται στον αριθμό των ερωτήσεων που απαντώνται σωστά.

Reading Test - Τεστ ανάγνωσης

Το Reading Test του SAT περιέχει μία ενότητα 52 ερωτήσεων και χρονικό όριο 65 λεπτών. Όλες οι ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής και βασίζονται σε αποσπάσματα κειμένων. Πίνακες, γραφήματα και διαγράμματα μπορεί να συνοδεύουν ορισμένα κείμενα, αλλά δεν απαιτούνται μαθηματικά για να απαντηθούν σωστά οι αντίστοιχες ερωτήσεις. Υπάρχουν πέντε κείμενα (μέχρι δύο από τα οποία μπορεί να είναι ένα ζευγάρι μικρότερων κειμένων) στο Τεστ Ανάγνωσης και δέκα ή έντεκα ερωτήσεις ανά κείμενο ή ζεύγος κειμένων. Τα κείμενα SAT αντλούν θέματα από τρία κύρια πεδία: ιστορία, κοινωνικές σπουδές και επιστήμη. Κάθε SAT Reading Test περιλαμβάνει πάντα: ένα απόσπασμα από την αμερικανική ή παγκόσμια λογοτεχνία, ένα απόσπασμα είτε από ιδρυτικό έγγραφο των ΗΠΑ είτε από σχετικό κείμενο, ένα απόσπασμα για την οικονομία, την ψυχολογία, την κοινωνιολογία ή άλλη κοινωνική επιστήμη και δύο επιστημονικά αποσπάσματα. Οι απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις βασίζονται μόνο στο περιεχόμενο που δηλώνεται ή υπονοείται από τα κείμενα.

Γραπτή και γλωσσική εξέταση- Writing and Language Test

Το Writing and Language Test του SAT αποτελείται από μία ενότητα με 44 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και χρονικό όριο 35 λεπτών. Όπως και με το Reading Test, όλες οι ερωτήσεις βασίζονται σε αποσπάσματα ανάγνωσης που μπορεί να συνοδεύονται από πίνακες, γραφήματα και διαγράμματα. Ο υποψήφιος θα κληθεί να διαβάσει τα αποσπάσματα και να προτείνει διορθώσεις ή βελτιώσεις για το περιεχόμενο που υπογραμμίζεται. Η ανάγνωση αποσπασμάτων σε αυτό το τεστ κυμαίνεται σε περιεχόμενο από θεματικά επιχειρήματα έως αφηγήσεις μη μυθοπλασίας σε διάφορα θέματα. Οι δεξιότητες που αξιολογούνται περιλαμβάνουν:

- αύξηση της σαφήνειας των επιχειρημάτων

- βελτίωση της επιλογής λέξεων
- βελτίωση της ανάλυσης θεμάτων κοινωνικών σπουδών και επιστημών
- αλλαγή της δομής προτάσεων ή λέξεων για την αύξηση της οργανωτικής ποιότητας και του αντίκτυπου της γραφής
- διόρθωση ή βελτίωση της δομής των προτάσεων, της χρήση λέξεων και των σημείων στίξης.

Μαθηματικά

Το τμήμα μαθηματικών του SAT χωρίζεται σε δύο ενότητες: Τεστ Μαθηματικών – Χωρίς Αριθμομηχανή και Τεστ Μαθηματικών – Με Αριθμομηχανή. Συνολικά, το τεστ μαθηματικών SAT διαρκεί 80 λεπτά και περιλαμβάνει 58 ερωτήσεις: 45 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και 13 ερωτήσεις πλέγματος (grid-in). Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής έχουν τέσσερις πιθανές απαντήσεις. Οι ερωτήσεις grid-in είναι ανοιχτού τύπου και απαιτούν από τον υποψήφιο να δώσει μια απάντηση.

Η ενότητα Τεστ Μαθηματικών – Χωρίς Αριθμομηχανή έχει 20 ερωτήσεις (15 πολλαπλής επιλογής και 5 grid-in) και διαρκεί 25 λεπτά.

Η ενότητα Τεστ Μαθηματικών – Αριθμομηχανή έχει 38 ερωτήσεις (30 πολλαπλής επιλογής και 8 grid-in) και διαρκεί 55 λεπτά.

Αρκετές βαθμολογίες παρέχονται στον υποψήφιο για το τεστ μαθηματικών. Μια δευτερεύουσα βαθμολογία (σε κλίμακα από το 1 έως το 15) αναφέρεται για καθεμία από τις τρεις κατηγορίες μαθηματικού περιεχομένου:

- "Καρδιά της Άλγεβρας" (γραμμικές εξισώσεις, συστήματα γραμμικών εξισώσεων και γραμμικές συναρτήσεις)
- "Επίλυση προβλημάτων και ανάλυση δεδομένων" (στατιστική, μοντελοποίηση και δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων)
- "Passport to Advanced Math" (μη γραμμικές εκφράσεις, ρίζες, εκθετικά και άλλα θέματα που αποτελούν τη βάση των πιο προχωρημένων μαθηματικών).

Μια βαθμολογία για την εξέταση μαθηματικών αναφέρεται σε κλίμακα από το 10 έως το 40, με προσαύξηση 0,5, και μια βαθμολογία ενότητας (ίση με τη βαθμολογία της δοκιμής πολλαπλασιασμένη επί 20) αναφέρεται σε κλίμακα από 200 έως 800.]

Χρήση αριθμομηχανής

Όλες οι επιστημονικές και οι περισσότερες αριθμομηχανές γραφημάτων, συμπεριλαμβανομένων των αριθμομηχανών Computer Algebra System (CAS), επιτρέπονται μόνο στην ενότητα SAT Math – Calculator. Ωστόσο, με την αλλαγή στο Digital SAT κατά τη διάρκεια του 2023 και του 2024, μια αριθμομηχανή γραφικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί καθ’ όλη τη διάρκεια της εξέτασης και είναι προσβάσιμη μέσω του προγράμματος εξέτασης. Επιτρέπονται επίσης όλοι οι υπολογιστές τεσσάρων πράξεων. Ωστόσο, αυτές οι συσκευές δεν συνιστώνται. Δεν επιτρέπονται αριθμομηχανές κινητών τηλεφώνων και smartphone, αριθμομηχανές με πληκτρολόγια τύπου γραφομηχανής (QWERTY), φορητοί υπολογιστές και άλλοι φορητοί υπολογιστές και αριθμομηχανές με δυνατότητα πρόσβασης στο Διαδίκτυο.

Όλες οι ερωτήσεις σε κάθε ενότητα του SAT σταθμίζονται εξίσου. Για κάθε σωστή απάντηση, προστίθεται ένας βαθμός. Δεν αφαιρούνται βαθμοί λόγω λανθασμένων απαντήσεων.

Τμήμα	Μέση βαθμολογία 2023 (200–800)	Χρόνος (λεπτά)
Μαθηματικά	508	25 + 55 = 80
Ανάγνωση και γραφή	520	65 + 35 = 100

Το SAT προσφέρεται επτά φορές το χρόνο στις Ηνωμένες Πολιτείες: τον Αύγουστο, τον Οκτώβριο, τον Νοέμβριο, τον Δεκέμβριο, τον Μάρτιο, τον Μάιο και τον Ιούνιο. Για τους διεθνείς φοιτητές το SAT προσφέρεται τέσσερις φορές το χρόνο: τον Οκτώβριο, τον Δεκέμβριο, τον Μάρτιο και τον Μάιο. Το τεστ προσφέρεται συνήθως το πρώτο Σάββατο του μήνα. Το τεστ έκαναν 1.913.742 απόφοιτοι λυκείου στην τάξη του 2023.

[Εισαγωγικές εξετάσεις ACT]

Το ACT (αρχικά συντομογραφία του American College Testing) είναι ένα τυποποιημένο τεστ που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή στο κολέγιο στις Ηνωμένες Πολιτείες. Διοικείται από την ACT, έναν μη κερδοσκοπικό οργανισμό με το ίδιο όνομα. Η δοκιμασία ACT καλύπτει τέσσερις τομείς ακαδημαϊκών δεξιοτήτων: αγγλικά, μαθηματικά, ανάγνωση και επιστημονική συλλογιστική. Είναι αποδεκτό από όλα τα τετραετή κολέγια και πανεπιστήμια στις Ηνωμένες Πολιτείες, καθώς και από περισσότερα από 225 πανεπιστήμια εκτός των ΗΠΑ.

Οι τέσσερις κύριες ενότητες εξετάσεων ACT βαθμολογούνται ξεχωριστά σε κλίμακα 1-36 και παρέχεται μια σύνθετη βαθμολογία (ο στρογγυλοποιημένος ακέραιος μέσος όρος των τεσσάρων ενοτήτων).

Το ACT εισήχθη για πρώτη φορά τον Νοέμβριο του 1959 από τον καθηγητή του Πανεπιστημίου της Αϊόβα Everett Franklin Lindquist ως ανταγωνιστή στο Scholastic Aptitude Test (SAT). Το ACT έχει δει μια σταδιακή αύξηση του αριθμού των υποψηφίων από την έναρξή του και το 2012 το ACT ξεπέρασε το SAT για πρώτη φορά στο σύνολο των υποψηφίων. Εκείνη τη χρονιά, 1.666.017 μαθητές πήραν το ACT και 1.664.479 μαθητές πήραν το SAT.

Η πλειοψηφία των κολεγίων δεν δείχνουν προτίμηση για τις εξετάσεις SAT ή ACT και δέχονται και τις δύο ισότιμα. Σύμφωνα με το "Uni στις ΗΠΑ", τα κολέγια που απαιτούν επίσης από τους μαθητές να λάβουν τις εξετάσεις θέματος SAT το κάνουν ανεξάρτητα από το αν ο υποψήφιος πήρε το SAT ή το ACT. Ωστόσο, ορισμένα κολέγια αποδέχονται το ACT αντί των εξετάσεων θέματος SAT και μερικά δέχονται το προαιρετικό τμήμα ACT Writing αντί για ένα SAT Subject Test.

Επιπλέον, ορισμένες πολιτείες και μεμονωμένες σχολικές περιφέρειες έχουν χρησιμοποιήσει την ACT για να αξιολογήσουν τη μάθηση των μαθητών ή / και την απόδοση των σχολείων, απαιτώντας από όλους τους μαθητές γυμνασίου να λάβουν την ACT, ανεξάρτητα από το αν δεσμεύονται από το κολέγιο. Το Κολοράντο και το Ιλινόις ήταν οι πρώτοι που ενσωμάτωσαν την ACT ως μέρος του υποχρεωτικού προγράμματος δοκιμών τους το 2001. Άλλες πολιτείες ακολούθησαν το παράδειγμά τους τα επόμενα χρόνια. Κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2018-2019, 13 πολιτείες θα χορηγήσουν το τεστ ACT σε όλους τους μαθητές της 11ης τάξης του δημόσιου σχολείου και άλλες έξι πολιτείες θα χρηματοδοτήσουν τη διαχείριση των εξετάσεων ACT.

Ενώ ο ακριβής τρόπος με τον οποίο οι βαθμολογίες ACT θα βοηθήσουν στον προσδιορισμό της εισδοχής ενός φοιτητή σε αμερικανικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι γενικά ένα θέμα που αποφασίζεται από το μεμονωμένο ίδρυμα, ορισμένες ξένες χώρες έχουν καταστήσει τις βαθμολογίες ACT (και SAT) κριτήριο για να αποφασίσουν εάν οι κάτοχοι αμερικανικών διπλωμάτων γυμνασίου θα γίνουν δεκτοί στα δημόσια πανεπιστήμιά τους.

Το ACT χρησιμοποιείται ευρύτερα στις μεσοδυτικές, βραχώδεις ορεινές και νότιες Ηνωμένες Πολιτείες, ενώ το SAT είναι πιο δημοφιλές στις ανατολικές και δυτικές ακτές. Πρόσφατα, ωστόσο, η ACT χρησιμοποιείται περισσότερο στην Ανατολική Ακτή.

Δομή

Το απαιτούμενο τμήμα του ACT χωρίζεται σε τέσσερις θεματικές δοκιμασίες πολλαπλής επιλογής: αγγλικά, μαθηματικά, ανάγνωση και επιστημονική συλλογιστική. Οι βαθμολογίες των θεματικών εξετάσεων κυμαίνονται από 1 έως 36. Όλες οι βαθμολογίες είναι ακέραιοι. Τα τεστ αγγλικών, μαθηματικών και ανάγνωσης έχουν επίσης επιμέρους βαθμολογίες που κυμαίνονται από 1 έως 18 (η βαθμολογία του θέματος δεν είναι το άθροισμα των επιμέρους βαθμολογιών). Επιπλέον, οι μαθητές που λαμβάνουν το προαιρετικό γραπτό τεστ λαμβάνουν βαθμολογία που κυμαίνεται από 2 έως 12 (αυτή είναι μια αλλαγή από το προηγούμενο εύρος βαθμολογίας 1-36). Η βαθμολογία συγγραφής δεν επηρεάζει τη σύνθετη βαθμολογία.

Ένας μαθητής μπορεί να απαντήσει σε όλες τις ερωτήσεις χωρίς μείωση της βαθμολογίας του λόγω λανθασμένων απαντήσεων. Αυτό είναι παράλληλο με αρκετές εξετάσεις AP που εξαλείφουν τις ποινές για λανθασμένες απαντήσεις. Για να βελτιώσουν το αποτέλεσμα, οι μαθητές μπορούν να επαναλάβουν το τεστ: το 55% των μαθητών που επαναλαμβάνουν το ACT βελτιώνουν τις βαθμολογίες τους, το 22% βαθμολογούν το ίδιο και το 23% βλέπουν τις βαθμολογίες τους να μειώνονται.

Αγγλικά

Η πρώτη ενότητα είναι το 45λεπτο αγγλικό τεστ που καλύπτει τη χρήση / συντακτικό, τη δομή προτάσεων και τις ρητορικές δεξιότητες. Η δοκιμασία των 75 ερωτήσεων αποτελείται από πέντε κείμενα με διάφορες ενότητες υπογραμμισμένες στη μία πλευρά της σελίδας και επιλογές για τη διόρθωση των υπογραμμισμένων τμημάτων στην άλλη πλευρά της σελίδας. Συγκεκριμένα, οι ερωτήσεις επικεντρώνονται στη χρήση και το συντακτικό– ζητήματα όπως κόμματα, απόστροφοι, άνω και κάτω τελεία – καθώς και στις ρητορικές δεξιότητες – ύφος (σαφήνεια και συντομία), στρατηγική, μεταβάσεις και οργάνωση (προτάσεις σε μια παράγραφο και παράγραφοι σε ένα κείμενο) – και δομή προτάσεων – κατασκευή προτάσεων με υφολογικά και γραμματικά σωστό τρόπο.

Μαθηματικά

Η δεύτερη ενότητα είναι ένα τεστ μαθηματικών 60 λεπτών, 60 ερωτήσεων με τη συνήθη κατανομή των ερωτήσεων να είναι περίπου 14 που καλύπτουν την προ-άλγεβρα, 10 στοιχειώδη άλγεβρα, 9 ενδιάμεση άλγεβρα, 14 γεωμετρία επιπέδου, 9 γεωμετρία συντεταγμένων και 4 στοιχειώδεις ερωτήσεις τριγωνομετρίας. Ωστόσο, η κατανομή των θεμάτων των ερωτήσεων ποικίλλει από δοκιμασία σε δοκιμασία. Η δυσκολία των ερωτήσεων συνήθως αυξάνεται καθώς φτάνετε σε υψηλότερους αριθμούς ερωτήσεων. Οι αριθμομηχανές επιτρέπονται μόνο σε αυτήν την ενότητα. Οι απαιτήσεις αριθμομηχανής είναι αυστηρότερες από τις SAT στο ότι δεν επιτρέπονται συστήματα άλγεβρας υπολογιστών (όπως το TI-89). Ωστόσο, το ACT επιτρέπει αριθμομηχανές με χαρτοταινίες, που κάνουν θόρυβο (αλλά πρέπει να απενεργοποιηθούν) ή που έχουν καλώδια τροφοδοσίας με ορισμένες "τροποποιήσεις" (δηλαδή, απενεργοποιώντας τα αναφερόμενα χαρακτηριστικά), τα οποία το SAT δεν επιτρέπει. Επιτρέπονται τυπικοί υπολογιστές γραφημάτων, όπως οι TI-83 και TI-84. Εντός της οικογένειας TI-Nspire, οι τυπικές εκδόσεις και οι εκδόσεις CX επιτρέπονται, ενώ το CX CAS όχι. Αυτή είναι η μόνη ενότητα που έχει πέντε επιλογές απαντήσεων ανά ερώτηση αντί για τέσσερις.

Ανάγνωση
Η ενότητα ανάγνωσης είναι ένα τεστ 35 λεπτών και 40 ερωτήσεων που αποτελείται από τέσσερις ενότητες, τρεις από τις οποίες περιέχουν ένα μεγάλο πεζό κείμενο και μία που περιέχει δύο μικρότερα πεζά κείμενα. Τα κείμενα είναι αντιπροσωπευτικά των επιπέδων και των ειδών κειμένου που συναντώνται συνήθως στο πρόγραμμα σπουδών του πρώτου έτους. Αυτό το τεστ ανάγνωσης αξιολογεί τις δεξιότητες σε τρεις γενικές κατηγορίες: βασικές ιδέες και λεπτομέρειες, τέχνη και δομή και ενσωμάτωση γνώσεων και ιδεών. Οι ερωτήσεις συνήθως ζητούν από τους μαθητές να αντλήσουν νόημα από κείμενα που αναφέρονται σε αυτό που δηλώνεται ρητά ή με συλλογισμό για να προσδιορίσουν σιωπηρές έννοιες. Συγκεκριμένα, οι ερωτήσεις θα σας ζητήσουν να χρησιμοποιήσετε δεξιότητες παραπομπής και συλλογισμού για να προσδιορίσετε τις κύριες ιδέες, να εντοπίσετε και ερμηνεύσετε σημαντικές λεπτομέρειες, να κατανοήσετε τις ακολουθίες των γεγονότων, να κάνετε συγκρίσεις, να κατανοήσετε τις σχέσεις αιτίας-αποτελέσματος, να προσδιορίσετε τη σημασία λέξεων, φράσεων και δηλώσεων που εξαρτώνται από τα συμφραζόμενα, να σχεδιάσετε γενικεύσεις και να αναλύστε το ύφος και τη μέθοδο του συγγραφέα ή του αφηγητή.

Επιστήμη
Η προαιρετική ενότητα επιστήμης είναι ένα τεστ 35 λεπτών και 40 ερωτήσεων. Υπάρχουν επτά κείμενα το καθένα ακολουθούμενα από πέντε έως επτά ερωτήσεις. Τα κείμενα έχουν τρεις διαφορετικές μορφές: Αναπαράσταση δεδομένων, Περίληψη έρευνας και Αντικρουόμενες απόψεις.

Συγγραφή
Η προαιρετική ενότητα γραπτού λόγου, η οποία χορηγείται πάντα στο τέλος της εξέτασης, είναι 40 λεπτά. Ενώ δεν απαιτείται συγκεκριμένη δομή έκθεσης, τα δοκίμια πρέπει να ανταποκρίνονται σε μια δεδομένη προτροπή. Οι προτροπές αφορούν ευρύτερα κοινωνικά ζητήματα και οι μαθητές πρέπει να αναλύσουν τρεις διαφορετικές προοπτικές που δίνονται και να δείξουν πώς η γνώμη τους σχετίζεται με αυτές τις προοπτικές. Το δοκίμιο δεν επηρεάζει τη σύνθετη βαθμολογία ή τη βαθμολογία της αγγλικής ενότητας, δίνεται μόνο ως ξεχωριστή βαθμολογία συγγραφής και περιλαμβάνεται στη βαθμολογία ELA.

Αν και η ενότητα αυτή είναι προαιρετική, πολλά κολέγια απαιτούν βαθμολογία έκθεσης και θα την λάβουν υπόψη στην απόφαση εισαγωγής (αλλά λιγότερα από τα μισά από όλα τα κολέγια έχουν αυτήν την απαίτηση).

Συγκρίσεις βαθμολογίας SAT–ACT
Το College Board και η ACT, Inc., διεξήγαγαν κοινή μελέτη φοιτητών που έλαβαν τόσο το SAT όσο και το ACT μεταξύ Σεπτεμβρίου 2004 (για το ACT) ή Μαρτίου 2005 (για το SAT) και Ιουνίου 2006. Οι πίνακες δόθηκαν για τις βαθμολογίες concord για τους μαθητές που έλαβαν το SAT μετά τον Ιανουάριο του 2005 και πριν από τον Μάρτιο του 2016. Τον Μάιο του 2016, το Συμβούλιο του Κολλεγίου κυκλοφόρησε πίνακες αντιστοιχίας για βαθμολογίες συμφωνίας στο SAT που χρησιμοποιήθηκε από τον Μάρτιο του 2005 έως τον Ιανουάριο του 2016 στο SAT που χρησιμοποιήθηκε από τον Μάρτιο του 2016, καθώς και πίνακες για βαθμολογίες συμφωνίας στο SAT που χρησιμοποιήθηκε από τον Μάρτιο του 2016 στο ACT.
Το 2018, το College Board, σε συνεργασία με το ACT, εισήγαγε έναν νέο πίνακα συμφωνίας για να συγκρίνει καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής θα πήγαινε στο ένα τεστ ή στο άλλο. Αυτό θεωρείται πλέον η επίσημη συμφωνία που πρέπει να χρησιμοποιείται από τους επαγγελματίες κολλεγίων και αντικαθιστά εκείνη από το 2016. Η νέα συμφωνία δεν περιλαμβάνει πλέον το παλιό SAT (από 2.400), μόνο το νέο SAT (από 1.600) και το ACT (από 36).

Από το 2018, το καταλληλότερο αντίστοιχο σημείο βαθμολογίας SAT για τη δεδομένη βαθμολογία ACT παρουσιάζεται επίσης στον παρακάτω πίνακα.

Σύνθετη βαθμολογία ACT	Εύρος συνολικής βαθμολογίας SAT	Συνολική βαθμολογία SAT
36	1570–1600	1590
35	1530–1560	1540
34	1490–1520	1500
33	1450–1480	1460
32	1420–1440	1430
31	1390–1410	1400
30	1360–1380	1370
29	1330–1350	1340
28	1300–1320	1310
27	1260–1290	1280
26	1230–1250	1240
25	1200–1220	1210
24	1160–1190	1180
23	1130–1150	1140
22	1100–1120	1110
21	1060–1090	1080
20	1030–1050	1040
19	990–1020	1010
18	960–980	970
17	920–950	930
16	880–910	890
15	830–870	850
14	780–820	800
13	730–770	760
12	690–720	710
11	650–680	670
10	620–640	630
9	590–610	590

[Advanced Placement (AP)]
Τα Advanced Placement (AP) είναι μαθήματα πανεπιστημιακού επιπέδου που διδάσκονται στο γυμνάσιο. Μπορούν να μελετηθούν παράλληλα ή αντί των απαιτούμενων μαθημάτων. Για παράδειγμα, το μάθημα Advanced Microeconomics περιέχει όλη την ύλη από το βασικό μάθημα άλγεβρας, οπότε το τελευταίο δεν απαιτείται να ληφθεί ξεχωριστά.

Τα AP είναι μαθήματα επιλογής αυξημένης δυσκολίας. Οι μαθητές δεν υποχρεούνται να τα συμπεριλάβουν στο πρόγραμμα σπουδών τους, αλλά αυτό θα είναι ένα τεράστιο πλεονέκτημα κατά την είσοδό τους σε ένα πανεπιστήμιο. Τα μαθήματα και ο αριθμός τους πρέπει να επιλεγούν, εστιάζοντας στο μελλοντικό πανεπιστήμιο και ειδικότητα. Έτσι, όταν υποβάλλετε αίτηση σε ελίτ ιδρύματα όπως το Χάρβαρντ, συνιστάται να έχετε τουλάχιστον 7 μαθήματα AP. Για τα πανεπιστήμια με χαμηλότερη βαθμίδα, 4-5 θα είναι αρκετά. Ορισμένα πανεπιστήμια ενδέχεται να μεταφέρουν πιστώσεις μαθημάτων AP.

Τα AP έχουν συνολικά 38 κλάδους. Τα ιδιωτικά σχολεία έχουν συνήθως κατά μέσο όρο 15. Εκτός από το AP, υπάρχουν και άλλοι τύποι προχωρημένων μαθημάτων: για παράδειγμα, CL (College Level) ή Honors. Εξαιτίας αυτού, ο συνολικός αριθμός των AP που αναφέρονται στον ιστότοπο του σχολείου μπορεί να είναι μεγαλύτερος από 38.

[AP Calculus Test]
Το Advanced Placement (AP) Calculus (επίσης γνωστό ως AP Calc, Calc AB / BC, AB / BC Calc ή απλά AB / BC) είναι ένα σύνολο δύο ξεχωριστών μαθημάτων και εξετάσεων λογισμού προχωρημένου επιπέδου που προσφέρονται από τον αμερικανικό μη κερδοσκοπικό οργανισμό College Board. Το AP Calculus AB καλύπτει βασικές εισαγωγές σε όρια, παραγώγους και ολοκληρώματα. Το AP Calculus BC καλύπτει όλα τα θέματα AP Calculus AB καθώς και πρόσθετα θέματα (συμπεριλαμβανομένης της ολοκλήρωσης κατά μέρη, σειρές Taylor, παραμετρικές εξισώσεις, διανυσματικός λογισμός και συναρτήσεις πολικών συντεταγμένων).

Σκοπός
Ένα μάθημα AP στον λογισμό αποτελείται από ένα πλήρες ακαδημαϊκό έτος εργασίας γυμνασίου που είναι συγκρίσιμο με τα μαθήματα λογισμού σε κολέγια και πανεπιστήμια. Το πρόγραμμα AP περιλαμβάνει προδιαγραφές για δύο μαθήματα λογισμού και την εξέταση για κάθε μάθημα. Τα δύο μαθήματα και οι δύο αντίστοιχες εξετάσεις ορίζονται ως Απειροστικός Λογισμός AB και Απειροστικός Λογισμός BC. Το Calculus AB μπορεί να προσφερθεί ως μάθημα AP από οποιοδήποτε σχολείο που μπορεί να οργανώσει ένα πρόγραμμα σπουδών για μαθητές με προχωρημένη μαθηματική ικανότητα.

Περίγραμμα
Η ύλη περιλαμβάνει τη μελέτη και εφαρμογή της διαφόρισης και της ολοκλήρωσης, καθώς και γραφική ανάλυση συμπεριλαμβανομένων των ορίων, των ασυμπτωτικών και της συνέχειας.

Ένα μάθημα AP Calculus AB είναι συνήθως ισοδύναμο με ένα εξάμηνο λογισμού κολλεγίων.

- Ανάλυση γραφημάτων (πρόβλεψη και επεξήγηση συμπεριφοράς)
- Όρια συναρτήσεων (μονής και διπλής όψης)
- Ασυμπτωτική συμπεριφορά και συμπεριφορά στο άπειρο
- Συνέχεια
- Παράγωγοι

    - Έννοια
    - Σε ένα σημείο
    - Ως συνάρτηση
    - Εφαρμογές
    - Παράγωγοι υψηλότερης τάξης
    - Τεχνικές
- Ολοκληρώματα
    - Έννοια
    - Ιδιότητες
    - Εφαρμογές
    - Τεχνικές
    - Αριθμητικές προσεγγίσεις
- Θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού
- Αρχικές συναρτήσεις
- Ο κανόνας του L'Hôpital
- Διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις

Το μάθημα AP Calculus λαμβάνεται συνήθως στην Αμερική, αλλά πολλά σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εκτός των Ηνωμένων Πολιτειών προσφέρουν εγκεκριμένα μαθήματα AP. Τα AB και BC είναι ισοδύναμα με ένα εξάμηνο μαθημάτων λογισμού (Απειροστικός Λογισμός I και Λογισμός II αντίστοιχα).

Το AP Calculus BC είναι ισοδύναμο με ένα πλήρες έτος κανονικού κολεγιακού μαθήματος, που καλύπτει τόσο τον Λογισμό I όσο και τον II. Αφού περάσουν τις εξετάσεις, οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν στον Λογισμό III (Πολυμεταβλητός Λογισμός).

Σκοπός
Ο λογισμός BC είναι ένα μάθημα πλήρους έτους στον λογισμό των συναρτήσεων μιας μεμονωμένης μεταβλητής. Περιλαμβάνει όλα τα θέματα που καλύπτονται στο Calculus AB συν επιπλέον θέματα. Οι μαθητές που παρακολουθούν ένα μάθημα AP Calculus θα πρέπει να το κάνουν με την πρόθεση να τοποθετηθούν από ένα συγκρίσιμο μάθημα λογισμού κολλεγίων.

Περίγραμμα θέματος
Το AP Calculus BC περιλαμβάνει όλα τα θέματα που καλύπτονται στο AP Calculus AB, καθώς και τα ακόλουθα:

- Τεστ σύγκλισης για σειρές
- Σειρά Taylor
- Παραμετρικές εξισώσεις
- Πολικές συναρτήσεις (συμπεριλαμβανομένου του μήκους τόξου σε πολικές συντεταγμένες και του υπολογισμού εμβαδού)
- Υπολογισμοί μήκους τόξου με χρήση ολοκλήρωσης
- Ολοκλήρωση κατά μέρη
- Γενικευμένα ολοκληρώματα
- Διαφορικές εξισώσεις και λογιστική συνάρτηση
- Χρήση μερικών κλασμάτων για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

[GRE Test]
Το θεματικό τεστ GRE στα μαθηματικά είναι ένα τυποποιημένο τεστ στις Ηνωμένες Πολιτείες που δημιουργήθηκε από την Υπηρεσία Εκπαιδευτικών Εξετάσεων (ETS) και έχει σχεδιαστεί για να αξιολογεί τις δυνατότητες ενός υποψηφίου για **μεταπτυχιακές** ή μεταπτυχιακές σπουδές στον τομέα των μαθηματικών. Περιέχει ερωτήσεις από πολλούς τομείς των μαθηματικών. Περίπου το 50% των ερωτήσεων προέρχονται από τον λογισμό (συμπεριλαμβανομένων των θεμάτων προ-λογισμού, του πολυμεταβλητού λογισμού και των διαφορικών εξισώσεων), το 25% προέρχεται από την άλγεβρα (συμπεριλαμβανομένης της γραμμικής άλγεβρας, της αφηρημένης άλγεβρας και της θεωρίας αριθμών) και το 25% προέρχεται από μια ευρεία ποικιλία άλλων θεμάτων που απαντώνται συνήθως σε προπτυχιακά μαθήματα μαθηματικών, όπως τοπολογία, πιθανότητες και στατιστική, γεωμετρία, και πραγματική ανάλυση.

Μέχρι τη διοίκηση του Σεπτεμβρίου 2023, το τεστ θέματος GRE στα Μαθηματικά βασιζόταν σε χαρτί, σε αντίθεση με το γενικό τεστ GRE που συνήθως βασίζεται σε υπολογιστή. Από τότε, έχει μεταφερθεί στο διαδίκτυο. Περιέχει περίπου 66 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, οι οποίες πρέπει να απαντηθούν εντός 2 ωρών και 50 λεπτών. Οι βαθμολογίες σε αυτή την εξέταση απαιτούνται για την είσοδο στα περισσότερα μαθηματικά Ph.D. προγράμματα στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Οι εξετάσεις πραγματοποιούνται γενικά τρεις φορές το χρόνο, μέσα σε ένα παράθυρο περίπου 14 ημερών σε κάθε Σεπτέμβριο, Οκτώβριο και Απρίλιο. Οι φοιτητές πρέπει να εγγραφούν για την εξέταση περίπου πέντε εβδομάδες πριν από τη διεξαγωγή της εξέτασης.

The SAT

October 1, 2022
U.S.

CollegeBoard

Μαθηματικά - Χωρίς Αριθμομηχανή

25 ΛΕΠΤΑ, 20 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

Για τις ερωτήσεις 1-15, λύστε κάθε πρόβλημα, επιλέξτε την καλύτερη απάντηση από τις επιλογές που παρέχονται και συμπληρώστε τον αντίστοιχο κύκλο στο φύλλο απαντήσεών σας. Για τις ερωτήσεις 16-20, λύστε το πρόβλημα και πληκτρολογήστε την απάντησή σας στο φύλλο απαντήσεων. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε διαθέσιμο χώρο στο φυλλάδιο του διαγωνίσματός σας για πρόχειρο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής.

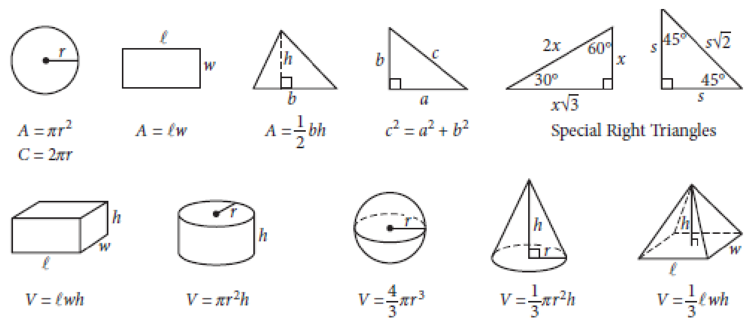
2. Όλες οι μεταβλητές και οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται αντιπροσωπεύουν πραγματικούς αριθμούς εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

3. Τα σχήματα που παρέχονται σε αυτό το τεστ σχεδιάζονται σε κλίμακα εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

4. Όλα τα σχήματα βρίσκονται σε ένα επίπεδο εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

5. Εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά, το πεδίο ορισμού μιας δεδομένης συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $\boldsymbol{x}$ για τους οποίους η $\boldsymbol{f(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός.

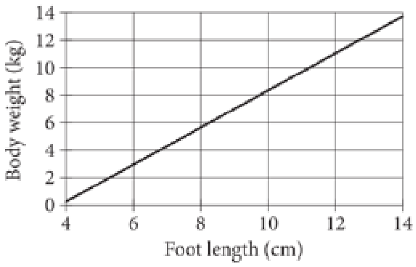
Τυπολόγιο



Ο αριθμός των μοιρών σε έναν κύκλο είναι **360**.

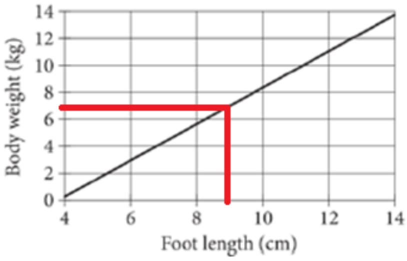
Ο αριθμός των ακτινίων σε έναν κύκλο είναι $\boldsymbol{2\pi}$.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου σε μοίρες είναι **180**.

1. 

Η γραμμή μοντελοποιεί τη σχέση μεταξύ σωματικού βάρους και μήκους ποδιού για μια ομάδα βρεφών. Με βάση το μοντέλο, ποιο είναι το προβλεπόμενο βάρος, σε κιλά (kg), ενός βρέφους με μήκος ποδιού 9 εκατοστά (cm);

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, 7kgr, άρα B

2. Το ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{AC}$ έχει μήκος 120 και περιέχει το σημείο $\boldsymbol{B}$. Αν $\boldsymbol{AB = 5x + 20}$ και $\boldsymbol{BC = 6x - 10}$, ποια εξίσωση εκφράζει τη σχέση μεταξύ των μηκών των τμημάτων $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$ και $\boldsymbol{AC}$;

A) $\boldsymbol{5x + 20 = 120}$ B) $\boldsymbol{6x - 10 = 120}$ C) $\boldsymbol{(5x + 20) - (6x - 10) = 120}$ D) $\boldsymbol{(5x + 20) + (6x - 10) = 120}$

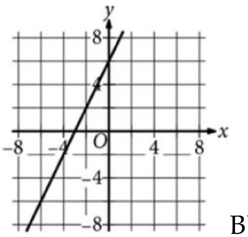
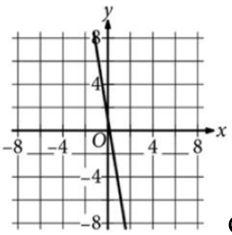
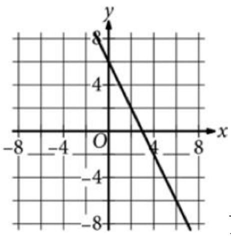
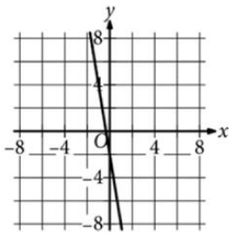
Έχω $\boldsymbol{AB + BC = AC \Rightarrow (5x + 20) + (6x - 10) = 120}$, άρα D

3. Έστω $\boldsymbol{x = 4}$, $\boldsymbol{y = \frac{x}{4} + 2}$ Ποια είναι η λύση $\boldsymbol{(x, y)}$ σε αυτό το σύστημα εξισώσεων;

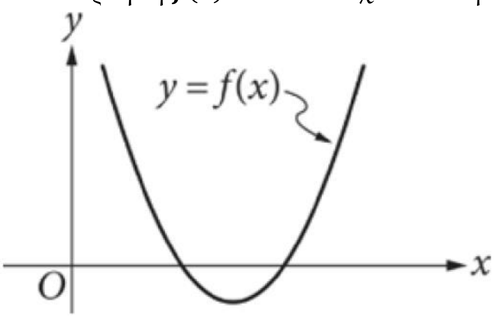
A) $\boldsymbol{(4, 6)}$ B) $\boldsymbol{(4, 3)}$ C) $\boldsymbol{(4, 2)}$ D) $\boldsymbol{(4, 1)}$

Έχω $\boldsymbol{(x, y) = \left(4, \frac{4}{4} + 2\right) = (4, 3)}$, άρα B

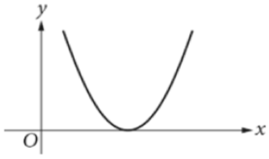
4. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει τύπο $\boldsymbol{f(x) = 2x + 6}$. Ποιο το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$;

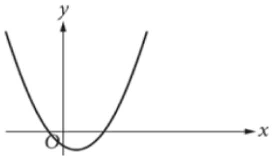
A)  B)  C)  D) 

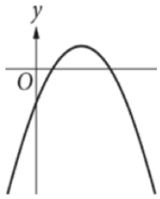
Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = 2x + 6}$ έχει θετική κλίση, δηλαδή είναι αύξουσα, άρα A

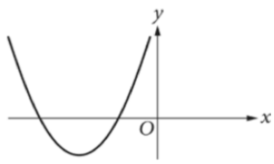
5. 

Το γράφηματηςτετραγωνικής συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ φαίνεται στο σχήμα, όπου $\boldsymbol{y = f(x)}$. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x) + 2}$;

A) 

B) 

C) 

D) 

Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x) + 2}$ προκύπτει με μετακίνηση του γραφήματος της $\boldsymbol{y = f(x)}$ προς τα πάνω κατά 2 μονάδες, άρα A

6. Η συνάρτηση $\boldsymbol{q}$ έχει τύπο $\boldsymbol{q(x) = 5(-1)^x}$, όπου ο $\boldsymbol{x}$ είναι ακέραιος. Ποια η τιμή του $\boldsymbol{q(6)}$;

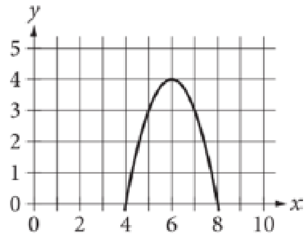
A) $\boldsymbol{-30}$ B) $\boldsymbol{-5}$ C) 5 D) 30

Έχω $\boldsymbol{q(6) = 5(-1)^6 = 5 \cdot 1 = 5}$, άρα C

7. $\boldsymbol{\frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)} = 0}$ Ποια τιμή είναι ρίζα της εξίσωσης;

A) 4 B) 2 C) $\boldsymbol{0}$ D) $\boldsymbol{-2}$

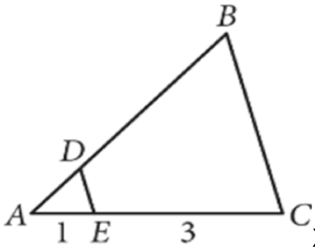
Έχω για $\boldsymbol{x \neq 4}$, $\boldsymbol{\frac{(x-4)(x+2)}{(x-4)} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2}$, άρα D

8. 

Ποια η εξίσωση του γραφήματος;

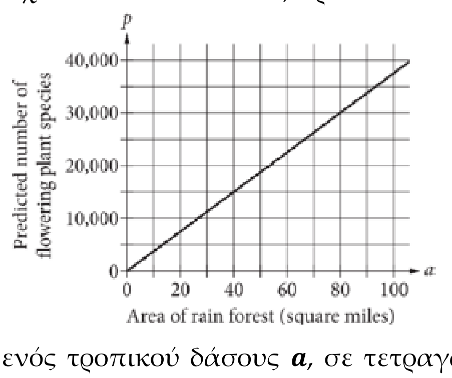
A) $\boldsymbol{y = -(x-4)^2 + 8}$ B) $\boldsymbol{y = (x+4)^2 - 8}$ C) $\boldsymbol{y = -(x-6)^2 + 4}$ D) $\boldsymbol{y = (x+6)^2 - 4}$

Η συνάρτηση έχει ρίζες το 4 και το 8 άρα $\boldsymbol{y = a(x-4)(x-8)}$, με $\boldsymbol{y(6) = 4 \Leftrightarrow 4 = a(6-4)(6-8) \Leftrightarrow 4 = a(-4) \Leftrightarrow a = -1}$. Άρα $\boldsymbol{y = -(x-4)(x-8) = -(x^2 - 12x + 32) = -((x-6)^2 - 4) = -(x-6)^2 + 4}$, άρα C

9. 

Στην διπλανή εικόνα, το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\boldsymbol{ADE}$ έτσι ώστε το $\boldsymbol{B}$ να αντιστοιχεί στο $\boldsymbol{D}$ και το $\boldsymbol{C}$ να αντιστοιχεί στο $\boldsymbol{E}$. Η γωνία $\boldsymbol{ABC}$ είναι $\boldsymbol{60°}$. Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\boldsymbol{ADE}$? A) $\boldsymbol{15^o}$ B) $\boldsymbol{20^o}$ C) $\boldsymbol{45^o}$ D) $\boldsymbol{60^o}$

Έχω $\boldsymbol{A\widehat{D}E = A\widehat{B}C = 60°}$, άρα D.

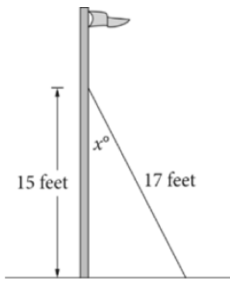
10. 

Το γράφημα μοντελοποιεί τη σχέση μεταξύ της έκτασης ενός τροπικού δάσους $\boldsymbol{a}$, σε τετραγωνικά μίλια, και του προβλεπόμενου αριθμού ανθοφόρων φυτών, $\boldsymbol{p}$, που βρίσκονται σε αυτήν την περιοχή. Ποια εξίσωση αντιπροσωπεύει αυτή τη σχέση;

A) $\boldsymbol{p = 200a}$ B) $\boldsymbol{p = 375a}$ C) $\boldsymbol{p = 500a}$ D) $\boldsymbol{p = 750a}$

Είναι της μορφής $\boldsymbol{p = \lambda a}$, με $\boldsymbol{p(40) = 15000 \Rightarrow 40\lambda = 15000 \Rightarrow \lambda = 375}$, άρα B

11. $\boldsymbol{p=\frac{2}{n}+3}$ Η εξίσωση αυτή σχετίζει τις μεταβλητές $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{n}$, όπου ο $\boldsymbol{n\neq 0}$ and $\boldsymbol{p>3}$. Ποια εξίσωση εκφράζει τη μεταβλητή $\boldsymbol{n}$ ως προς $\boldsymbol{p}$; A) $\boldsymbol{n=\frac{p}{2}-3}$ B) $\boldsymbol{n=\frac{p}{2}+3}$ C) $\boldsymbol{n=\frac{2}{p-3}}$ D) $\boldsymbol{n=-\frac{2}{p+3}}$
    Έχω $\boldsymbol{p=\frac{2}{n}+3\Leftrightarrow p-3=\frac{2}{n}\Leftrightarrow n=\frac{2}{p-3}}$, άρα C
12. $\boldsymbol{y=3x+5}$, $\boldsymbol{y=px+8}$ Σε αυτό το σύστημα εξισώσεων, ο $\boldsymbol{p}$ είναι μια σταθερά. Το σύστημα δεν έχει λύση. Ποια η τιμή του $\boldsymbol{p}$; A) $\boldsymbol{-3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3
    Για να είναι αδύνατο πρέπει οι δυο ευθείες να είναι παράλληλες, δηλαδή με ίδια κλίση, άρα D
13. $\boldsymbol{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$ Ποια από τις ακόλουθες εκφράσεις είναι ίση με τη δοσμένη έκφραση, όπου $\boldsymbol{x\geq 0}$ και $\boldsymbol{y\geq 0}$? A) $\boldsymbol{x+\sqrt{xy}}$ B) $\boldsymbol{x+\sqrt{x+y}}$ C) $\boldsymbol{\sqrt{x^2+xy}}$ D) $\boldsymbol{\sqrt{x^2+x+y}}$
    Έχω $\boldsymbol{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}*\sqrt{y}=x+\sqrt{xy}}$, άρα A
14. Ζητήθηκε από τον Τζο να απομνημονεύσει μια λίστα με 200 λέξεις λεξιλογίου και αξιολογήθηκε ως προς την απομνημόνευση των λέξεων σε διάστημα 3 ημερών. Την 1η ημέρα, θυμήθηκε και τις 200 λέξεις. Κάθε μία από τις επόμενες δύο ημέρες, ο Τζο θυμόταν 10% λιγότερες λέξεις από ό,τι την προηγούμενη μέρα. Πόσες λέξεις θυμήθηκε ο Τζο την 3η ημέρα; A) 160 B) 162 C) 172 D) 180
    Την δεύτερη ημέρα θυμήθηκε $\boldsymbol{200\cdot 90\%=180}$ λέξεις και την Τρίτη μέρα $\boldsymbol{180\cdot 90\%=162}$ λέξεις, άρα B
15. $\boldsymbol{x^2+y^2-16x-4y+32=0}$ Στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$, το γράφημα της εξίσωσης είναι ένας κύκλος. Ποιο το μήκος της ακτίνας του κύκλου αυτού; A) 2 B) 6 C) 8 D) 36
    Έχω $\boldsymbol{x^2+y^2-16x-4y+32=0\Leftrightarrow x^2-16x+64+y^2-4y+4-36=0\Leftrightarrow (x-8)^2+(y-2)^2=6^2}$. Άρα η ακτίνα είναι 6, άρα B
16. $\boldsymbol{|2x|=64}$. Ποια είναι η θετική ρίζα $\boldsymbol{x}$ της εξίσωσης αυτής;
    Έχω $\boldsymbol{|2x|=64\Leftrightarrow 2x=\pm 64\Leftrightarrow x=\pm 32}$. Άρα η θετική ρίζα είναι η $\mathbf{x}=\boxed{\mathbf{32}}$
17. Η εξίσωση της ευθείας $\boldsymbol{k}$ είναι η $\boldsymbol{y=7x+2}$. Ποια η κλίση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $\boldsymbol{k}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$;
    Η κλίση της $\boldsymbol{k}$ είναι ίση με $\boxed{\mathbf{7}}$, όπως και κάθε ευθείας παράλληλη με αυτήν.
18. Αν $\boldsymbol{\frac{2}{3}p+4=10}$, ποια είναι η τιμή του $\mathbf{3p}$;
    Έχω $\boldsymbol{\frac{2}{3}p+4=10\Leftrightarrow\frac{2}{3}p=6\Leftrightarrow\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}p=\frac{9}{2}\cdot 6\Leftrightarrow 3p=}\boxed{\mathbf{27}}$
19. $\boldsymbol{(x^3-6x+5)(3x^2+x)}$ Αν η έκφραση αυτή γραφεί στην μορφή $\boldsymbol{ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex}$, όπου $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, και $\boldsymbol{e}$ είναι σταθερές, ποια είναι η τιμή του $\boldsymbol{d}$;
    Έχω $\boldsymbol{(x^3-6x+5)(3x^2+x)=\cdots 5\cdot 3x^2-6x\cdot x\ldots=\cdots 9x^2\ldots}$, άρα $\boldsymbol{d}=\boxed{\mathbf{9}}$
20. Το σχήμα δείχνει το κατάρτι ενός σκάφους που είναι εγκατεστημένο κάθετα στο κατάστρωμα του σκάφους. Ο ιστός ασφαλίζεται με ένα σχοινί που είναι αγκυρωμένο στο κατάστρωμα. Το σχοινί έχει μήκος 17 πόδια και κάνει γωνία $\boldsymbol{x^o}$ με τον ιστό. Το σημείο όπου το σχοινί είναι συνδεδεμένο με τον ιστό είναι 15 πόδια πάνω από το κατάστρωμα. Ποια είναι η τιμή του $\mathbf{tan}\,(\boldsymbol{x^o})$;
    Η απέναντι κάθετη πλευρά από την γωνία $\boldsymbol{x^o}$ έχει μήκος $\boldsymbol{\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{289-225}=\sqrt{64}=8}$, άρα $\mathbf{tan}\,(\boldsymbol{x^o})=\boxed{\mathbf{\frac{8}{15}}}$



ΣΤΑΜΑΤΗΣΤΕ

Εάν τελειώσατε πρόωρα, μπορείτε να ελέγξετε την εργασία σας μόνο σε αυτήν την ενότητα. Μην προχωρήσετε σε καμία άλλη ενότητα.

Μαθηματικά - Με αριθμομηχανή

55 ΛΕΠΤΑ, 38 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

Για τις ερωτήσεις 1-30, λύστε κάθε πρόβλημα, επιλέξτε την καλύτερη απάντηση από τις επιλογές που παρέχονται και συμπληρώστε τον αντίστοιχο κύκλο στο φύλλο απαντήσεών σας. Για τις ερωτήσεις 31-38, λύστε το πρόβλημα και πληκτρολογήστε την απάντησή σας στο φύλλο απαντήσεων. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε διαθέσιμο χώρο στο φυλλάδιο του διαγωνίσματός σας για πρόχειρο.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής.

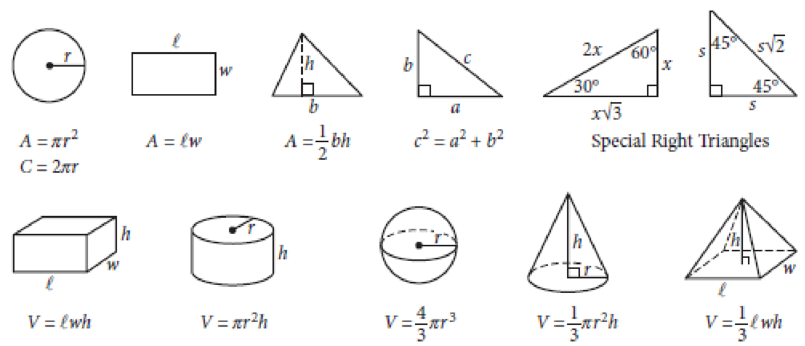
2. Όλες οι μεταβλητές και οι εκφράσεις που χρησιμοποιούνται αντιπροσωπεύουν πραγματικούς αριθμούς εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

3. Τα σχήματα που παρέχονται σε αυτό το τεστ σχεδιάζονται σε κλίμακα εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

4. Όλα τα σχήματα βρίσκονται σε ένα επίπεδο εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά.

5. Εκτός εάν υποδεικνύεται διαφορετικά, το πεδίο ορισμού μιας δεδομένης συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους η $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

Τυπολόγιο

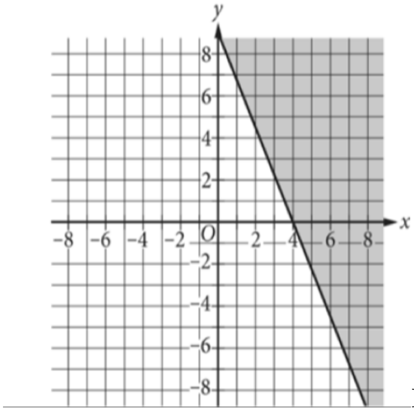


Ο αριθμός των μοιρών σε έναν κύκλο είναι **360**.

Ο αριθμός των ακτινίων σε έναν κύκλο είναι 2π.

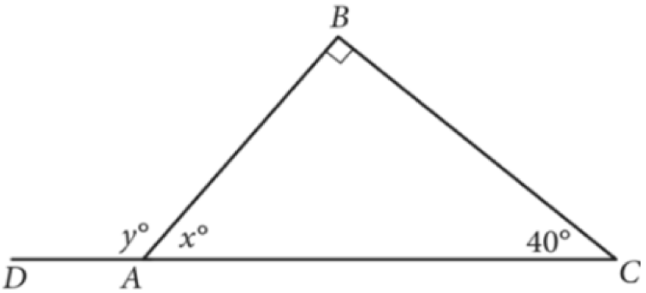
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου σε μοίρες είναι **180**.

1. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει τύπο $\boldsymbol{f(x) = 17x + 13}$. Ποια η τιμή του $\boldsymbol{f(8)}$; A) 38 B) 121 C) 136 D) 149
Έχω $\boldsymbol{f(8) = 17 \cdot 8 + 13 = 149}$, *άρα* D

2. 

Η σκιασμένη περιοχή του σχήματος αντιπροσωπεύει όλες τις λύσεις μιας ανίσωσης. Ποιο διατεταγμένο ζεύγος $\boldsymbol{(xy)}$ είναι μια λύση αυτής της ανίσωσης; A) $\boldsymbol{(5, 0)}$ B) $\boldsymbol{(0, 5)}$ C) $\boldsymbol{(-5, 0)}$ D) $\boldsymbol{(0, -5)}$
Το σημείο $\boldsymbol{(5, 0)}$ είναι το μόνο που βρίσκεται στην σκιασμένη περιοχή, *άρα* A

3. Ο ορθογώνιος πίνακας *Mona Lisa* του Λεονάρντο ντα Βίντσι έχει πλάτος 21 ίντσες και μήκος 30 ίντσες. Ένας καλλιτέχνης δημιουργεί ένα αντίγραφο της *Mona Lisa* μεγαλύτερης κλίμακας, όπου η εξίσωση $\boldsymbol{A = (21x)(30x)}$ δίνει το εμβαδόν του αντιγράφου, σε τετραγωνικές ίντσες. Ποια από τα παρακάτω είναι η καλύτερη ερμηνεία του $\boldsymbol{x}$ σε αυτό το πλαίσιο; A) Το πλάτος του αντιγράφου είναι x ίντσες μεγαλύτερο από το πλάτος της αρχικής *Mona Lisa*. B) Το μήκος του αντιγράφου είναι x ίντσες μεγαλύτερο από το μήκος της αρχικής *Mona Lisa*. C) Το μέτρο κάθε πλευράς του αντιγράφου είναι $\boldsymbol{x}$ φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της αντίστοιχης πλευράς της αρχικής *Mona Lisa*. D) Το εμβαδόν του αντιγράφου είναι $\boldsymbol{x}$ φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν της αρχικής *Mona Lisa*.
Το $\boldsymbol{x}$ δίνει την αναλογία-κλίμακα του αρχικού πίνακα προς το αντίγραφο με $\boldsymbol{x < 1}$, *άρα* C

4. 

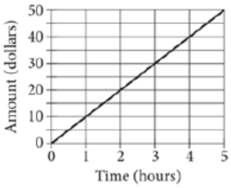
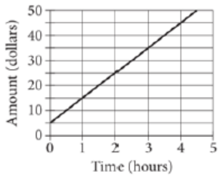
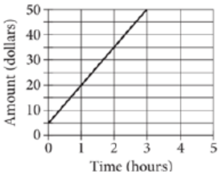
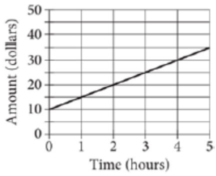
Στο τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$, η πλευρά $\boldsymbol{CA}$ προεκτείνεται ως το σημείο $\boldsymbol{D}$. Ποια η τιμή του $\boldsymbol{y}$; A) 50 B) 115 C) 130 D) 140
Έχω για την εξωτερική γωνία $\boldsymbol{y = 90 + 40 = 130}$, *άρα* C

Οι ερωτήσεις 5 και 6 αναφέρονται στις ακόλουθες πληροφορίες.

Η Ντακότα και ο Άλεξ εργάζονται ως μπέιμπι σίτερ. Για κάθε δουλειά φύλαξης παιδιών, η Ντακότα χρεώνει 10 \$ την ώρα συν μια πάγια αμοιβή 5 \$ για έξοδα ταξιδιού. Ο Alex χρεώνει 8 \$ την ώρα συν μια επιπλέον χρέωση 4 \$ ανά παιδί.

5. Η Ντακότα και ο Άλεξ έχουν διαφορετικές δουλειές ως μπέιμπι-σίτινγκ όπου ο καθένας θα φροντίζει 4 παιδιά για το ίδιο χρονικό διάστημα. Αν χρεώσουν το ίδιο συνολικό ποσό, σε δολάρια, για τις αντίστοιχες δουλειές τους, πόσες ώρες θα αφιερώσει ο καθένας σε φύλαξη παιδιών; A) 2,0 B) 3,0 C) 5,5 D) 10,5
Η Ντακότα για την φροντίδα 4 παιδιών για x ώρες χρεώνει $\boldsymbol{10x + 5}$\$, ενώ ο Άλεξ $\boldsymbol{8x + 4 \cdot 4}$\$.
Έχω $\boldsymbol{10x + 5 = 8x + 4 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = 5.5}$ ώρες, *άρα* C

6. Ποιο γράφημα δείχνει τη σχέση μεταξύ του χρόνου, σε ώρες, που ξοδεύει η Dakota για την φύλαξη παιδιών και του ποσού, σε δολάρια, που χρεώνει η Dakota για κάθε εργασία φύλαξης παιδιών;

A)  B)  C)  D) 

Για την Ντακότα έχω $\boldsymbol{y = 10x + 5}$, που περνά από τα σημεία $(\mathbf{0}, \mathbf{5})$ και $(\mathbf{4}, \mathbf{45})$, άρα B

7. Η ευθεία $\boldsymbol{l}$ έχει κλίση $\mathbf{-3}$ και τέμνει τον άξονα των $\boldsymbol{x}$ στο $\left(\frac{9}{2}, \mathbf{0}\right)$. Ποια είναι η τομή της ευθείας $\boldsymbol{l}$ με τον άξονα των $\boldsymbol{y}$; A) $\left(\frac{9}{2}, \mathbf{0}\right)$ B) $\left(\mathbf{0}, \frac{9}{2}\right)$ C) $\left(\frac{27}{2}, \mathbf{0}\right)$ D) $\left(\mathbf{0}, \frac{27}{2}\right)$

Έχω $\boldsymbol{y = -3x + b}$, με $\mathbf{0} = -\mathbf{3} \cdot \frac{9}{2} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \frac{27}{2} \Rightarrow \boldsymbol{y} = -\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \frac{27}{2}$, που τέμνει τον y'y στο $\left(\mathbf{0}, \frac{27}{2}\right)$, άρα D.

Οι ερωτήσεις 8 και 9 αναφέρονται στις ακόλουθες πληροφορίες.

Ο πίνακας δείχνει τις κατά προσέγγιση εκτάσεις γης, σε χιλιάδες στρέμματα, τεσσάρων εθνικών πάρκων στη Δυτική Βιρτζίνια.

National park	Area (in thousands of acres)
Bluestone National Scenic River	4.3
Gauley River National Recreation Area	11.6
Harpers Ferry National Historical Park	3.7
New River Gorge National River	72.2

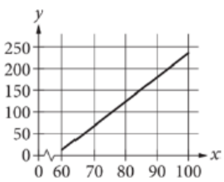
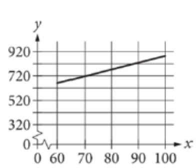
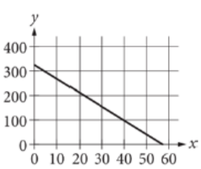
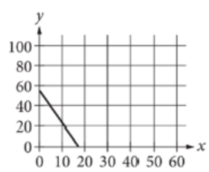
8. Ποιο είναι το εύρος των εκτάσεων αυτών τεσσάρων πάρκων του πίνακα, σε χιλιάδες στρέμματα; A) 91.8 B) 72.2 C) 68.5 D) 36. 1

$\boldsymbol{Εύρος = max - min = 72.2 - 3.7 = 68.5}$, άρα C

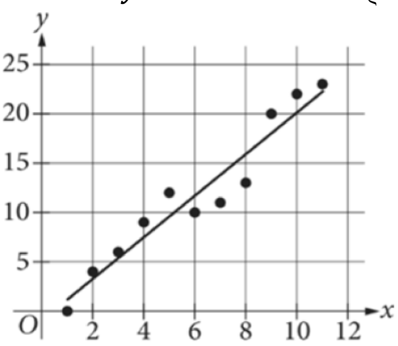
9. Ένα νέο σύνολο δεδομένων με τρεις τιμές σχηματίζεται αφαιρώντας τα δεδομένα για το New River Gorge National River. Πώς μεταβάλλεται η μέση έκταση για το νέο σύνολο δεδομένων σε σχέση με τη μέση έκταση για το αρχικό σύνολο δεδομένων; A) Η μέση έκταση για το νέο σύνολο δεδομένων είναι μεγαλύτερη. B) Η μέση έκταση για το νέο σύνολο δεδομένων είναι μικρότερη. Γ) Η μέση έκταση για το νέο σύνολο δεδομένων είναι η ίδια. Δ) Δεν υπάρχουν αρκετές πληροφορίες για σύγκριση των μέσων εκτάσεων.

Αφού φεύγει το στοιχείο με την μεγαλύτερη έκταση ο μέσος όρος μικραίνει, άρα B

10. Η μάζα $\boldsymbol{y}$, σε γραμμάρια, των νεαρών ψαριών cobia $\boldsymbol{x}$ ημέρες μετά την εκκόλαψη μπορούν να μοντελοποιηθούν από την εξίσωση $\boldsymbol{y = -324 + 5.6x}$, όπου $\mathbf{60} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{100}$. Ποιο γράφημα εκφράζει αυτήν τη σχέση;

A)  B)  C)  D) 

Η ευθεία $\boldsymbol{y = -324 + 5.6x}$ περνά από τα σημεία $\boldsymbol{(60, 0)}$ και $\boldsymbol{(100, 236)}$, άρα A



11. Το διάγραμμα διασποράς δείχνει τη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$. Εμφανίζεται επίσης η γραμμή τάσης. Για πόσα από τα σημεία δεδομένων η ευθεία αυτή προβλέπει μεγαλύτερη τιμή $\boldsymbol{y}$ από την πραγματική τιμή $\boldsymbol{y}$; A) 11 B) 7 C) 4 D) 1
Υπάρχουν 4 σημεία κάτω από την ευθεία, άρα C

12. Η ευθεία $\boldsymbol{k}$ έχει εξίσωση $\boldsymbol{y = 2x + 14}$. Η ευθεία $\boldsymbol{j}$ είναι κάθετη στην $\boldsymbol{k}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$. Ποια η κλίση της ευθείας **j**; A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\boldsymbol{2}$
Έχω $\boldsymbol{k \perp j \Rightarrow \lambda_k \cdot \lambda_j = -1 \Rightarrow 2\lambda_j = -1 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{1}{2}}$, άρα A

Οι ερωτήσεις 13 και 14 αναφέρονται στις ακόλουθες πληροφορίες.

Το 2015, μια συγκεκριμένη χώρα είχε έναν ενήλικο πληθυσμό 250 εκατομμυρίων ανθρώπων, εκ των οποίων τα 160 εκατομμύρια ήταν χρήστες του Διαδικτύου και τα 90 εκατομμύρια δεν ήταν χρήστες του Διαδικτύου. Από τον ενήλικο πληθυσμό που χρησιμοποιούσε το διαδίκτυο, 52,8 εκατομμύρια άνθρωποι είχαν πρόσβαση σε δύο ή περισσότερους ιστότοπους κοινωνικής δικτύωσης.

13. Ο ενήλικος πληθυσμός αυτής της χώρας το 2015 ήταν το 77% του συνολικού πληθυσμού. Ποιο από τα παρακάτω ήταν ο κατά προσέγγιση συνολικός πληθυσμός αυτής της χώρας το 2015; A) 140 εκατομμύρια B) 190 εκατομμύρια C) 320 εκατομμύρια D) 440 εκατομμύρια
Έχω $\boldsymbol{\frac{ενήλικος}{συνολικός} = 77\% \Rightarrow \frac{250}{συνολικός} = 0.77 \Rightarrow συνολικός = \frac{250}{0.77} = 324.67 \cong 320}$ εκατομμύρια, άρα C

14. Το 2015, ποιο ποσοστό των ενηλίκων χρηστών του Διαδικτύου σε αυτήν τη χώρα είχε πρόσβαση σε δύο ή περισσότερους ιστότοπους μέσων κοινωνικής δικτύωσης ; A) $\boldsymbol{\frac{21}{100}}$ B) $\boldsymbol{\frac{33}{100}}$ C) $\boldsymbol{\frac{53}{100}}$ D) $\boldsymbol{\frac{59}{100}}$
Έχω $\boldsymbol{\frac{52.8}{160} = 0,33 = \frac{33}{100}}$, άρα B

15. Αν $\boldsymbol{10(x + 9) = 9(x + 9) + 25}$, ποια η τιμή του $\boldsymbol{x + 9}$; A) $\boldsymbol{-9}$ B) 16 C) 25 D) 34
Έχω $\boldsymbol{10(x + 9) = 9(x + 9) + 25 \Leftrightarrow 10(x + 9) - 9(x + 9) = 25 \Leftrightarrow x + 9 = 25}$, άρα C

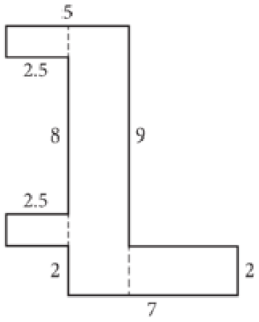
16. Ένας βιολόγος επέλεξε ένα δείγμα ενήλικων θηλυκών μπλε πεταλούδων Karner τυχαία από έναν τοπικό πληθυσμό. Το μέσο μήκος του μπροστινού πτερυγίου των πεταλούδων στο δείγμα είναι 1,5 εκατοστό. Το περιθώριο σφάλματος που σχετίζεται με αυτήν την εκτίμηση για τον μέσο πληθυσμό είναι 1 εκατοστό. Εάν ο βιολόγος θέλει μια εκτίμηση που σχετίζεται με μικρότερο περιθώριο σφάλματος και μπορεί να γενικευτεί σε ολόκληρο τον τοπικό πληθυσμό, ποια από τις ακόλουθες αλλαγές θα πρέπει να γίνει όταν η μελέτη επαναληφθεί; A) Χρήση διαφορετικού εργαλείου για τη μέτρηση των πεταλούδων B) Μέτρηση των πεταλούδων σε δύο διαφορετικές ώρες της ημέρας και σύγκριση των αποτελεσμάτων C) Επιλογή και μέτρηση μόνο των πεταλούδων που φαίνονται οι μικρότερες D) Επιλογή και μέτρηση ενός μεγαλύτερου τυχαίου δείγματος πεταλούδων
Προφανώς D.

17. Ο λόγος της διαμέτρου ενός κύκλου προς την περιφέρειά του είναι **1** to $\boldsymbol{\pi}$. Αν η διάμετρος του

κύκλου πολλαπλασιαστεί με το 3, πως θα αλλάξει η περιφέρεια του κύκλου; A) Θα πολλαπλασιαστεί με το $\frac{1}{3}$. B) Θα πολλαπλασιαστεί με το $\frac{\pi}{3}$ C) Θα πολλαπλασιαστεί με το $\mathbf{3}$. D) Θα πολλαπλασιαστεί με το $\mathbf{3\pi}$.

Προφανώς C

18. Στη διπλανή εικόνα, όλες οι γωνίες μεταξύ παρακείμενων πλευρών είναι ορθές.



Σημείωση : Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα. Ποια είναι η περίμετρος του σχήματος; A) 25 B) 39 C) 42 D) 46

Τα κατακόρυφα τμήματα από δεξιά έχουν μήκος $\mathbf{9+2=11}$, το ίδιο θα έχουν και τα κατακόρυφα τμήματα από αριστερά. Τα οριζόντια τμήματα έχουν μήκος $\mathbf{5+2.5+2.5+2.5+7+(7-2.5)=24}$. Άρα η συνολική περίμετρος είναι $\mathbf{11+11+24=46}$, άρα D

Data Set P

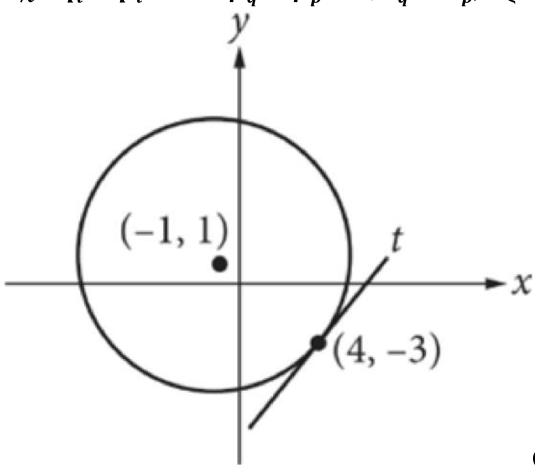
Value	Frequency
0	1
1	1
2	2
3	3
4	6
5	5
6	4
7	3
8	3
9	2

Data Set Q

Value	Frequency
4	1
5	1
6	2
7	3
8	6
9	5
10	4
11	3
12	3
13	2

19. Οι πίνακες δείχνουν τις συχνότητες των δεδομένων από δυο σύνολα δεδομένων. Ποια πρόταση περιγράφει καλύτερα τις σχέσεις του μέσου όρου $\boldsymbol{a}$ και της τυπικής απόκλισης $\boldsymbol{b}$ του συνόλου δεδομένων $\boldsymbol{P}$ με τον μέσο όρο $\boldsymbol{c}$ και την τυπική απόκλιση $\boldsymbol{d}$ του συνόλου δεδομένων $\boldsymbol{Q}$? A) $\boldsymbol{a<c; b<d}$ B) $\boldsymbol{a<c; b=d}$ C) $\boldsymbol{a>c; b=d}$ D) $\boldsymbol{a>c; b>d}$

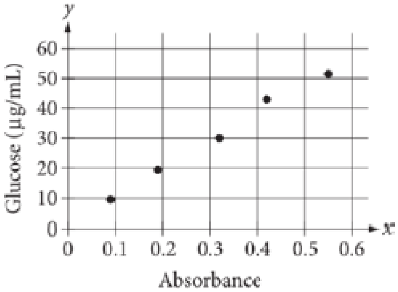
Έχω $\boldsymbol{q_i=p_i+4 \Rightarrow \mu_q=\mu_p+4, \sigma_q=\sigma_p}$, άρα B



20. Ο κύκλος του σχήματος έχει κέντρο το σημείο $(\mathbf{-1,1})$. Η ευθεία $\boldsymbol{t}$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο $(\mathbf{4,-3})$. Ποια από τα παρακάτω σημεία βρίσκονται επίσης στην ευθεία $\boldsymbol{t}$; A) $\left(\mathbf{0,\frac{5}{4}}\right)$ B) $(\mathbf{3,6})$ C) $(\mathbf{8,2})$ D) $(\mathbf{9,1})$

Η κλίση της ακτίνας επαφής είναι $\frac{-3-1}{4-(-1)} = -\frac{4}{5}$. Η ευθεία t είναι κάθετη στην ακτίνα επαφής, άρα θα έχει κλίση $\frac{5}{4}$. Έστω M το σημείο επαφής. Παρατηρώ ότι $\lambda_{\overrightarrow{CM}} = \frac{-3-2}{4-8} = \lambda_t$, άρα C

21. $y = 3x + 6$, $y = -3x + 9$. Η λύση στο δοσμένο σύστημα εξισώσεων είναι η (x, y) . Ποια η τιμή του y; A) 15 B) 7.5 C) 1.5 D) 0.5
Με πρόσθεση κατά μέλη έχω $2y = 6 + 9 \Leftrightarrow y = 7.5$, άρα B
22. Ένας ερευνητής εκτιμά ότι υπάρχει πληθυσμός 618 γκρίζων λύκων στην Άνω Χερσόνησο του Μίσιγκαν, η οποία καλύπτει μια έκταση περίπου 16452 τετραγωνικών μιλίων. Ποιο από τα παρακάτω είναι πιο κοντά στην εκτιμώμενη πυκνότητα πληθυσμού, σε γκρίζους λύκους ανά τετραγωνικό μίλι, σε αυτήν την περιοχή; A) 0.04 B) 3.76 C) 26.62 D) 53.24
Έχω $\frac{618}{16452} = 0.03756382 \cong 0.04$, άρα A
23. Στο επίπεδο xy, ακριβώς πόσες τομές με τον άξονα των x έχει το γράφημα της $f(x) = x(x-4)^2(x-5)^3$; A) 2 B) 3 C) 5 D) 6
Η $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες τις $x = 0$,$x = 4$ και $x = 5$, άρα B
24. Μελετάται η αποτελεσματικότητα ενός λιπάσματος στην ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου είδους φυτού. Ένας βοτανολόγος φύτεψε 1.000 σπόρους σε ένα θερμοκήπιο, έτσι ώστε οι συνθήκες καλλιέργειας για όλους τους σπόρους να είναι όσο το δυνατόν ίδιες. Οι σπόροι ελήφθησαν από δύο συσκευασίες των 500 σπόρων. Οι σπόροι από τη μία συσκευασία φυτεύτηκαν σε χώμα στο οποίο προστέθηκε το λίπασμα και οι σπόροι από τη δεύτερη συσκευασία φυτεύτηκαν σε έδαφος που δεν είχε προστεθεί το λίπασμα. Πώς πρέπει να αλλάξει το πείραμα για να μπορέσει ο ερευνητής να συμπεράνει εάν το λίπασμα έχει επίδραση στην ανάπτυξη των φυτών; A) Μία από τις συσκευασίες των σπόρων πρέπει να φυτεύεται σε εξωτερικό χώρο και όχι σε θερμοκήπιο. B) Οι μισοί από τους σπόρους από κάθε συσκευασία θα πρέπει να κατανεμηθούν τυχαία σε κάθε τύπο εδάφους. C) Και οι 1.000 σπόροι θα πρέπει να λάβουν το λίπασμα. D) Δεν χρειάζονται αλλαγές στο πείραμα.
Προφανώς B
25. Ερευνητές εκτίμησαν ότι το 0.07%, της μάζας, ενός δείγματος 12 γραμμαρίων μιας ορχιδέας αποτελείται από το λιπαρό εικοσαδιενικό οξύ. Σύμφωνα με την εκτίμηση αυτή, ποια είναι η μάζα του εικοσαδιενικού οξέος, σε γραμμάρια, σε αυτό το δείγμα; A) 0.0084 B) 0.084 C) 0.84 D) 8.4
Η μάζα είναι $0.07\% \cdot 12 = 0.0007 \cdot 12 = 0,0084$, άρα A
26. Ο πληθυσμός, σε εκατομμύρια, της πόλης Suzhou, στην Κίνα, μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη συνάρτηση $p(t) = 1.1(1.066)^t$, όπου t δηλώνει τον αριθμό ετών μετά το 1990, και $0 \le t \le 25$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μοντελοποιεί καλύτερα τον πληθυσμό, σε εκατομμύρια, της Suzhou, όπου το n εκφράζει τον αριθμό των ετών μετά το 1995, και$0 \le n \le 25$? A) $r(n) = 1.1(1.066)^{5n}$ B) $r(n) = 1.1(1.066)^{n-5}$ C) $r(n) = 1.1(1.066)^5(1.066)^n$ D) $r(n) = (1.1)^5(1.066)^5(1.066)^n$
Το 1995 ο πληθυσμός θα έχει αυξηθεί κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα$(1.066)^5$, άρα C
27. $x^2 + 6x + c = 0$. Στην εξίσωση αυτή, το c είναι μια σταθερά. Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο διακριτές πραγματικές λύσεις. Ποια πρόταση σχετική με την τιμή του c πρέπει να είναι αληθής; A) $c = 6$ B) $c > 9$ C) $c = 9$ D) $c < 9$
Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot c > 0 \Leftrightarrow c < 9$, άρα D
28. Μια διαδικασία επιτρέπει σε έναν ερευνητή να καθορίσει τη συγκέντρωση της γλυκόζης y, σε micrograms ανά milliliter $\left(\frac{\mu g}{mL}\right)$, σε ένα δείγμα εδάφους μετρώντας την απορρόφηση, x, ενός συγκεκριμένου μήκους κύματος φωτός. Το διάγραμμα παρακάτω δείχνει αυτήν τη σχέση για 5



δείγματα εδάφους. Ποια εξίσωση μοντελοποιεί καλύτερα τα δεδομένα αυτά; A) $\boldsymbol{y = 1.5 + 90x}$ B) $\boldsymbol{y = 1.5 + 10x}$ C) $\boldsymbol{y = 10 + 1.5x}$ D) $\boldsymbol{y = 90 + 1.5x}$

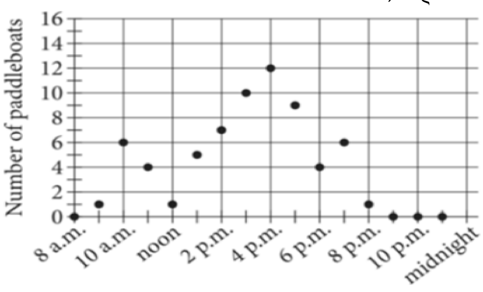
Η κλίση της ευθείας που περνά από τα δυο πρώτα σημεία στα αριστερά είναι περίπου $\frac{\mathbf{20-10}}{\mathbf{0.2-0.1}} = \mathbf{100}$. Η επιλογή A δίνει κλίση $\mathbf{90}$ ενώ οι άλλες $\mathbf{10, 1.5, 1.5}$, άρα A

29. Ένα κομμάτι χαρτί κόβεται δύο φορές, με αποτέλεσμα τρία μικρότερα κομμάτια χαρτιού του ίδιου σχήματος και μεγέθους. Στη συνέχεια, τα τρία μικρότερα κομμάτια στοιβάζονται και κόβονται δύο φορές για να σχηματιστούν εννέα ακόμη μικρότερα κομμάτια, το καθένα με το ίδιο σχήμα και μέγεθος. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου τα κομμάτια χαρτιού είναι πολύ μικρά για να κοπούν. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις δίνει τον αριθμό των κομματιών χαρτιού, $\boldsymbol{F(c)}$, που προκύπτει μετά από $\boldsymbol{c}$ τομές, όπου $\boldsymbol{c}$ είναι ζυγός αριθμός; A) $\boldsymbol{F(c) = 3^{\frac{c}{2}}}$ B) $\boldsymbol{F(c) = 3^{\frac{c}{2}+1}}$ C) $\boldsymbol{F(c) = 3^{2c}}$ D) $\boldsymbol{F(c) = 3^{2c+1}}$

Σε κάθε βήμα της διαδικασίας κάνω 2 τομές και τα κομμάτια τριπλασιάζονται, ισοδύναμα για $\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}$ τομές τα κομμάτια τριπλασιάζονται, άρα A

30. Υπάρχουν 640 acres σε 1 τετραγωνικό μίλι. Το εμβαδόν ενός δάσους μεγαλώνει με ρυθμό 1 acre ανά δεκαετία. Ποιο από τα παρακάτω είναι πλησιέστερο στο ρυθμό αύξησης του εμβαδού του δάσους, σε τετραγωνικά χιλιόμετρα ανά δεκαετία; (1 χιλιόμετρο = $\mathbf{0.62}$ μίλια.)
A) 0.0006 B) 0.0010 C) 0.0025 D) 0.0041

Σε μια δεκαετία το δάσος αυξάνεται κατά $\boldsymbol{1\ acre = \frac{1}{640}\ miles^2 = \frac{1}{640} \cdot \left(\frac{1}{0.62}\right)^2 km^2 = 0.004064776 km^2 \cong 0.041 km^2}$, άρα D

31. 

Ένας παρατηρητής μέτρησε τον αριθμό των κουπιών σε μια λίμνη κάθε ώρα ξεκινώντας στις 8 π.μ. Το διάγραμμα διασποράς δείχνει αυτά τα δεδομένα. Πόσα κουπιά καταμετρήθηκαν στη λίμνη στις 2 μ.μ.;

Προφανώς $\boxed{7}$

32. Μια εταιρεία ξόδεψε συνολικά 9000 $ σε ψηφιακές και έντυπες διαφημίσεις. Η αναλογία των χρημάτων που δαπανήθηκαν για ψηφιακές διαφημίσεις προς τα χρήματα που δαπανήθηκαν για έντυπες διαφημίσεις ήταν 1 προς 3. Πόσα χρήματα, σε δολάρια, ξόδεψε η εταιρεία σε ψηφιακές διαφημίσεις;

Ξόδεψε τα ¾ των 9000$ άρα $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \mathbf{9000} = \boxed{\mathbf{2250\$}}$

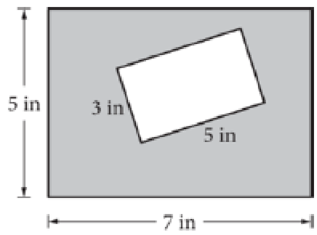
33. $\boldsymbol{x^2 + 2x - 1 = 0}$. Μια λύση στην εξίσωση είναι η $\boldsymbol{\sqrt{k} - 1}$. Ποια είναι η τιμή του $\boldsymbol{k}$;

Έχω $\boldsymbol{x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} == -1 \pm \sqrt{2}}$, άρα $\boldsymbol{k = 2}$

34. $\boldsymbol{C(x) = \frac{5}{9}(x - 32)}$. Η συνάρτηση $\boldsymbol{C}$ δίνει την θερμοκρασία, σε βαθμούς Κελσίου, που αντιστοιχεί σε $\boldsymbol{x}$ βαθμούς Fahrenheit. Αν η θερμοκρασία αυξάνεται κατά 19.8 degrees Fahrenheit, πόσο αυξάνει η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου;

Έχω $\boldsymbol{\Delta C(x)} = \frac{5}{9}\boldsymbol{\Delta x} = \frac{5}{9}\cdot \mathbf{19.8}$ =11 βαθμού Κελσίου

35. Σημείωση: Το σχήμα δεν σχεδιάζεται σε κλίμακα. Το σχήμα δείχνει δύο ορθογώνια. Εάν ένα σημείο εντός του σχήματος επιλεγεί τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα το σημείο να βρίσκεται εντός της σκιασμένης περιοχής; (Εκφράστε την απάντησή σας ως δεκαδικό ή κλάσμα, όχι ως ποσοστό.)



Έχω $\boldsymbol{p} = \frac{5\cdot 7 - 5\cdot 3}{5\cdot 7} = \boxed{\frac{4}{7}}$

36. $\boldsymbol{-9x + 24qx = 36}$ Στην εξίσωση αυτή, το $\boldsymbol{q}$ είναι μια σταθερά. Η εξίσωση δεν έχει λύση. Ποια η τιμή του $\boldsymbol{q}$;

Έχω $\boldsymbol{-9x + 24qx = 36 \Leftrightarrow (-9 + 24q)x = 36}$, που δεν έχει λύση αν ο συντελεστής του x είναι μηδενικός, δηλαδή αν $\boldsymbol{-9 + 24q = 0} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{q} = \frac{3}{8}}$

37. Η τιμή του $\boldsymbol{r}$ είναι $\frac{20}{21}$ φορές η τιμή του $\boldsymbol{t}$, όπου $\boldsymbol{t > 0}$. Πόσο τοις εκατό μεγαλύτερη είναι η τιμή του $\boldsymbol{t}$ από την τιμή του $\boldsymbol{r}$;

Έχω $\boldsymbol{r} = \frac{20}{21}\boldsymbol{t} \Leftrightarrow \boldsymbol{t} = \frac{21}{20}\boldsymbol{r} = \frac{105}{100}\boldsymbol{r}$, άρα $\boxed{5\%}$ μεγαλύτερο του $\boldsymbol{r}$.

38. Έστω δυο αριθμοί, $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$, μεγαλύτεροι του μηδενός, και 4 φορές η τετραγωνική ρίζα του $\boldsymbol{a}$ ισούται με το 9πλάσιο της κυβικής ρίζας του $\boldsymbol{b}$. Αν $\boldsymbol{a} = \frac{2}{3}$, για ποια τιμή του $\boldsymbol{x}$ είναι το $\boldsymbol{a^x}$ ίσο με το $\boldsymbol{b}$;

Έχω $\boldsymbol{4\sqrt{a} = 9\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow 4a^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt[3]{b}} \Leftrightarrow \frac{4}{9}\boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} \xLeftrightarrow{\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2} \boldsymbol{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[3]{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a^{\frac{15}{2}} = b}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{x} = \frac{15}{2}}$

ΣΤΑΜΑΤΗΣΤΕ

Εάν τελειώσατε πρόωρα, μπορείτε να ελέγξετε την εργασία σας μόνο σε αυτήν την ενότητα. Μην προχωρήσετε σε καμία άλλη ενότητα.

The ACT® 2023 | 2024

Form G19 (April 2024)

<u>Οδηγίες</u>

Αυτό το φυλλάδιο περιέχει το τεστ 1) στα Αγγλικά, 2) τα μαθηματικά, 3) την ανάγνωση και 4) τις επιστήμες. Αυτά τα τεστ μετρούν τις δεξιότητες και τις ικανότητες που σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με την εργασία στο γυμνάσιο και την επιτυχία στο κολέγιο. Οι αριθμομηχανές μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο στο τεστ των μαθηματικών. Για κάθε ερώτηση, πρώτα αποφασίστε ποια απάντηση είναι καλύτερη. Σημειώστε μόνο μία απάντηση σε κάθε ερώτηση. Η βαθμολογία σας σε κάθε τεστ θα βασίζεται μόνο στον αριθμό των ερωτήσεων που απαντάτε σωστά κατά τη διάρκεια του χρόνου που επιτρέπεται για αυτό το τεστ. Δεν θα τιμωρηθείτε για εικασίες. Είναι προς όφελός σας να απαντάτε σε κάθε ερώτηση ακόμα κι αν πρέπει να μαντέψετε. Μπορείτε να εργαστείτε σε κάθε τεστ μόνο όταν σας το πει ο επιτηρητής. Εάν ολοκληρώσετε ένα τεστ πριν εξαντληθεί ο χρόνος για αυτό το τεστ, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τον χρόνο που απομένει για να επανεξετάσετε ερωτήσεις για τις οποίες δεν είστε σίγουροι σε αυτό το τεστ. Δεν μπορείτε να κοιτάξετε πίσω σε ένα τεστ στο οποίο έχει ήδη παρέλθει η ώρα και ενδέχεται να μην προχωρήσετε σε άλλη δοκιμή. Αν το κάνετε αυτό, θα σας αποκλείσουν από την εξέταση. Τοποθετήστε το μολύβι σας αμέσως όταν καλείται η ώρα στο τέλος κάθε τεστ. Δεν μπορείτε για κανένα λόγο να συμπληρώσετε ή να τροποποιήσετε τα κυκλάκια για ένα τεστ μετά την λήξη του χρόνου για αυτήν τη δοκιμή. Αν το κάνετε αυτό, θα σας αποκλείσουν από την εξέταση. Μην διπλώνετε ή σκίζετε τις σελίδες του φυλλαδίου των τεστ σας.

ΜΗΝ ΑΝΟΙΞΕΤΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΣΑΣ ΠΟΥΝ ΝΑ ΤΟ ΚΑΝΕΤΕ.

2. ΤΕΣΤ στα Μαθηματικά

60 Λεπτά - 60 Ερωτήσεις

ΟΔΗΓΙΕΣ: Λύστε κάθε πρόβλημα, επιλέξτε τη σωστή απάντηση και, στη συνέχεια, συμπληρώστε το αντίστοιχο κυκλάκι στο απαντητικό φυλλάδιό σας.

Μην καθυστερείτε σε προβλήματα που απαιτούν πολύ χρόνο. Λύστε όσα περισσότερα μπορείτε. στη συνέχεια επιστρέψτε στα υπόλοιπα στο χρόνο που σας απομένει για αυτό το τεστ.

Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε μια αριθμομηχανή σε αυτό το τεστ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας για τυχόν προβλήματα που επιλέγετε, αλλά ορισμένα από τα προβλήματα μπορεί να επιλυθούν καλύτερα χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής.

Σημείωση: Εκτός εάν αναφέρεται διαφορετικά, θα πρέπει να θεωρηθούν όλα τα ακόλουθα.

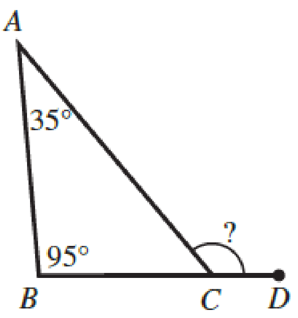
1. Τα επεξηγηματικά σχήματα ΔΕΝ σχεδιάζονται απαραίτητα σε κλίμακα.
2. Τα γεωμετρικά σχήματα βρίσκονται σε ένα επίπεδο.
3. Η λέξη *γραμμή* δηλώνει ευθεία γραμμή.
1. Η λέξη *μέσος όρος* δηλώνει αριθμητικό μέσο όρο

---

1. 1. Η ημερήσια προμήθεια ενός συνεργάτη λιανικής πώλησης κατά τη διάρκεια 1 εβδομάδας ήταν 20 \$ τη Δευτέρα και την Τρίτη και 60 \$ την Τετάρτη, την Πέμπτη και την Παρασκευή. Ποια ήταν η μέση ημερήσια προμήθεια του συνεργάτη για αυτές τις 5 ημέρες;
A. \$40 B. \$41 C. \$44 D. \$45 E. \$46

Έχω $\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{2 \cdot 20 + 3 \cdot 60}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{220}}{\mathbf{5}} = \mathbf{44}\$$, *άρα* C

2. Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο $\boldsymbol{C}$ βρίσκεται στην πλευρά $\boldsymbol{BD}$, η γωνία $\angle\boldsymbol{BAC}$ είναι $\mathbf{35°}$, και η γωνία $\angle\boldsymbol{ABC}$ είναι $\mathbf{95°}$. Πόσων μοιρών είναι η γωνία $\angle\boldsymbol{ACD}$?



F. $\mathbf{95^o}$ G. $\mathbf{125^o}$ H. $\mathbf{130^o}$ J. $\mathbf{140^o}$ K. $\mathbf{145^o}$ $\boldsymbol{B\ C\ D}$

Για την εξωτερική γωνία $\angle\boldsymbol{ACD} = \angle\boldsymbol{CBA} + \angle\boldsymbol{BAC} = \mathbf{95° + 35° = 130°}$, *άρα* H.

3. Ο Wally αγοράζει περιλαίμια σκύλων μέσω Διαδικτύου για 4 \$ το καθένα. Το κόστος αποστολής και διεκπεραίωσης είναι συνολικά 5 \$, ανεξάρτητα από τον αριθμό των περιλαίμιων σκύλων που παραγγέλθηκαν. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις αντιπροσωπεύει τη σχέση μεταξύ του $\boldsymbol{x}$, του αριθμού των περιλαίμιων σκύλων που παραγγέλθηκαν και του $\boldsymbol{y}$, του συνολικού λογαριασμού του Wally σε δολάρια;

A. $y = \frac{x}{5}$ B. $y = 4x$ C. $y = 9x$ D. $y = 4x + 5$ E. $y = 5x + 4$

Για x περιλαίμια θα ξοδέψει 4x$, επιπλέον θα ξοδέψει και 5$ μεταφορικά, άρα $y = 4x + 5$, άρα D.

4. Ένα ορισμένο ορθογώνιο έχει πλάτος 6 km και μήκος 4 km περισσότερο από 2 φορές το πλάτος. Ποιο είναι το εμβαδόν, σε τετραγωνικά χιλιόμετρα, αυτού του ορθογωνίου;
F. 16 G. 24 H. 32 J. 60 K. 96

Το μήκος του είναι $4 + 2 \cdot 6 = 16km$, άρα το εμβαδόν είναι $E = 6 \cdot 16 = 96\ km^2$, άρα K

5. $|4 - 3| - |2 - 5|$ =?
A. -4 B. -2 C. 2 D. 4 E. 14

Έχω $|4 - 3| - |2 - 5| = 1 - 3 = -2$, άρα B.

6. $(8p - 3q) - (2q + 6p)$ ισοδυναμεί με:
F. $2p - 5q$ G. $2p - q$ H. $5p - 8q$ J. $6p - 5q$ K. $6p - q$

Έχω $(8p - 3q) - (2q + 6p) = 8p - 3q - 2q - 6p = 2p - 5q$, άρα F.

7. Πόσα λεπτά χρειάζεται ένα αεροπλάνο για να ταξιδέψει 300 μίλια με σταθερή ταχύτητα 400 μίλια την ώρα;
A. 45 B. 75 C. 80 D. 100 E. 133

Έχω $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{300}{400} = 0,75h = 0,75 \cdot 60\ min = 45min$, άρα A

8. Η παράσταση $(x^{10})^4$ ισοδυναμεί με:
F. x^{14} G. x^{40} H. $x^{10,000}$ J. $4x^6$ K. $4x^9$

Πολλαπλασιάζω τους εκθέτες, άρα $(x^{10})^4 = x^{40}$, άρα G

9. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$ ικανοποιεί την σχέση $f(4) = 9$?
A. $f(x) = x^2 - 7$ B. $f(x) = x^2 + 7$ C. $f(x) = x - 5$ D. $f(x) = 4x + 9$ E. $f(x) = 9x + 4$

Για την A έχω $f(4) = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9$, για τις άλλες δεν ισχύει η σχέση, άρα A.

10. Την πρώτη μέρα του σχολείου, ο κ. Thibodeaux έδωσε στους μαθητές του της τρίτης τάξης 9 νέες λέξεις ορθογραφίας για να μάθουν. Κάθε μέρα στο σχολείο μετά από αυτήν, έδινε στους μαθητές 6 νέες λέξεις ορθογραφίας. Πόσες νέες λέξεις ορθογραφίας είχε δώσει στους μαθητές μέχρι το τέλος της 30ής ημέρας του σχολείου;
F. 174 G. 180 H. 183 J. 189 K. 195
Ο κ. Thibodeaux έδωσε στους μαθητές του $9 + 29 \cdot 6 = 183$ νέες λέξεις, άρα H.

11. Ποια η λύση της $\frac{3x-6}{2} + 5 = 18$;
A. $\frac{16}{3}$ B. $\frac{32}{3}$ C. $\frac{37}{3}$ D. $\frac{38}{3}$ E. $\frac{52}{3}$

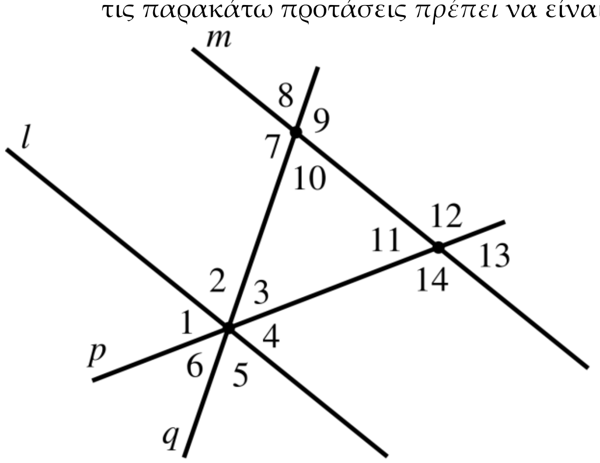
Έχω $\frac{3x-6}{2} + 5 = 18 \Leftrightarrow \frac{3x-6}{2} = 13 \Leftrightarrow 3x - 6 = 26 \Leftrightarrow 3x = 32 \Leftrightarrow x = \frac{32}{3}$, άρα B.

12. Ενώ η μητέρα της οδηγεί το αυτοκίνητό τους στον αυτοκινητόδρομο, η Μία παρατηρεί μερικές ενδείξεις του οδομέτρου. Βλέπει το οδόμετρο 117 το μεσημέρι, και ακριβώς 20 λεπτά αργότερα βλέπει το οδόμετρο 97. Ποια είναι η μέση ταχύτητα, σε μίλια ανά ώρα, του αυτοκινήτου τους σε αυτά τα 20 λεπτά;

F. 23.4 G. 39 H. 60 J. 70 K. 100

Έχω $\boldsymbol{v_\mu} = \frac{\boldsymbol{\Delta_s}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \frac{\mathbf{117-97}\boldsymbol{km}}{\mathbf{20}\boldsymbol{min}} = \frac{\mathbf{20}\boldsymbol{km}}{\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{60}}\boldsymbol{h}} = \frac{\mathbf{60}\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}}$, άρα H

13. Παρακάτω έχουμε αριθμημένες τις 14 γωνίες που σχηματίζονται από τις παράλληλες γραμμές $\boldsymbol{l}$ και $\boldsymbol{m}$ και τις τέμνουσες $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$. Οι γραμμές $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{p}$, και $\boldsymbol{q}$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις *πρέπει* να είναι αληθής;



A. $\angle\mathbf{1} \cong \angle\mathbf{5}$ B. $\angle\mathbf{2} \cong \angle\mathbf{1}$ C. $\angle\mathbf{3} \cong \angle\mathbf{10}$ D. $\angle\mathbf{4} \cong \angle\mathbf{2}$ E. $\angle\mathbf{5} \cong \angle\mathbf{8}$

Έχω $\angle\mathbf{5} \cong \angle\mathbf{2}$ ως κατακορυφήν γωνίες και $\angle\mathbf{2} \cong \angle\mathbf{8}$ ως εντός, εκτός και επί ταυτά γωνίες των παραλλήλων $\boldsymbol{l}$ και $\boldsymbol{m}$ που τέμνονται από την $\boldsymbol{q}$. Άρα $\angle\mathbf{5} \cong \angle\mathbf{8}$, άρα E

14. Ένα τμήμα αυτοκινητόδρομου αντιπροσωπεύεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα με τελικά σημεία $(\mathbf{30}, \mathbf{50})$ και $(\mathbf{90}, \mathbf{100})$ στο κλασικό $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ επίπεδο συντεταγμένων. Ακριβώς στην μέση αυτού τμήματος του αυτοκινητοδρόμου βρίσκεται μια πινακίδα κυκλοφορίας. Ποιες οι συντεταγμένες της πινακίδας αυτής;

F. $(\mathbf{30}, \mathbf{25})$ G. $(\mathbf{60}, \mathbf{50})$ H. $(\mathbf{60}, \mathbf{75})$ $\boldsymbol{J}$. $(\mathbf{70}, \mathbf{65})$ K. $(\mathbf{75}, \mathbf{60})$

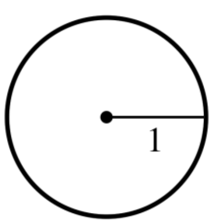
Έχω για το μέσο $(\boldsymbol{x_M}, \boldsymbol{y_M}) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{\mathbf{30+90}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{50+100}}{\mathbf{2}}\right) = (\mathbf{60}, \mathbf{75})$, άρα H

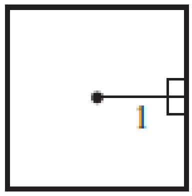
15. Το Μαθητικό Συμβούλιο ετοιμάζει τον προϋπολογισμό για έναν επερχόμενο χορό συγκέντρωσης κεφαλαίων. Αποφάσισαν να ξοδέψουν 150 δολάρια για μια παράσταση φωτός και ήχου, 400 δολάρια για αναψυκτικά και 50 δολάρια για διακοσμήσεις. Αυτά είναι τα μόνα έξοδα. Δεδομένου ότι το Μαθητικό Συμβούλιο υπολογίζει ότι 500 μαθητές θα παρακολουθήσουν τον χορό, ποια θα πρέπει να είναι η τιμή, ανά μαθητή, για την είσοδο στο χορό, εάν το Μαθητικό Συμβούλιο θέλει να συγκεντρώσει ένα ποσό όσο το δυνατόν πλησιέστερα στα 300 $ αφού πληρώσει τα έξοδα;

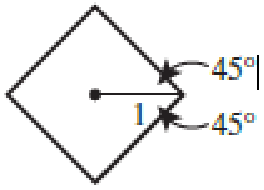
A. \$0.60 B. \$1.20 C. \$1.67 D. \$1.80 E. \$3.33

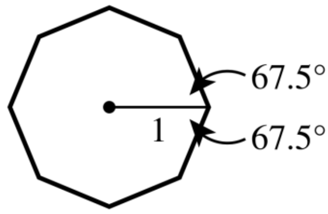
Έστω x η είσοδος. Έχω $\text{Έ}\boldsymbol{\sigma o \delta \alpha} - \text{Έ}\boldsymbol{\xi o \delta \alpha} = \mathbf{300} \Rightarrow \mathbf{500} \cdot \boldsymbol{x} - (\mathbf{150} + \mathbf{400} + \mathbf{50}) = \mathbf{300} \Rightarrow \mathbf{500} \cdot \boldsymbol{x} - \mathbf{600} = \mathbf{300} \Rightarrow \mathbf{500} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{900} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{1.80}$\$, άρα D

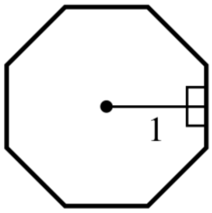
16. Τα παρακάτω σχήματα είναι ένας κύκλος και κάποια κανονικά πολύγωνα με εμφανή το κέντρο τους. Όλες οι μονάδες είναι σε πόδια. Ποιο από τα σχήματα έχει την μεγαλύτερη επιφάνεια;

F.


G.


H.


J.


K.


Το G περιγράφει τον κύκλο, ενώ τα άλλα πολύγωνα είναι εγγεγραμμένα σε αυτόν, άρα έχουν μικρότερο εμβαδό του κύκλου, που με την σειρά του έχει μικρότερο εμβαδόν του G. Άρα G

17. Το περασμένο εξάμηνο, καθένας από τους 4 φοιτητές που αναφέρονται παρακάτω παρακολούθησε 6 μαθήματα αξίας 1 μονάδας το καθένα. Στον 1ο πίνακα, η σειρά που αντιστοιχεί σε κάθε μαθητή δίνει τις βαθμολογίες, σε γράμματα, που κέρδισε αυτός ο μαθητής. Ο δεύτερος πίνακας δίνει την βαθμολογική αξία κάθε γράμματος.

Letter grades **Points per letter grade**

$$\begin{array}{r} \\ \boldsymbol{José} \\ \boldsymbol{Dwayne} \\ \boldsymbol{Ann} \\ \boldsymbol{Maria} \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{F} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{F} \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο μέσος όρος βαθμολογίας κάθε μαθητή είναι ο συνολικός αριθμός βαθμών που κέρδισε αυτός ο μαθητής διαιρεμένος με τον συνολικό αριθμό των μονάδων τάξης αυτού του μαθητή. Με προσέγγιση 0,01, ποιος είναι ο μέσος όρος βαθμολογίας της Ann;

A. 1.92 B. 2.00 C. 3.00 D. 3.83 E. 4.00

Έχω $\boldsymbol{\mu} = \frac{1\cdot5+3\cdot4+2\cdot3}{6} = \frac{23}{6} = \mathbf{3.83}$, άρα D

18. Ένας κύκλος με εξίσωση $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}$ σχεδιάζεται στο κλασικό $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ σύστημα συντεταγμένων. Σε ποια σημεία τέμνει ο κύκλος τον άξονα των $\boldsymbol{x}$;

F. $(\mathbf{-2}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$ G. $(\mathbf{-4}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$ H. $(\mathbf{-8}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{8}, \mathbf{0})$ $\boldsymbol{J}$. $(\mathbf{-16}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{16}, \mathbf{0})$ K. $(\mathbf{-32}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{32}, \mathbf{0})$

Τα σημεία στον άξονα των y έχουν τετμημένη $\boldsymbol{x = 0}$ άρα $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4}$, άρα ο κύκλος τέμνει τον άξονα των y στα σημεία $(\mathbf{-4}, \mathbf{0})$ και $(\mathbf{4}, \mathbf{0})$, άρα G

19. Η JoAnna οδηγεί μια διαδρομή μήκους ακριβώς 450 μιλίων από το Little Rock του Αρκάνσας μέχρι το Mobile της Αλαμπάμα. Η JoAnna έχει ήδη οδηγήσει 180 μίλια με μέση ταχύτητα 60 μιλίων την ώρα. Ποια είναι η *ελάχιστη* μέση ταχύτητα, σε μίλια ανά ώρα, που μπορεί να οδηγήσει η JoAnna για το υπόλοιπο της διαδρομής ώστε να έχει χρόνο οδήγησης 9 ωρών για ολόκληρο το ταξίδι?

A. 45 B. 50 C. 55 D. 60 E. Δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις δεδομένες πληροφορίες

Έχω $\boldsymbol{t_1 + t_2 = 9 \Leftrightarrow \frac{180}{60} + \frac{450-180}{v_2} = 9 \Leftrightarrow \frac{270}{v_2} = 6 \Leftrightarrow v_2 = \frac{45miles}{hr}}$, άρα A

20. Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που έχει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 5 και υπόλοιπο 4 όταν διαιρείται με το 6;

F. 18 G. 23 H. 28 J. 30 K. 39

Έχω για $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}$, ότι $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{5}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{3} = \mathbf{6}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{6}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\lambda} + \frac{\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \Rightarrow \mathbf{5}|\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1} \in \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}, \ldots\}$, ο μικρότερος είναι ο 5, άρα $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{4}, \boldsymbol{\nu} = \mathbf{28}, \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{5}$, άρα H

Χρησιμοποιήστε τις παρακάτω πληροφορίες για να απαντήσετε στις ερωτήσεις 21-23.

Χθες, δεν υπήρχε χιόνι στο έδαφος στις 8:00 π.μ. όταν άρχισε να πέφτει χιόνι. Χιόνι έπεσε από τις 8:00 το πρωί έως τις 20:00 το βράδυ. με σταθερό ρυθμό $\frac{3}{4}$ ίντσας ανά ώρα. Η Kate έφτιαξε έναν χιονάνθρωπο από 2 σφαιρικές χιονόμπαλες, με τη μικρότερη να τοποθετείται πάνω από τη μεγαλύτερη. Όταν έχτισε τον χιονάνθρωπο, η διάμετρος της μεγαλύτερης χιονόμπαλας ήταν 3 φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο της μικρότερης χιονόμπαλας. Σήμερα, την επόμενη μέρα που έφτιαξε τον χιονάνθρωπο, υπάρχει 50% πιθανότητα βροχής. Αν βρέξει σήμερα, τότε υπάρχει 60% πιθανότητα να λιώσει ο χιονάνθρωπος. Αν δεν βρέξει σήμερα, τότε υπάρχει 10% πιθανότητα ο χιονάνθρωπος να λιώσει.

21. Η Kate δεν μπορούσε να φτιάξει τον χιονάνθρωπο έως ότου υπήρχαν 6 ίντσες χιονιού στο έδαφος. Πόσες ώρες μετά τις 8:00 π.μ. χθες υπήρχαν ακριβώς 6 ίντσες χιονιού στο έδαφος;
A. 0.75 B. 4.5 C. 6 D. 6.75 E. 8

Έχω $\boldsymbol{\rho\upsilon\theta\mu ό\varsigma}_{\boldsymbol{\chi\iota o\nu\iota o ύ}} = \frac{\boldsymbol{ύ\psi o\varsigma\ \chi\iota o\nu\iota o ύ}}{\boldsymbol{\chi\rho ό\nu o}} \Rightarrow \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{t}} \Rightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{8}\boldsymbol{h}$, άρα E.

22. Όταν η Kate έφτιαξε τον χιονάνθρωπο, η περιφέρεια της μεγαλύτερης χιονόμπαλας ήταν $\mathbf{36}\boldsymbol{\pi}$ ίντσες. Όταν η Kate έφτιαξε τον χιονάνθρωπο, ποια ήταν η διάμετρος, σε ίντσες, της μικρότερης χιονόμπαλας;
F. 4 G. 6 H. 12 J. 54 K. 108

Αφού η περιφέρεια της μεγαλύτερης χιονόμπαλας ήταν $\mathbf{36}\boldsymbol{\pi}$ ίντσες η διάμετρός της είναι $\frac{\mathbf{36}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{36}$ ίντσες. Η μικρότερη χιονόμπαλα θα έχει διάμετρο $\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{3}} = \mathbf{12}$ ίντσες, άρα H

23. Ποια είναι η πιθανότητα να λιώσει ο χιονάνθρωπος σήμερα;
A. 30% B. 35% C. 50% D. 60% E. 70%

Έχω $\boldsymbol{p} = \mathbf{50}\% \cdot \mathbf{60}\% + \mathbf{50}\% \cdot \mathbf{10}\% = \mathbf{30}\% + \mathbf{5}\% = \mathbf{35}\%$, άρα B.

24. Βιολόγοι επισήμαναν και απελευθέρωσαν 50 ψάρια σε μια λίμνη. Από την ίδια λίμνη 3 εβδομάδες αργότερα, οι βιολόγοι συνέλεξαν ένα τυχαίο δείγμα 15 ψαριών, 5 από τα οποία επισημάνθηκαν. Έστω $\boldsymbol{p}$ είναι το ποσοστό των ψαριών της λίμνης να είναι επισημασμένο. Ποιο είναι το $\widehat{\boldsymbol{p}}$, το ποσοστό δειγματοληψίας, για αυτό το δείγμα?
F. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ G. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ H. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ J. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}$ K. $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$

Έχω $\widehat{\boldsymbol{p}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{15}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, άρα F

25. Ένα ρολόι κερδίζει $\mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ λεπτά την ώρα ενώ ένα άλλο ρολόι χάνει $\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ λεπτά την ώρα. Αν και τα δυο ρολόγια ρυθμιστούν σωστά το μεσημέρι, μετά από πόσες ώρες τα δυο ρολόγια θα διαφέρουν ακριβώς 1 ώρα;
A. $\mathbf{3}\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ B. 4 C. 16 D. 75 E. 225

Έστω ότι χρειάζονται x ώρες, $\boldsymbol{t_1}$ τα λεπτά που κερδίζει το πρώτο ρολόι σε x ώρες και $\boldsymbol{t_2}$ τα αντίστοιχα λεπτά που χάνει το δεύτερο ρολόι. Έχω $\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{t_2} = \mathbf{1}\boldsymbol{h} \Leftrightarrow \mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} - \left(-\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{60}\boldsymbol{min} \Rightarrow (\mathbf{2.5} + \mathbf{1.25})\boldsymbol{x} = \mathbf{60} \Rightarrow \mathbf{3.75}\boldsymbol{x} = \mathbf{60} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{3.75}} = \mathbf{16}\boldsymbol{h}$, άρα C

26. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα μήκη, τα πλάτη και τα ύψη, σε πόδια, 3 ορθογώνιων πρισμάτων. Η διαφορά μεταξύ του όγκου του πρίσματος A και του όγκου του πρίσματος B είναι πόσες φορές ο όγκος του πρίσματος C?

Πρίσμα	Μήκος	Πλάτος	Ύψος
A	4	4	3
B	3	3	4
C	4	3	1

F. $\mathbf{0}$ G. 1 H. 5 J. 8 K. 12

Έχω $\frac{V_A - V_B}{V_C} = \frac{4\cdot4\cdot3 - 3\cdot3\cdot4}{4\cdot3\cdot1} = \frac{4-3}{1} = 1$, άρα G.

27. Ποιος από τους παρακάτω είναι ο μιγαδικός συζυγής του $2 + 7i$;
A. -5 B. 9 C. $9i$ D. $\sqrt{53}$ E. $2 - 7i$

Έχω $\overline{2 + 7i} = 2 - 7i$, άρα E

28. Αν $f(x) = 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 2$, ποια η τιμή του $f\big(g(-3)\big)$?
F. -29 G. -27 H. -20 J. 23 K. 25`

Έχω $g(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$, άρα $f\big(g(-3)\big) = f(7) = 3 \cdot 7 + 4 = 25$, άρα K

29. Ποιο από τα παρακάτω είναι ισοδύναμο με το $\frac{21A^2B + 6AB^2}{3AB}$ για όλους τος μη μηδενικούς αριθμούς A και B ;
A. $9AB$ B. $9A^2B^2$ C. $7A + 6AB^2$ D. $7A + 6B$ E. $7A + 2B$

Έχω $\frac{21A^2B + 6AB^2}{3AB} = \frac{3AB(7A + 2B)}{3AB} = 7A + 2B$, άρα E

30. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις είναι ίση με το 0.0002^n ;
F. 2^{-2n} G. 2^{-3n} H. $2^n \times 10^{-n}$ J. $2^n \times 10^{-3n}$ K. $2^n \times 10^{-4n}$

Έχω $0.0002^n = (2 \cdot 0.0001)^n = 2^n \cdot 0.0001^n = 2^n \cdot (10^{-4})^n = 2^n \cdot 10^{-4n}$, άρα K

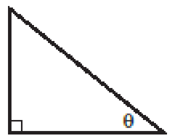
31. Ποια από τις παρακάτω λίστες δίνει τους αριθμούς 0.6, 0.08, $\frac{5}{8}$ σε αύξουσα σειρά, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο;
A. $\frac{5}{8}$, 0.6, 0.08 B. $0.6, \frac{5}{8}, 0.08$ C. $0.6, 0.08, \frac{5}{8}$ D. $0.08, \frac{5}{8}, 0.6$ E. $0.08, 0.6, \frac{5}{8}$

Έχω $0.08 < 0.6 < 0.625 = \frac{5}{8}$, άρα E

32. Ένας διψήφιος αριθμός μπορεί να σχηματιστεί διαλέγοντας τυχαία κάθε ψηφίο από το σύνολο $\{2, 3, 9\}$. Ποια είναι η πιθανότητα να σχηματιστεί ο αριθμός 99 ?
F. $\frac{1}{27}$ G. $\frac{1}{9}$ H. $\frac{1}{6}$ J. $\frac{1}{4}$ K. $\frac{1}{3}$

Έχω $3 \times 3 = 9$ διαφορετικούς αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν, άρα $p = \frac{1}{9}$, άρα G

33. Στο παρακάτω τρίγωνο, $\tan\theta = \frac{5}{\sqrt{39}}$. Πόσο είναι το $\sin\theta$?
A. $\frac{25}{39}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{\sqrt{39}}{8}\theta$ D. $1 - \frac{5\sqrt{3}}{39}$ E. $\sqrt{1 - (\frac{5}{\sqrt{39}})^2}$



Έχω $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow 1 + \frac{39}{25} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \frac{64}{25} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow$
$\sin^2\theta = \frac{25}{64} \xRightarrow[\sin\theta > 0]{\theta \text{ οξεία,άρα}} \sin\theta = \frac{5}{8}$, άρα B

34. Ποιο από τα παρακάτω είναι ισοδύναμο με το $(y + 8)^3$;
F. $y^3 + 24y^2 + 192y + 512$ G. $y^3 + 16y + 512$ H. $y^3 + 16y + 64$ J. $y^3 + 512$ K. $y^3 + 24$

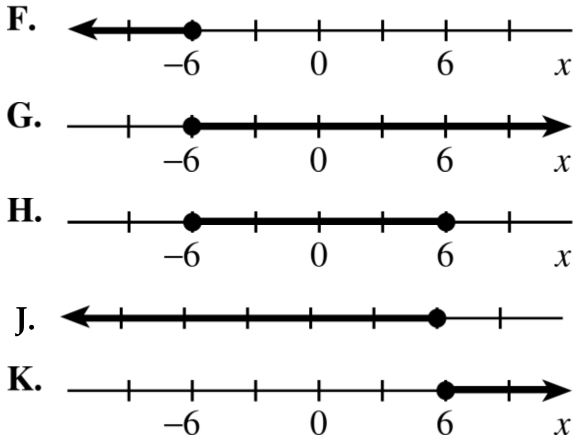
Έχω $(y + 8)^3 = y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 8 + 3 \cdot y \cdot 8^2 + 8^3 = y^3 + 24y^2 + 192y + 512$, άρα F

35. Ο μέσος όρος μιας λίστας 4 αριθμών είναι 88,0. Μια νέα λίστα με 4 αριθμούς έχει τους ίδιους 3 πρώτους αριθμούς με την αρχική λίστα, αλλά ο τέταρτος αριθμός στην αρχική λίστα είναι 50 και ο τέταρτος αριθμός στη νέα λίστα είναι 70. Ποιος είναι ο μέσος όρος αυτής της νέας λίστας αριθμών;

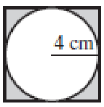
A. 83.5 B. 88.0 C. 93.0 D. 95.0 E. 96.8

Έχω $\boldsymbol{\mu_2 - \mu_1 = \frac{70-50}{4} \Rightarrow \mu_2 - 88 = 5 \Rightarrow \mu_2 = 93}$, άρα C

36. Ποια από τις παρακάτω εικόνες δείχνει το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\boldsymbol{-2x + 7 \geq 19}$;



Έχω $\boldsymbol{-2x + 7 \geq 19 \Leftrightarrow -2x \geq 12 \Leftrightarrow x \leq -6}$, άρα F

37. Ένας κύκλος με ακτίνα 4 εκατοστών είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο, όπως φαίνεται παρακάτω. Ποιο από τα παρακάτω αντιπροσωπεύει το εμβαδόν, σε τετραγωνικά εκατοστά, της σκιασμένης περιοχής; 

A. 32— $\boldsymbol{8\pi}$ B. $\boldsymbol{32 - 16\pi}$ C. $\boldsymbol{32 + 16\pi}$ D. $\boldsymbol{64 - 16\pi}$ E. $\boldsymbol{64 + 16\pi}$

Έχω $\boldsymbol{E_{\sigma\kappa\iota\alpha} = E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} - E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = 8^2 - \pi 4^2 = 64 - 16\pi}$, άρα D

38. Το μήκος του ορθογωνίου A είναι ίσο με το μήκος του ορθογωνίου B. Το πλάτος του ορθογωνίου A είναι 3 ίντσες μικρότερο από το πλάτος του ορθογωνίου B. Εάν μπορεί να προσδιοριστεί, πόσες ίντσες είναι μικρότερη η περίμετρος του ορθογωνίου A από το περίμετρος ορθογωνίου B;

F. 3 G. 6 H. 9 J. 12 K. Δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις δεδομένες πληροφορίες

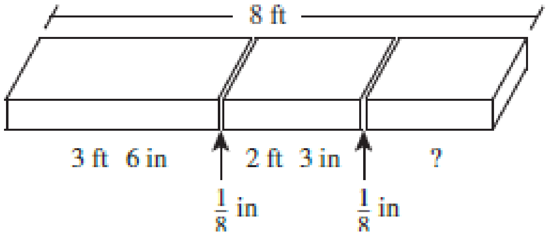
Έχω $\boldsymbol{\Pi_B - \Pi_A = 2\mu_A + 2\pi\lambda_A - 2\mu_B + 2\pi\lambda_B = 2(\pi\lambda_A - \pi\lambda_B) = 2 \cdot 3 = 6}$ ίντσες, άρα G

39. Ποια από τις παρακάτω είναι ίση με την $\boldsymbol{(x^4)^{\frac{5}{4}}(x^5)^{\frac{2}{5}}}$;

A. $\boldsymbol{x^3}$ B. $\boldsymbol{x^{\frac{63}{20}}}$ C. $\boldsymbol{x^{\frac{9}{2}}}$ D. $\boldsymbol{x^7}$ E. $\boldsymbol{x^{10}}$

Έχω $\boldsymbol{(x^4)^{\frac{5}{4}}(x^5)^{\frac{2}{5}} = x^{4\cdot\frac{5}{4}} \cdot x^{5\cdot\frac{2}{5}} = x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7}$, άρα D

40. Έχετε ένα κομμάτι ξυλείας που έχει μήκος ακριβώς 8 πόδια. Το κόβετε σε 3 κομμάτια: το ένα έχει μήκος ακριβώς 3 πόδια 6 ίντσες και το άλλο έχει μήκος ακριβώς 2 πόδια 3 ίντσες, όπως φαίνεται παρακάτω. Εάν κάθε τομή έχει πλάτος ακριβώς $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$ ίντσας, πόσο μήκος, σε πόδια και ίντσες, είναι το τρίτο κομμάτι;



F. 2 $\boldsymbol{ft}$ **3** in G. $\boldsymbol{2ft\ 2\frac{3}{4}}$ in H. $\boldsymbol{2ft\ 2\frac{5}{8}}$ in J. 2$\boldsymbol{ft}$ $\frac{3}{4}$ in K. $\boldsymbol{2ft}$

Έχω $\boldsymbol{x = 8ft - \left(3ft + 6in + 2 \cdot \frac{1}{8}in + 2ft + 3in\right) = 8ft - \left(5ft + 9\frac{1}{4}in\right) = 8ft - 6ft + 1ft -}$ $\boldsymbol{9\frac{1}{4}in = 2ft + 12in - 9\frac{1}{4}in = 2ft + 2\frac{3}{4}in}$, άρα G

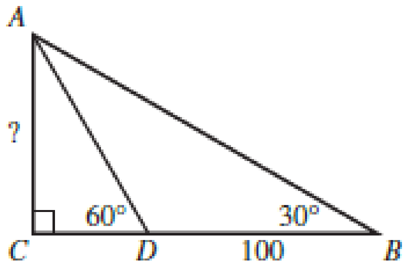
41. Κατά τη διάρκεια μιας προωθητικής καμπάνιας, ένας ραδιοφωνικός σταθμός έδωσε σε κάθε 35ο καλούντα ένα μπλουζάκι και σε κάθε 50ο καλούντα ένα εισιτήριο συναυλίας. Δεδομένου ότι 1.000 άτομα κάλεσαν κατά τη διάρκεια της προσφοράς, πόσοι καλούντες έλαβαν και μπλουζάκι **και** εισιτήριο συναυλίας;
A. 2 B. 5 C. 35 D. 200 E. 350

Έχω $\boldsymbol{ΕΚΠ(35, 50) = 350}$, άρα ο κάθε 350ος καλούντας πήρε και μπλουζάκι **και** εισιτήριο συναυλίας. Άρα πήραν ο 350ος και ο 700ος, άρα A

42. Η Maria ταξιδεύει προς την χώρα A. Κατά την άφιξή της, βρίσκει ότι 1 αμερικάνικο δολάριο ανταλλάσσεται με $\boldsymbol{x}$ νομισματικές μονάδες της χώρας A. Πόσες τέτοιες μονάδες της χώρας A θα πάρει η Maria αν ανταλλάξει $\boldsymbol{y}$ αμερικάνικα δολάρια;
F. $\boldsymbol{xy}$ G. $\boldsymbol{100xy}$ H. $\boldsymbol{\frac{100}{x}}$ J. $\boldsymbol{\frac{x}{y}}$ K. $\boldsymbol{\frac{100x}{y}}$

Έχω $\boldsymbol{1\$ = x\ ν.μ \Rightarrow y\$ = xy\ ν.μ}$, άρα F

43. Στην παρακάτω εικόνα, το τρίγωνο $\boldsymbol{ACB}$ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\boldsymbol{C}$. Το σημείο $\boldsymbol{D}$ βρίσκεται στην πλευρά $\boldsymbol{BC}$, η γωνία $\boldsymbol{\angle ADC = 60^o}$, $\boldsymbol{\angle ABC = 30^o}$, και $\boldsymbol{BD = 100}$ πόδια. Πόσο είναι το μήκος, σε πόδια, της πλευράς $\boldsymbol{AC}$;
A. 50 B. $\boldsymbol{\frac{100}{3}}$ C. $\boldsymbol{\frac{200}{3}}$ D. $\boldsymbol{50\sqrt{3}}$ E. $\boldsymbol{200\sqrt{3}}$



Έχω $\boldsymbol{\angle DAC = \angle ADC - \angle ABD = 60^o - 30^o = 30^o = \angle ABD \Rightarrow}$ $\boldsymbol{AD = DB}$. Έχω $\boldsymbol{AC = AD \cdot \sin 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}}$, άρα D

44. Μια *σχέση* ταιριάζει στοιχεία από το πεδίο ορισμού στο σύνολο τιμών. Ο πίνακας παρακάτω ορίζει μια σχέση όπου το πεδίο ορισμού είναι οι τιμές $\boldsymbol{x}$ και το σύνολο τιμών οι τιμές $\boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
3	**6**
7	**9**
1	**5**
3	**4**
4	**5**
2	**8**

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δείχνει αν αυτή η σχέση είναι συνάρτηση του $\boldsymbol{x}$ και το αιτιολογεί σωστά;

F. Είναι συνάρτηση, αφού οι τιμές $\boldsymbol{y}$ είναι πάντα μεγαλύτερες από τις τιμές των $\boldsymbol{x}$.

G. Είναι, αφού υπάρχουν 5 διακριτές τιμές τόσο στο πεδίο ορισμού όσο και στο σύνολο τιμών.

H. Δεν είναι, αφού υπάρχουν 2 διαφορετικές τιμές $\boldsymbol{y}$ που αντιστοιχούν στην τιμή 3 του $\boldsymbol{x}$

J. Δεν είναι, αφού υπάρχουν 2 διαφορετικές τιμές του $\boldsymbol{x}$ που αντιστοιχούν στην τιμή 5 του $\boldsymbol{y}$.

K. Δεν είναι, αφού καμιά εξίσωση δεν μπορεί να μοντελοποιήσει τη σχέση μεταξύ των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης η σχέση αυτή «Δεν είναι συνάρτηση, αφού υπάρχουν 2 διαφορετικές τιμές $\boldsymbol{y}$ που αντιστοιχούν στην τιμή 3 του $\boldsymbol{x}$», άρα H

45. Μόνο junior και senior φοιτητές εγγράφονται στην Algebra III. Υπάρχουν 3 juniors για κάθε senior. Σε ένα τεστ Άλγεβρα ΙΙΙ, το 80% των junior και το 70% των senior πέρασαν. Ποιο ποσοστό των μαθητών που εγγράφηκαν στην Άλγεβρα ΙΙΙ ΔΕΝ πέρασαν το τεστ?
A. $\mathbf{22\frac{1}{2}}$% B. $\mathbf{24\frac{1}{6}}$% C. 25% D. $\mathbf{27\frac{1}{2}}$% E. 50%

Έχω $\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{3 \cdot (100-80)\% + 1 \cdot (100-70)\%}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{90}}{\mathbf{4}}\% = \mathbf{22.5}\%$, άρα A

Χρησιμοποιήστε τις παρακάτω πληροφορίες για να απαντήσετε στις ερωτήσεις 46-48.

Σε ένα τοπικό κατάστημα κατοικίδιων ζώων, 50 πελάτες ερωτήθηκαν αν είχαν γάτες ή σκύλους. Μεταξύ των ερωτηθέντων πελατών, 31 είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο, 20 είχαν τουλάχιστον 1 γάτα, 7 είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο και τουλάχιστον 1 γάτα και 6 δεν είχαν ούτε σκύλο ούτε γάτα.

46. Πόσοι από τους ερωτηθέντες πελάτες είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο και ΟΧΙ τουλάχιστον 1 γάτα;
F. 11 G. 13 H. 23 J. 24 K. 25

Από τους 31 που είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο, οι 7 είχαν και τουλάχιστον 1 γάτα. Άρα 31-7=24 είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο και ΟΧΙ τουλάχιστον μια γάτα, άρα J

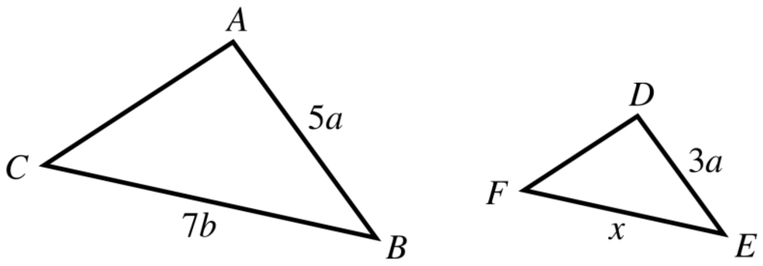
47. Ένας από τους 50 ερωτηθέντες πελάτες διαλέγεται τυχαία. Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος πελάτης να έχει τουλάχιστον έναν σκύλο ή γάτα;
A. $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{50}}$ B. $\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{25}}$ C. $\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{50}}$ D. $\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{25}}$ E. $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{25}}$

Έχω $\boldsymbol{p_{\sigma\kappa\cup\gamma}} = \boldsymbol{p_{\sigma\kappa}} + \boldsymbol{p_{\gamma}} - \boldsymbol{p_{\sigma\kappa\cap\gamma}} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{50}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{50}} = \frac{\mathbf{44}}{\mathbf{50}} = \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{25}}$, άρα E

48. Σε κάθε πελάτη που ρωτήθηκε δόθηκε τουλάχιστον 1 δώρο για τη συμμετοχή του στην έρευνα. Σε όσους είχαν τουλάχιστον 1 σκύλο δόθηκε 1 παιχνίδι για σκύλους αξίας 4 \$, σε όσους είχαν τουλάχιστον 1 γάτα δόθηκε 1 παιχνίδι για γάτες αξίας 3 \$ και σε όσους είχαν κανένα από τα δύο, δόθηκε μια δωροκάρτα αξίας $\boldsymbol{g}$ δολαρίων. Ένα συνολικό ποσό $\boldsymbol{t}$ δολαρίων δόθηκε στους πελάτες. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις δίνει την τιμή του $\boldsymbol{g}$ ως προς το $\boldsymbol{t}$;
F. $\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{6}} - \mathbf{177}$ G. $\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{6}} - \mathbf{184}$ H. $\frac{\boldsymbol{t}-\mathbf{135}}{\mathbf{6}}$ J. $\frac{\boldsymbol{t}-\mathbf{177}}{\mathbf{6}}$ K. $\frac{\boldsymbol{t}-\mathbf{184}}{\mathbf{6}}$

Έχω $\boldsymbol{t} = \mathbf{31 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 6} \cdot \boldsymbol{g} \Leftrightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{184 + 6} \cdot \boldsymbol{g} \Leftrightarrow \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{t}-\mathbf{184}}{\mathbf{6}}$, άρα K

49. Στο παρακάτω σχήμα, $\triangle \boldsymbol{ABC} \sim \triangle \boldsymbol{DEF}$, και τα μήκη είναι σε ίντσες. Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις δίνει την τιμή του $\boldsymbol{x}$ ως προς το $\boldsymbol{b}$;



A. $\boldsymbol{b}$ B. $\frac{21}{5}\boldsymbol{b}$ C. $\mathbf{5}\boldsymbol{b}$ D. $\mathbf{9}\boldsymbol{b}$ E. $\frac{35}{3}\boldsymbol{b}$

Έχω $\frac{5a}{3a} = \frac{7b}{x} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{7b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{21b}{5}$, άρα B

50. Κάθε μαθητής στο μάθημα του Πολίτη της κυρίας O'Malley τραβάει 1 λαχνό τυχαία από κάθε ένα από τα 2 μπολ για να καθορίσει τη θέση του στην τάξη. Ο λαχνός που τραβιέται από το πρώτο μπολ είναι ο αριθμός σειράς της θέσης ενός μαθητή. Οι 28 λαχνοί στο πρώτο μπολ έχουν ίση κατανομή των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7. Ο λαχνός που βγαίνει από το δεύτερο μπολ είναι ο αριθμός της θέσης μέσα στη σειρά που καθορίζεται από τον πρώτο λαχνό. Οι 28 λαχνοί στο δεύτερο μπολ έχουν ίση κατανομή των αριθμών 1, 2, 3 και 4. Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος μαθητής που θα κληρώσει να έχει μια θέση στη σειρά 5, αλλά ΌΧΙ στη θέση 1;

F. $\frac{1}{28}$ G. $\frac{3}{28}$ H. $\frac{6}{28}$ J. $\frac{9}{28}$ K. $\frac{18}{28}$

Έχω $\boldsymbol{p} = \frac{1}{7} \cdot \left(\mathbf{1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{28}$, άρα G

51. Ποια είναι η τιμή του $\mathbf{log_5 625}$?

A. 3 B. 4 C. 6 D. 125 E. 436

Έχω $\mathbf{log_5 625} = \mathbf{log_5 5^4} = \mathbf{4}$, άρα B

52. Η ανίσωση $\mathbf{7}\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$ είναι αληθής για δυο συγκεκριμένους πραγματικούς $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$. Ποια από τις παρακάτω ανισότητες *πρέπει* να αληθεύει;

F. $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ G. $\boldsymbol{y} > \mathbf{0}$ H. $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ J. $\boldsymbol{y} < \mathbf{0}$ K. $\boldsymbol{xy} < \mathbf{0}$

Έχω $\mathbf{7}\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} < \mathbf{0} \overset{x^2>0}{\Longleftrightarrow} \frac{7x^2y}{7x^2} < \frac{0}{7x^2y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} < \mathbf{0}$, άρα J

53. Με δεδομένο ότι $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{d}$, ποιες είναι οι πραγματικές τιμές του $\boldsymbol{b}$ ώστε η ανισότητα $\frac{bc-bd}{6c-6d} < \mathbf{0}$ να είναι αληθής;

A. 6 μόνο B. $\frac{1}{6}$ μόνο C. $-\frac{1}{6}$ μόνο D. Όλοι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί E. Όλοι οι αρνητικοί

Έχω $\frac{bc-bd}{6c-6d} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{b(c-d)}{6(c-6)} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{b}{6} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} < \mathbf{0}$, άρα E

54. Για όλες τις αρνητικές τιμές του $\boldsymbol{k}$, ποιο είναι το σύνολο τιμών του $\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$?

F. Όλοι οι αρνητικοί G. Όλοι οι αριθμοί μικρότεροι του 1 H. Όλοι οι ρητοί μικρότεροι του 1

J. Όλοι οι θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 1 K. Όλοι οι θετικοί αριθμοί μικρότεροι του 2

Έχω $\boldsymbol{k} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0} < \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} < \mathbf{2}^{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \mathbf{0} < \mathbf{2}^{\boldsymbol{k}} < \mathbf{1}$, άρα J

55. Για όλα τα τρίγωνα με μήκη πλευρών $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, και $\boldsymbol{c}$ απέναντι γωνίες μεγέθους $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, και $\boldsymbol{C}$, αντίστοιχα, ποια από τις παρακάτω ισότητες *πρέπει* να αληθεύει;

A. $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ B. $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B}$ C. $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$

D. $\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{ab}(\sin \boldsymbol{B})$ E. $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{ab}(\cos \boldsymbol{C})$

Από τον νόμο των συνημιτόνων ισχύει η E. Η B έπρεπε να είναι $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$!

56. Το γεγονός $\boldsymbol{A}$ αποτελείται από 6 απλά γεγονότα. Το γεγονός $\boldsymbol{B}$ αποτελείται από 3 απλά γεγονότα, κανένα από τα οποία δεν είναι στο γεγονός $\boldsymbol{A}$. Το γεγονός $\boldsymbol{C}$ είναι η ένωση των $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$, και το γεγονός $\boldsymbol{D}$ είναι η τομή των $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις ισχύουν; (Σημείωση: Αν το γεγονός $\boldsymbol{X}$ αποτελείται από $\boldsymbol{n}$ απλά γεγονότα, τότε $|\boldsymbol{X}| = \boldsymbol{n}.$)

F. $|\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{C}| < |\boldsymbol{D}|$ G. $|\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{D}| < |\boldsymbol{C}|$ H. $|\boldsymbol{C}| < |\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{D}|$

J. $|\boldsymbol{D}| < |\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{C}|$ K. $|\boldsymbol{D}| < |\boldsymbol{C}| < |\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}|$

Έχω $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{6}, |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{3}, |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{9}, |\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| = |\emptyset| = \boldsymbol{0}$ άρα $|\boldsymbol{D}| < |\boldsymbol{B}| < |\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{C}|$, άρα J

57. Η τετραγωνική βάση μιας πυραμίδας έχει μήκος $\boldsymbol{20\ ft}$. Το κεκλιμένο ύψος της πυραμίδας είναι $\boldsymbol{15\ ft}$. Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν, σε τετραγωνικά πόδια, της πυραμίδας;
A. 550 B. 600 C. 1,000 D. 1,600 E. 2,000

Έχω $\boldsymbol{E_{\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\delta\alpha\varsigma} = 4 \cdot E_{\pi\alpha\rho\alpha\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\omega\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu} + E_{\beta\alpha\sigma\eta\varsigma} = 4 \cdot \frac{1}{2} 20 \cdot 15 + 20^2 = 600 + 400 = 1000 ft}$, άρα C

58. Για πόσους ακέραιους $\boldsymbol{x}$ είναι η τιμή της έκφρασης $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4})$ ένας θετικός πρώτος αριθμός;
F. $\boldsymbol{0}$ G. 1 H. 2 J. 3 K. 4

Αν $\boldsymbol{x \geq 6}$, τότε $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4})$ είναι σύνθετος ως γινόμενο αριθμών διάφορων του 1.
Αν $\boldsymbol{x = 5}$, τότε $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4}) = \boldsymbol{4}$ σύνθετος
Αν $\boldsymbol{1 \leq x \leq 4}$, τότε $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4}) \leq \boldsymbol{0}$
Αν $\boldsymbol{x = 0}$, τότε $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4}) = \boldsymbol{4}$ σύνθετος
Αν $\boldsymbol{x \leq -1}$, τότε $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-4}) = \boldsymbol{4}$ σύνθετος ως γινόμενο αρνητικών αριθμών διάφορων του -1
Άρα F

59. Ποια από τις παρακάτω τιμές, σε μοίρες, του $\boldsymbol{x}$ ΔΕΝ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της παρακάτω συνάρτησης;

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1 + \sec x}}$$

A. $\boldsymbol{0^o}$ B. $\boldsymbol{45^o}$ C. $\boldsymbol{60^o}$ D. $\boldsymbol{150^o}$ E. $\boldsymbol{180^o}$

Έχω για $\boldsymbol{x \neq 90° + \kappa 360°, k \in \mathbb{Z}}$ ότι πρέπει επιπλέον $\boldsymbol{1 + \sec x \neq 0 \Leftrightarrow \sec x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \neq -1 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq 180°}$, άρα E

60. Η παρακάτω συνάρτηση ορίζεται για τις σταθερές $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ και για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς $\boldsymbol{n}$.

$$\boldsymbol{r(n) = ab^n}$$

Έστω $\boldsymbol{r(1) = \frac{1}{2}, r(2) = \frac{3}{2}, r(3) = \frac{9}{2}}$, και $\boldsymbol{r(4) = \frac{27}{2}}$. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ισοδύναμη με την $\boldsymbol{r(n)}$?
F. $\boldsymbol{f(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ G. $\boldsymbol{g(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$ H. $\boldsymbol{h(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ J. $\boldsymbol{j(n) = \frac{1}{2}(3)^{n-1}}$ K. $\boldsymbol{k(n) = \frac{1}{2}(3)^{n}}$
Έχω $\boldsymbol{\frac{1}{2} = ab, \frac{3}{2} = ab^2}$,με διαίρεση κατά μέλη έχω $\boldsymbol{b = 3}$. Με αντικατάσταση στην πρώτη έχω $\boldsymbol{\frac{1}{2} = a \cdot 3 \Rightarrow a = \frac{1}{6}}$. Άρα $\boldsymbol{r(n) = \frac{1}{6} 3^n = \frac{1}{2 \cdot 3} 3^n = \frac{1}{2} 3^{n-1}}$, άρα J

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ 2ου ΤΕΣΤ. ΣΤΟΠ!

ΜΗΝ ΓΥΡΙΖΕΤΕ ΤΗ ΣΕΛΙΔΑ ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΣΑΣ ΠΟΥΝ ΝΑ ΤΟ ΚΑΝΕΤΕ.

ΜΗΝ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΤΕ ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΤΕΣΤ.

2023 AP Calculus AB Free Response Questions

Section II, Part A (30 minutes) # of questions: 2

Μια αριθμομηχανή γραφικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτό το μέρος

t σε sec	0	60	90	120	135	150
$f(t)$ σε γαλόνια ανά sec	0	0.1	0.15	0.1	0.05	0

1. Ένας πελάτης σε ένα βενζινάδικο αντλεί βενζίνη από μια δεξαμενή καυσίμων. Ο ρυθμός ροής της βενζίνης μοντελοποιείται από μια διαφορίσιμη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, όπου $\boldsymbol{f(t)}$ μετράται σε γαλόνια ανά δευτερόλεπτο και $\boldsymbol{t}$ μετράται σε δευτερόλεπτα από τότε που άρχισε η άντληση. Επιλεγμένες τιμές της $\boldsymbol{f(t)}$ δίνονται στον παραπάνω πίνακα.

a. Χρησιμοποιώντας σωστές μονάδες, ερμηνεύστε την έννοια του $\int_{60}^{135} f(t)dt$ στο πλαίσιο του προβλήματος. Χρησιμοποιήστε ένα σωστό άθροισμα Riemann με τα τρία υποδιαστήματα $[60, 90]$, $[90, 120]$ και $[120, 135]$ για να προσεγγίσετε την τιμή του $\int_{60}^{135} f(t)dt$.

b. Υπάρχει τιμή c, για $60 < c < 120$, τέτοια ώστε $f'(c) = 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

c. Ο ρυθμός ροής της βενζίνης, σε γαλόνια ανά δευτερόλεπτο, μπορεί επίσης να μοντελοποιηθεί με την $g(t) = \left(\frac{t}{500}\cos\left(\left(\frac{t}{120}\right)^2\right)\right)$ για $0 \le t \le 150$. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, βρείτε τον μέσο ρυθμό ροής βενζίνης κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $0 \le t \le 150$. Εμφανίστε τους υπολογισμούς σας.

d. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο g που ορίζεται στο μέρος c, προσδιορίστε την τιμή $g'(140)$. Ερμηνεύστε το νόημα της απάντησής σας στο πλαίσιο του προβλήματος.

Λύση

a. Το $\int_{60}^{135} f(t)dt$ εκφράζει την ποσότητα καυσίμου που αντλείται από την δεξαμενή, σε γαλόνια, για το χρονικό διάστημα από 60 δευτερόλεπτα έως 135 δευτερόλεπτα. Έχω $\int_{60}^{135} f(t)dt = 30 \cdot f(90) + 30 \cdot f(120) + 15 \cdot f(135) = 30 \cdot 0.15 + 30 \cdot 0.1 + 15 \cdot 0.05 = \boxed{8.25}$ γαλόνια.

b. Έχω $f(60) = f(120)$, f συνεχής στο $[60, 120]$ και διαφορίσιμη συνάρτηση στο $(60, 120)$, οπότε από το θεώρημα Rolle, υπάρχει τιμή c, για $60 < c < 120$, τέτοια ώστε $f'(c) = 0$.

c. Έχω $g_{avg}(t) = \frac{1}{150-0}\int_0^{150} g(t)dt = \frac{1}{150}\int_0^{150}\left(\frac{t}{500}\cos\left(\left(\frac{t}{120}\right)^2\right)\right)dt = \frac{1}{150}\left[\frac{1}{500}\cdot\frac{1}{2}\cdot 120^2 \cdot \sin\left(\left(\frac{t}{120}\right)^2\right)\right]_0^{150} = \frac{120^2}{150000}\cdot\left[\sin\left(\left(\frac{150}{120}\right)^2\right) - 0\right] = \frac{12\sin\left(\frac{25}{16}\right)}{125} = 0.095996 \approx \boxed{0.096\,\frac{\text{gal}}{\text{sec}}}$

d. Έχω $g'(t) = \left(\frac{1}{500}\cos\left(\left(\frac{t}{120}\right)^2\right)\right) - \left(\frac{t}{500}\cdot\frac{2t}{120}\cdot\frac{1}{120}\sin\left(\left(\frac{t}{120}\right)^2\right)\right) \Rightarrow g'(140) = \left(\frac{1}{500}\cos\left(\left(\frac{7}{6}\right)^2\right)\right) - \left(0.28\cdot\frac{7}{360}\sin\left(\left(\frac{7}{6}\right)^2\right)\right) = -0.00490889 \approx \boxed{-0.005\,\frac{gal}{sec^2}}$. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ροής του καυσίμου την στιγμή $t = 140\ sec$ είναι αρνητικός δηλαδή μειώνεται.

2. Ο Stephen κολυμπά μπρος-πίσω κατά μήκος μιας ευθείας διαδρομής σε μια πισίνα μήκους 50 μέτρων για 90 δευτερόλεπτα. Η ταχύτητα του Stephen περιγράφεται από την $v(t) = 2.38e^{-0.02t}\sin\left(\frac{\pi}{56}t\right)$, όπου t μετράται σε δευτερόλεπτα και $v(t)$ μετράται σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο.

a. Βρείτε όλες τις στιγμές t στο διάστημα $0 < t < 90$ στις οποίες ο Stephen αλλάζει κατεύθυνση. Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

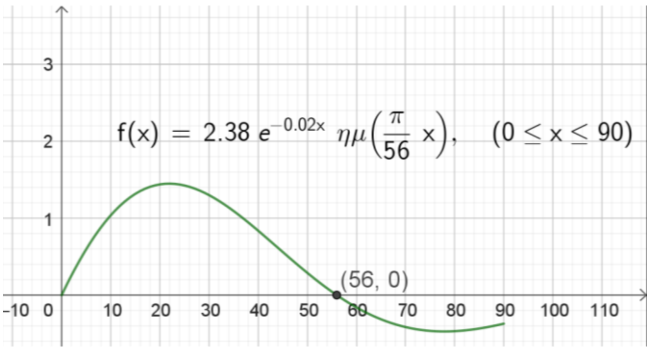
b. Βρείτε την επιτάχυνση του Stephen στο χρόνο $t = 60$ δευτερόλεπτα. Δείξτε τη ρύθμιση για τους υπολογισμούς σας και υποδείξτε μονάδες μέτρησης. Ο Stephen επιταχύνει ή επιβραδύνει τη στιγμή $t = 60$ δευτερόλεπτα; Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

c. Βρείτε την απόσταση μεταξύ της θέσης του Stephen στο χρόνο $t = 20$ δευτερόλεπτα και της θέσης του στο χρόνο $t = 80$ δευτερόλεπτα. Δείξτε τη ρύθμιση για τους υπολογισμούς σας

d. Βρείτε τη συνολική απόσταση που κολυμπά ο Stephen κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $0 \leq t \leq 90$ δευτερόλεπτα. Δείξτε τη ρύθμιση για τους υπολογισμούς σας

Λύση

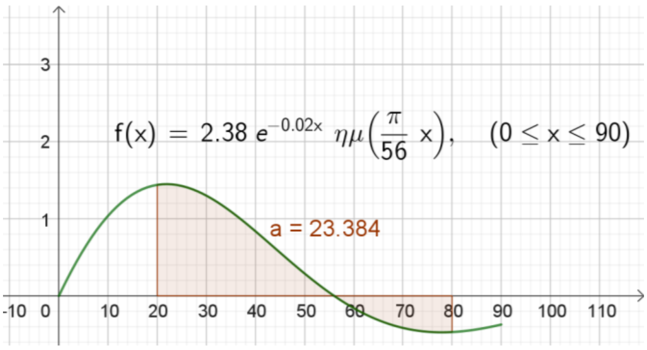
a. Ο Stephen αλλάζει κατεύθυνση όταν υπάρχει αλλαγή προσήμου της $v(t)$, δηλαδή όταν η καμπύλη του γραφήματος διασχίζει τον άξονα t (ή τον άξονα x). Σύμφωνα με το διπλανό γράφημα αυτό συμβαίνει την $\boxed{t = 56\,sec}$.



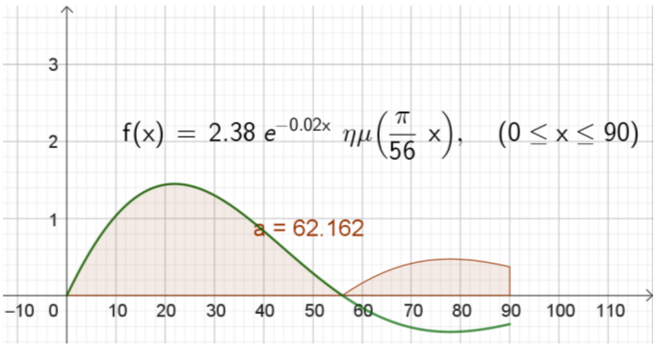
Αλγεβρικά θα μπορούσαμε να το λύσουμε ως εξής $v(t) > 0 \Leftrightarrow$ $2.38e^{-0.02t}\sin\left(\frac{\pi}{56}t\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{56}t\right) > 0 = \sin 0 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{56}t < \pi \Rightarrow 0 < t < 56$, δηλαδή η $v(t)$ αλλάζει πρόσημο την $t = 56$

b. Έχω $a(t) = v'(t) = 2.38(-0.02)e^{-0.02t}\sin\left(\frac{\pi}{56}t\right) + 2.38\left(\frac{\pi}{56}\right)e^{-0.02t}\cos\left(\frac{\pi}{56}t\right)$, οπότε $a(60) = 2.38(-0.02)e^{-1.2}\sin\left(\frac{\pi}{56}\cdot 60\right) + 2.38\left(\frac{\pi}{56}\right)e^{-1.2}\cos\left(\frac{\pi}{56}\cdot 60\right) = -0.0360162 \approx -0.036\frac{m}{sec^2}$.
Έχω $v(60) = 2.38e^{-1.2}\sin\left(\frac{\pi}{56}\cdot 60\right) = -0.159512 \approx \boxed{-0.16\,m/sec}$. Αφού η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν το ίδιο πρόσημο ο Stephen επιταχύνει.

c. Η απόσταση των θέσεων είναι το ολοκλήρωμα $\int_{20}^{80} v(t)dt = 23.383997 \approx 23.384\,m$



d. Η συνολική απόσταση δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^{90} |v(t)|dt = 62.162\,m$

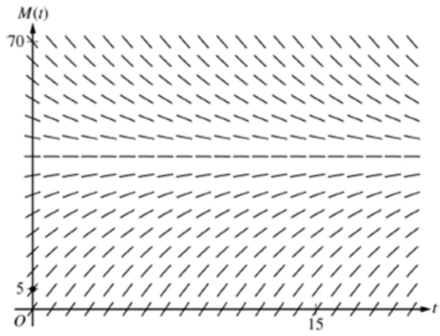


Section II, Part B (1 hour) # of questions: 4

Μια αριθμομηχανή γραφικών ΔΕΝ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτό το μέρος

3. Ένα μπουκάλι γάλα βγαίνει από το ψυγείο και τοποθετείται σε μια κατσαρόλα με ζεστό νερό για να ζεσταθεί. Η αύξουσα συνάρτηση $\boldsymbol{M}$ μοντελοποιεί τη θερμοκρασία του γάλακτος τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, όπου $\boldsymbol{M(t)}$ μετράται σε βαθμούς Κελσίου ($°\boldsymbol{C}$) και $\boldsymbol{t}$ είναι ο αριθμός των λεπτών από τότε που τοποθετήθηκε η φιάλη στην κατσαρόλα. Η $\boldsymbol{M}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4}(40 - M)$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η θερμοκρασία του γάλακτος είναι $5°C$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $M(t) < 40$ για όλες τις τιμές του t.

a. Ένα πεδίο κλίσεων για τη διαφορική εξίσωση $\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4}(40 - M)$ εμφανίζεται στα δεξιά. Χαράξτε την καμπύλη που περνά μέσω του σημείου $(0, 5)$.



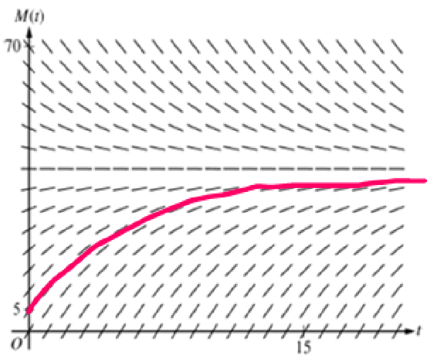
b. Χρησιμοποιήστε την εφαπτομένη γραμμή στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{M}$ σε χρόνο $t = 0$ για να προσεγγίσετε το $M(2)$, την θερμοκρασία του γάλακτος τη χρονική στιγμή $t = 2$ λεπτά.

c. Γράψτε μια έκφραση για το $\frac{d^2M}{dt^2}$. Χρησιμοποιήστε το για να προσδιορίσετε αν η προσέγγιση από το μέρος (b) είναι υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση για την πραγματική τιμή του $M(2)$. Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

d. Χρησιμοποιήστε διαχωρισμό μεταβλητών για να βρείτε μια έκφραση για το $M(t)$, τη συγκεκριμένη λύση στη διαφορική εξίσωση $\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4}(40 - M)$ με αρχική συνθήκη $M(0) = 5$.

Λύση

a. Βλέπε σχήμα παρακάτω

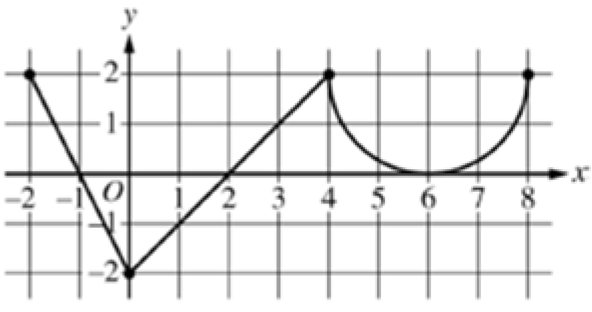


b. Τη στιγμή $t = 0$, έχω $M(0) = 5$. Ακόμα έχω $M'(0) = \left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{4}\big(40 - M(0)\big) = \frac{1}{4}(40 - 5) = \frac{35}{4}$, συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(0, 5)$είναι $y - M(0) = M'(0)(t - 0)$ ή $y = 5 + \frac{35}{4}t$. Άρα την $t = 2$ έχω $M(2) = 5 + \frac{35}{4} \cdot 2 = \boxed{22.5°\mathrm{C}}$

c. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της $\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4}(40 - M)$ έχω $\frac{d^2M}{dt^2} = -\frac{1}{4}\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(40 - M) = -\frac{1}{16}(40 - M) < 0$, για όλες τις τιμές του t, άρα η γραφική παράσταση της M έχει τα κοίλα προς τα κάτω, συνεπώς η εφαπτομένη είναι πάνω από την καμπύλη της M οπότε η προσέγγιση από το μέρος (b) είναι υπερεκτίμηση για την πραγματική τιμή του $M(2)$.

d. Έχω $\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4}(40 - M) \Rightarrow \frac{dM}{40-M} = \frac{1}{4}dt \Rightarrow \int \frac{dM}{40-M} = \int \frac{1}{4}dt \Rightarrow -\ln|40 - M| = \frac{1}{4}t + C$. Αλλά την $t = 0$, έχω $M = 5$ οπότε $-\ln 35 = C$, άρα $-\ln|40 - M| = \frac{1}{4}t - \ln 35 \rightarrow \ln|40 - M| = -\frac{1}{4}t + \ln 35$ $\xRightarrow{40-M>0} 40 - M = +e^{-0.25t + \ln 35} \Rightarrow M = 40 + e^{\ln 35}e^{-0.25t} \Rightarrow \boxed{M(t) = 40 + 35e^{-0.25}}$

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[-2, 8]$ και ικανοποιεί την $f(2) = 1$. Το γράφημα της f', της παράγωγου της f, αποτελείται από δύο τμήματα γραμμής και ένα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



Graph of f'

a. Έχει η f ένα σχετικό ελάχιστο, ένα σχετικό μέγιστο, ή κανένα από τα δύο στο $x = 6$; Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

b. Σε ποια ανοικτά διαστήματα, αν υπάρχουν, είναι το γράφημα της f κοίλο ; Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

c. Βρείτε την τιμή του $\lim_{x\to 2}\frac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6}$, ή δείξτε ότι δεν υπάρχει. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

d. Βρείτε το ολικό ελάχιστο f στο κλειστό διάστημα $[-2, 8]$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

a. Στο $x = 6$, το γράφημα της f' δεν διασχίζει τον άξονα x, επομένως δεν υπάρχει αλλαγή πρόσημου της f'. Συνεπώς δεν έχω ακρότατο.

b. Το γράφημα της f είναι κοίλο όταν η f' είναι φθίνουσα δηλαδή στα διαστήματα $\boxed{(-2, 0)}$ και $\boxed{(4, 6)}$.

c. Έχω $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6} = \frac{6(1)-3(2)}{4-10+6} = \frac{0}{0}$. Από κανόνα De L' Hopital έχω $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6f(x)-3x}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{6f'(x)-3}{2x-5} = \frac{6\cdot 0-3}{2\cdot 2-5} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}$

d. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα άκρα του κλειστού διαστήματος $[-2, 8]$ και τα σημεία που η f' αλλάζει πρόσημο. Ειδικότερα τοπικό ελάχιστο θα έχω όπου η f' αλλάζει από αρνητικό σε θετικό πρόσημό, άρα στο $x = 2$. Έχω $f(2) = 1$. $f(8) = f(2) + \int_2^8 f'(x)dx > f(2) + \int_2^8 0dx = f(2)$, αφού $f'(x) \geq 0$ στο $[2, 8]$. (Σημείωση: μπορούσαμε να υπολογίσουμε το $\int_2^8 f'(x)dx = E_{τριγώνου} + E_{ορθογωνίου} - E_{ημικυκλίου} = \frac{2\cdot 2}{2} + 2\cdot 4 - \frac{\pi\cdot 2^2}{2} = 10 - 2\pi$)
Τέλος έχω $f(-2) = f(2) + \int_2^{-2} f'(x)dx = f(2) - \int_{-2}^{2} f'(x)dx = 1 - E_{τριγώνου1} + E_{τριγώνου2} + E_{τριγώνου3} = 1 - 1 + 1 + 2 = 3$. Άρα το ολικό ελάχιστο είναι το $\boxed{f(2) = 1}$

5. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές διαφορίσιμες. Ο παραπάνω πίνακας δίνει τιμές των συναρτήσεων και των πρώτων παραγώγων τους σε επιλεγμένες τιμές του x.

x	0	2	4	7
$f(x)$	10	7	4	5
$f'(x)$	3/2	-8	3	6
$g(x)$	1	2	-3	0
$g'(x)$	5	4	2	8

a. Έστω h η συνάρτηση που ορίζεται από $h(x) = f(g(x))$. Βρείτε το $h'(7)$. Δείξτε τον υπολογισμό που οδηγεί στην απάντησή σας.

b. Έστω k μια διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $k'(x) = \left(f(x)\right)^2 \cdot g(x)$. Είναι το γράφημα της k κοίλο προς τα πάνω ή κοίλο προς τα κάτω στο σημείο όπου $x = 4$; Δώστε έναν λόγο για την απάντησή σας.

c. Έστω $\boldsymbol{m}$ η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{m(x) = 5x^3 + \int_0^x f'(t)dt}$. Βρείτε το $\boldsymbol{m(2)}$. Δείξτε τον υπολογισμό που οδηγεί στην απάντησή σας.

d. Η συνάρτηση $\boldsymbol{m}$ που ορίζεται στο (c) αυξάνεται, μειώνεται ή τίποτε από αυτά στο $\boldsymbol{x = 2}$;

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ με $\boldsymbol{h'(7) = f'(g(7)) \cdot g'(7) = f'(0) \cdot 8 = \frac{3}{2} \cdot 8 = \boxed{12}}$

b. Έχω $\boldsymbol{k'(x) = (f(x))^2 \cdot g(x) \Rightarrow k''(x) = 2f(x)f'(x) \cdot g(x) + (f(x))^2 \cdot g'(x)}$ οπότε $\boldsymbol{k''(4) = 2f(4)f'(4)g(4) + (f(4))^2 \cdot g'(4) = +2(4)(3)(-3) + 4^2(2) = -72 + 32 = -40 < 0}$, άρα τα κοίλα προς τα κάτω.

c. Έχω $\boldsymbol{m(x) = 5x^3 + \int_0^x f'(t)dt = m(x) = 5x^3 + f(x) - f(0)}$. Άρα $\boldsymbol{m(2) = 5 \cdot 2^3 + f(2) - f(0) = 40 + 7 - 10 = \boxed{37}}$

d. Έχω από το (c) ότι $\boldsymbol{m(x) = 5x^3 + f(x) - f(0) \Rightarrow m'(x) = 15x^2 + f'(x)}$, άρα $\boldsymbol{m'(2) = 15 \cdot 2^2 + f'(2) = 60 + (-8) = 52 > 0}$, άρα αυξάνεται.

6. Εξετάστε την καμπύλη που δίνεται από την εξίσωση $\boldsymbol{6xy = 2 + y^3}$.

a. Δείξτε ότι $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{y^2-2x}}$.

b. Βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου στην καμπύλη στο οποίο η γραμμή που εφάπτεται στην καμπύλη είναι οριζόντια ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

c. Βρείτε τις συντεταγμένες ενός σημείου της καμπύλης στο οποίο η γραμμή που εφάπτεται στην καμπύλη είναι κατακόρυφη ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

d. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Τη στιγμή που το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο , $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, -2\right)}$, η οριζόντια θέση του αυξάνεται με ρυθμό $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}}$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Ποια είναι η τιμή του $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}}$, του ρυθμού μεταβολής της κατακόρυφης θέσης του σωματιδίου, εκείνη τη στιγμή;

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{6xy = 2 + y^3 \Rightarrow 6x\frac{dy}{dx} + 6y = 3y^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 6x) = 6y\frac{dy}{dx} = \frac{6y}{3y^2-6x} = \boxed{\frac{2y}{y^2-2x}}}$

b. Για να έχω οριζόντια εφαπτομένη σε κάποιο σημείο θα πρέπει $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2-2x} = 0 \Leftrightarrow y = 0}$, αλλά αν θέσω $\mathbf{y = 0}$ στην $\boldsymbol{6xy = 2 + y^3}$ έχω $\mathbf{0 = 2 + 0}$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

c. Για να έχω κατακόρυφη εφαπτομένη σε κάποιο σημείο θα πρέπει $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} \to \infty \Leftrightarrow y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}}$. Με αντικατάσταση στην $\boldsymbol{6xy = 2 + y^3}$ έχω $\boldsymbol{3y^3 = 2 + y^3 \Leftrightarrow y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}}$. Άρα υπάρχει τέτοιο σημείο το $\boxed{\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}}$

d. Έχω $\boldsymbol{6xy = 2 + y^3}$. Παραγωγίζοντας ως προς $\boldsymbol{t}$ έχω $\boldsymbol{6x\frac{dy}{dt} + 6y\frac{dx}{dt} = 3y^2\frac{dy}{dt}}$ Στο σημείο $\boldsymbol{(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)}$ έχω $\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}}$ άρα $\boldsymbol{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{dt} + 6 \cdot (-2) \cdot \frac{2}{3} = 3(-2)^2\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow 3\frac{dy}{dt} - 8 = 12\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{9}\frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}}}$

Η Εξέταση AP® Calculus BC

ΜΕΡΟΣ Ι: Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

ΜΗΝ ΑΝΟΙΞΕΤΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΠΡΟΤΟΥ ΣΑΣ ΠΟΥΝ ΝΑ ΤΟ ΚΑΝΕΤΕ.

Συνολικός Χρόνος

1 ώρα και 45 λεπτά

Πλήθος Ερωτήσεων

45

Ποσοστό Συνολικής Βαθμολόγησης

50%

Εργαλείο Γραφή

Μολύβι

Οδηγίες

Το Μέρος Ι αυτής της εξέτασης περιέχει 45 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Συμπληρώστε μόνο τα κυκλάκια για τους αριθμούς 1 έως 45 στο φύλλο απαντήσεών σας.

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΕΣ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ.

Αναφέρετε όλες τις απαντήσεις σας στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής στο φύλλο απαντήσεων. Δεν θα δοθεί πίστωση για οτιδήποτε γράφεται σε αυτό το φυλλάδιο εξετάσεων, αλλά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το φυλλάδιο για σημειώσεις ή πρόχειρες εργασίες. Αφού αποφασίσετε ποια από τις προτεινόμενες απαντήσεις είναι η καλύτερη, συμπληρώστε πλήρως το αντίστοιχο οβάλ στο φύλλο απαντήσεων. Δώστε μόνο μία απάντηση σε κάθε ερώτηση. Εάν αλλάξετε μια απάντηση, βεβαιωθείτε ότι η προηγούμενη ένδειξη έχει διαγραφεί εντελώς. Εδώ είναι ένα δείγμα ερώτησης και απάντησης.

Δείγμα ερώτησης   Δείγμα απάντησης

Το Σικάγο είναι   A (B) C D E

(Α) κατάσταση

(Β) πόλη

(Γ) χώρα

(Δ) ήπειρος

(Ε) χωριό

Χρησιμοποιήστε το χρόνο σας αποτελεσματικά, δουλεύοντας όσο πιο γρήγορα μπορείτε χωρίς να χάσετε την ακρίβεια. Μην ξοδεύετε πολύ χρόνο σε καμία ερώτηση. Προχωρήστε σε άλλες ερωτήσεις και επιστρέψτε σε αυτές που δεν έχετε απαντήσει αν έχετε χρόνο. Δεν αναμένεται ότι όλοι θα γνωρίζουν τις απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

Σχετικά με τις εικασίες

Πολλοί υποψήφιοι αναρωτιούνται αν πρέπει ή όχι να μαντέψουν τις απαντήσεις σε ερωτήσεις για τις οποίες δεν είναι σίγουροι. Οι βαθμολογίες πολλαπλών επιλογών βασίζονται στον αριθμό των ερωτήσεων που απαντήθηκαν σωστά. Δεν αφαιρούνται πόντοι για λανθασμένες απαντήσεις και δεν δίνονται βαθμοί για αναπάντητες ερωτήσεις. Επειδή δεν αφαιρούνται βαθμοί για λανθασμένες απαντήσεις, σας ενθαρρύνουμε να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Σε όποιες ερωτήσεις δεν γνωρίζετε την απάντηση, θα πρέπει να εξαλείψετε όσες περισσότερες επιλογές μπορείτε και, στη συνέχεια, να επιλέξετε την καλύτερη απάντηση από τις υπόλοιπες επιλογές.

Μέρος I

CALCULUS BC

Μέρος I, Τμήμα A

Χρόνος—55 Λεπτά

Πλήθος Ερωτήσεων—28

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΕΣ ΔΕΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ.

<u>Οδηγίες</u>: Λύστε καθένα από τα παρακάτω προβλήματα, χρησιμοποιώντας τον διαθέσιμο χώρο για πρόχειρο. Αφού εξετάσετε όλες τις επιλογές, αποφασίστε ποια είναι η καλύτερη από τις επιλογές που δίνονται και συμπληρώστε το αντίστοιχο οβάλ στο φύλλο απαντήσεων. Δεν θα δοθεί βαθμός για οτιδήποτε γράφεται στο βιβλίο εξετάσεων. Μην ξοδεύετε πολύ χρόνο σε κανένα πρόβλημα.

<u>Σε αυτό το τεστ</u>: Εκτός εάν ορίζεται διαφορετικά, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ θεωρείται ότι είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $\boldsymbol{x}$ για τους οποίους η $\boldsymbol{f(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6} =$

   (A) $\mathbf{0}$ (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) Το όριο δεν υπάρχει.

   Έχω $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+2)}{(x-2)} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$, άρα D.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x}{\csc x} =$

   (A) $\mathbf{0}$ (B) 1 (C) $\mathbf{2\pi}$ (D) ∞ (E) Το όριο δεν υπάρχει.

   Έχω $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x}{\csc x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$, άρα A.

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{(x-4)^2}\right) =$

   (A) $\frac{x-\gamma}{(x-4)^3}$ (B) $\frac{-2x-14}{(x-4)^3}$ (C) $\frac{2x+14}{(x-4)^3}$ (D) $\frac{-2x-14}{(x-4)^4}$ (E) $\frac{x+14}{(x-4)^4}$

   Έχω $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{(x-4)^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(2x+3)(x-4)^2-(2x+3)\frac{d}{dx}((x-4)^2)}{(x-4)^4} = \frac{2(x-4)^2-(2x+3)2(x-4)}{(x-4)^4} =$
   $\frac{2(x-4)-(2x+3)2}{(x-4)^3} = \frac{2x-8-4x-6}{(x-4)^3} = \boxed{\frac{-2x-14}{(x-4)^3}}$, άρα B.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3\sin 2x} =$

   (A) $\mathbf{-1}$ (B) $\mathbf{0}$ (C) 1 (D) ∞ (E) Το όριο δεν υπάρχει.

   Έχω $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 3\frac{\sin 3x}{3x}}{3\frac{2\sin 2x}{2x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$, άρα C.

5. Τι είδος(η) ασυνέχειας έχει η συνάρτηση, $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2-7x-18}{x^2-12x+27}$;

   (A) άλματος (jump) (B) σημειακή (point) (C) ουσιώδης ασυνέχεια (essential) (D) άλματος και αιρούμενη (jump and removable) (E) ουσιώδης και αιρούμενη (essential and removable)

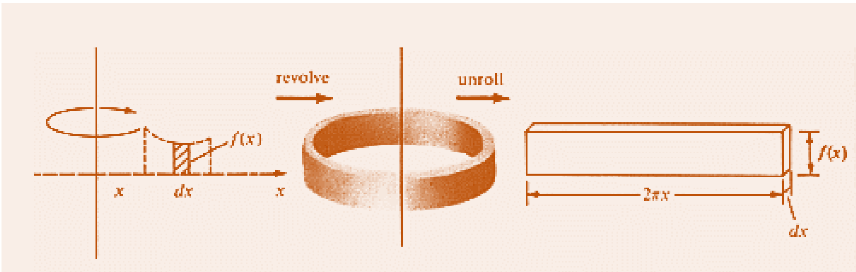
   Ασυνέχειες **άλματος** υπάρχουν όταν τα όρια αριστερού και δεξιού χεριού της συνάρτησης δεν είναι ίσα σε μια συγκεκριμένη τιμή. Μια **σημειακή** ασυνέχεια υπάρχει όταν το όριο της συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη τιμή δεν ισούται με τη συνάρτηση σε αυτή την τιμή. Μια **ουσιώδης** ασυνέχεια είναι μια κάθετη ασύμπτωτη. Μια **αιρούμενη** ασυνέχεια συμβαίνει όταν υπήρχε ένας παράγοντας που διαγράφεται σε μια ρητή έκφραση.

   Για αυτή τη συνάρτηση έχω $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2-7x-18}{x^2-12x+27} = \frac{(x+2)(x-9)}{(x-3)(x-9)}, \boldsymbol{x \neq 3, x \neq 9}$. Δεδομένου ότι ο παράγοντας $\boldsymbol{x-9}$ μπορεί να διαγραφεί, θα υπάρξει αιρούμενη ασυνέχεια στο $\boldsymbol{x = 9}$. Επίσης, δεδομένου ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται στο $\boldsymbol{x = 3}$ και υπάρχει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη εκεί, προκύπτει ότι υπάρχει και μια ουσιώδης ασυνέχεια στο γράφημα αυτής της συνάρτησης. Άρα E.

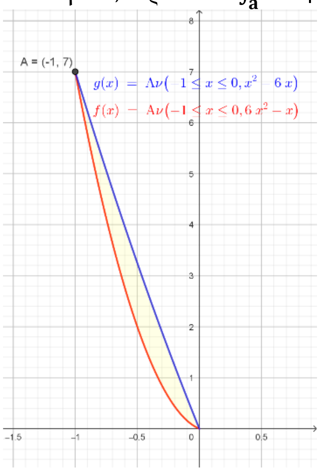
6. Βρείτε την 4η παράγωγο της $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-4x^3+3x^2-4x}{x^3}}$.
(A) $\frac{x^3-3x+8}{x^3}$ (B) $\frac{6x-24}{x^4}$ (C) $\frac{-18x+96}{x^5}$ (D) $\frac{x^3-12x^2+3x-4}{x^2}$ (E) $\frac{72x-480}{x^6}$
Έχω $\boldsymbol{f(x)=x-4+3x^{-1}-4x^{-2}\Rightarrow f'(x)=1-3x^{-2}+8x^{-3}\Rightarrow}$
$\boldsymbol{f''(x)=+6x^{-3}-24x^{-4}\Rightarrow f'''(x)=-18x^{-4}+96x^{-5}\Rightarrow}$
$\boldsymbol{f^{(4)}(x)=72x^{-5}-480x^{-6}=\boxed{\frac{72x-480}{x^6}}}$, άρα E.

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec 5x}{5}\right)=$
(A) $\tan 5x$ (B) $\sec 5x$ (C) $\csc 5x$ (D) $\sec 5x\tan 5x$ (E) $5\sec 5x\tan 5x$
Έχω $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec 5x}{5}\right)=\frac{1}{5}\frac{d}{dx}(\sec 5x)=\frac{1}{5}\cdot 5\frac{d}{dx}(5x)\sec 5x\tan 5x=\boxed{\sec 5x\tan 5x}$, άρα D

8. Ποιος είναι ο όγκος τους στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των $\boldsymbol{y}$ της περιοχής που περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες $\boldsymbol{y=6x^2-x}$ and $\boldsymbol{y=x^2-6x}$;
(A) $\frac{70\pi}{12}$ (B) 5π (C) $\frac{3\pi}{2}$ (D) π (E) $\frac{5\pi}{6}$
Από την **μέθοδο των κελύφων/φλοιών**, αν περιστρέψουμε μια ταινία πλάτους $\boldsymbol{dx}$ και ύψους $\boldsymbol{f(x)}$ που βρίσκεται σε απόσταση $\boldsymbol{x}$ από τον άξονα περιστροφής $\boldsymbol{y}$ προκύπτει ένας κυλινδρικός φλοιός ακτίνας $\boldsymbol{x}$, ύψους $\boldsymbol{f(x)}$ και πάχους $\boldsymbol{dx}$. Αν «απλώσουμε» τον φλοιό αυτό έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλάτος $\boldsymbol{2\pi|x|}$, ίσο με την περιφέρεια του κυλινδρικού φλοιού. Ο όγκος αυτού του κελύφους αυτού είναι $\boldsymbol{dV=2\pi|x|\cdot f(x)\cdot dx}$. Οπότε ο ολικός όγκος του στερεού προκύπτει αν αθροίσουμε τους όγκους των απειροστών κελύφων, άρα $\boldsymbol{V=\int_a^b 2\pi|x|f(x)dx}$.

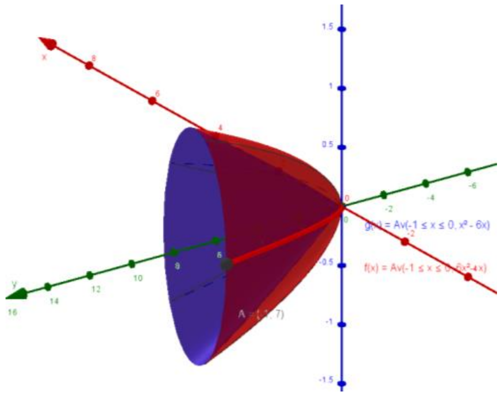


Αν περιστρέψουμε την περιοχή που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των $\boldsymbol{f(x)}$ και $\boldsymbol{g(x)}$, όπου $\boldsymbol{f(x)\le g(x)}$ στο διάστημα $\boldsymbol{[a,b]}$ το ύψος θα είναι $\boldsymbol{g(x)-f(x)}$ και επομένως ο όγκος θα είναι $\mathbf{V=2\pi\int_a^b |x|\cdot[g(x)-f(x)]dx}$.



Έστω $\boldsymbol{f(x)=6x^2-x}$ και $\mathbf{g(x)}=\boldsymbol{x^2-6x}$. Έχω ότι $\boldsymbol{f(x)\le g(x)\Leftrightarrow 6x^2-x\le x^2-6x\Leftrightarrow 5x^2+5x\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 0}$.

Άρα ο ζητούμενος όγκος σύμφωνα με την μέθοδο των φλοιών είναι



$\mathbf{V=2\pi\int_{-1}^{0}(-x)[g(x)-f(x)]dx=2\pi\int_{-1}^{0}5x^3+5x^2dx}=2\pi\left[\frac{5}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=2\pi\left[\left(\frac{5}{4}0^4+\frac{5}{3}0^3\right)-\left(\frac{5}{4}(-1)^4+\frac{5}{3}(-1)^3\right)\right]=2\pi\left[0-\frac{5}{4}+\frac{5}{3}\right]=2\pi\left[\frac{5}{12}\right]=\boxed{\frac{5\pi}{6}}$, άρα E.

9. $\int x^3\ln 2x dx=$
(A) $\frac{x^4}{16}(4\ln 2x-1)+C$ (B) $\frac{x^4}{4}(\ln 2x+1)+C$ (C) $x^4(\ln 2x-1)+C$ (D) $\frac{x^4}{4}(\ln 2x-1)+C$

(E) $\frac{x^4}{16}(4\ln 2x+1)+C$

Έχω $\int x^3 \ln 2x dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln 2x dx = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \int \frac{x^4}{4}\cdot(\ln 2x)' dx =$
$\frac{x^4}{4}\ln 2x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \int \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \frac{x^4}{16}+C = \boxed{\frac{x^4}{16}(4\ln 2x-1)+C}$, άρα A.

10. $\int \frac{x+10}{2x^2+5x-3}dx =$

(A) $3\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ (B) $\ln|x+3| - 3\ln|2x-1|+C$

(C) $\ln|x+3| - \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$ (D) $3\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

(E) $-\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

Έχω $\frac{x+10}{2x^2+5x-3} = \frac{x+10}{(2x-1)(x+3)} = \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+3} \Rightarrow$
$\int \frac{x+10}{2x^2+5x-3}dx = \int \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+3}dx = \boxed{\frac{3}{2}\ln|2x-1| - \ln|x+3|+C}$, άρα E.

11. Για την πολυωνυμική συνάρτηση f έχουμε επιλέξει διάφορες τιμές της δεύτερης της παραγώγου, $f''(x)$, στον παρακάτω πίνακα. Ποιο από τα παρακάτω μπορεί να είναι ψευδές;

x	–2	–1	0	1	2
$f''(x)$	4	1	0	–2	3

(A) Το γράφημα της f αλλάζει κυρτότητα στο διάστημα $(-2,1)$.
(B) Υπάρχει σημείο καμπής της f στο $x=0$.
(C) Το γράφημα της f έχει σημείο καμπής στο $x=1.5$.
(D) Το γράφημα της f έχει τα κοίλα προς τα κάτω στο $x=1$.
(E) Το γράφημα της f αλλάζει κυρτότητα στο διάστημα $(1,2)$.

Ψευδής η (C), αφού ναι μεν η δεύτερη παράγωγος ισούται με μηδέν για κάποιο $x\in(1,2)$, αυτό όμως δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $x=1.5$. Το (A) αληθεύει αφού η f'' αλλάζει πρόσημο στο $(-2,1)$. Ομοίως το (E). Η (D) αληθεύει αφού $f''(1)<0$. Η (B) αληθεύει αφού $f''(0)=0$ και εκατέρωθεν του μηδενός αλλάζει πρόσημο η f''.

12. Αν $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2(x-4)^3}{x^3-1}}$, $\frac{dy}{dx}=$

(A) $y\left(\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{x-4}-\frac{x^2}{x^3-1}\right)$ (B) $y\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-4}-\frac{3x^2}{x^3-1}\right)$ (C) $y\left(\frac{2}{3(x+2)}-\frac{1}{x-4}-\frac{x^2}{x^3-1}\right)$

(D) $y\left(\frac{2}{3(x+2)}-\frac{1}{x-4}+\frac{x^2}{x^3-1}\right)$ (E) $y\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-4}+\frac{3x^2}{x^3-1}\right)$

Έχω $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2(x-4)^3}{x^3-1}} \Leftrightarrow y^3 = \frac{(x+2)^2(x-4)^3}{x^3-1} \Rightarrow lny^3 = \ln\left(\frac{(x+2)^2(x-4)^3}{x^3-1}\right) \Rightarrow 3lny = 2\ln|x+2|+3\ln|x-4| - \ln|x^3-1| \Rightarrow \frac{3y'}{y} = \frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-4}-\frac{3x^2}{x^3-1} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=y'=y\left(\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{x-4}-\frac{x^2}{x^3-1}\right)}$, άρα A

13. If $y=x^3+3x^2+5$, then $\frac{dy}{dx}=$

(A) $3x^3+6x^2+5$
(B) $3x^2+6x$
(C) $\frac{x^4}{4}+x^3+5x$
(D) $15x^5$
(E) $3x^2+6x+5$

Έχω $\frac{dy}{dx}=y'=(x^3+3x^2+5)'=\boxed{3x^2+6x}$, άρα B.

14. Αν $f(x)=\frac{x^3+2x-1}{x^2+x}$, τότε $f'(x)=$

(A) $\frac{(x^2+x)(3x^2+2)-(x^3+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)}$

(B) $\frac{(x^2+x)(3x+2)-(x^3+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

(C) $\frac{(x^2+x)(3x^2+2)-(x^3+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

(D) $\frac{(x^2+x)(3x^2+2)-2x(x^3+2x-1)}{(x^2+x)^2}$

(E) $\frac{(x^2+x)(3x^2+2)+(x^3+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

Έχω $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{(x^3+2x-1)'(x^2+x)-(x^3+2x-1)(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = \boxed{\frac{(3x^2+2)(x^2+x)-(x^3+2x-1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}}$, άρα C

15. Αν $\boldsymbol{f(x) = 2\sin(\cos x)}$, τότε $\boldsymbol{f'(x)} =$

(A) $\boldsymbol{-2\sin x \cdot \cos(\cos x)}$ (B) $\boldsymbol{-2\cos x \cdot \sin(\sin x)}$ (C) $\boldsymbol{2\sin x \cdot \cos x}$

(D) $\boldsymbol{-2\sin x \cdot \cos x}$ (E) $\boldsymbol{2\sin x \cdot \cos(\cos x)}$

Έχω $\boldsymbol{f'(x) = 2\cos(\cos x) \cdot (\cos x)'} = \boxed{\boldsymbol{-2\sin x \cdot \cos(\cos x)}}$, άρα A.

16. Βρείτε την $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ αν $\boldsymbol{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27}$.

(A) 27 (B) $\frac{3x^2+3y^2}{6x}$ (C) 1 (D) $\frac{-3x^2-3y^2}{6x}$ (E) $\boldsymbol{-1}$

Έχω $\boldsymbol{3x^2 + 6xy + 3x^2y' + 3y^2 + 3x \cdot 2y'y + 3y'y^2 = 0 \Rightarrow}$

$\boldsymbol{y'(3x^2 + 6xy + 3y^2) = -3x^2 - 6xy - 3y^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2+6xy+3y^2}{-3x^2-6xy-3y^2} \Rightarrow y' =} \boxed{\boldsymbol{-1}}$. Άρα E

17. Το νερό γεμίζει ένα κωνικό κύπελλο με ρυθμό $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\frac{in^3}{sec}}$ν η κούπα έχει ύψος $\boldsymbol{18\ in}$ και ακτίνα $\boldsymbol{6\ in}$, με τι ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη του νερού όταν το νερό είναι $\boldsymbol{6\ in}$ βαθύ;

(A) $\frac{1}{6}\frac{in}{sec}$ (B) $\boldsymbol{6}\frac{in}{sec}$ (c) $\frac{1}{4}\frac{in}{sec}$ (D) $\frac{8}{3}\frac{in}{sec}$ (E) $\frac{1}{12}\frac{in}{sec}$

Ο όγκος ενός κώνου βρίσκεται από τον τύπο $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$. Επειδή μας λένε ότι η ακτίνα του κυπέλλου είναι $\boldsymbol{6\ in}$ και το ύψος είναι $\boldsymbol{18\ in}$, τότε σε οποιοδήποτε επίπεδο, το ύψος του νερού θα είναι τριπλάσιο της ακτίνας, επομένως, $\boldsymbol{h = 3r}$.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, το r μπορεί να αντικατασταθεί στον τύπο για τον όγκο, οπότε $\boldsymbol{V = \frac{1}{27}\pi h^3}$. Έπειτα, για να προσδιορίσουμε το ρυθμό ανόδου της στάθμης του νερού, πρέπει να παραγωγίσουμε ως προς t την προηγούμενη σχέση, οπότε $\boldsymbol{\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt}}$. Για $\boldsymbol{h = 6\ in}$ και $\boldsymbol{\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi\frac{in^3}{sec}}$χουμε $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi 6^2}{9}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} =} \boxed{\frac{1}{6}\frac{in}{sec}}$, άρα A.

18. Βρείτε την παράγωγο του $\boldsymbol{\log_8(x^2+2)^3}$

(A) $\frac{6x}{(x^2+2)^3\ln 8}$ (B) $\frac{6x}{(x^2+2)\ln 8}$ (C) $\frac{6x(x^2+2)^3}{\ln 8}$ (D) $\frac{6}{(x^2+2)\ln 8}$ (E) $\frac{6x\ln 8}{(x^2+2)}$

Έχω $\boldsymbol{\log_8(x^2+2)^3 = 3\log_8(x^2+2) = \frac{3\ln(x^2+2)}{ln8} = \frac{3}{ln8}\ln(x^2+2) \Rightarrow}$

$\boldsymbol{(\log_8(x^2+2)^3)' = \frac{3}{ln8}(\ln(x^2+2))' = \frac{3}{ln8} \cdot \frac{2x}{x^2+2} =} \boxed{\frac{6x}{(x^2+2)\ln 8}}$, άρα B.

19. Ποια καμπύλη περιγράφεται από τις $\boldsymbol{x = \cos^2 t}$ and $\boldsymbol{y = sin^2 t}$;

(A) $\boldsymbol{y = x + 1}$ (B) $\boldsymbol{y = -x + 1}$ (C) $\boldsymbol{y = -x - 1}$ (D) $\boldsymbol{y = x - 1}$ (E) $\boldsymbol{y = x}$

Έχω $\boldsymbol{\cos^2 t + sin^2 t = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow} \boxed{\boldsymbol{y = -x + 1}}$, άρα B

20. Δεδομένης της συνάρτησης θέσης $\boldsymbol{x(t) = t^3 - 18t^2 - 84t + 11}$ για $\boldsymbol{t \geq 0}$, για ποιες τιμές του $\boldsymbol{t}$ αυξάνεται η ταχύτητα;

(A) $\boldsymbol{0 \leq t < 14}$ (B) $\boldsymbol{0 \leq t < 6}$ και $\boldsymbol{t > 14}$ (C) $\boldsymbol{0 \leq t < 6}$ (D) $\boldsymbol{t > 6}$ (E) $\boldsymbol{6 < t < 14}$

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση ταχύτητας είναι η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης θέσης σε σχέση με το χρόνο και η συνάρτηση επιτάχυνσης είναι η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης θέσης σε σχέση με το χρόνο. <u>Επιπλέον, όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σωματιδίου έχουν το ίδιο πρόσημο, η ταχύτητα αυξάνεται.</u>

Έχω $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 36t - 84 \Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 36 = 6(t-6)$ με $a(t) > 0$ για $t > 6$ και $v(t) = 3(t^2 - 12t - 28) = 3(t+2)(t-14) > 0$ για $t > 14$. Οι χρόνοι που τόσο η ταχύτητα όσο και η επιτάχυνση έχουν το ίδιο πρόσημο είναι όταν $0 \leq t < 6$ και όταν $t > 14$. Άρα B

21. Βρείτε την παράγωγο του $f(x) = e^{\sin^2 x}$

(A) $2e^{\sin^2 x}\sin x\cos x$ (B) $e^{\sin^2 x}$ (C) $e^{\sin^2 x}\sin^2 x$ (D) $2e^{\sin^2 x}\sin x$ (E) $e^{\sin^2 x}\sin x\cos x$

Έχω $f'^{(x)} = (\sin^2 x)' e^{\sin^2 x} = \boxed{2\sin x \cos x\, e^{\sin^2 x}}$, άρα A.

22. Δεδομένου ότι:

x	0	2	6	7	9	12	16
$f(x)$	1	3	7	5	3	6	9

Χρησιμοποιήστε ένα αριστερό άθροισμα Riemann με έξι υποδιαστήματα σύμφωνα με τα δεδομένα του πίνακα για να προσεγγίσετε το $\int_0^{16} f(x)dx$

(A) 63 (B) 99 (C) 40 (D) 64 (E) 100

Ο τύπος για την περιοχή κάτω από μια καμπύλη χρησιμοποιώντας ένα αριστερό άθροισμα Reimann είναι: $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, όπου $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ και $x_i^* = x_i$.

Άρα $S = 1(2) + 3(4) + 7(1) + 5(2) + 3(3) + 6(4) = \boxed{64}$, άρα D.

23. $\int \frac{18x^2+2}{3x^3+x}dx =$

(A) $2\ln|x^2+1| + C$ (B) $\frac{1}{2}\ln|3x^3+x| + C$ (C) $\ln|3x^3+x| + C$ (D) $\ln|x^2+1| + C$ (E) $2\ln|3x^3+x| + C$

Έχω $\int \frac{18x^2+2}{3x^3+x}dx = 2\int \frac{9x^2+1}{3x^3+x}dx = 2\int \frac{(3x^3+x)'}{3x^3+x}dx = \boxed{2\ln\ |3x^3+x| + C}$, άρα E.

24. $\int e^x \sin x dx =$

(A) $\frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + c$ (B) $\frac{e^x s\dot{\imath}nx + e^x\cos x}{2} + c$ (C) $e^x\sin x - e^x\cos x + C$ (D) $e^x\cos x - e^x\sin x + C$

(E) $\frac{e^x\cos x - e^x\sin x}{2} + c$

Έχω $\int e^x\sin x dx = \int e^x(-\cos x)'dx = -e^x\cos\ x + \int \cos\ xe^x dx = -e^x\cos\ x + \int (\sin x)'\, e^x dx = -e^x\cos\ x + e^x\sin\ x - \int e^x\sin x\ dx \Rightarrow 2\int e^x\sin\ xdx = -e^x\cos\ x + e^x\sin\ x \Rightarrow$

$\boxed{e^x\sin\int\ xdx = \frac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + c}$, άρα A.

25. Ποιο από τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνει;

I. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ II. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ III. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

(A) I (B) II (C) III (D) I & II (E) I, II, & III

Έχω $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\tan^{-1}a - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$, άρα συγκλίνει το I.

Έχω ακόμα ότι $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to\infty}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a\to\infty}\sin^{-1}a - \sin^{-1}0 = \lim_{a\to\infty}\sin^{-1}a$, που δεν υπάρχει.

Τέλος $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty}\int_1^\alpha \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty}\ln a - \ln 1 = \infty$, αποκλίνει. Άρα μόνο I, δηλαδή A.

26. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $r = 5 + 2\cos\theta$.

(A) 23π (B) 24π (C) 25π (D) 26π (E) 27π

Το εμβαδόν καμπύλης που δίνεται σε πολική μορφή βρίσκεται χρησιμοποιώντας: τον τύπο $E = \int_a^b \frac{1}{2}r^2 d\theta$. Αυτή η καμπύλη επαναλαμβάνεται περιοδικά μετά από 2π, άρα τα όρια του ολοκληρώματος είναι 0 και 2π. Συνεπώς το εμβαδόν μας είναι:

$$E = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(5\ +\ 2\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 25 + 20cos\theta + 4\cos^2\theta\, d\theta =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 25 + 20cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 27 + 20cos\theta + 2\cos 2\theta\, d\theta$$

Αλλά $\int_0^{2\pi} \boldsymbol{cos\theta d\theta} = \int_0^{2\pi} \mathbf{cos\,2\theta\, d\theta = 0}$. Άρα $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{27d\theta} = \boxed{\boldsymbol{27\pi}}$, άρα Ε.

27. Αν $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2}$ και $\boldsymbol{y = -1}$ όταν $\boldsymbol{x = 0}$, τότε η εξίσωση της καμπύλης είναι

(A) $\boldsymbol{y^3 = 3sinx - 1}$

(B) $\boldsymbol{y^3 = 3\cos x - 1}$

(C) $\boldsymbol{y = sinx - 1}$

(D) $\boldsymbol{y = 3sinx + 1}$

(E) $\boldsymbol{y^3 = \sin x}$

Έχω με διαχωρισμό των μεταβλητών ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2} \Rightarrow \boldsymbol{y^2dy = \cos x\, dx} \Rightarrow \int \boldsymbol{y^2dy} = \int \boldsymbol{\cos x\, dx} \Rightarrow$ $\frac{y^3}{3} = \boldsymbol{\sin x + c} \xRightarrow{y(0)=-1} -\frac{1}{3} = \boldsymbol{0 + c} \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \boldsymbol{\sin x} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y^3 = 3\sin x - 1}}$, άρα Α

28. Ποιες από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν;

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ III. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{n^3+1}$

(A) I (B) II (C) III (D) I & II (E) I & III

Έχω $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{3}$, συγκλίνει.

Από το κριτήριο του λόγου έχω για την δεύτερη σειρά ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < \boldsymbol{1}$, άρα συγκλίνει.

Έχω για την τρίτη σειρά ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{n^3+1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{n^3} = \boldsymbol{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, άρα αποκλίνει.

Άρα I&II, δηλαδή D.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ Α, ΜΕΡΟΣ Ι

Εάν τελειώσατε πρόωρα, μπορείτε να ελέγξετε την εργασία σας μόνο στο τμήμα Α.

ΜΗΝ ΣΥΝΕΧΙΣΕΤΕ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ Β ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΣΑΣ ΠΟΥΝ ΝΑ ΤΟ ΚΑΝΕΤΕ.

CALCULUS BC

ΜΕΡΟΣ Ι, Τμήμα Β

Χρόνος—50 Λεπτά

Πλήθος ερωτήσεων—17

ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΜΕΡΟΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Οδηγίες: Λύστε καθένα από τα παρακάτω προβλήματα, χρησιμοποιώντας τον διαθέσιμο χώρο για πρόχειρο. Αφού εξετάσετε όλες τις επιλογές, αποφασίστε ποια είναι η καλύτερη από τις επιλογές που δίνονται και συμπληρώστε το αντίστοιχο οβάλ στο φύλλο απαντήσεων. Δεν θα δοθεί βαθμός για οτιδήποτε γράφεται στο βιβλίο εξετάσεων. Μην ξοδεύετε πολύ χρόνο σε κανένα πρόβλημα.

Σε αυτό το τεστ:

1. Η **ακριβής** αριθμητική τιμή της σωστής απάντησης δεν εμφανίζεται πάντα στις επιλογές που δίνονται. Όταν συμβεί αυτό, επιλέξτε από τις επιλογές τον αριθμό που προσεγγίζει καλύτερα την ακριβή αριθμητική τιμή.

2. Εκτός εάν ορίζεται διαφορετικά, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θεωρείται ότι είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους η $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός

29. Ένα σφαιρικό μπαλόνι χάνει αέρα με ρυθμό $-24\pi \frac{in^3}{sec}$ με τι ρυθμό συρρικνώνεται η επιφάνεια του μπαλονιού όταν η ακτίνα του γίνει $2\ in$;

(A) $-20\pi\frac{in^2}{\sec}$ (B) $-24\pi\frac{in^2}{\sec}$ (C) $-48\pi\frac{in^2}{\sec}$ (D) $-12\pi\frac{in^2}{\sec}$ (E) $-60\pi\frac{in^2}{\sec}$

Έχω για τον όγκο σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ και για την επιφάνεια της σφαίρας ότι $E = 4\pi r^2$. Άρα $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$ και $\frac{dE}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\frac{dV}{dt} : \frac{dE}{dt} = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt}\cdot\frac{2}{r} = -24\pi\cdot\frac{2}{2} = \boxed{-24\pi\frac{in^2}{\sec}}$. Άρα Β.

30. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2x)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}(x+1)}{2x^2}$.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

Έχω με διαδοχική εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital, αφού τα όρια είναι στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2x)^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{3}(x+1)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3(3+2x)^{\frac{1}{2}}-3\sqrt{3}}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3(3+2x)^{-\frac{1}{2}}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, άρα Α.

31. Πότε η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας μιας καμπύλης που η κίνηση δίνεται από τις $x = \frac{5}{2}t^2 + 6$ και $y = 2t^3 - t^2 + t$ είναι ίσες;

(A) $t = -1$ (B) $t = 2$ (c) $t = \frac{1}{6}$ (D) $t = 6$ (E) $t = -2$

Οι οριζόντιες και κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας μιας καμπύλης βρίσκονται παραμετρικά ως παράγωγοι σε σχέση με το χρόνο των συνιστωσών x και y της κίνησης, αντίστοιχα. Για αυτήν την καμπύλη, έχω $\frac{dx}{dt} = 5t$ και $\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 2t + 1$. Άρα αρκεί να λύσω την εξίσωση $5t = 6t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow 6t^2 - 7t + 1 = 0 \Leftrightarrow (6t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{1}{6} \vee t = 1}$. Δεδομένου ότι το $t = 1$ δεν δίνεται ως επιλογή, επιλέγουμε το C.

32. Βρείτε την παράγωγο της $x^2 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 2$ στο $(3, 2)$.

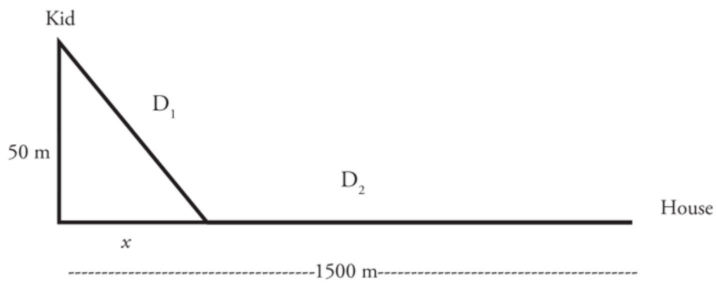
(A) 7 (B) $\frac{19}{25}$ (C) $\frac{75}{54}$ (D) $-\frac{18}{25}$ (E) $-\frac{25}{18}$

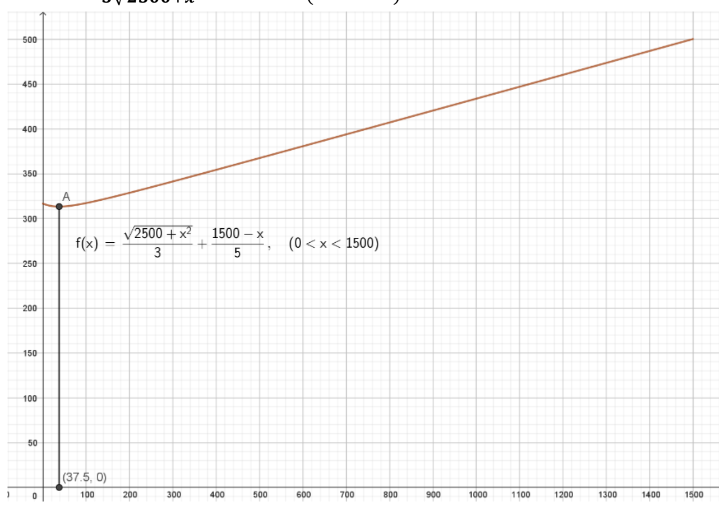
Έχω $2x + 6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$, οπότε θέτοντας $x = 3, y = 2$ έχουμε ότι $2(3) + 6(3)(2) + 3(3)^2\frac{dy}{dx} + 3(2)^2 + 6(3)(2)\frac{dy}{dx} + 3(2)^2\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 6 + 36 + 27\frac{dy}{dx} + 12 + 36\frac{dy}{dx} + 12\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 54 + 75\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{54}{75} = \boxed{-\frac{18}{25}}$. Άρα D.

33. Ένα παιδί με ποδήλατο οδηγεί προς το σπίτι από το δάσος σε μια ευθεία διαδρομή που απέχει 50 μέτρα από το κοντινότερο σημείο του δρόμου. Το σπίτι του απέχει 1500 μέτρα από το κοντινότερο σημείο του δρόμου. Εάν το παιδί οδηγεί με $3\frac{m}{s}$ στο δάσος και $5\frac{m}{s}$ στο δρόμο, πόσο μακριά από το σπίτι του πρέπει να περάσει στο δρόμο για να φτάσει στο σπίτι στο συντομότερο χρονικό διάστημα;

(A) 37.5 m (B) 1500 m (C) 300.5 m (D) 1200 m (E) 1462.5 m

Έχουμε από το διάγραμμα της παρακάτω εικόνας ότι $D_1 = \sqrt{50^2 + x^2} = \sqrt{2500 + x^2}$ και $D_2 = 1500 - x$. Οι χρόνοι για να διανύσει τα D_1 και D_2 είναι $t_1 = \frac{\sqrt{2500+x^2}}{3}$ και $t_2 = \frac{1500-x}{5}$, αντίστοιχα. Ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό χρόνο $T(x) = \frac{\sqrt{2500+x^2}}{3} + \frac{1500-x}{5}, 0 < x < 1500$. Έχω $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{2500+x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{2500+x^2}} - \frac{1}{5}$ και $\frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3\sqrt{2500+x^2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2}{9(2500+x^2)} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 25x^2 = 9\cdot 2500 + 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 9\cdot 2500 \Leftrightarrow 4x = 3\cdot 50 \Leftrightarrow x = 37{,}5m$. Κανονικά πρέπει να ελέγξουμε αν το ακρότατο είναι ελάχιστο ή μέγιστο. Επειδή όμως η παράγωγος είναι άσχημη, θα χρειαστεί πολύς χρόνος για να το ελέγξουμε αυτό. (Μην το κάνετε όμως συνήθεια να το παρακάμπτετε!). Επομένως, ο χρόνος ελαχιστοποιείται όταν $x = 37{,}5m$. Άρα το παιδί πρέπει να περάσει στο δρόμο στα $1500 - 37{,}5 = \boxed{1462{,}5\ m}$ από το σπίτι του. Άρα E.

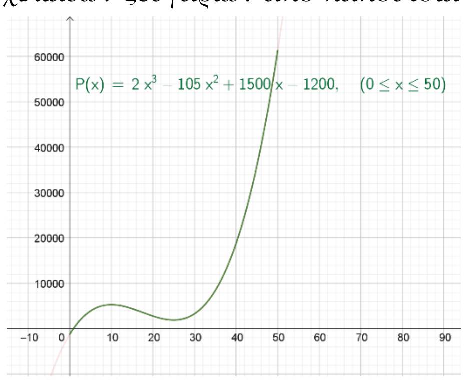




34. Ένα υποδηματοποιείο διαπίστωσε ότι η εξίσωση κέρδους (σε εκατομμύρια δολάρια) είναι η $P = 2x^3 - 105x^2 + 1500x - 1200$, όπου x είναι ο αριθμός των χιλιάδων ζευγαριών από παπούτσια που πωλήθηκαν και $0 \le x \le 50$. Βελτιστοποιήστε το κέρδος του κατασκευαστή.

(A) \$5.3 billion (B) \$61.3 billion (C) \$1.925 billion (D) \$1.2 billion (E) \$65 billion

Έχουμε $\frac{dP}{dx} = 6x^2 - 210x - 1500 = 6(x^2 - 35x - 250) = 6(x - 10)(x - 25)$, με ρίζες $x = 10 \vee x = 25$. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $x = 0, 10, 25, 50$, με αντίστοιχες τιμές $-1200, 5300, 1925, 61300$. Δεδομένου ότι η συνάρτηση P



μεγιστοποιείται στο $x = 50$ και το κέρδος είναι σε εκατομμύρια δολάρια, το τελικό αποτέλεσμα είναι $\boxed{61,3}$ δισεκατομμύρια δολάρια, άρα B.

35. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^4$ έχει μέση τιμή 5 στο κλειστό διάστημα $[0, k]$, τότε $k =$

(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{2}$

Γενικά έχουμε ότι $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Άρα $5 = \frac{1}{k}\int_0^k x^4 dx = \frac{1}{k}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^k = \frac{1}{k}\cdot\frac{k^5}{5} = \frac{k^4}{5} \Rightarrow k^4 = 25 \overset{k>0}{\Longrightarrow} \boxed{k = \sqrt{5}}$, άρα B.

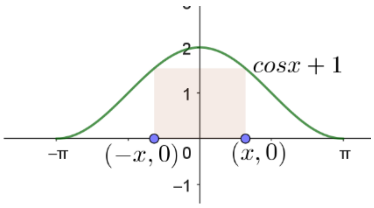
36. $\int 3x\left(7^{3x^2+2}\right)dx =$

(A) $\frac{49\cdot 343^{x^2}}{\ln 49} + C$ (B) $\frac{343^{x^2}}{2\ln 7} + C$ (C) $\frac{49^{x^2}}{\ln 49} + C$ (D) $\frac{49\cdot 343^{x^2}}{\ln 7} + C$ (E) $\frac{7^{3x^2+2}}{\ln 7} + c$

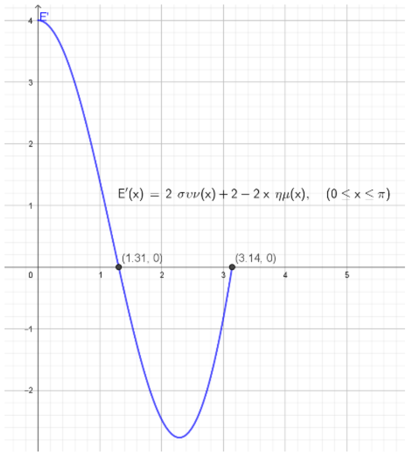
Έχω $\int 3x\left(7^{3x^2+2}\right)dx = \int \frac{1}{2}(3x^2+2)'\left(7^{3x^2+2}\right)dx = \frac{7^{3x^2+2}}{2ln7} + C = \frac{7^{3x^2}\cdot 7^2}{ln7^2} + C = \frac{(7^3)^{x^2}\cdot 49}{ln49} + C = \frac{343^{x^2}\cdot 49}{ln49} + C$, άρα A

37. Ένα ορθογώνιο με την μία πλευρά στον άξονα x έχει τις άνω κορυφές του στο γράφημα της $y = \cos x + 1$. Ποιο είναι το ελάχιστο εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στο ορθογώνιο και το γράφημα της $y = \cos x + 1$ στο διάστημα $(-\pi \le x \le \pi)$?

(A) 6.283 (B) 2.988 (C) 1.307 (D) 3.296 (E) 5.022



Λόγω της συμμετρίας της $cosx + 1$ ως προς τον άξονα των y, οι άνω κορυφές πρέπει να έχουν αντίθετες τετμημένες. Το ίδιο και οι κάτω κορυφές του ορθογωνίου. Άρα το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $2x$ και $cosx + 1$, συνεπώς το εμβαδόν του είναι ίσο με $E(x) = 2x(cosx + 1), 0 < x \le \pi$. Έχω $E'(x) = 2(cosx + 1) - 2x\sin x = 2\cos x + 2 - 2x\sin x, 0 < x \le \pi$. Με λογισμικό προκύπτει ότι υπάρχουν δύο κρίσιμα σημεία: $1.30654, \pi$. Είναι $E(\pi) = 0$ και $E(1.30654) = 3.29559$, άρα μέγιστο. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x + 1 dx = 2\pi$. Άρα το ελάχιστο εμβαδόν μεταξύ του ορθογωνίου και της καμπύλης, είναι $2\pi - 3.29559 = 2.98759 \cong \boxed{2.988}$, άρα B.



38. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} =$

(A) $\cot^{-1}(x+3) + C$ (B) $\sin(x+3) + C$ (C) $\sec^{-1}(x+3) + C$

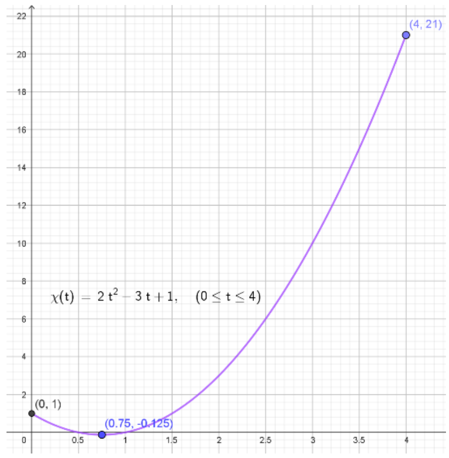
(D) $\tan^{-1}(x+3) + C$ (E) $\cos^{-1}(x+3) + C$

Έχω $I = \int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} \overset{\substack{u=x+3 \\ du=dx}}{\Longrightarrow} \int \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(u) + C = \boxed{\tan^{-1}(x+3) + C}$, άρα D .

39. Αν η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από την $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$, πόση διαδρομή έκανε ανάμεσα στην $t = 0$ και $t = 4$?

(A) 20 (B) 21 (C) $\frac{169}{8}$ (D) 22 (E) $\frac{89}{4}$

Για να βρούμε την απόσταση που διανύει το σωματίδιο, θέτουμε την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν για να προσδιορίσουμε, πότε αλλάζει κατεύθυνση, αν αλλάζει καθόλου, κατά τη διάρκεια της διαδρομής του. Έχω $\boldsymbol{x'(t)} = \boldsymbol{4t - 3 = 0}$, επομένως $\boldsymbol{t} = \frac{3}{4}$. Αφού το σωματίδιο αλλάζει κατεύθυνση την $\boldsymbol{t} = \frac{3}{4}$, αρκεί να βρούμε τη θέση του σωματιδίου την $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{t} = \frac{3}{4}$ και $\boldsymbol{t = 4}$.Έχω $\boldsymbol{x(0) = 1}$, $\boldsymbol{x}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8}$, και $\boldsymbol{x(4) = 21}$. Άρα η συνολική απόσταση που διανύει το σωματίδιο είναι



$\boldsymbol{d} = \left|x\left(\frac{3}{4}\right) - x(0)\right| + \left|x(4) - x\left(\frac{3}{4}\right)\right| = \left|-\frac{1}{8} - 1\right| + \left|21 + \frac{1}{8}\right| = \boxed{\frac{89}{4}}$, άρα E.

40. Δεδομένων των τιμών $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{f(x)}$ του πίνακα, ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου κάτω από την $\boldsymbol{f(x)}$. Χρησιμοποιήστε ένα δεξιό άθροισμα Riemann για να το προσεγγίσετε.

x	0	1	3	7	8	10	13	15
$f(x)$	2	6	3	4	8	9	12	13

(A) 46 (B) 57 (C) 116 (D) 207 (E) 253

Ο τύπος για την περιοχή κάτω από μια καμπύλη χρησιμοποιώντας ένα δεξιό άθροισμα Reimann είναι: $\boldsymbol{S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i}$, όπου $\boldsymbol{\Delta x_i = x_{i+1} - x_i}$ και $\boldsymbol{x_i^* = x_{i+1}}$.

Άρα $\boldsymbol{S = 6 \cdot (1) + 3 \cdot (2) + 4 \cdot (4) + 8 \cdot (1) + 9 \cdot (2) + 12 \cdot (3) + 13 \cdot (2) = 116}$, άρα C.

41. Βρείτε το μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}$ από το $\boldsymbol{x = 0}$ έως το $\boldsymbol{x = 4}$.

(A) 12 (B) 16 (C) $\frac{64}{3} - 4$ (D) $\frac{64}{3}$ (E) $\frac{64}{3} + 4$

Έχω γενικά για το μήκος της καμπύλης ότι $\boldsymbol{L} = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Εδώ $\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{x(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}}$.

Άρα $\boldsymbol{L} = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + \left(x(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + x^2(x^2 - 2)}dx = \int_0^4 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}dx = \int_0^4 \sqrt{(x^2 - 1)^2}dx = \int_0^4 |x^2 - 1|dx = \int_0^1 1 - x^2\,dx + \int_1^4 x^2 - 1\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^4 = \frac{2}{3} + \left(\frac{64}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{64}{3} - 4 + \frac{4}{3} \cong \boxed{18{,}66}$ Η πλησιέστερη από τις επιλογές είναι η C!

42. Βρείτε το $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_1^x (t - t^4)dt}$.

(A) $\boldsymbol{x - x^4 + 1}$ (B) $\boldsymbol{x^4 - x + 1}$ (C) $\boldsymbol{x^4 - x}$ (D) $\boldsymbol{x - x^4 - 1}$ (E) $\boldsymbol{x - x^4}$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_1^x (t - t^4)dt = x - x^4}$, άρα E.

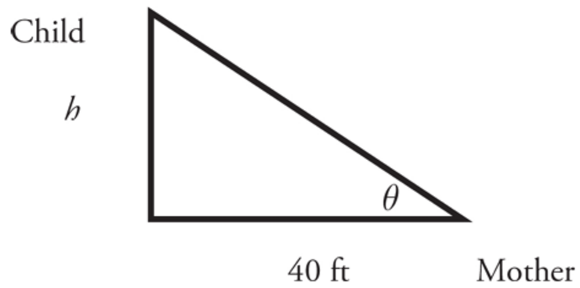
43. Μια κυλινδρική πισίνα γεμίζει με ρυθμό $\boldsymbol{96\pi \frac{ft^3}{hr}}$. Αν η ακτίνα της πισίνας είναι 4 πόδια, πόσο γρήγορα αλλάζει το ύψος της πισίνας;

(A) $\boldsymbol{3\,ft/hr}$ (B) $\boldsymbol{4\,ft/hr}$ (C) $\boldsymbol{5\,ft/hr}$ (D) $\boldsymbol{6\,ft/hr}$ (E) $\boldsymbol{7\,ft/hr}$

Έχω για τον όγκο της πισίνας ότι $\boldsymbol{V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}}$. Άρα $\boldsymbol{96\pi = \pi \cdot 4^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \boxed{6\,ft/hr}}$, άρα D.

44. Ένα παιδί πηδάει σε ένα τραμπολίνο με ρυθμό $\boldsymbol{10ft/min}$. Η μητέρα του παιδιού παρακολουθεί από το αίθριο 40 πόδια μακριά. Με τι ρυθμό, σε rad/sec, αλλάζει η γωνία ανύψωσης μεταξύ του τραμπολίνο και της οπτικής γωνίας της μητέρας του παιδιού όταν το παιδί είναι $\boldsymbol{30\,ft}$ ψηλά στον αέρα;

(A) $\frac{1}{70}\boldsymbol{rad/\sec}$ (B) $\frac{1}{375}\boldsymbol{rad/\sec}$ (C) $\frac{1}{13}\boldsymbol{rad/\sec}$ (D) $\frac{1}{180}\boldsymbol{rad/\sec}$ (E) $\frac{1}{3}\boldsymbol{rad/\sec}$



Έχω ότι $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{h}{40} \Rightarrow (1 + tan^2\ \theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}\frac{dh}{dt}$. Έχω $\frac{dh}{dt} = \frac{10ft}{min} = \frac{10ft}{60sec} = \frac{1}{6}ft/sec$ και $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$.

Άρα $\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{25}{16}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{240} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{16}{6000} = \boxed{\frac{1}{375}rad/sec}$, άρα B.

45. Βρείτε την παράγωγο του $y = \frac{\ln(2x^3)}{e^{2x}}$.

(A) $\frac{3+2\ln(2x^3)}{e^{2x}}$ (B) $\frac{3-2\ln(2x^3)}{e^{2x}}$ (C) $\frac{3}{xe^{2x}} - \frac{2\ln(2x^3)}{e^{2x}}$ (D) $\frac{3}{xe^{2x}} + \frac{2\ln(2x^3)}{e^{2x}}$ (E) $\frac{3+\ln(4x^9)}{e^{2x}}$

Έχω $y = \frac{\ln(2x^3)}{e^{2x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln(2x^3))'\cdot(e^{2x}) - (e^{2x})'\ln(2x^3)}{(e^{2x})^2} = \frac{(e^{2x})\left(\frac{6x^2}{2x^3}\right) - 2e^{2x}\ln(2x^3)}{e^{4x}} = \boxed{\frac{3}{xe^{2x}} - \frac{2\ln(2x^3)}{e^{2x}}}$, άρα C.

ΣΤΟΠ

Τέλος του τμήματος b, Μέρος I

Εάν τελειώσατε πρόωρα, μπορείτε να ελέγξετε την εργασία σας μόνο στο τμήμα B.

ΜΗΝ ΣΥΝΕΧΙΣΕΤΕ ΣΤΟ ΜΕΡΟΣ II ΜΕΧΡΙ ΝΑ ΣΑΣ ΠΟΥΝ ΝΑ ΤΟ ΚΑΝΕΤΕ.

ΜΕΡΟΣ II

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Μπορεί να θέλετε να εξετάσετε τα προβλήματα πριν αρχίσετε να τα λύνετε, καθώς δεν αναμένεται ότι όλοι θα είναι σε θέση να ολοκληρώσουν όλα τα μέρη όλων των προβλημάτων. Σε όλα τα προβλήματα δίνεται η ίδια βαρύτητα, αλλά στα μέρη ενός συγκεκριμένου προβλήματος δεν δίνεται απαραιτήτως το ίδιο βάρος.

ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ Ή ΜΕΡΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ.

- Θα πρέπει να γράψετε όλες τις εργασίες για κάθε μέρος κάθε προβλήματος στον χώρο που προβλέπεται για αυτό το μέρος στο φυλλάδιο. Φροντίστε να γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα. Εάν κάνετε ένα σφάλμα, μπορείτε να εξοικονομήσετε χρόνο διαγράφοντας το αντί να προσπαθείτε να το σβήσετε. Οι διαγραμμένες εργασίες δεν θα βαθμολογηθούν.
- Δείξτε όλη τη δουλειά σας. Θα βαθμολογηθείτε για την ορθότητα και την πληρότητα των μεθόδων σας καθώς και για τις απαντήσεις σας. Οι σωστές απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση ενδέχεται να μην λάβουν βαθμό.
- Οι αιτιολογήσεις απαιτούν να δώσετε μαθηματικούς λόγους (χωρίς υπολογιστή) και να προσδιορίσετε με σαφήνεια συναρτήσεις, γραφήματα, πίνακες ή άλλα αντικείμενα που χρησιμοποιείτε.
- Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας για να λύσετε μια εξίσωση, να βρείτε την παράγωγο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο ή να υπολογίσετε την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Ωστόσο, πρέπει να υποδείξετε με σαφήνεια τη ρύθμιση του προβλήματός σας, δηλαδή την εξίσωση, τη συνάρτηση ή το ολοκλήρωμα που χρησιμοποιείτε. Εάν χρησιμοποιείτε άλλες ενσωματωμένες δυνατότητες ή προγράμματα, πρέπει να δείξετε τα μαθηματικά βήματα που είναι απαραίτητα για την παραγωγή των αποτελεσμάτων σας.
- Η εργασία σας πρέπει να εκφράζεται με τυπική μαθηματική σημειογραφία και όχι με σύνταξη αριθμομηχανής. Για παράδειγμα, το $\int_1^5 x^2 dx$ να μην γράφεται ως fnInt $(\mathbf{X^2}, \mathbf{X}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$.
- Εκτός εάν ορίζεται διαφορετικά, οι απαντήσεις (αριθμητικές ή αλγεβρικές) δεν χρειάζεται να απλοποιηθούν. Εάν η απάντησή σας δίνεται ως δεκαδική προσέγγιση, θα πρέπει να είναι σωστή σε τρία ψηφία μετά την υποδιαστολή.
- Εκτός εάν ορίζεται διαφορετικά, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θεωρείται ότι είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους η $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Α

Χρόνος—30 λεπτά

Αριθμός προβλημάτων—2

Ένας γραφικός υπολογιστής απαιτείται σε κάποια προβλήματα ή μέρη προβλημάτων.

Κατά τη διάρκεια του χρονομετρημένου τμήματος για το Τμήμα Α, μπορείτε να εργαστείτε μόνο στα προβλήματα στο Τμήμα Α.

Στο Τμήμα Α, επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε την αριθμομηχανή σας για να λύσετε μια εξίσωση, να βρείτε την παράγωγο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο ή να υπολογίσετε την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος. Ωστόσο, πρέπει να υποδείξετε με σαφήνεια τη ρύθμιση του προβλήματός σας, δηλαδή την εξίσωση, τη συνάρτηση ή το ολοκλήρωμα που χρησιμοποιείτε. Εάν χρησιμοποιείτε άλλες ενσωματωμένες δυνατότητες ή προγράμματα, πρέπει να δείξετε τα μαθηματικά βήματα που είναι απαραίτητα για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων σας.

1. Έστω $\boldsymbol{y}$ μια συνάρτηση με $\boldsymbol{f'(x) = -x(1+f(x))}$ και $\boldsymbol{f(O) = 5}$.

(A) Με χρήση της μεθόδου του Euler προσεγγίστε την τιμή $\boldsymbol{f(1)}$ με βήμα μεγέθους $\boldsymbol{0,25}$

(B) Βρείτε με ακρίβεια την τιμή της $\boldsymbol{f(x)}$ για $\boldsymbol{x = 1}$.

(C) Υπολογίστε το $\boldsymbol{\int_0^\infty -x(1+f(x))dx}$.

(A) Υπάρχουν δύο εξισώσεις για τη μέθοδο του Euler: 1. $\boxed{\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + h}}$ και 2. $\boxed{\boldsymbol{y_n = y_{n-1} + h \cdot y'_{n-1}}}$. Σε αυτή την περίπτωση, θα υπάρχουν τέσσερα βήματα ($\boldsymbol{n = 4}$) και $\boldsymbol{h = 0,25}$. Από τις δεδομένες πληροφορίες, $\boldsymbol{y' = -x(1+y)}$, οπότε $\boldsymbol{y'(0) = 0}$. Στη συνέχεια, συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα

n	x_n	y_n	y'_n
0	0	5	0
1	0,25	5	-1,5
2	0,5	4,625	-2,8125
3	0,75	3,921875	-3,69141
4	1	**2,999023**	-3,99902

Άρα $\boldsymbol{f(1) \cong y(4) = \boxed{2,999}}$.

(B) Έχω $\boldsymbol{y' = -x(1+y) \Rightarrow \frac{y'}{1+y} = -x \Rightarrow \frac{(1+y)'}{1+y} = -x \Rightarrow (\ln(1+y))' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow \ln(1+y) = -\frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{f(0)=5} \ln(1+5) = -\frac{0^2}{2} + c \Rightarrow c = ln6}$ άρα $\boldsymbol{\ln(1+y) = -\frac{x^2}{2} + ln6 \Rightarrow \ln\frac{1+y}{6} = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{1+y}{6} = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 6e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \Rightarrow y(1) = 6e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{6}{\sqrt{e}} - 1 \approx 2,639184 \approx \boxed{2,639}}$

(C) Έχω $\boldsymbol{\int_0^\infty -x(1+f(x))dx = \int_0^\infty f'(x)\,dx = [f(x)]_0^\infty = \lim_{a\to\infty}[f(x)]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(6e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right) - \left(6e^{-\frac{0^2}{2}} - 1\right) = (0-1) - (6-1) = \boxed{-6}}$

2. Έστω $\boldsymbol{R}$ το χωρίο που περικλείεται ανάμεσα στα γραφήματα των $\boldsymbol{y = x^2 - x - 6}$ και $\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ και τις ευθείες $\boldsymbol{x = -2}$ και $\boldsymbol{x = 2}$.

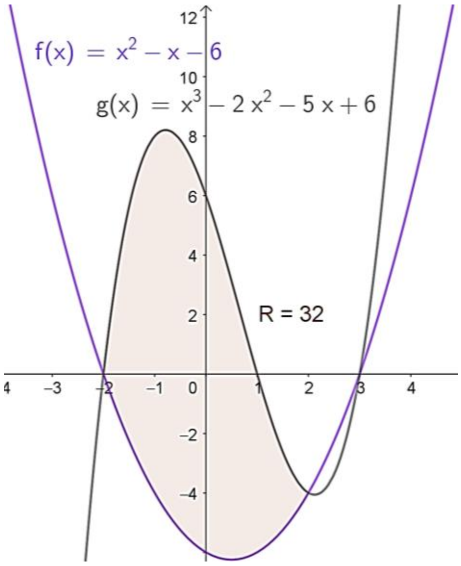
(A) Βρείτε το εμβαδόν του R.

(B) Η οριζόντια γραμμή $\boldsymbol{y = 0}$ χωρίζει το $\boldsymbol{R}$ σε δυο μέρη. Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής του $\boldsymbol{R}$ που βρίσκεται πάνω από την οριζόντια γραμμή.

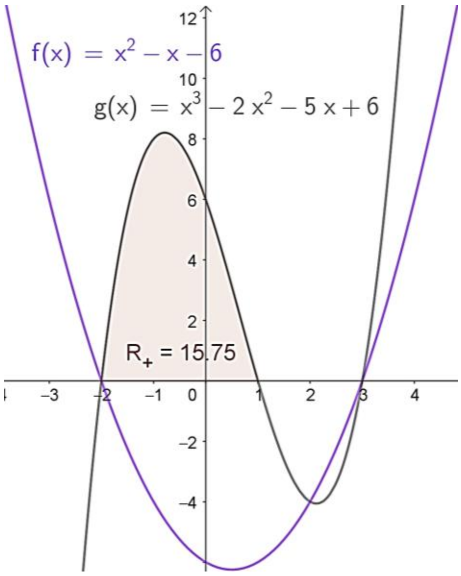
(C) Το χωρίο $\boldsymbol{R}$ είναι η βάση ενός στερεού. Για αυτό το στερεό, κάθε τομή κάθετη στον οριζόντιο άξονα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Βρείτε τον όγκο του στερεού.

(D) Ποιος είναι ο όγκος του στερεού που προκύπτει από το χωρίο $\boldsymbol{R}$ αν αυτό περιστραφεί γύρω από την γραμμή $\boldsymbol{x = -3}$.

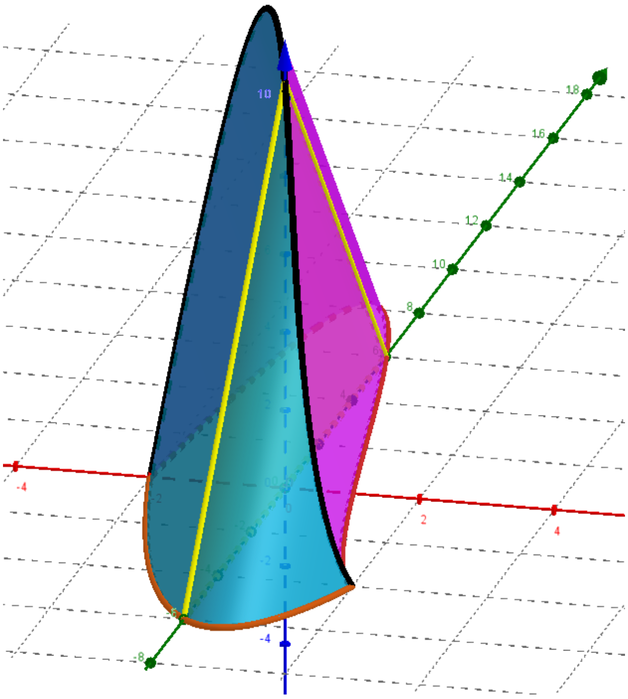
(A) Έστω $f(x) = x^2 - x - 6$ και $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Έχω $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-4) \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 3$. Άρα για $-2 \leq x \leq 2$, έχω $f(x) \leq g(x)$. Οπότε το εμβαδόν του R είναι $E_R = \int_{-2}^{2} |g(x) - f(x)| dx = \int_{-2}^{2} g(x) - f(x) dx = \int_{-2}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) - (x^2 - x - 6) dx = \int_{-2}^{2} x^3 - 3x^2 - 4x + 12\, dx = 0 + [-x^3]_{-2}^{2} + 0 + 12 \cdot 4 = -8 - 8 + 48 = \boxed{32}$ τ.μ.



(B) Έχω $f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$ και $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x+2)(x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1 \vee x \geq 3$. Άρα για $-2 \leq x \leq 1$, έχω $g(x) \geq 0 \geq f(x)$, ενώ για $1 \leq x \leq 2$, έχω $g(x) \leq 0, f(x) \leq 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_{R^+} = \int_{-2}^{1} g(x) dx = \int_{-2}^{1} x^3 - 2x^2 - 5x + 6\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{2}{3}1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{5}{2}(-2)^2 + 6 \cdot (-2)\right) = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{2}{3}1^3 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{5}{2}(-2)^2 + 6 \cdot (-2)\right) = \boxed{\frac{63}{4}}$ τ.μ.

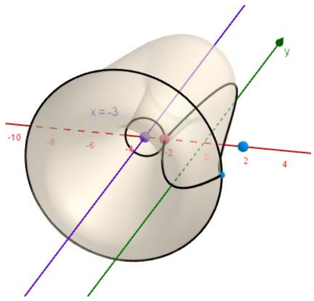


(C) Ο όγκος του στερεού βρίσκεται με την ολοκλήρωση της περιοχής της διατομής, οπότε $\boldsymbol{V} = \int_a^b \boldsymbol{E_{ισοπλευρου}(x)dx}$. Σε αυτή την περίπτωση, δεδομένου ότι η διατομή είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχω $\boldsymbol{E_{ισοπλευρου}(x)} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\boldsymbol{πλευρά})^2$, όπου το μήκος της πλευράς είναι το μήκος μεταξύ των καμπυλών, δηλαδή, $\boldsymbol{g(x) - f(x)}$. Από το μέρος (α), γνωρίζουμε και $\boldsymbol{g(x) - f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$ και τα όρια ολοκλήρωσης είναι $\boldsymbol{x = -2}$ και $\boldsymbol{x = 2}$. Η εξίσωση για τον όγκο είναι τότε $\boldsymbol{V} = \int_{-2}^{2} \boldsymbol{E_{ισοπλευρου}(x)dx} =$ $\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{3}}{4}(\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 4x + 12})^2\boldsymbol{dx} =$ $\frac{8576}{35\sqrt{3}} = \mathbf{141.46731} \cong \boxed{\mathbf{141.467}}$ κυβικές μονάδες.



Για την δημιουργία του γραφικού https://www.geogebra.org/3d/jyqshcgz

(D) Από την **μέθοδο των κελύφων/φλοιών**, αν περιστρέψουμε μια ταινία πλάτους $\boldsymbol{dx}$ και ύψους $\boldsymbol{f(x)}$ που βρίσκεται σε απόσταση $\boldsymbol{x+3}$ από την ευθεία $\boldsymbol{x = -3}$ προκύπτει ένας κυλινδρικός φλοιός ακτίνας $\boldsymbol{x+3}$, ύψους $\boldsymbol{f(x)}$ και πάχους $\boldsymbol{dx}$. Αν «απλώσουμε» τον φλοιό αυτό έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλάτος $\boldsymbol{2\pi|x+3|}$, ίσο με την περιφέρεια του κυλινδρικού φλοιού. Ο όγκος αυτού του κελύφους αυτού είναι $\boldsymbol{dV = 2\pi|x+3| \cdot f(x) \cdot dx}$. Οπότε ο ολικός όγκος του στερεού προκύπτει αν αθροίσουμε τους όγκους των απειροστών κελύφων, άρα $\boldsymbol{V} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \boldsymbol{2\pi|x+3|f(x)}\mathbf{dx}$. Αν περιστρέψουμε την περιοχή που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των $\boldsymbol{f(x)}$ και $\boldsymbol{g(x)}$, όπου $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$ στο διάστημα $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ το ύψος θα είναι $\boldsymbol{g(x) - f(x)}$ και επομένως ο όγκος θα είναι $\mathbf{V = 2\pi} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\boldsymbol{x+3}| \cdot [\mathbf{g(x) - f(x)}]\mathbf{dx}$.



Στο ζητούμενό μας τώρα στο διάστημα $(\mathbf{-2, 2})$ έχω $\boldsymbol{x + 3 > 0}$ άρα $|\boldsymbol{x+3}| = \boldsymbol{x+3}$

Συνεπώς ο ζητούμενος όγκος σύμφωνα με την μέθοδο των φλοιών είναι $\mathbf{V} = \mathbf{2\pi} \int_{-2}^{2} (\boldsymbol{x+3})[\mathbf{g(x) - f(x)}]\mathbf{dx} = \boldsymbol{2\pi} \int_{-2}^{2} (\boldsymbol{x+3})(\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 4x + 12})\mathbf{dx} = \mathbf{2\pi} \int_{-2}^{2} \boldsymbol{x^4 - 13\,x^2 + 36\,dx} = \frac{2624\,\pi}{15} \cong \boxed{\mathbf{549.569}}$ κ.μ.

Μέρος ΙΙ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Β

Χρόνος—1 ώρα

Αριθμός προβλημάτων—4

Δεν επιτρέπεται υπολογιστής για αυτά τα προβλήματα.

Κατά τη διάρκεια του χρονομετρημένου τμήματος για το Τμήμα Β, μπορείτε να συνεχίσετε να εργαστείτε στα προβλήματα στο Τμήμα Α χωρίς την χρήση αριθμομηχανής.

3. Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι η $f'(x) = (2x+6)e^{-x}$ και $f(2) = 15$.

(A) Η παράγωγος έχει ένα κρίσιμο σημείο στο $x = -3$. Υπάρχει σχετικό ελάχιστο, μέγιστο ή τίποτε από αυτά τα δυο στο σημείο αυτό της f; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(B) Σε ποιο διάστημα, αν υπάρχει, είναι η f και αύξουσα και με τα κοίλα κάτω; Εξηγήστε.

(C) Βρείτε την τιμή $f(5)$.

(A) Έχω $f'(x) = 2(x+3)e^{-x} < 0$ για $x < -3$ και $f'(x) > 0$ για $x > -3$. Άρα η $f \downarrow (-\infty, -3]$ και $f \uparrow [3, \infty)$, άρα στο $x = -3$ είναι ένα σχετικό ελάχιστο.

(B) Έχω $f''(x) = (2x+6)'e^{-x} + (2x+6)(e^{-x})' = 2e^{-x} - (2x+6)e^{-x} = -2(x+2)e^{-x} < 0$ για $x > -2$. Άρα η f είναι και αύξουσα και με τα κοίλα κάτω όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $x > -3$ και $x > -2$. Άρα για $\boxed{x > -2}$

(C) Έχω $f'(x) = (2x+6)e^{-x} \Rightarrow \mathrm{f}(x) = \int (2x+6)e^{-x}\,dx = \int (2x+6)(-e^{-x})'\,dx = (2x+6)(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x})'\,dx = (2x+6)(-e^{-x}) + 2(-e^{-x}) + c = (2x+8)(-e^{-x}) + c$

Άρα $f(5) - f(2) = (2\cdot 5+8)\left(-e^{-5}\right) - (2\cdot 2+8)(-e^{-2}) = -18e^{-5} + 12e^{-2} \Rightarrow$

$f(5) = \boxed{-18e^{-5} + 12e^{-2} + 15}$.

4. Θεωρούμε την εξίσωση $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 = 10$.

(A) Γράψτε μια εξίσωση της κλίσης της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο.

(B) Βρείτε την εξίσωση της κανονικής ευθείας στην καμπύλη στο σημείο , $x = 1$.

(C) Βρείτε την $\frac{d^2y}{dx^2}$ στο $x = 1$.

(A) Έχω $3x^2 - \left(2x^2\frac{dy}{dx} + 4xy\right) + \left(6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\right) - 12y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4xy + 3y^2 = \frac{dy}{dx}(2x^2 - 6xy + 12y^2) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-4xy+3y^2}{2x^2-6xy+12y^2}}$

(B) Για $x = 1$ στην αρχική εξίσωση έχω $1 - 2y + 3y^2 - 4y^3 = 10 \Leftrightarrow 4y^3 - 3y^2 + 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(4y^2 - 7y + 9) = 0 \Leftrightarrow y = -1$, αφού το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα. Έχω $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = \frac{3+4+3}{2+6+12} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Άρα η εξίσωση της κανονικής ευθείας στην καμπύλη στο σημείο $(1,-1)$ είναι η $y - (-1) = \frac{1}{-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)}}(x-1) \Leftrightarrow y + 1 = -2(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -2x+1}$

(C) Έχω $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x^2-6xy+12y^2)(6x-4x\frac{dy}{dx}-4y+6y\frac{dy}{dx}) - (3x^2-4xy+3y^2)(4x-6x\frac{dy}{dx}-6y+24y\frac{dy}{dx})}{(2x^2-6xy+12y^2)^2}$. Αντικαθιστώντας τα $x = 1$, $y = -1$ και $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = \frac{1}{2}$, έχουμε $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(1,-1)} = \frac{(20)(6-2+4-3)-(10)(4-3+6-12)}{(20)^2} = \frac{100+50}{400} = \boxed{\frac{3}{8}}$

5. Έστω $f(x) = sinx$:

(A) Βρείτε την 6η βαθμού σειρά Maclaurin.

(B) Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο αυτό για να εκτιμήσετε το $\sin 0.2$

(C) Εκτιμήστε το υπόλοιπο της προσέγγισης αυτής.

(A) Έχω γενικά $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

Ακόμα έχω $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$ και $f^{(5)}(x) = \cos x$. Για $x = 0$ έχω $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$ και $f^{(5)}(0) = 1$. Άρα η σειρά Maclaurin γίνεται $\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} = \boxed{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$.

(B) Έχω από το προηγούμενο ερώτημα ότι $\sin 0.2 = 0.2 - \frac{0.2^3}{3!} + \frac{0.2^5}{5!} = \frac{74501}{375000} \cong \boxed{0.198669333}$

(C) Ο τύπος για το υπόλοιπο Lagrange είναι $R_n(x, a) \leq f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Παρατηρούμε ότι $|R_{2n+1}(x, 0)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, αφού $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$. Από το μέρος (A) εύκολα γενικεύουμε τη σειρά $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. (Γενικά, μια καλή προσέγγιση του υπολοίπου/σφάλματος ενός πολυωνύμου Taylor νιοστού βαθμού είναι ο επόμενος μη μηδενικός όρος σε μια φθίνουσα σειρά.). Επομένως, το υπόλοιπο είναι $\frac{(0.2)^7}{(7)!} \approx \boxed{2.540 \times 10^{-9}}$

6. Δυο σωματίδια ταξιδεύουν στο επίπεδο xy για χρόνο $t \geq 0$. Η θέση του σωματιδίου A δίνεται από τις $x = 2t - 3$ και $y = (2t + 1)^2$ και η θέση του σωματιδίου B από τις $x = t - 1$ και $y = t + 23$.

(A) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε σωματιδίου όταν $t = 3$.

(B) Βρείτε, αλλά μην υπολογίσετε, μια ολοκληρωτική έκφραση για την απόσταση που διάνυσε το σωματίδιο A από την στιγμή $t = 3$ έως την στιγμή $t = 5$.

(C) Τι ώρα τα δυο σωματίδια συγκρούονται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(A) Το διάνυσμα ταχύτητας κάθε σωματιδίου βρίσκεται λαμβάνοντας την παράγωγο της κίνησης κάθε σωματιδίου. Για το σωματίδιο Α έχω $\frac{dx}{dt} = 2$ και $\frac{dy}{dt} = 8t + 4$, άρα το διάνυσμα ταχύτητάς του Α είναι $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (2, 8t + 4)$ για κάθε t. Συνεπώς $\left.\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right|_{t=3} = (2, 28)$. Για το σωματίδιο Β έχω $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 1$ για κάθε t, άρα το διάνυσμα ταχύτητάς του Β είναι $\left.\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right|_{t=3} = (1, 1)$.

(B) Ο τύπος για την απόσταση που διανύθηκε παραμετρικά, ή το μήκος της καμπύλης, είναι $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$. Δεδομένου ότι το διάνυσμα ταχύτητας δεν ισούται με μηδέν σε καμία στιγμή κατά τη διάρκεια του διαστήματος από $t = 3$ έως $t = 5$, το σωματίδιο δεν αλλάζει κατεύθυνση άρα παίρνοντας τους τύπους για τις συνιστώσες x και y της ταχύτητας από το μέρος (a) έχουμε $L = \int_3^5 \sqrt{2^2 + (8t + 4)^2}dt = \int_3^5 \sqrt{64t^2 + 64t + 20}dt$

(C) Τα σωματίδια θα συγκρουστούν όταν οι συντεταγμένες x και y των συναρτήσεων θέσης τους είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως, ορίζουμε τις συναρτήσεις θέσης ίσες και λύνουμε για t. Ξεκινώντας με τις x-συνιστώσες: $2t - 3 = t - 1 \Leftrightarrow t = 2$. Αν θέσουμε $t = 2$ στις τεταγμένες y έχουμε: Για το σωματίδιο Α: $y = (2 \cdot 2 + 1)^2 = 25$. Για το σωματίδιο Β: $y = 2 + 23 = 25$. Τόσο οι συνιστώσες x όσο και y είναι ίσες στο $t = 2$, οπότε τότε συγκρούονται.

ΣΤΟΠ

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

$\boxed{2022}$

$AP^{©}$ Calculus BC

Ερωτήσεις Ανοιχτού Τύπου

Μέρος ΙΙ, Τμήμα Α

Χρόνος—30 λεπτά

2 Ερωτήσεις

ΕΝΑΣ ΓΡΑΦΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ.

1. Από τις 5 π.μ. έως τις 10 π.μ., ο ρυθμός με τον οποίο φθάνουν τα οχήματα σε μια συγκεκριμένη πλατεία διοδίων δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{A(t) = 450\sqrt{\sin(0.62t)}}$, όπου $\boldsymbol{t}$ είναι οι ώρες μετά τις 5 π.μ. και $\boldsymbol{A(t)}$ είναι τα οχήματα ανά ώρα. Ομαλά διεξάγεται η κυκλοφορία στις 5 το πρωί, χωρίς οχήματα να περιμένουν στην ουρά.

(a) Γράψτε, χωρίς να υπολογίσετε, μια ολοκληρωτική έκφραση που δίνει το σύνολο των οχημάτων που φτάνουν στα διόδια από τις 6 π.μ. ($\boldsymbol{t = 1}$) έως τις 10 π.μ. ($\boldsymbol{t = 5}$).

(b) Βρείτε την μέση τιμή του ρυθμού, σε οχήματα ανά ώρα, με τον οποίο καταφτάνουν τα οχήματα στα διόδια από τις 6 π.μ. ($\boldsymbol{t = 1}$) έως τις 10 π.μ. ($\boldsymbol{t = 5}$).

(c) Είναι ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν τα οχήματα στα διόδια στις 6 π.μ. ($\boldsymbol{t = 1}$) αυξητικός ή φθίνων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

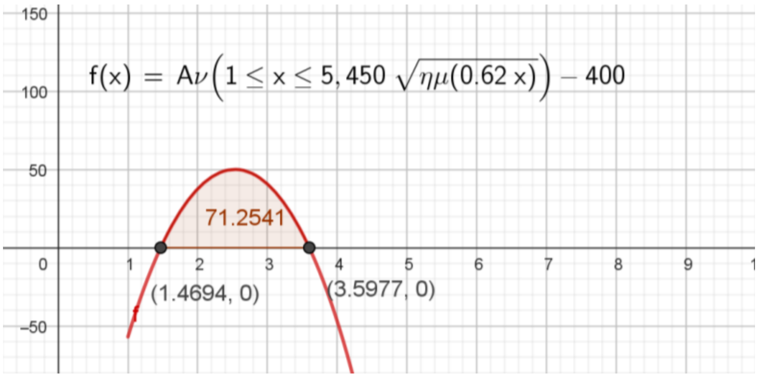
(d) Μια ουρά σχηματίζεται όταν $\boldsymbol{A(t) \geq 400}$. Ο αριθμός των οχημάτων στην ουρά την στιγμή $\boldsymbol{t}$, για $\boldsymbol{a \leq t \leq 4}$, δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{N(t) = \int_a^t (A(x) - 400)dx}$, όπου $\boldsymbol{a}$ είναι ο χρόνος που η ουρά αρχίζει να σχηματίζεται. Βρείτε, στον πλησιέστερο ακέραιο, τον μεγαλύτερο αριθμό οχημάτων στην ουρά των διοδίων στο χρονικό διάστημα $\boldsymbol{a \leq t \leq 4}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(a) Ο συνολικός αριθμός των οχημάτων που φθάνουν στον σταθμό διοδίων από τις 6 π.μ. έως τις 10 π.μ είναι $\int_1^5 |A(t)|dt = \int_1^5 \left|450\sqrt{\sin(0.62t)}\right| dt = \boxed{\int_1^5 450\sqrt{\sin(0.62t)}\,dt}$

(b) Γενικά η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$. Άρα ο μέσος ρυθμός με τον οποίο τα οχήματα φτάνουν στον σταθμό διοδίων από τις 6 π.μ. έως τις 10 π.μ. είναι $\frac{1}{5-1}\int_1^5 A(t)dt = \frac{1}{4}\int_1^5 450\sqrt{\sin(0.62t)}\,dt = 375.536966 \cong \boxed{375.537}$ οχήματα την ώρα.

(c) Έχω $A'(t) = \frac{450\,(\sin(0.62t))'}{2\sqrt{\sin(0.62t)}} = \frac{450\cdot 0.62\cdot \cos(0.62t)}{2\sqrt{\sin(0.62t)}} = \frac{139.5\cdot \cos(0.62t)}{\sqrt{\sin(0.62t)}} \Rightarrow A'(1) = \frac{139.5\cdot \cos 0.62}{\sqrt{\sin 0.62}} = 89.846 > 0$ άρα ο ρυθμός με τον οποίο καταφτάνουν τα οχήματα στα διόδια στις 6 π.μ. ($\boldsymbol{t = 1}$) αυξάνει.

(d) Έχω $N'(t) = A(t) - 400$ με $N'(t) \geq 0 \Rightarrow A(t) \geq 400 \Rightarrow 450\sqrt{\sin(0.62t)} \geq 400 \Rightarrow \sin(0.62t) \geq \frac{64}{81} = \sin 0.911 \Rightarrow 0.911 \leq 0.62t \leq \pi - 0.911 \Rightarrow 1.469 \leq t \leq 3.597$. Άρα για $\boldsymbol{t = 1.469}$ έχω ελάχιστο (προφανώς 0 αφού τότε αρχίζει η ουρά) και για $\boldsymbol{t = 3.597}$ έχω μέγιστο. Άρα η μέγιστη ουρά είναι η $N(3.597) = \int_{1.469}^{3.597}(A(x) - 400)dx = \int_{1.469}^{3.597}(450\sqrt{\sin(0.62x)} - 400)dx = 71.254 \cong \boxed{71}$

σχήματα. 

2. Ένα σωματίδιο κινείται σε μια καμπύλη στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$ με θέση $(\boldsymbol{x(t)}, \boldsymbol{y(t)})$ την στιγμή $\boldsymbol{t > 0}$. Το σωματίδιο κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+t^2}$ και $\frac{dy}{dt} = \ln(2+t^2)$. Την στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$, το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο $(\boldsymbol{1, 5})$.

(a) Βρείτε την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη την στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$.

(b) Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου την στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$, και βρείτε το διάνυσμα επιτάχυνσης του σωματιδίου την στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$.

(c) Βρείτε την συνιστώσα $\boldsymbol{y}$ της θέσης του σωματιδίου την στιγμή $\boldsymbol{t = 6}$.

(d) Βρείτε την συνολική απόσταση που ταξίδεψε το σωματίδιο πάνω στην καμπύλη από την στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$ έως την στιγμή $\boldsymbol{t = 6}$.

(a) Η κλίση της γραμμής που εφάπτεται στη διαδρομή του σωματιδίου κατά το χρόνο $\boldsymbol{t = 4}$ είναι $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{y'(4)}{x'(4)} = \frac{\ln(2+4^2)}{\sqrt{1+4^2}} = \frac{\ln 18}{\sqrt{17}} = 0.701018 \cong \boxed{0.701}$

(b) Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\boldsymbol{v(t)} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Τη στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$ έχει μέτρο $\|\boldsymbol{v(t)}\| = \sqrt{(x'(4))^2 + (y'(4))^2} = \sqrt{17 + (\ln 18)^2} = 5.035300 \cong \boxed{5.035}$. Για την επιτάχυνση έχω $\boldsymbol{a(t)} = (x''(t), y''(t))$ με $x''(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ και $y''(t) = \frac{2t}{2+t^2}$. Άρα τη στιγμή $\boldsymbol{t = 4}$ το σωματίδιο έχει επιτάχυνση $(x''(4), y''(4)) = \left(\frac{4}{\sqrt{1+4^2}}, \frac{2\cdot 4}{2+4^2}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{9}\right) = \boxed{(0.970, 0.444)}$

(c) Έχω $y(6) = y(4) + \int_4^6 \ln(2+t^2)\, dt = 5 + 6.570517 = 11.570517 \cong \boxed{11.571}$

(d) Η συνολική απόσταση που διανύει το σωματίδιο κατά μήκος της καμπύλης από το χρόνο $\boldsymbol{t = 4}$ έως το χρόνο $\boldsymbol{t = 6}$ είναι

$$s = \int_4^6 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_4^6 \sqrt{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^2 + \left(\ln(2+t^2)\right)^2}\, dt \cong \boxed{12.136}$$

ΤΕΛΟΣ ΤΜΗΜΑΤΟΣ Α

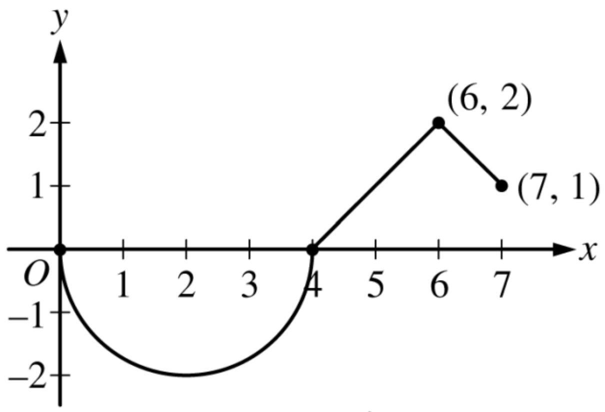
CALCULUS BC

ΜΕΡΟΣ II, Τμήμα Β

Χρόνος—1 ώρα

4 Ερωτήσεις

ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΑΡΙΘΜΟΜΗΧΑΝΕΣ ΓΙΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ.



Graph of f'

3. Έστω $\boldsymbol{f}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\boldsymbol{f(4)=3}$. Στο διάστημα $\boldsymbol{0 \le x \le 7}$, το γράφημα της $\boldsymbol{f'}$, η παράγωγος της $\boldsymbol{f}$, αποτελείται από ένα ημικύκλιο και δυο ευθύγραμμα τμήματα, όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα.

(a) Βρείτε τα $\boldsymbol{f(0)}$ και $\boldsymbol{f(5)}$.

(b) Βρείτε τις $\boldsymbol{x}$ συνιστώσες όλων των σημείων καμπής του γραφήματος της $\boldsymbol{f}$ όπου $\boldsymbol{0 < x < 7}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(c) Έστω $\boldsymbol{g}$ με τύπο $\boldsymbol{g(x)=f(x)-x}$. Σε ποια διαστήματα, αν υπάρχουν, είναι η $\boldsymbol{g}$ φθίνουσα για $\boldsymbol{0 \le x \le 7}$; Δείξτε την ανάλυσή σας που οδήγησε στην απάντησή σας.

(d) Για την συνάρτηση $\boldsymbol{g}$ του ερωτήματος (c), βρείτε το απόλυτο ελάχιστο στο διάστημα $0 \le \boldsymbol{x \le 7}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(a) Έχω από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ότι $\boldsymbol{f(0)=f(4)+\int_4^0 f'(x)dx = 3+\int_4^0 -\sqrt{2^2-(x-2)^2}dx = 3-\int_4^0 \sqrt{4x-x^2}dx = 9.283185 \cong \boxed{9.283}}$

Αλλιώς έχω $\boldsymbol{\int_4^0 f'(x)dx = -\int_0^4 f'(x)dx}$ =εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας 2 άρα $\boldsymbol{\int_4^0 f'(x)dx = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi}$. Άρα $\boldsymbol{f(0)=\boxed{3+2\pi}}$

Όμοια $\boldsymbol{f(5)=f(4)+\int_4^5 f'(x)dx = 3}$ +εμβαδόν ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες μήκους 1. Άρα $\boldsymbol{f(5)=3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{7}{2}=\boxed{3.5}}$

(b) Τα σημεία καμπής της $\boldsymbol{f}$ είναι τα σημεία που αλλάζει η μονοτονία της $\boldsymbol{f'}$. Άρα στα $\boxed{\boldsymbol{x=2}}$ και $\boxed{\boldsymbol{x=6}}$.

(c) Έχω $\boldsymbol{g'(x)=f'(x)-1 \le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le 1 \Leftrightarrow 0\le x\le 5}$. Άρα $\boxed{\boldsymbol{g \downarrow [0,5]}}$

(d) Έχω $\boldsymbol{g \downarrow [0,5]}$ και $\boldsymbol{g \uparrow [5,7]}$, άρα έχω ολικό ελάχιστο το $\boldsymbol{g(5)=f(5)-5=3.5-5=\boxed{-1.5}}$

$\boldsymbol{t}$ (μέρες)	**0**	**3**	**7**	**10**	**12**
$\boldsymbol{r'(t)}$(εκατοστά ανά ημέρα)	$\boldsymbol{-6.1}$	$\boldsymbol{-5.0}$	$\boldsymbol{-4.4}$	$\boldsymbol{-3.8}$	$\boldsymbol{-3.5}$

4. Ένα γλυπτό από πάγο λειώνει με τέτοιον τρόπο που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας κώνος που διατηρεί την κωνική μορφή του καθώς συρρικνώνεται. Η ακτίνα της βάσης του κώνου δίνεται από μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $\boldsymbol{r}$, όπου $\boldsymbol{r(t)}$ είναι σε εκατοστά και $\boldsymbol{t}$ σε ημέρες. Ο πίνακας παραπάνω έχει επιλεγμένες τιμές της $\boldsymbol{r'(t)}$, του ρυθμού μεταβολής της ακτίνας, στο χρονικό διάστημα όπου $0 \leq \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{12}$.

(a) Εκτιμήστε το $\boldsymbol{r''(8.5)}$ χρησιμοποιώντας τον μέσο ρυθμό μεταβολής της $\boldsymbol{r'}$ στο διάστημα όπου $7 \leq \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{10}$. Δείξτε τους υπολογισμούς που σας οδήγησαν στην απάντησή σας και δείξτε και τις μονάδες μέτρησης.

(b) Υπάρχει στιγμή $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{0 \leq t \leq 3}$, με $\boldsymbol{r'(t) = -6}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(c) Χρησιμοποιήστε ένα δεξιό άθροισμα Riemann με τέσσερα υποδιαστήματα όπως υποδεικνύονται στον πίνακα για να εκτιμήσετε την τιμή του $\int_0^{12} \boldsymbol{r'(t)dt}$.

(d) Το ύψος του κώνου μειώνεται με ρυθμό 2 εκατοστά την ημέρα. Την στιγμή $\boldsymbol{t = 3}$ ημέρες, η ακτίνα είναι 100 εκατοστά και το ύψος είναι 50 εκατοστά. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου του κώνου σε σχέση με τον χρόνο, σε κυβικά εκατοστά ανά ημέρα, την στιγμή $\boldsymbol{t = 3}$ ημέρες. (Ο όγκος $\boldsymbol{V}$ του κώνου με ακτίνα $\boldsymbol{r}$ και ύψος $\boldsymbol{h}$ είναι $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.)

(a) Έχω $\boldsymbol{r''(8.5) \approx \frac{r'(10)-r'(7)}{10-7} = \frac{-3.8-(-4.4)}{10-7} = \frac{0.6}{3} = \boxed{0.2}}$ <u>εκατοστά ανά ημέρα ανά ημέρα</u>!

(b) Η $\boldsymbol{r(t)}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη, άρα η $\boldsymbol{r'(t)}$ είναι διαφορίσιμη, άρα και είναι συνεχής. Έχω $\boldsymbol{r'(0) = -6.1 < -6 < -5.0 = r'(3)}$, συνεπώς από το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{(0,3)}$ με $\boldsymbol{r'(\xi) = -6}$.

(c) Ο τύπος για την περιοχή κάτω από μια καμπύλη χρησιμοποιώντας ένα δεξιό άθροισμα Reimann είναι: $\boldsymbol{S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i}$, όπου $\boldsymbol{\Delta x_i = x_{i+1} - x_i}$ και $\boldsymbol{x_i^* = x_{i+1}}$.
Άρα $\boldsymbol{S = -5 \cdot (3) - 4.4 \cdot (4) - 3.8 \cdot (3) - 3.5 \cdot (2) = \boxed{-51}}$.

(d) Έχω $\left.\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=3} = \boldsymbol{-5}$. Κάθε στιγμή έχω $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt} + \frac{2}{3}\pi r h \frac{dr}{dt}}$
Άρα $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi 100^2 \cdot (-2) + \frac{2}{3}\pi \cdot 100 \cdot 50 \cdot (-5) = \boxed{-\frac{70000\pi}{3}} \cong -73303{,}83}$

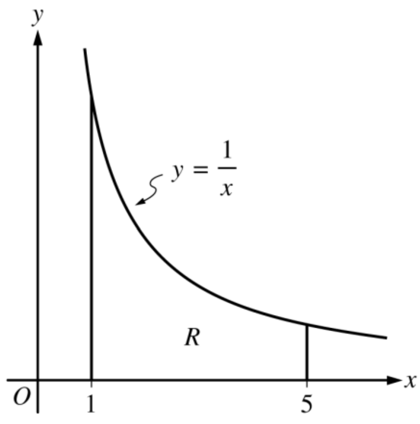


Figure 1

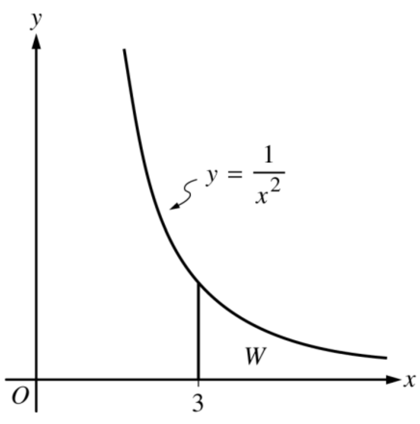


Figure 2

5. Οι εικόνες 1 και 2, που φαίνονται παραπάνω, δείχνουν χωρία στο πρώτο τεταρτημόριο που σχετίζονται με τα γραφήματα των $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ και $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$, αντίστοιχα. Στην εικόνα 1, έστω $\boldsymbol{R}$ το χωρίο που περικλείεται από την $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$, τον άξονα $\boldsymbol{x}$, και τις κάθετες γραμμές $\boldsymbol{x = 1}$ και $\boldsymbol{x = 5}$. Στην εικόνα 2, έστω $\boldsymbol{W}$ το μη φραγμένο χωρίο ανάμεσα στο γράφημα της $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$ και του άξονα $\boldsymbol{x}$ που βρίσκεται στα δεξιά της κατακόρυφης γραμμής $\boldsymbol{x=3}$.

(a) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $\boldsymbol{R}$.

(b) Το χωρίο $\boldsymbol{R}$ είναι η βάση ενός στερεού. Για το στερεό, σε κάθε $\boldsymbol{x}$ η κάθετη τομή στον άξονα των $\boldsymbol{x}$ είναι ένα ορθογώνιο με εμβαδόν που δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{xe^{\frac{x}{5}}}$. Βρείτε τον όγκο του στερεού.

(c) Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου $\boldsymbol{W}$ γύρω από τον άξονα $\boldsymbol{x}$.

(a) Έχω $\mathbf{E}=\int_1^5 \frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^5=\ln 5-\ln 1=\boxed{\ln 5}$

(b) Ο όγκος του στερεού βρίσκεται με την ολοκλήρωση της περιοχής της διατομής, οπότε $V=\int_a^b E_{ορθογωνίου}(x)dx=\int_1^5 xe^{\frac{x}{5}}dx=\int_1^5 x\left(5e^{\frac{x}{5}}\right)'dx=\left[x5e^{\frac{x}{5}}\right]_1^5-\int_1^5 5e^{\frac{x}{5}}dx=25e-5e^{\frac{1}{5}}-\left[25e^{\frac{x}{5}}\right]_1^5=25e-5e^{\frac{1}{5}}-25e+25e^{\frac{1}{5}}=\boxed{20e^{\frac{1}{5}}}\cong 24.42806$ κυβικές μονάδες.

(c) Από την μέθοδο των δίσκων, έχω $V=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b \pi\frac{1}{x^4}dx=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_3^{+\infty}=\pi\cdot(0+\frac{3^{-3}}{3}=\frac{\pi}{3^4}=\boxed{\frac{\pi}{81}}$ κυβικές μονάδες.

6. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει δυναμοσειρά $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x}$ όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(a) Με χρήση του κριτηρίου λόγου (ratio test), βρείτε το διάστημα σύγκλιση της δυναμοσειράς της $\boldsymbol{f}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(b) Δείξτε ότι $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10}$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(c) Γράψτε τους πρώτους μη μηδενικούς όρους και τον γενικό όρο της σειράς που εκφράζει την $\boldsymbol{f'(x)}$.

(d) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (c) για να βρείτε το $f'\left(\frac{1}{6}\right)$.

(a) Έχω ότι ο ν-οστός όρος της σειράς είναι ο $a_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Θα εφαρμόσω το κριτήριο του λόγου. Έχω $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}=(-1)\frac{2n+1}{2n+3}x^2$ με $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n+1}{2n+3}x^2\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$.

Αν $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$, τότε η σειρά συγκλίνει.

Για $\boldsymbol{x=-1}$, έχω $f(-1)=-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, που είναι μια εναλλασσόμενη σειρά της οποίας οι όροι τείνουν στο 0. Από το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς, η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ συγκλίνει.

Για $\boldsymbol{x=1}$, έχω $f(1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}$, που είναι μια εναλλασσόμενη σειρά της οποίας οι όροι τείνουν στο 0. Από το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλιση της δυναμοσειράς της $\boldsymbol{f}$ είναι το $\boxed{[-1,1]}$

(b) Χρησιμοποιώντας το όριο σφάλματος εναλλασσόμενης σειράς, το $f\left(\frac{1}{2}\right)$ διαφέρει από το $\frac{1}{2}$ το πολύ από την απόλυτη τιμή του δεύτερου όρου της σειράς, άρα $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|<\left|-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right|=\frac{1}{24}<\frac{1}{10}$

(c) Έχω $\boxed{f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots}$

(d) Έχω $f'\left(\frac{1}{6}\right)=1-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^4-\left(\frac{1}{6}\right)^6+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{6}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{36}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{36}}=\boxed{\frac{36}{37}}$

ΣΤΟΠ

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Εισαγωγή

Το GRE Mathematics Test αποτελείται από περίπου 66 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που προέρχονται από μαθήματα που προσφέρονται συνήθως σε προπτυχιακό επίπεδο. Η διάρκεια του τεστ είναι 2 ώρες και 50 λεπτά.

Περιεχόμενο του τεστ

Περίπου το 50 τοις εκατό των ερωτήσεων του Τεστ Μαθηματικών αφορούν την ανάλυση και τις εφαρμογές της — γνωστικό αντικείμενο που υποτίθεται ότι είναι κοινό στο υπόβαθρο σχεδόν όλων των μαθηματικών. Περίπου το 25 τοις εκατό των ερωτήσεων στο τεστ αφορούν τη στοιχειώδη άλγεβρα, τη γραμμική άλγεβρα, την αφηρημένη άλγεβρα και τη θεωρία αριθμών. Οι υπόλοιπες ερωτήσεις αφορούν άλλους τομείς των μαθηματικών που μελετώνται επί του παρόντος από προπτυχιακούς φοιτητές σε πολλά ιδρύματα.

Τα ποσοστά που δίνονται παρακάτω είναι εκτιμήσεις, τα πραγματικά ποσοστά θα διαφέρουν κάπως από τη μια έκδοση του τεστ στην άλλη.

I. Ανάλυση (50%)

Υλικό που μαθαίνεται με τη συνήθη ακολουθία μαθημάτων στοιχειώδους λογισμού — διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός μιας και πολλών μεταβλητών — συμπεριλαμβανομένων των εφαρμογών που βασίζονται στον λογισμό και των συνδέσεων με γεωμετρία συντεταγμένων, τριγωνομετρία, διαφορικές εξισώσεις και άλλους κλάδους των μαθηματικών

II. Άλγεβρα (25%)

- Στοιχειώδη άλγεβρα: βασικές αλγεβρικές τεχνικές και χειρισμοί που αποκτήθηκαν στο γυμνάσιο και χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά
- Γραμμική άλγεβρα: άλγεβρα πινάκων, συστήματα γραμμικών εξισώσεων, διανυσματικοί χώροι, γραμμικοί μετασχηματισμοί, χαρακτηριστικά πολυώνυμα, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
- Αφηρημένη άλγεβρα και θεωρία αριθμών: στοιχειώδη θέματα από τη θεωρία ομάδων, θεωρία δακτυλίων και προτύπων (module), θεωρία σωμάτων και θεωρία αριθμών

III. Πρόσθετα θέματα (25%)

- Εισαγωγική πραγματική ανάλυση: ακολουθίες και σειρές αριθμών και συναρτήσεων, συνέχεια, παραγωγισιμότητα και ολοκληρωσιμότητα και στοιχειώδη τοπολογία των $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$
- Διακριτά μαθηματικά: λογική, θεωρία συνόλων, συνδυαστική, θεωρία γραφημάτων και αλγόριθμοι
- Άλλα θέματα: γενική τοπολογία, γεωμετρία, μιγαδικές μεταβλητές, πιθανότητες και στατιστικές, και αριθμητική ανάλυση

Οι παραπάνω περιγραφές των θεμάτων που καλύπτονται στο τεστ δεν πρέπει να θεωρούνται πλήρεις. Είναι απαραίτητο ο υποψήφιος να κατανοεί πολλές άλλες σχετικές έννοιες.

Οι υποψήφιοι που κάνουν τεστ θα πρέπει να γνωρίζουν ότι ερωτήσεις που δεν απαιτούν περισσότερο από ένα καλό υπόβαθρο προ-λογισμού μπορεί να είναι αρκετά προκλητικές, τέτοιες ερωτήσεις μπορεί να είναι από τις πιο δύσκολες ερωτήσεις στο τεστ. Γενικά, οι ερωτήσεις προορίζονται όχι μόνο για να ελέγξουν την ανάκληση πληροφοριών, αλλά και να αξιολογήσουν την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών και την ικανότητα εφαρμογής αυτών των εννοιών σε διάφορες καταστάσεις.

GRADUATE RECORD EXAMINATIONS

MATHEMATICS PRACTICE TEST

FORM GR3768

GRE Mathematics Test Practice Book 2023

MATHEMATICS TEST

Χρόνος— 170 λεπτά

66 Ερωτήσεις

Οδηγίες: Κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις ή ημιτελείς προτάσεις ακολουθείται από πέντε προτεινόμενες απαντήσεις ή συμπληρώσεις. Σε κάθε περίπτωση, επιλέξτε αυτό που είναι καλύτερο και στη συνέχεια συμπληρώστε πλήρως το αντίστοιχο κενό στο φύλλο απαντήσεων.

Σε αυτό το τεστ:

(1) Όλοι οι λογάριθμοι με απροσδιόριστη βάση είναι φυσικοί λογάριθμοι, δηλαδή με βάση e.

(2) Τα σύμβολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, and $\mathbb{C}$ δηλώνουν τα σύνολα ακεραίων, ρητών αριθμών, πραγματικών αριθμών και μιγαδικών αριθμών, αντίστοιχα.

1. Έστω $\boldsymbol{C}$ μια αυθαίρετη σταθερά. Τότε $\int e^{ex}\,dx =$

   (A) $e^{ex-1}+C$ (B) $e^{ex}+C$ (C) $e^{ex+1}+C$ (D) $xe^{ex}+C$ (E) $\frac{e^{ex+1}}{ex+1}+C$

   Έχω $\int e^{ex}\,dx = \int (e^{e})^{x}\,dx = \frac{(e^{e})^{x}}{lne^{e}}+C = \frac{e^{ex}}{e}+C = e^{ex-1}$, άρα A

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3\log 2)^{n}}{n!} =$

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8

   Από το ανάπτυγμα Taylor $\mathbf{e^{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3\log 2)^{n}}{n!} = \mathbf{e}^{(3\log 2)} = e^{\log 8} = \mathbf{8}$, άρα E

3. Έστω $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{A}$ η ακτίνα και το εμβαδόν, αντίστοιχα, ενός κύκλου. Αν η $\boldsymbol{r}$ αυξηθεί κατά 40 τοις εκατό, σε τι ποσοστό θα αυξηθεί το εμβαδόν $\boldsymbol{A}$;

   (A) 40% (B) 49% (C) 80% (D) 96% (E) 130%

   Έχω $\frac{A_{new}}{A_{old}} = \frac{\pi r_{new}^{2}}{\pi r_{old}^{2}} = \left(\frac{r_{new}}{r_{old}}\right)^{2} = \mathbf{1,40^{2} = 1,96 = 196\%}$, άρα D

4. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\boldsymbol{y(x)}$ ισχύει ότι $\boldsymbol{x+y^{4}=10}$ για $\boldsymbol{y\neq 0}$, τότε $\frac{dy}{dx} =$

   (A) $-\frac{1}{4y^{3}}$ (B) $-\frac{1}{y^{4}}$ (C) $-\frac{x}{4y^{3}}$ (D) $\frac{9}{4y^{3}}$ (E) $\frac{10-x}{y^{4}}$

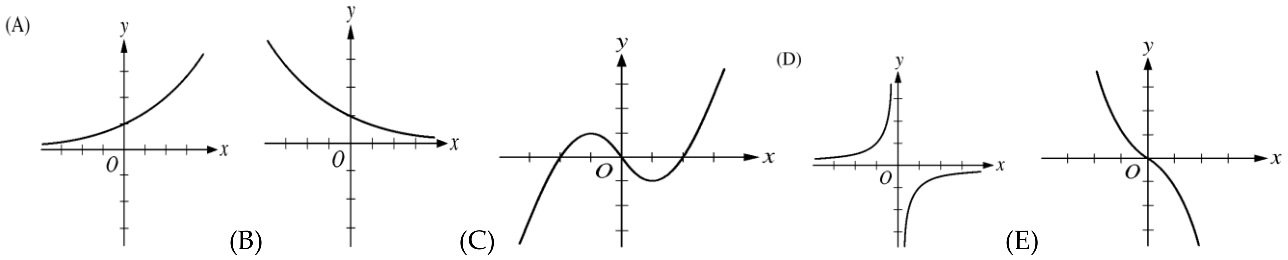
   Έχω $x+y^{4}=10 \Rightarrow \frac{dx}{dx}+4y^{3}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 4y^{3}\frac{dy}{dx}=-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4y^{3}}$, άρα A

5. Έστω $\boldsymbol{g}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, και έστω $\boldsymbol{h}$ μια συνάρτηση με τύπο $h(x) = \int_{0}^{x^{2}} g(t)dt$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$. Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με $\boldsymbol{h'(x)}$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$;

   (A) $g(x^{2})$ (B) $2xg'(x^{2})$ (C) $2xg(x^{2})$ (D) $g'(x^{2})-g'(0)$ (E) $2xg(x^{2})-g(0)$

   Έχω $h(x) = \int_{0}^{x^{2}} g(t)dt \Rightarrow h'(x) = (x^{2})'\mathrm{g}(x^{2}) = 2x\mathrm{g}(x^{2})$, άρα C

6. Έστω $\boldsymbol{f}$ μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε $f(f(x)) = x$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{x}$ του πεδίου ορισμού της $\boldsymbol{f}$. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το γράφημα της $\boldsymbol{f}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$;



   Έστω $f(a) = b \Rightarrow f(f(a)) = f(b) \Rightarrow a = f(b)$, άρα για κάθε $(a,b)\in C_{f} \Rightarrow (b,a)\in C_{f}$, δηλαδή το γράφημα της $\boldsymbol{f}$ είναι συμμετρικό ως προς την $\boldsymbol{y=x}$, άρα D

7. Αν $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}} =$

   (A) e^{ab} (B) $e^{\frac{b}{a}}$ (C) $e^{\frac{a}{b}}$ (D) 1 (E) ∞

   Έχω $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{b}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{b\log\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{b\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)'}{\left(1+\frac{x}{a}\right)}}{1}} = e^{\lim_{x\to 0} b\frac{\frac{1}{a}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)}} = e^{\frac{b}{a}}$, άρα B

8. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει τύπο $f(x) = \frac{\log x}{x^{2}-1}$ για κάθε θετικό αριθμό $\boldsymbol{x}$ εκτός του $\boldsymbol{x=1}$, και αν $\boldsymbol{f(1)=a}$, για ποια τιμή του $\boldsymbol{a}$ είναι η $\boldsymbol{f}$ συνεχής στο $\boldsymbol{x=1}$;

   (A) $\mathbf{0}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) Δεν υπάρχει τέτοια τιμή.

   Αρκεί $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x^{2}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$, άρα B

9. Από τις 10 λάμπες σε ένα κουτί, οι 3 είναι ελαττωματικές. Εάν πρόκειται να επιλεγούν 2 λαμπτήρες από το κουτί τυχαία και χωρίς αντικατάσταση, ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον

1 από τους 2 λαμπτήρες να είναι ελαττωματικός;
(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{7}{15}$ (C) $\frac{8}{15}$ (D) $\frac{19}{30}$ (E) $\frac{7}{10}$

Βρίσκω την συμπληρωματική πιθανότητα δηλαδή την πιθανότητα να μην επιλεγούν ελαττωματικοί λαμπτήρες. Αυτό έχει πιθανότητα $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$, άρα η συμπληρωματική πιθανότητα είναι $\mathbf{1} - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$, άρα C

10. Στην δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ της $\frac{1}{(1-x)^2}$, όπου $|x| < 1$, ποιοι είναι οι συντελεστές a_0, a_1, και a_2, αντίστοιχα;
(A) 1, 1, και 1 (B) 1, 2, και 3 (C) 1, 2, και 6 (D) 2, 4, και 6 (E) 1, $\frac{1}{2}$, και $\frac{1}{6}$

Έχω $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (x-1)^{-2}$, $f'(x) = -2(x-1)^{-3}$, $f''(x) = 6(x-1)^{-4}$ άρα $a_0 = f(0) = 1$, $a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 2$ και $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 3$, άρα B

11. Έστω $f: [-3, \infty) \to [-8, \infty)$ με τύπο $f(x) = x^2 + 6x + 1$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;
(A) Η f δεν είναι 1-1 (δηλαδή όχι αμφιμονοσήμαντη, όχι ερριπτική).

(B) Η f δεν είναι επί (δηλαδή, όχι επιρριπτική).

(C) Η f είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη που ορίζεται στο διάστημα $[-8, \infty)$ και τύπο $f^{-1}(x) = 6 - \sqrt{36 + x}$.
(D) Η f είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη που ορίζεται στο διάστημα $[-8, \infty)$ και τύπο $f^{-1}(x) = 6 + \sqrt{36 + x}$.
(E) Η f είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη που ορίζεται στο διάστημα $[-8, \infty)$ και τύπο $f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{8 + x}$.
Έχω $x^2 + 6x + 1 = x^2 + 6x + 9 - 8 = (x+3)^2 - 8$, παραβολή με κορυφή το $(-3, -8)$. Αφού $x \in [-3, \infty)$ το γράφημα της f είναι το δεξί τμήμα της παραβολής από την κορυφή της, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα μονότονη, άρα 1-1 με σύνολο τιμών $[-8, \infty)$, άρα και επί. Έχω λοιπόν για $x \in [-3, \infty)$, $y \in [-8, \infty)$ ότι $y = (x+3)^2 - 8 \Leftrightarrow y + 8 = (x+3)^2 \Leftrightarrow x + 3 = \sqrt{y+8} \Leftrightarrow x = \sqrt{y+8} - 3, x \in [-8, \infty)$, άρα E

12. Έστω p και q πρώτοι αριθμοί, όπου $2 < p < q$, και έστω M το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων n τέτοιων ώστε ο n^5 να διαιρείται από τον p^3 και από τον $64q^{11}$. Ποιος είναι ο ελάχιστος ακέραιος του συνόλου M;
(A) $2pq$ (B) $4p^3q$ (C) $4pq^3$ (D) $4p^3q^3$ (E) $32pq^{10}$

Έχω $64q^{11} = 2^6q^{11}$ και $M = \{n: p^3 | n^5 \wedge 2^6q^{11} | n^5\} = \{n: p^3 2^6 q^{11} | n^5\} \Rightarrow p | n, 2 | n, q | n$. Άρα $n = C2^a p^b q^c \Rightarrow n^5 = C' 2^{5a} p^{5b} q^{5c} \xRightarrow{2^6p^3q^{11}|n^5} 6 \leq 5a, 3 \leq 5b, 11 \leq 5c \Rightarrow a \geq 2, b \geq 1, c \geq 3 \Rightarrow \min\{n^5\} = 2^{5\cdot 2} p^{5\cdot 1} q^{5\cdot 3} \Rightarrow minM = n = 2^2p^1q^3 = 4pq^3$, άρα C

13. Έστω G ένα γράφημα τέτοιο, ώστε κάθε δύο διαφορετικοί κόμβοι του G να συνδέονται ακριβώς με μία ακμή και κάθε ακμή να συνδέει ακριβώς δύο διαφορετικούς κόμβους. Αν το G έχει 190 ακμές, πόσους κόμβους έχει το γράφημα G;
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 94 (E) 95

Έστω ότι το γράφημα έχει n κόμβους. Καθένας από αυτούς συνδέεται μέσω μιας ακμής με τους υπόλοιπους $n - 1$ κόμβους, άρα έχουμε $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές, αφού κάθε ακμή μετρήθηκε δυο φορές. Άρα έχω $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 190 \Leftrightarrow n = -19 \vee n = 20$, δεκτή η $n = 20$, άρα C

14. Έστω $\boldsymbol{f}$ μια πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ τέτοια, ώστε $\boldsymbol{f'(x)=x^2-x+1}$ στο $(\mathbf{0},\mathbf{2})$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

(A) Αν $\mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\mathbf{2}$, τότε $\boldsymbol{f(x)=f(2-x)}$.

(B) Αν $\mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\mathbf{2}$, τότε $\boldsymbol{f(x)=-f(2-x)}$.

(C) Αν $\mathbf{0}<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}<\mathbf{2}$, τότε $\boldsymbol{f(x)<f(y)}$.

(D) Το γράφημα της $\boldsymbol{f}$ έχει τα κοίλα προς τα πάνω στο $(\mathbf{0},\mathbf{2})$.

(E) Το γράφημα της $\boldsymbol{f}$ έχει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(\mathbf{0},\mathbf{2})$.

Έχω $\boldsymbol{f'(x)=x^2-x+1>0, x\in\mathbb{R}}$, άρα $\boldsymbol{f}\uparrow(\mathbf{0},\mathbf{2})$, άρα C. Αφού η $\boldsymbol{f''(x)=2x-1}$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $\frac{1}{2}$, η $\boldsymbol{f}$ δεν έχει σταθερή κοιλότητα στο $(\mathbf{0},\mathbf{2})$, συνεπώς οι D και E απορρίπτονται.

15. Αν $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι θετικοί αριθμοί, ποιο από τα παρακάτω είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα εξισώσεων

$$\boldsymbol{x^2+y^2=a}$$

$$\boldsymbol{xy=b}$$

να έχει τουλάχιστον μία λύση $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, όπου $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι πραγματικοί αριθμοί;

(A) $\boldsymbol{a\geq 2b}$ (B) $\boldsymbol{2a\leq b}$ (C) $\boldsymbol{a\geq b^2}$ (D) $\boldsymbol{a\leq b^2}$ (E) $\boldsymbol{a\leq 2b^2}$

Έχω με αντικατάσταση του y ότι $\boldsymbol{x^2+\frac{b^2}{x^2}=a\Leftrightarrow (x^2)^2-a\cdot x^2+b^2=0\overset{\omega=x^2>0}{\Longleftrightarrow}\omega^2-a\cdot\omega+b^2=0}$. Για να έχει λύση πρέπει και αρκεί $\boldsymbol{\Delta\geq 0\Leftrightarrow a^2\geq 4b^2\overset{a,b>0}{\Longleftrightarrow} a\geq 2b}$. Αφού $\boldsymbol{S=-\frac{-a}{1}=a>0}$ και $\boldsymbol{P=\frac{b^2}{1}>0}$ θα έχω σίγουρα 2 θετικές λύσεις για το ω άρα το σύστημα θα έχει τουλάχιστον μία λύση, άρα Α

16. Αν τα $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ είναι σύνολα, η $\boldsymbol{f:X\to Y}$ είναι μια συνάρτηση, τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι υποσύνολα του $\boldsymbol{X}$, και το $\boldsymbol{C}$ είναι υποσύνολο $\boldsymbol{B}$. Ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές;

I. $\boldsymbol{f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)}$

II. $\boldsymbol{f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)}$

III. $\boldsymbol{f(C)\subseteq f(B)}$

(A) Κανένα (B) το III μόνο (C) Τα I και II μόνο (D) Τα I και III μόνο (E) Τα I, II, και III

Έστω $\boldsymbol{f(x)\in f(A)\cup f(B)\Leftrightarrow f(x)\in f(A)\vee f(x)\in f(B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\Leftrightarrow f(x)\in f(A\cup B)}$, άρα I αληθές. Έστω $\boldsymbol{f(x)\in f(A)\cap f(B)}$ και $\boldsymbol{A\cap B=\emptyset}$, τότε $\boldsymbol{f(x)\in f(\emptyset)=\emptyset}$, άτοπο, άρα η II δεν ισχύει. Έστω $\boldsymbol{f(x)\in f(C)\Rightarrow f(x)\in f(B)\Rightarrow f(C)\subseteq f(B)}$, άρα η III αληθής, άρα D

17. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις για τις ακολουθίες $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ των πραγματικών αριθμών είναι ΨΕΥΔΗΣ;

(A) Κάθε μη φραγμένη ακολουθία είναι αποκλίνουσα.

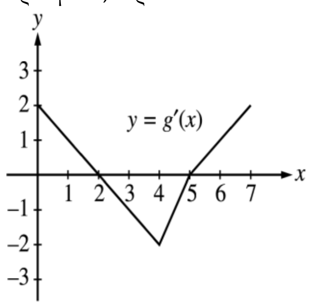
(B) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

(C) Αν $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=a}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{a}$, τότε $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)}$.

(D) Αν $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=a}\in\mathbb{R}$, τότε για κάθε $\boldsymbol{\varepsilon>0}$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $\boldsymbol{k}$ τέτοιος, ώστε $\boldsymbol{|a_m-a_n|<\varepsilon}$ για κάθε $\boldsymbol{m,n\geq k}$.

(E) Για $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a}$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{n\to\infty} |\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a}| = \mathbf{0}$.

Ως γνωστόν αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα, τότε είναι φραγμένη. Με αντιθετοαντιστροφή προκύπτει ότι η A είναι αληθής. Έστω η ακολουθία $\boldsymbol{\beta_n} = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}$, είναι φραγμένη αλλά όχι συγκλίνουσα. Άρα B ΨΕΥΔΗΣ. Οι υπόλοιπες τρεις προτάσεις αληθεύουν εξ ορισμού, άρα B



18. Το γράφημα της παραγώγου $\boldsymbol{g'}$ μιας συνάρτησης $\boldsymbol{g}$ με πεδίο ορισμού $[\mathbf{0}, \mathbf{7}]$ φαίνεται στην εικόνα. Ποια από τα παρακάτω πρέπει να αληθεύουν για την $\boldsymbol{g}$;

I. Η $\boldsymbol{g}$ έχει ένα τοπικό μέγιστο για $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ και ένα τοπικό ελάχιστο στο $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$.

II. Η $\boldsymbol{g}$ έχει ένα τοπικό μέγιστο για $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ και ένα τοπικό ελάχιστο στο $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$.

III. $\boldsymbol{g}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{g}(\mathbf{5})$

(A) το I μόνο (B) το II μόνο (C) το III μόνο (D) τα I και II (E) τα II και III

Η $\boldsymbol{g} \uparrow [\mathbf{0}, \mathbf{2}], \boldsymbol{g} \downarrow [\mathbf{2}, \mathbf{5}]$ και $\boldsymbol{g} \uparrow [\mathbf{5}, \mathbf{7}]$, άρα έχει τοπικό μέγιστο στο $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$, άρα II. Έχω $\boldsymbol{g}(\mathbf{5}) = \boldsymbol{g}(\mathbf{2}) + \int_{2}^{5} \boldsymbol{g'}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} \Rightarrow \boldsymbol{g}(\mathbf{5}) - \boldsymbol{g}(\mathbf{2}) = \int_{2}^{5} \boldsymbol{g'}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} < \mathbf{0}$ αφού $\boldsymbol{g'}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2}, \mathbf{5}]$, άρα $\boldsymbol{g}(\mathbf{5}) < \boldsymbol{g}(\mathbf{2})$, άρα η III δεν αληθεύει, άρα B

19. Στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$, ποιο σημείο της καμπύλης $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x} + \mathbf{3}}$ είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων;
(A) $(-\mathbf{3}, \mathbf{0})$ (B) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ (D) $(\mathbf{0}, \sqrt{\mathbf{3}})$ (E) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Έχω $\boldsymbol{d_{OA}} = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \mathbf{0})^2 + (\boldsymbol{y} - \mathbf{0})^2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + \mathbf{3}} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}} = \sqrt{\left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \geq \frac{11}{4}\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ με την ισότητα για $\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}$. Άρα το πλησιέστερο σημείο είναι το $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{-\frac{1}{2} + \mathbf{3}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, άρα C

20. Αν οι $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, τότε η δεύτερη παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ από ποιον από τους ακόλουθους τύπους δίνεται ;

(A) $\boldsymbol{f''og''}$

(B) $(\boldsymbol{f''} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{g'})^2$

(C) $(\boldsymbol{f''} \circ \boldsymbol{g}) + (\mathbf{2}\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g'}) + (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g''})$

(D) $(\boldsymbol{f''} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{g'})^2 + (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g})\boldsymbol{g''}$

(E) $(\boldsymbol{f''} \circ \boldsymbol{g})\boldsymbol{g'} + (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g'})(\boldsymbol{g'})^2$

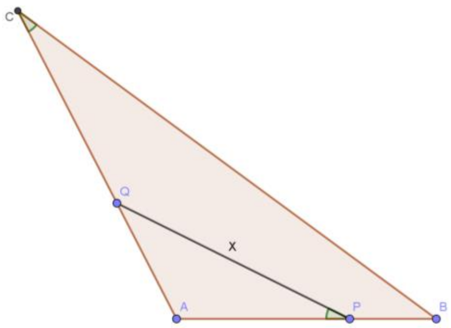
Έχω $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{g'} \cdot (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g}) \Rightarrow (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'' = \boldsymbol{g''} \cdot (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g'} \cdot (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{g''} \cdot (\boldsymbol{f'} \circ \boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{g'})^2 \cdot (\boldsymbol{f''} \circ \boldsymbol{g})$, άρα D

21. Αν $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι ακέραιοι τέτοιοι, ώστε $\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} \equiv \mathbf{5}\ (\boldsymbol{mod}\mathbf{13})$ και $\boldsymbol{x} + \mathbf{7}\boldsymbol{y} \equiv \mathbf{1}\ (\boldsymbol{mod}\mathbf{13})$, τότε ο $\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y}$ είναι ισοϋπόλοιπος ως προς το $\mathbf{13}$ με το

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 10 (E) 11

Έχω $\boldsymbol{3x+2y\equiv 5\ (mod13)}$ και $\boldsymbol{-3x-21y\equiv\ -3(mod13)}$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχω $\boldsymbol{-19y\equiv 2\ (mod13)\Leftrightarrow 19y\equiv -2(mod13)\Leftrightarrow 6y\equiv 11\ (mod13)\Leftrightarrow 12y\equiv 22(mod13)\Leftrightarrow -y\equiv 9\ (mod13)\Leftrightarrow y\equiv 4\ (mod13)}$. Άρα η $\boldsymbol{3x+2y\equiv 5\ (mod13)}$ γίνεται $\boldsymbol{3x+8\equiv 5\ (mod13)\Leftrightarrow 3x\equiv -3\ (mod13)\Leftrightarrow x\equiv -1\ (mod13)\equiv 12\ (mod13)}$. Άρα $\boldsymbol{5x+3y\equiv 5\cdot 12+3\cdot 4\ (mod13)\equiv 72\ (mod13)\equiv 7\ (mod13)}$, άρα C

22. Θεωρούμε τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ με πλευρές $\boldsymbol{AB=6}$, $\boldsymbol{AC=8}$, και $\boldsymbol{BC=12}$. Έστω $\boldsymbol{P}$ σημείο της πλευράς $\boldsymbol{AB}$ τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{AP=4}$, και έστω $\boldsymbol{Q}$ σημείο στην πλευρά $\boldsymbol{AC}$ τέτοιο, ώστε οι γωνίες $\boldsymbol{APQ}$ και $\boldsymbol{ACB}$ να είναι ίσες. Ποιο είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\boldsymbol{PQ}$;
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8



Έχω $\boldsymbol{\Delta ABC\approx \Delta AQP}$, αφού $\boldsymbol{\widehat{A}=\widehat{A}}$, $\boldsymbol{\widehat{C}=\widehat{P}}$, άρα $\boldsymbol{\frac{BC}{QP}=\frac{AC}{AP}\Rightarrow \frac{12}{QP}=\frac{8}{4}\Rightarrow QP=6}$, άρα D

$$\boldsymbol{x_1+x_4=a}$$

$$\boldsymbol{x_2+x_4=b}$$

$$\boldsymbol{x_3+x_4=c}$$

23. Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων των πραγματικών μεταβλητών $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, και $\boldsymbol{x_4}$, τα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, και $\boldsymbol{c}$ είναι πραγματικές σταθερές. Ποιο είναι το σύνολο όλων των $\boldsymbol{(a,b,c)}\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ για τα οποία το σύστημα έχει λύση;

(A) $\{\boldsymbol{(a,b,c)\colon a=b=c}\}$

(B) $\{\boldsymbol{(a,b,c)\colon a+b+c=-1}\}$

(C) $\{\boldsymbol{(a,b,c)\colon a+b+c=0}\}$

(D) $\{\boldsymbol{(a,b,c)\colon a+b+c=1}\}$

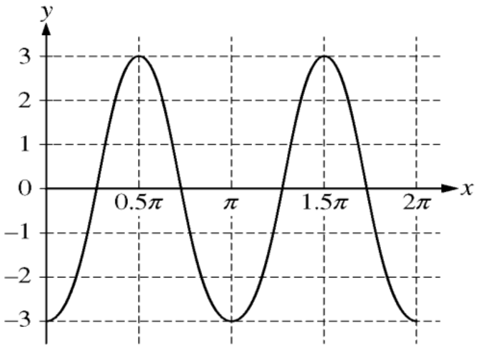
(E) $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$

Το σύστημα έχει πάντα τη λύση $\boldsymbol{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(a-z,b-z,c-z,z)}$, άρα E

24. Ποιο από τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων είναι διανυσματική βάση του μηδενικού χώρου του πραγματικού πίνακα $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{-2}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{-4}&\boldsymbol{-2}&\boldsymbol{2}\end{pmatrix}$;

(A) $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}\right\}$ (B) $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{5}\end{pmatrix}\right\}$ (C) $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}\right\}$ (D) $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{-5}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{-2}\end{pmatrix}\right\}$ (E) $\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{-5}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{-2}\\\boldsymbol{10}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\right\}$

Έχω $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hookleftarrow\cdot(-2) \\ \hookleftarrow\cdot(4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \hookleftarrow\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ο μηδενικός χώρος προκύπτει από τη λύση του ομοιογενούς συστήματος $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$, με $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Θεωρούμε την $\boldsymbol{z}$ ελεύθερη μεταβλητή και λύνουμε το σύστημα εκφράζοντας όλες τις άλλες μεταβλητές ως προς $\boldsymbol{x}$: από τη 2η σειρά του πίνακα έχω : $y - \frac{3}{5}z = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}z$ και από την 1η σειρά έχω: $x + 3y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = -3y + 2z = -\frac{9}{5}z + 2z = \frac{1}{5}z$. Άρα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{3}{5}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, άρα B



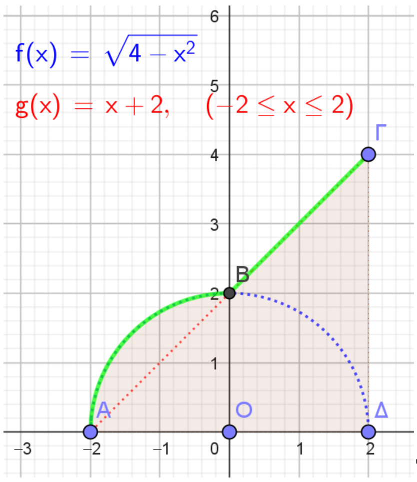
25. Στην εικόνα έχουμε το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x) = A\cos(\omega x - \varphi)}$, όπου $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\omega}$, και $\boldsymbol{\varphi}$ είναι μη αρνητικές σταθερές. Ποια από τις παρακάτω θα μπορούσε να είναι τιμή της $\boldsymbol{\varphi}$;

(A) $\boldsymbol{0}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\boldsymbol{\pi}$ (E) $\frac{3\pi}{2}$

Έχω μέγιστη τιμή το 3 άρα $\boldsymbol{A = 3}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{T = \pi \Rightarrow \omega = 2 \Rightarrow f(x) = 3\cos(2x - \varphi) \xRightarrow{f(\frac{\pi}{2})=3} 3 = 3\cos(\pi - \varphi) \Rightarrow -\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = \pi}$, άρα D

26. Αν η $\boldsymbol{f}$ έχει τύπο $\boldsymbol{f(x) = \max\{\sqrt{4 - x^2}, x + 2\}}$ για $\boldsymbol{-2 \le x \le 2}$, ποια η τιμή του $\int_{-2}^{2} \boldsymbol{f(x)dx}$;

(A) $\boldsymbol{2 + \pi}$ (B) $\boldsymbol{4 + \pi}$ (C) $\boldsymbol{6 + \pi}$ (D) $\boldsymbol{2 + 2\pi}$ (E) $\boldsymbol{6 + 2\pi}$



Το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου και του τραπεζίου ΟΒΓΔ, άρα $\int_{-2}^{2} \boldsymbol{f(x)dx} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} + \frac{(4+2)\cdot 2}{2} = \boldsymbol{\pi + 6}$, άρα C

27. Έστω $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, και $\boldsymbol{R}$ λογικές προτάσεις. Θεωρούμε την πρόταση "Αν η $\boldsymbol{P}$ είναι αληθής, τότε η $\boldsymbol{Q}$ είναι αληθής και η $\boldsymbol{R}$ είναι αληθής". Ποια από τις παρακάτω είναι η άρνηση της παραπάνω πρότασης;

(A) Αν η $\boldsymbol{P}$ είναι αληθής, τότε η $\boldsymbol{Q}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{R}$ είναι ψευδής.

(B) Η $\boldsymbol{P}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{Q}$ είναι αληθής ή η $\boldsymbol{R}$ είναι αληθής.

(C) Η $\boldsymbol{P}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{Q}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{R}$ είναι ψευδής.

(D) Αν η $\boldsymbol{Q}$ είναι αληθής και η $\boldsymbol{R}$ είναι αληθής, τότε η $\boldsymbol{P}$ είναι αληθής.

(E) Αν η $\boldsymbol{P}$ είναι ψευδής, τότε η $\boldsymbol{Q}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{R}$ είναι ψευδής.

Η άρνηση της πρότασης θα λέει ότι όταν αληθεύει η υπόθεση τότε το αρχικό συμπέρασμα δεν αληθεύει. Συνεπώς η άρνηση θα είναι η πρόταση «Αν η $\boldsymbol{P}$ είναι αληθής, τότε δεν ισχύει η πρόταση (η $\boldsymbol{Q}$ είναι αληθής και η $\boldsymbol{R}$ είναι αληθής)» βάσει κανόνα de Morgan ισοδύναμα έχω «Αν η $\boldsymbol{P}$ είναι αληθής, τότε η $\boldsymbol{Q}$ είναι ψευδής ή η $\boldsymbol{R}$ είναι ψευδής», άρα A

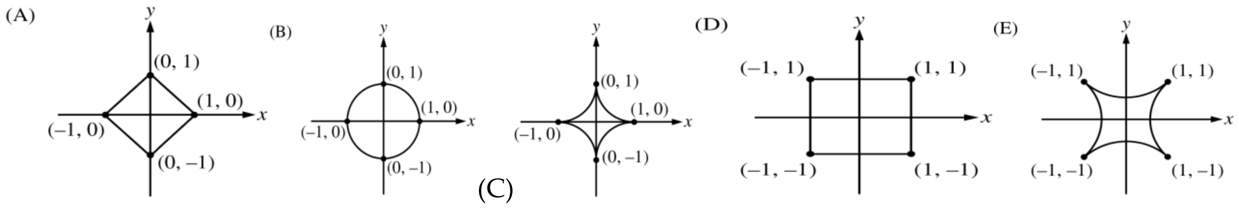
28. Η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}\,dx}$ είναι $\sqrt{\boldsymbol{\pi}}$. Ποια είναι η τιμή του $\int_{\boldsymbol{0}}^{\infty} \boldsymbol{x^2\, e^{-x^2} dx}$;
(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{\boldsymbol{\pi}}$ (E) $\frac{\pi}{2}$

Έχω $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} -\frac{x}{2}(-x^2)' e^{-x^2} dx = \int_{0}^{\infty} -\frac{x}{2}\left(e^{-x^2}\right)' dx = \left[-\frac{x}{2} e^{-x^2}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)' e^{-x^2} dx = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{0} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, άρα A

29. Για όλες τις πραγματικές τιμές του $\boldsymbol{x}$, έστω $\boldsymbol{f}$ συνάρτηση με τύπο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{x}(\mathbf{cos}^{\mathbf{23}}\boldsymbol{y})(\mathbf{2} + \mathbf{sin}^{\mathbf{23}}\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$. Σε ποιο από τα παρακάτω διαστήματα είναι αύξουσα η $\boldsymbol{f}$;
(A) $(-\boldsymbol{\pi}, \mathbf{0})$ (B) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ (E) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Έχω $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{cos}^{\mathbf{23}}\boldsymbol{x})(\mathbf{2} + \mathbf{sin}^{\mathbf{23}}\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{cos}^{\mathbf{23}}\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $\boldsymbol{f} \uparrow$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα B

30. Ποιο από τα παρακάτω αντιπροσωπεύει καλύτερα το γράφημα της καμπύλης $\boldsymbol{c}: [\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}] \to \mathbb{R}^2$ όπου $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{cos}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{t}, \mathbf{sin}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{t})$ στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$;



Για $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, έχω $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) \in \boldsymbol{C_c}$, άρα η E απορρίπτεται. Το B είναι της $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}, \mathbf{sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t})$, συνεπώς C

31. Τέσσερα ζάρια, το καθένα με έδρες αριθμημένες από το 1 έως το 6, πρέπει να ριχτούν. Όταν κάθε ζάρι ρίχνεται, κάθε αριθμός είναι εξίσου πιθανό να εμφανίζεται στην επάνω όψη του. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από τα ζάρια να έχουν τον ίδιο αριθμό στην επάνω όψη τους;
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{13}{18}$ (C) $\frac{49}{54}$ (D) $\frac{23}{24}$ (E) $\frac{211}{216}$

Θα υπολογίσω πρώτα την άρνηση της ζητούμενης πιθανότητας που είναι η πιθανότητα όλα τα ζάρια να διαφέρουν. Αυτό έχει πιθανότητα $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\mathbf{1} - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$, άρα B

32. Ποιο από τα ακόλουθα σύνολα μιγαδικών αριθμών ΔΕΝ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα;
(A) { $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$: $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι θετικοί ρητοί αριθμοί}

(B) {$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$: $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι πραγματικοί αριθμοί όπου $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 \neq \mathbf{0}$}

(C) {$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$: $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι ακέραιοι τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \mathbf{1}$}

(D) {$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$: $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι ρητοί αριθμοί με $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \mathbf{1}$}

(E) {$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$: $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \mathbf{1}$}

Ομάδα είναι ένα σύνολο, $\boldsymbol{G}$, μαζί με μία πράξη $\star$ (δηλαδή, μία συνάρτηση $\star : \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ η οποία συνδυάζει οποιαδήποτε δύο στοιχεία $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ για να σχηματίσει ένα άλλο στοιχείο που συμβολίζεται με $\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}$. Για να είναι ομάδα, το σύνολο και η πράξη, $(\boldsymbol{G},\star)$, πρέπει να ικανοποιούν τέσσερις ιδιότητες γνωστές ως αξιώματα των ομάδων:

Κλειστότητα: Για όλα τα $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ που ανήκουν στο $\boldsymbol{G}$, το αποτέλεσμα της πράξης, $\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}$, ανήκει επίσης στο $\boldsymbol{G}$

Προσεταιριστική ιδιότητα: Για όλα τα $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ που ανήκουν στο $\boldsymbol{G}$, ισχύει $(\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}) \star \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \star (\boldsymbol{b} \star \boldsymbol{c})$

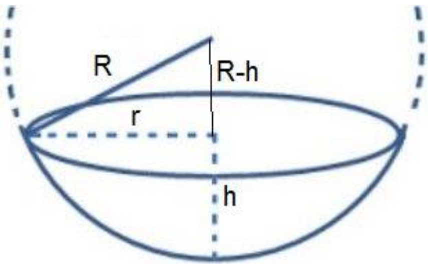
Ουδέτερο στοιχείο: Υπάρχει ένα στοιχείο $\boldsymbol{e}$ στο $\boldsymbol{G}$, τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο $\boldsymbol{a}$ στο $\boldsymbol{G}$, η εξίσωση $\boldsymbol{e} \star \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \star \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$ να επαληθεύεται. Αυτό το στοιχείο είναι μοναδικό, και ως εκ τούτου όταν αναφερόμαστε σε αυτό θα λέμε το ουδέτερο στοιχείο

Αντίστροφο στοιχείο: Για κάθε $\boldsymbol{a}$ στη $\boldsymbol{G}$, υπάρχει ένα στοιχείο $\boldsymbol{b}$ στη $\boldsymbol{G}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \star \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$

Ο αντίστροφος του μιγαδικού $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ είναι ο $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bi}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}$. Η πρώτη επιλογή δεν είναι ομάδα, αφού ο αντίστροφος του $\mathbf{1} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}$ είναι ο $\frac{\mathbf{1}-\mathbf{2}\boldsymbol{i}}{\sqrt{5}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{5}} - \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}$ που δεν είναι στοιχείο της ομάδας αφού ο $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{5}}$ δεν είναι ρητός. Η (Β) επιλογή είναι ομάδα αφού $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bi}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} - \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}\boldsymbol{i}$ και οι $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}, \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} \in \mathbb{R}$. Η ομάδα C αποτελείται από τα στοιχεία $\{\pm\mathbf{1}, \pm\boldsymbol{i}\}$ και ισχύουν όλες οι παραπάνω ιδιότητες. Για την ομάδα (D) ο $\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bi}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi} \in \boldsymbol{G}$, άρα είναι ομάδα. Όμοια για την (Ε). Άρα Α.

33. Μια σφαιρική δεξαμενή ακτίνας 5 μέτρων περιέχει νερό που σιγά σιγά αποστραγγίζεται. Τη στιγμή που γίνονται οι μετρήσεις, το μέγιστο βάθος του νερού στη δεξαμενή είναι 2 μέτρα και το βάθος μειώνεται κατά $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ του μέτρου ανά δευτερόλεπτο. Ποιος είναι ο ρυθμός μείωσης του όγκου του νερού, σε κυβικά μέτρα ανά δευτερόλεπτο, εκείνη τη στιγμή;

(A) $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$ (B) $\frac{\mathbf{59}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$ (C) $\mathbf{22}\boldsymbol{\pi}$ (D) $\frac{\mathbf{98}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$ (E) $\frac{\mathbf{176}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$



http://users.math.uoc.gr/~athanako/KANELLOS-B.pdf
(σελίδα 222)

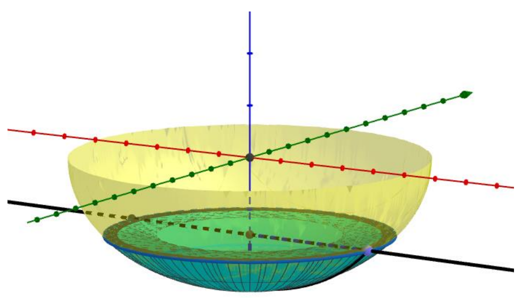
Έχω ότι ο όγκος του σφαιρικού τμήματος με μια βάση δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi h r^2} + \frac{1}{6}\boldsymbol{\pi h^3} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{\pi h}\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi h^2}\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}}$. Έχω $\boldsymbol{R}^2 = (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{r}^2 \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{2}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h})(-\mathbf{1})\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} + \mathbf{2}\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}} \Rightarrow \boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}} = (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h})\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}}$. Όταν $\boldsymbol{h} = \mathbf{2}$ έχω $\mathbf{5}^2 = (\mathbf{5}-\mathbf{2})^2 + \boldsymbol{r}^2 \Rightarrow \boldsymbol{r}^2 = \mathbf{16}$ Άρα $\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{\pi h}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h})\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi h^2}\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{r}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{h}^2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{h}^2) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{6}(\mathbf{16} + \mathbf{2}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{3} + \mathbf{2}^2) = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$, άρα Α.

Αλλιώς

Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον όγκο ενός στερεού εκ περιστροφής. Συγκεκριμένα ο όγκος του νερού με βάθος $\boldsymbol{h}$ δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\pi}\int_{-5}^{-5+h} \boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{z}^2\boldsymbol{dz} \Rightarrow$$

$\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{25} - (\boldsymbol{h}-\mathbf{5})^2)\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{25} - (2-5)^2)\frac{1}{3} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$ ή με την ίδια λογική



$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\pi}\int_{0}^{h} \boldsymbol{R}^2 - (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{z})^2\boldsymbol{dz} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{25} - (\mathbf{5}-\boldsymbol{h})^2)\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{25} - (\mathbf{2}-\mathbf{5})^2)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$$

34. Έστω $\boldsymbol{f}$ συνάρτηση με τύπο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x}$ εκτός του $\mathbf{0}$ και του 1. Έστω $\boldsymbol{f}^{\circ 2}$ η σύνθεση $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}$, και έστω $\boldsymbol{f}^{\circ n}$ η σύνθεση $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{\circ(n-1)}$ για όλους τους ακεραίους $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$. Τότε $\boldsymbol{f}^{\circ 100}(\boldsymbol{x}) =$

(A) $\mathbf{1} - \frac{1}{x}$ (B) $\mathbf{1} - \frac{1}{x^{100}}$ (C) $\boldsymbol{x}$ (D) $\frac{1}{1-x}$ (E) $\mathbf{1} + \frac{1}{x^{100}}$

Έχω $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{f}\left(\mathbf{1} - \frac{1}{x}\right) = \mathbf{1} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \mathbf{1} - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1}$,

$\boldsymbol{f}^{\circ 3} = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = -\frac{1}{f(x)-1} = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}-1} = \boldsymbol{x}$.

Άρα $\boldsymbol{f}^{\circ 100}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{\circ 97}\left(\boldsymbol{f}^{\circ 3}(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{f}^{\circ 97}(\mathbf{x}) = \cdots = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \frac{1}{x}$, άρα A

35. Θεωρούμε την ακολουθία $\{\boldsymbol{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $\boldsymbol{a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ για κάθε $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$. Ποιο είναι το $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$;

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\log 2$ (E) $2 \log 2$

Έχω $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, άρα B

36. Έστω $\boldsymbol{S}$ ένα φραγμένο υποσύνολο της γραμμής των πραγματικών αριθμών που είναι συνδεδεμένο και έχει παραπάνω από ένα σημείο. Έστω $\boldsymbol{f}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\boldsymbol{S}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

I. Το $\boldsymbol{S}$ είναι ένα κλειστό διάστημα.

II. Το σύνολο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ έχει μια μέγιστη τιμή.

III. Το σύνολο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

(A) Καμία (B) η III μόνο (C) οι I και II μόνο (D) οι II και III μόνο (E) οι I, II, και III

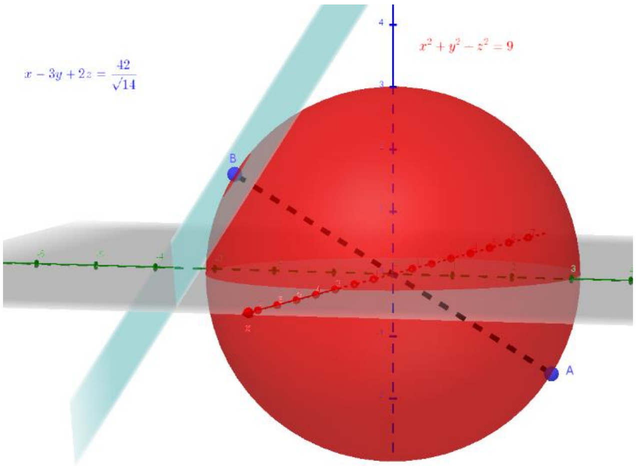
Ένα φραγμένο υποσύνολο της γραμμής των πραγματικών αριθμών μπορεί να είναι ανοιχτό, κλειστό ή ημιανοιχτό διάστημα. Για παράδειγμα, το σύνολο $\boldsymbol{S} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ είναι φραγμένο και συνδεδεμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι κλειστό, άρα η I ψευδής.

Έστω $\boldsymbol{S} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ και $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Τηρούνται όλες οι υποθέσεις αλλά η $\boldsymbol{f}$ δεν έχει μέγιστο στο $\boldsymbol{S}$. Άρα η II ψευδής.

Έστω $\boldsymbol{S} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ και $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x}$. Τηρούνται όλες οι υποθέσεις αλλά η $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$ δεν είναι άνω φραγμένη αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Άρα η III ψευδής. Άρα A

37. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο $\mathbb{R}^3$ με τύπο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z}$ με την προϋπόθεση ότι $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = \mathbf{9}$;

(A) $\frac{23}{\sqrt{14}}$ (B) $\frac{27}{\sqrt{14}}$ (C) $\frac{42}{\sqrt{14}}$ (D) $\frac{46}{\sqrt{14}}$ (E) $\frac{56}{\sqrt{14}}$



Θεωρούμε την συνάρτηση Lagrange $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, όπου $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 - \mathbf{9}$. Τα κρίσιμα σημεία προκύπτουν λύνοντας την

$$\nabla \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 9\lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{14}{36} = \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\frac{3}{\sqrt{14}} \\ y = \pm\frac{4}{\sqrt{14}} \\ z = \mp\frac{9}{\sqrt{14}} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{14}}{6} \end{cases}$$ με τιμές $f\left(\mp\frac{3}{\sqrt{14}}, \pm\frac{9}{\sqrt{14}}, \mp\frac{6}{\sqrt{14}}\right) = \mp\frac{3}{\sqrt{14}} \mp 3 \cdot \frac{9}{\sqrt{14}} \mp 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = \mp\frac{42}{\sqrt{14}}$, άρα C

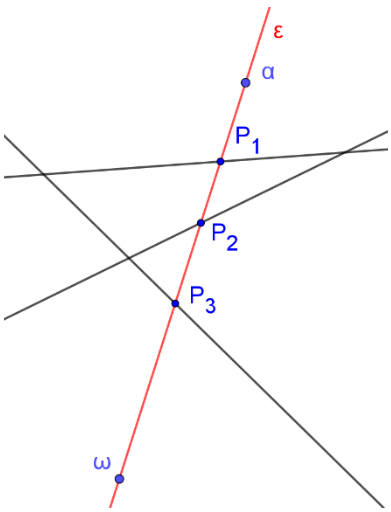
38. Έστω A και B γραμμικοί μετασχηματισμοί από το $\mathbb{R}^{12}$ στο $\mathbb{R}^{12}$ τέτοιοι ώστε ο μηδενικός χώρος του A να έχει διάσταση 3 και ο μηδενικός χώρος του B να έχει διάσταση 5. Αν d είναι η διάσταση του μηδενικού χώρου του γραμμικού μετασχηματισμού που προκύπτει από την σύνθεση $A \circ B$, ποιο από τα παρακάτω δίνει όλες τις πιθανές τιμές του ακεραίου d;
(A) $2 \le d \le 8$ (B) $3 \le d \le 5$ (C) $3 \le d \le 8$ (D) $5 \le d \le 8$ (E) $5 \le d \le 10$

Έχω$\forall x \in ker(A \circ B) \Leftrightarrow (A \circ B)(x) = 0 \Leftrightarrow A\big(B(x)\big) = 0 \Leftrightarrow B(x) \in ker(A) \Leftrightarrow x \in B^{-1}\big(ker(A)\big)$. Άρα $ker\, A \circ B = B^{-1}(ker\, A)$. Θεωρώ τον περιορισμό $B|_{B^{-1}(kerA)}: B^{-1}(kerA) \to ker\, A$.
Από το θεώρημα διαστάσεων έχω, $d = \dim\big(ker(A \circ B)\big) = \dim\big(B^{-1}(kerA)\big) =$
$dim\big(ker\, B|_{B^{-1}(kerA)}\big) + \dim B\big(B^{-1}(kerA)\big) \le \dim(ker\, B) + \dim(ker\, A) = 3 + 5 = 8$
Έστω $\forall x \in Ker(B) \Rightarrow B(x) = 0 \Rightarrow A\big(B(x)\big) = 0 \Rightarrow x \in ker(A \circ B) \Rightarrow$
$ker(B) \subseteq ker(A \circ B) \Rightarrow \dim\big(ker(A \circ B)\big) \ge \dim\big(ker(B)\big) \Rightarrow d \ge 5$. Άρα D.

39. $\begin{pmatrix} 1+x & x & 1 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$. Στον πίνακα αυτό, $x \in \mathbb{C}$. Για πόσες διακριτές τιμές του x είναι ο πίνακας αυτός μη αντιστρέψιμος;
(A) Καμία (B) Μία (C) Δύο (D) Τρεις (E) Τέσσερις
Έχω $\begin{vmatrix} 1+x & x & 1 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1+x)\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1+x)(1+x^2)(1-x)$ με ρίζες τις $x = \pm 1$, άρα C

40. Θεωρούμε 10 γραμμές στο επίπεδο τέτοιες, ώστε ανά δύο να μην είναι παράλληλες και ανά τρεις να μην έχουν κοινό σημείο. Σε πόσες περιοχές χωρίζουν το επίπεδο οι 10 αυτές γραμμές;
(A) 36 (B) 45 (C) 46 (D) 55 (E) 56

Έστω $R(n)$ ο αριθμός των περιοχών. Για $n = 1$, προφανώς, έχουμε $R(1) = 2$. Για $n = 2$, έχουμε $R(2) = 4$. Τι συμβαίνει εάν $n \ge 3$; Ας υποθέσουμε ότι έχετε ήδη $n - 1$ γραμμές που διαιρούν το επίπεδο σε $R(n-1)$ περιοχές.
Σχεδιάζουμε την n-οστή γραμμή. Συμβολίζεται με ε στο διάγραμμα. Τότε η ε τέμνει τις υπόλοιπες γραμμές σε $n - 1$ σημεία. Σημειώνουμε αυτά τα σημεία τομής. Προφανώς, χωρίζουν τη γραμμή ε σε n τμήματα/ημιευθείες, τα $P_1\alpha, P_1P_2, P_2P_3, P_3\omega$ στο διάγραμμα.
Κάθε ένα από αυτά τα τμήματα κόβει μια κυρτή περιοχή σε δύο μικρότερες, άρα παίρνουμε επιπλέον n περιοχές. Έτσι έχουμε $R(n) = n + R(n-1)$ για $n \ge 3$ και $R(2) = 4$.
Άρα $R(10) = R(9) + 10 = R(8) + 9 + 10 = R(7) + 8 + 9 + 10 = \cdots = R(2) + 3 + 4 + \cdots + 10 = 4 + 52 = 56$, άρα E



Γενίκευση

$R(n)-R(n-1)=n$
$R(n-1)-R(n-2)=n-1$
$R(n-2)-R(n-3)=n-2$
Με πρόσθεση κατά μέλη έχω $R(n)-R(1)=2+3+4+\cdots\ldots+$
$R(4)-R(3)=4$
$R(3)-R(2)=3$
$R(2)-R(1)=2$

$(n-1)+n \Leftrightarrow R(n)-2=\frac{n(n+1)}{2}-1 \Leftrightarrow R(n)=\frac{n^2+n}{2}+1 \Leftrightarrow \boxed{R(n)=\frac{n^2+n+2}{2}}$

41. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς για κάθε 3×3 πίνακα M πραγματικών αριθμών;

(A) Ο M έχει 3 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

(B) Ο M έχει το πολύ μία μιγαδική ιδιοτιμή.

(C) Ο M έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή.

(D) Αν ο M είναι αντιστρέψιμος, τότε ο M έχει 3 διακριτές ιδιοτιμές.

(E) Αν ο M έχει 2 ορθογώνια ιδιοδιανύσματα, τότε ο M έχει τουλάχιστον 2 διακριτές ιδιοτιμές.

Θεωρώ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα M, $\phi(\lambda)=det(M-\lambda I)=(-1)^3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$. Αφού το πραγματικό αυτό πολυώνυμο είναι 3[ου] βαθμού θα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, άρα ο M έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή, άρα C. Αν το φ έχει τριπλή ρίζα, τότε τα ιδιοδιανύσματα θα είναι εξαρτημένα, άρα ο M θα έχει ένα γραμμικό ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα, άρα (A) ψευδές. Αν το φ έχει μιγαδική ρίζα, τότε θα έχει και το συζυγές του ως ρίζα, άρα ο M θα έχει και δεύτερη μιγαδική ιδιοτιμή, άρα (B) ψευδές. Ο ταυτοτικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος και έχει μια ιδιοτιμή, το φ έχει τριπλή ρίζα το 1, άρα όχι (D). Ο ταυτοτικός πίνακας έχει ορθογώνια ιδιοδιανύσματα και μια ιδιοτιμή το 1, άρα όχι (E).

42. Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου στο $\mathbb{R}^3$ με κορυφές $A(1,3,2)$, $B(3,1,2)$, και $C(-2,0,4)$;

(A) $2\sqrt{11}$ (B) $\frac{5\sqrt{11}}{2}$ (C) $3\sqrt{11}$ (D) $\frac{7\sqrt{11}}{2}$ (E) $4\sqrt{11}$

Έχω $E=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3-1 & 1-3 & 2-2 \\ -2-1 & 0-3 & 4-2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\|-4i-4j-12k\|=$
$2\|i+j+3k\|=2\sqrt{1^2+1^2+3^2}=2\sqrt{11}$, άρα A

43. Η σχέση R ορίζεται στο $\mathbb{R}$ ως ακολούθως. Για $x, y\in\mathbb{R}$, xRy αν $(x-y)(xy+2)=0$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

I. xRx για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

II. Αν $x, y\in\mathbb{R}$ και xRy, τότε yRx.

III. Αν $x, y, z\in\mathbb{R}$ και xRy και yRz, τότε xRz.

(A) I μόνο (B) I και II μόνο (C) I και III μόνο (D) II και III μόνο (E) I, II, και III

I. Έχω $xRx \Leftrightarrow (x-x)(xx+2)=0$, ισχύει.
II. Έχω $xRy \Leftrightarrow (x-y)(xy+2)=0 \Leftrightarrow (y-x)(yx+2)=0 \Leftrightarrow yRx$, ισχύει.
III. Έχω $xRy \Leftrightarrow (x-y)(xy+2)=0 \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow (x-y)(xy+2)=0 \Leftrightarrow x=y \vee x=-\frac{2}{y}=0$(*).
Ακόμα $yRz \Leftrightarrow (z-y)(zy+2)=0 \Leftrightarrow \left(z=y \vee z=-\frac{2}{y}\right) \overset{(*)}{\Rightarrow} (z=x) \Rightarrow xRz$, ισχύει, άρα E.

44. Δυο τηλεφωνικοί πύργοι, A και B, βρίσκονται σε μια επίπεδη περιοχή 10 μίλια απόσταση ο ένας από τον άλλον. Αν ένας νέος πύργος S πρόκειται να τοποθετηθεί στην περιοχή έτσι ώστε η απόσταση ανάμεσα στον $\boldsymbol{S}$ και στον $\boldsymbol{A}$ να είναι 2 μίλια μεγαλύτερη από την απόσταση ανάμεσα στον $\boldsymbol{S}$ και τον $\boldsymbol{B}$, τότε ο γεωμετρικός τόπος του $\boldsymbol{S}$ περιγράφεται καλύτερα από

(A) έναν κλάδο μιας υπερβολής

(B) έναν κύκλο

(C) μια έλλειψη (μη κυκλική)

(D) μια ευθεία γραμμή

(E) μια παραβολή

Έχω $\boldsymbol{SA = SB + 2 \Leftrightarrow SA - SB = 2}$ άρα υπερβολή με εστίες τα σημεία $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Άρα A

45. Έστω $\boldsymbol{u(x,y)}$ και $\boldsymbol{v(x,y)}$ πραγματικές παραγωγίσιμες συναρτήσεις που εμμέσως ορίζονται από τις εξισώσεις $\boldsymbol{x = f(u,v)}$ και $\boldsymbol{y = g(u,v)}$, όπου $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ είναι πραγματικές παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ποια από τις ακόλουθες είναι μια έκφραση του $\frac{\partial u}{\partial x}$;

(A) $\frac{\partial f}{\partial u}$

(B) $\frac{\partial g}{\partial v}$

(C) $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial u}}$ αν $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$

(D) $\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f \partial g}{\partial v \partial u}}$ αν $\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} \neq 0$

(E) $\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f \partial g}{\partial v \partial u}}$ αν $\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} \neq 0$

Έχω $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$. Έχω σύστημα 2x2 με αγνώστους τα $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial x}$. Άρα $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f \partial g}{\partial v \partial u}}$, αν $\frac{\partial f \partial g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} \neq 0$, άρα E

46. Ποια από τις παρακάτω αποτελεί μια γενική πραγματική λύση $\boldsymbol{y(t)}$ της διαφορικής εξίσωσης $\boldsymbol{y'' + 2y' + 3y = t}$, όπου $\boldsymbol{C_1}$ και $\boldsymbol{C_2}$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές;

(A) $C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + t$

(B) $C_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + t$

(C) $C_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}$

(D) $C_1 e^{-t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 e^{-t} \sin\left(\sqrt{2}t\right) + t$

(E) $C_1 e^{-t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 e^{-t} \sin\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}$

Για την ομογενή εξίσωση $\boldsymbol{y'' + 2y' + 3y = 0}$, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\boldsymbol{r^2 + 2r + 3 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \sqrt{2}i}$. Άρα η λύση της ομογενούς είναι η $\boldsymbol{y = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right)}$

Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης θα είναι της μορφής $\boldsymbol{y_p = At + B}$. Πρέπει να προσδιορίσουμε τους άγνωστους συντελεστές A και B. Αντικαθιστώντας το πολυώνυμο $\boldsymbol{y_p}$ και τις παραγώγους του στη δεδομένη μη ομογενή εξίσωση, έχουμε $\boldsymbol{0 + 2A + 3(At + B) = t \Leftrightarrow 3At + 2a + 3B = t}$, άρα $\boldsymbol{A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{9}}$, άρα $\boldsymbol{y_p = \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}}$.

Τελικά έχω $\boldsymbol{y = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{2}t + c_2 e^{-t}\sin\sqrt{2}t + \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}}$, άρα E

47. Ποια είναι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $\int_C (5x + y^3)\,dx + (3xy^2 + 8y)\,dy$, όπου $\boldsymbol{C}$ είναι ένα απευθείας μονοπάτι στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$ από το σημείο $\boldsymbol{A(2,0)}$ στο σημείο $\boldsymbol{B(0,3)}$;

(A) $\boldsymbol{0}$ (B) 10 (C) 26 (D) 41 (E) 46

Το ευθύγραμμο μονοπάτι $\boldsymbol{AB}$ παραμετροποιείται ως εξής $\boldsymbol{x(t) = 2 + (0-2)t = 2 - 2t, 0 \le t \le 1}$, $\boldsymbol{y(t) = 0 + (3-0)t = 3t, 0 \le t \le 1}$. Έχω $\boldsymbol{x'(t) = -2}$, $\boldsymbol{y'(t) = 3}$. Άρα

$$\int_C (5x + y^3)\,dx + (3xy^2 + 8y)\,dy = \int_0^1 (5(2-2t) + (3t)^3)x'(t) + \Big(3(2-2t)(3t)^2 + 8(3t)\Big)y'(t)dt$$
$$= \int_0^1 (10 - 10t + 27t^3)(-2) + (54t^2 - 54t^3 + 24t)\cdot 3\,dt$$
$$= \int_0^1 -20 + 20t - 54t^3 + 162t^2 - 162t^3 + 72t\,dt$$
$$= \int_0^1 -20 + 92t - 216t^3 + 162t^2\,dt = [-20t + 46t^2 - 54t^4 + 54t^3]_0^1$$
$$= -20 + 46 - 54 + 54 = 26$$

Άρα C

48. Έστω $\boldsymbol{f}$ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη για κάθε $\boldsymbol{(x,y)} \in \mathbb{R}^2$, και ας θεωρήσουμε το γράφημα της $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ στον $\boldsymbol{xyz}$ χώρο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

I. Αν όλες οι ισοϋψείς καμπύλες της $\boldsymbol{f}$ είναι παράλληλες ευθείες, τότε το γράφημα είναι ένα επίπεδο.

II. Αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν για κάθε $\boldsymbol{(x,y)} \in \mathbb{R}^2$ και είναι σταθερές και οι δύο, τότε το γράφημα είναι ένα επίπεδο.

III. Αν οι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ υπάρχουν για κάθε $\boldsymbol{(x,y)} \in \mathbb{R}^2$ και είναι και οι δυο μηδενικές, τότε το γράφημα είναι επίπεδο.

(A) I μόνο (B) II μόνο (C) III μόνο (D) I και II μόνο (E) I, II, και III

Έστω $\boldsymbol{z = f(x,y)} = \begin{cases} 1, y > 0, x \in \mathbb{R} \\ 2, y < 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$ Τηρεί τις προϋποθέσεις του I αλλά το γράφημα είναι δύο επίπεδα. Άρα όχι I. Για το II έχω $\frac{\partial f}{\partial x} = c_1$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = c_2 \Rightarrow f(x,y) = c_2 y + u(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 + u'(x) \Rightarrow c_1 = u'(x) \Rightarrow u(x) = c_1 x + c_3$, άρα $\boldsymbol{z = f(x,y) = c_2 y + c_1 x + c_3}$ με επίπεδο γράφημα, άρα II αληθές. Για το III έστω $\boldsymbol{z = f(x,y) = g(x) + h(y)}$. Προφανώς $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ και το γράφημα δεν είναι αναγκαστικά επίπεδο, άρα ψευδές. Άρα B

49. Στο μιγαδικό επίπεδο, έστω $\boldsymbol{C}$ ο κύκλος $\{\boldsymbol{z = 1 + e^{i\theta}: 0 \le \theta \le 2\pi}\}$, με προσανατολισμό αντίθετο στην φορά του ρολογιού. Ποια είναι η τιμή του $\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{\sin z}{z-1}\right)^2 dz$;

(A) $\boldsymbol{0}$ (B) cos1 (C) sin1 (D) $\boldsymbol{\sin^2 1}$ (E) $\boldsymbol{\sin 2}$

(Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους). Έστω $\boldsymbol{f}$ μια συνάρτηση αναλυτική σε κάποιο ανοιχτό σύνολο $\boldsymbol{U}$. Τότε για κάθε $\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \dots, n}$ η $\boldsymbol{n}$-οστής τάξης παράγωγος της $\boldsymbol{f}$ υπάρχει, και για κάθε $\boldsymbol{z \in U}$ έχουμε $\boldsymbol{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw}$, όπου $\boldsymbol{C(z_0,r)}$ είναι οποιοσδήποτε κύκλος στο $\boldsymbol{U}$ τέτοιος ώστε:

•Το z ανήκει στο εσωτερικό του $C(z_0, r)$.

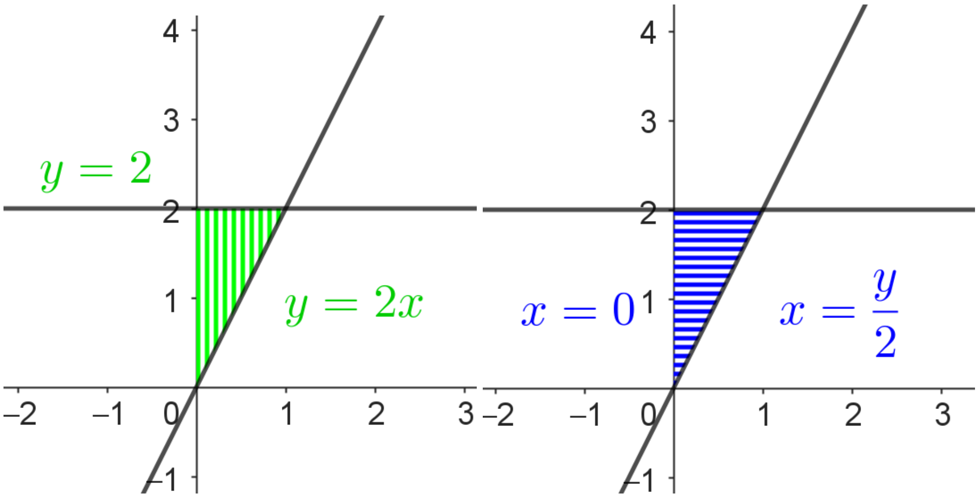
•Το εσωτερικό του $C(z_0, r)$ περιέχεται στο U

Έχω ότι ο C είναι ο κύκλος με κέντρο τον $z_0 = 1$ και ακτίνα $r = 1$, στον οποίο η συνάρτηση $f(z) = sin^2 z$ είναι αναλυτική. Έχω προφανώς ότι ο $z = 1 \in C(z_0, r)$. Άρα από τον παραπάνω ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχω για $n = 1, z = 1, f(z) = \sin^2 z$ ότι $f^{(1)}(1) = \frac{1!}{2\pi i}\int_{C(1,1)} \frac{\sin^2 w}{(w-1)^2} dw \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(1,1)} \left(\frac{\sin w}{w-1}\right)^2 dw \xRightarrow{f'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z} \sin 2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(1,1)} \left(\frac{\sin w}{w-1}\right)^2$. Άρα E.

50. $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx =$

(A) $\frac{1}{8}(e-1)$ (B) $e-1$ (C) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ (D) $2\,(e^2-1)$ (E) $\frac{1}{4}(e^4-1)$

Η περιοχή ολοκλήρωσης φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

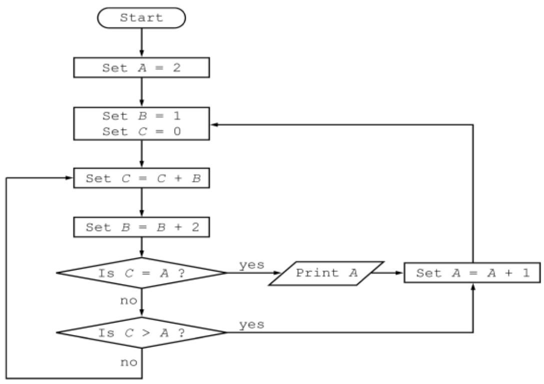


Με την αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης έχω

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2} dxdy = \int_0^2 e^{y^2} \int_0^{\frac{y}{2}} 1\, dxdy = \int_0^2 e^{y^2} \cdot \frac{y}{2} dy = \int_0^2 e^{y^2} \cdot \left(\frac{y^2}{4}\right)' dy =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 e^{y^2} \cdot (y^2)' dy = \frac{1}{4}\left[e^{y^2}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2^2} - e^0\right) = \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$

Άρα E



51. Το παραπάνω διάγραμμα ροής τυπώνει μια ακολουθία ακεραίων. Ποιος από τους παρακάτω είναι όρος της ακολουθίας;

(A) 32 (B) 59 (C) 81 (D) 360 (E) 1, 000

Ας δούμε τον πίνακα μεταβλητών στα πρώτα βήματα του αλγόριθμου.

A	2		3			4			5				6					7
B	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5	7	1	3	5	7	9
C	0	1	4	0	1	4	0	1	4	0	1	4	9	0	1	4	9	16

Παρατηρούμε ότι το πρόγραμμα εκτυπώνει τα αθροίσματα των πρώτων A περιττών αριθμών. Έχω $\boldsymbol{S_A} = \sum_{k=0}^{A}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{A} k + \sum_{k=0}^{A} 1 = 2\frac{A\cdot(A+1)}{2} + A + 1 = A^2 + A + A + 1 = (A+1)^2$. Άρα το πρόγραμμα τυπώνει όλους τους τετράγωνους φυσικούς αριθμούς. Μόνο ο 81 είναι τετράγωνος, άρα C.

52. Έστω $\boldsymbol{G}$ η ομάδα των μεταθέσεων 4 αντικειμένων. Ποιο είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγίας των στοιχείων του $\boldsymbol{G}$;

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Δύο στοιχεία $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ της $\boldsymbol{G}$ ονομάζονται συζευγμένα αν υπάρχει ένα στοιχείο $\boldsymbol{g}$ στην $\boldsymbol{G}$ με $\boldsymbol{gag^{-1} = b}$. Αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται κλάσεις συζυγίας. Με άλλα λόγια, κάθε κλάση συζυγίας είναι κλειστή μέσω της $\boldsymbol{b = gag^{-1}}$ για όλα τα στοιχεία $\boldsymbol{g}$ στην ομάδα.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της ομάδας ανήκει σε ακριβώς σε μία κλάση ισοδυναμίας, και οι κλάσεις των $\boldsymbol{Cl(a)}$ και $\boldsymbol{Cl(b)}$ είναι ίσες αν και μόνο αν $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι συζυγή, και ξένα σύνολα διαφορετικά. Η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το στοιχείο $\boldsymbol{a}$ της $\boldsymbol{G}$ είναι $\boldsymbol{Cl(a)} = \{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G} \mid \exists\, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{\mu\varepsilon}\ \boldsymbol{b = gag^{-1}}\}$ και ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του $\boldsymbol{a}$. Ο αριθμός της κλάσης του $\boldsymbol{G}$ είναι ο αριθμός των διακριτών (nonequivalent) κλάσεων ισοδυναμίας. Όλα τα στοιχεία που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας έχουν την ίδια τάξη.

Η συμμετρική ομάδα $\boldsymbol{S_4}$, που αποτελείται από τις 24 μεταθέσεις των τεσσάρων στοιχείων, έχει πέντε κλάσεις συζυγίας , που αναφέρονται στις κυκλικές δομές και τάξεις:

i. καμία αλλαγή (1 στοιχείο: { (1, 2, 3, 4) }), τύπος κύκλου $\mathbf{1+1+1+1}$
ii. εναλλαγή δύο (6 στοιχεία: { (1, 2, 4, 3), (1, 4, 3, 2), (1, 3, 2, 4), (4, 2, 3, 1), (3, 2, 1, 4), (2, 1, 3, 4) }), τύπος κύκλου $\mathbf{1+1+2}$
iii. μια κυκλική μετάθεση των τριών (8 στοιχεία: { (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (3, 2, 4, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (2, 3, 1, 4) }), τύπος κύκλου $\mathbf{3+1}$
iv. μια κυκλική μετάθεση των τεσσάρων (6 στοιχεία: { (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2) }), τύπος κύκλου $\mathbf{4}$
v. εναλλαγή δύο, και επίσης τα άλλα δύο (3 στοιχεία: { (2, 1, 4, 3), (4, 3, 2, 1), (3, 4, 1, 2) }) , τύπος κύκλου $\mathbf{2+2}$

άρα E.

Σε γενικές γραμμές, ο αριθμός των κλάσεων συζυγίας στην συμμετρική ομάδα $\boldsymbol{S_n}$ είναι ίσος με τον αριθμό των ακέραιων διαμερίσεων του $\boldsymbol{n}$.

Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugacy_class

53. Έστω $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, και $\boldsymbol{v_4}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Ας θεωρήσουμε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα.

$$\boldsymbol{v_1\cdot v_2} \quad \boldsymbol{v_1\cdot v_3} \quad \boldsymbol{v_1\cdot v_4} \quad \boldsymbol{\vec{v}_2\cdot v_3} \quad \boldsymbol{v_2\cdot v_4} \quad \boldsymbol{v_3\cdot v_4}$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με τα 6 εσωτερικά γινόμενα θα μπορούσε να είναι αληθής;

I. Και τα έξι είναι αρνητικά.

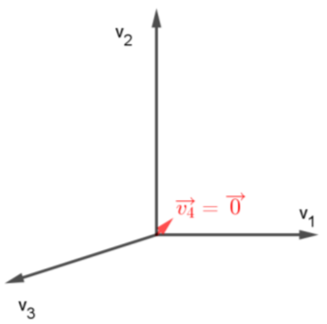
II. Δύο είναι αρνητικά, και τέσσερα μηδενικά.

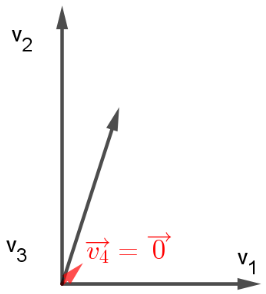
III. Δύο είναι θετικά, και τέσσερα μηδενικά.

(A) II μόνο (B) I και II μόνο (C) I και III μόνο (D) II και III μόνο (E) I, II, και III

Ας υποθέσουμε ότι το I είναι δυνατό. Δεδομένου ότι ασχολούμαστε μόνο με γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων (οι γωνίες κατά ζεύγη πρέπει να είναι μεταξύ $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$), μπορούμε να περιστρέψουμε οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα διανυσμάτων έτσι ώστε το $\vec{v_1}$ να είναι κατά μήκος του x άξονα. Τότε το $\vec{v_2}$ πρέπει να βρίσκεται στο 2ο ή 3ο τεταρτημόριο. Αν το $\vec{v_2}$ είναι στο τρίτο, το $\vec{v_3}$ δεν μπορεί να είναι στο 4ο και μπορεί να είναι μόνο στο δεύτερο. Αν το $\vec{v_2}$ είναι στο δεύτερο, το $\vec{v_3}$ δεν μπορεί να είναι στο 4ο, έτσι πρέπει να είναι στο 3ο. Συνοπτικά, δεν υπάρχει χώρος για τοποθέτηση του $\vec{v_4}$ έτσι ώστε να είναι κάτι περισσότερο από $\frac{\pi}{2}$ μακριά από τα άλλα τοποθετημένα διανύσματα. Άρα I ψευδές.

Τα άλλα δύο είναι εφικτά, αρκεί να θεωρήσω ότι για παράδειγμα $\vec{v_4}=\vec{0}$ και $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$. Έχω τότε $\vec{v_4}\perp\vec{v_1}, \vec{v_4}\perp\vec{v_2}, \vec{v_4}\perp\vec{v_3}$, άρα $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=\vec{v_4}\cdot\vec{v_1}=\vec{v_4}\cdot\vec{v_2}=\vec{v_4}\cdot\vec{v_3}=\mathbf{0}$. Αν το $\vec{v_3}$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τα δυο άλλα μη μηδενικά διανύσματα (βλέπε σχήμα) έχω $\vec{v_3}\cdot\vec{v_1}<\mathbf{0}, \vec{v_3}\cdot\vec{v_2}<\mathbf{0}$ και το II είναι αληθές. Όμοια και το III είναι αληθές βλέπε δεύτερο σχήμα





άρα D.

54. Έστω $\boldsymbol{y(t)}$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\boldsymbol{y'+2ty=e^{-t^2}\sin t}$ με $\boldsymbol{y(0)=0}$. Τότε $\boldsymbol{y(\pi)}=$
(A) $\boldsymbol{2e^{\pi^2}}$ (B) $\boldsymbol{e^{\pi^2}}$ (C) $\mathbf{0}$ (D) $\boldsymbol{e^{-\pi^2}}$ (E) $\boldsymbol{2e^{-\pi^2}}$

Έχω $y'+2ty=e^{-t^2}\sin t \Leftrightarrow e^{t^2}y'+2te^{t^2}y=\sin t \Leftrightarrow e^{t^2}y'+\left(e^{t^2}\right)'y=\sin t \Leftrightarrow$
$\left(e^{t^2}y\right)'=(-\cos t)' \Leftrightarrow e^{t^2}y=-\cos t+C \xRightarrow{t=0,y(0)=0} 1\cdot 0=-1+C \Rightarrow C=1,$
άρα $e^{t^2}y=-\cos t+1 \xRightarrow{t=\pi} e^{\pi^2}y(\pi)=-\cos\pi+1 \Rightarrow e^{\pi^2}y(\pi)=2 \Rightarrow y(\pi)=2e^{-\pi^2}$, άρα E

55. Έστω $\boldsymbol{X}$ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η τυπική απόκλιση της δειγματοληπτικής κατανομής του μέσου όρου του δείγματος για τυχαία δείγματα 30 παρατηρήσεων του $\boldsymbol{X}$ είναι ίση με 8. Ποια είναι η τυπική απόκλιση της δειγματοληπτικής κατανομής του μέσου όρου του δείγματος για τυχαία δείγματα 120 παρατηρήσεων του $\boldsymbol{X}$;
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 32

Έστω ότι η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι $\boldsymbol{\sigma}$.
Τότε για το πρώτο δείγμα έχω $\sigma_{\overline{x_1}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 8=\frac{\sigma}{\sqrt{30}}$. Για το δεύτερο δείγμα έχω $\sigma_{\overline{x_2}}=\frac{\sigma}{\sqrt{120}}$. Με διαίρεση κατά μέλη έχω $\frac{\sigma_{\overline{x_2}}}{8}=\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{120}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{30}}}=\frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \sigma_{\overline{x_2}}=\frac{8}{2}=\mathbf{4}$, άρα B

56. Έστω $\boldsymbol{R}$ ένας δακτύλιος με ουδέτερο στοιχείο τέτοιος, ώστε $\boldsymbol{a^2=a}$ για κάθε $\boldsymbol{a\in R}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;
I. $\boldsymbol{a+a=0}$ για κάθε $\boldsymbol{a\in R}$.

II. Αν $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$, τότε $\boldsymbol{b^n = 0}$ για κάποιον θετικό ακέραιο $\boldsymbol{n}$.

III. $\boldsymbol{ab = ba}$ για κάθε $\boldsymbol{a, b} \in \boldsymbol{R}$.

(A) Καμιά (B) I μόνο (C) II μόνο (D) I και II (E) I και III

Έχω $(\boldsymbol{a+a}) = (\boldsymbol{a+a})^2 = \boldsymbol{a^2 + 2a^2 + a^2 = a + a + a + a \Rightarrow a + a = 0}, \forall\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Άρα I αληθές
Έστω $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}_2$ με $\boldsymbol{0 + 0 \equiv 0\ (mod2)}$ και $\boldsymbol{1 + 1 \equiv 0\ (mod2)}$. Αλλά $\boldsymbol{1^n \neq 0}\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, άρα II ψευδές.
Έχω $(\boldsymbol{a+b})^2 = (\boldsymbol{a+b}) \Rightarrow \boldsymbol{a^2 + ab + ba + b^2 = a + b}$. Αλλά $\boldsymbol{a^2 = a}$ και$\boldsymbol{b^2 = b}$. Άρα $\boldsymbol{ab + ba = 0}$.
Από το I έχω $\boldsymbol{ab - ba = 0 \Leftrightarrow ab = ba}$, άρα III αληθές.
Άρα E

57. Για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{n \geq 1}$, ορίζουμε την συνάρτηση $\boldsymbol{I_n}$ με $\boldsymbol{I_n(x)} = \int_1^x (\,\boldsymbol{\log t})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{dt}$ για κάθε $\boldsymbol{x > 1}$. Ποια από τις παρακάτω αληθεύει για κάθε $\boldsymbol{n \geq 3}$ και για κάθε $\boldsymbol{x > 1}$;

(A) $\boldsymbol{I_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n-2}(x)}$

(B) $\boldsymbol{I_n(x) = x(\log x)^n - nI_{n-1}(x)}$

(C) $\boldsymbol{I_n(x) = x(\log x)^n + nI_{n-1}(x)}$

(D) $\boldsymbol{I_n(x) = \frac{1}{x}(\log x)^n - nI_{n-1}(x)}$

(E) $\boldsymbol{I_n(x) = \frac{1}{x}(\log x)^n + nI_{n-1}(x)}$

Έχω $\boldsymbol{I_n(x)} = \int_1^x (\,\boldsymbol{\log t})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{I_n(x)} = \int_1^x \boldsymbol{t'(\log\ t)^n\, dt} = [\boldsymbol{t(\log t)^n}]_1^x - \int_1^x \boldsymbol{t \cdot ((\log\ t)^n)'\, dt} =$
$\boldsymbol{x(\log x)^n} - \int_1^x \boldsymbol{t \cdot n \cdot \frac{1}{t}(\log t)^{n-1}\, dt = x(\log x)^n} - \int_1^x \boldsymbol{n(\log t)^{n-1}\, dt = x(\log x)^n - nI_{n-1}(x)}$, άρα B

58. Συνολικά 25 πανομοιότυπα ενοικιαζόμενα φορτηγά πρόκειται να κατανεμηθούν σε 5 διαφορετικές πόλεις. Κάθε πόλη μπορεί να λάβει οποιονδήποτε αριθμό φορτηγών από 0 έως 25, εφόσον ο συνολικός αριθμός των φορτηγών που παραλήφθηκαν είναι 25. Για ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα του συνόλου όλων των πιθανών κατανομών ο αριθμός των κατανομών είναι ίσος με $\boldsymbol{\binom{29}{4} - \binom{24}{4}}$;

(A) Οι κατανομές όπου τουλάχιστον μία πόλη παραλαμβάνει **0** φορτηγά

(B) Οι κατανομές όπου κάθε μία πόλη παραλαμβάνει τουλάχιστον **1** φορτηγό

(C) Οι κατανομές όπου κάθε μία πόλη παραλαμβάνει τουλάχιστον **4** φορτηγά

(D) Οι κατανομές όπου **4** ή **5** πόλεις παραλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό φορτηγών

(E) Οι κατανομές όπου **4** πόλεις παραλαμβάνουν τουλάχιστον 1 φορτηγό και η άλλη κανένα

Μέθοδος stars and bars.
Έστω **25** αστεράκια-φορτηγά. ***************. Ένας τρόπος επιμερισμού τους σε πέντε υποσύνολα-πόλεις (ακόμα και κενά) είναι βάζοντας **4** διαχωριστικές μπάρες ανάμεσά τους π.χ ***|**|****|****|**. Τα **25** αστεράκια και οι **4** μπάρες καταλαμβάνουν **29** θέσεις. Άρα έχω να επιλέξω **4** από τις **29** θέσεις για τις μπάρες. Συνεπώς όλες οι πιθανές κατανομές είναι $\boldsymbol{\binom{29}{4}}$.
Η επιλογή (A) είναι συμπληρωματική της (B). Για τον υπολογισμό των κατανομών της (B) έχω ότι αφού κάθε πόλη από τις **5** έχει τουλάχιστον **1** φορτηγό, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να κατανείμουμε τα $\boldsymbol{25 - 5 = 20}$ φορτηγά στις **5** πόλεις. Άρα τώρα έχω $\boldsymbol{20 + 4}$ θέσεις με **4**

διαχωριστικές μπάρες ανάμεσά τους. Συνεπώς οι κατανομές της (B) είναι $\binom{\mathbf{20+4}}{\mathbf{4}} = \binom{\mathbf{24}}{\mathbf{4}}$. Άρα οι κατανομές της (A) είναι $\binom{\mathbf{29}}{\mathbf{4}} - \binom{\mathbf{24}}{\mathbf{4}}$.
Για την επιλογή (C) έχω κατανείμει ήδη από 4 φορτηγά σε κάθε μία από τις 5 πόλεις, άρα μας μένει να κατανείμουμε τα $\mathbf{25-4\cdot 5=5}$ φορτηγά στις $\mathbf{5}$ πόλεις. Άρα τώρα έχω $\mathbf{5+4}$ θέσεις με $\mathbf{4}$ διαχωριστικές μπάρες ανάμεσά τους. Συνεπώς οι κατανομές της (C) είναι $\binom{\mathbf{5+4}}{\mathbf{4}} = \binom{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$.

Για την επιλογή (D) οι κατανομές είναι

α) 5 φορτηγά σε κάθε πόλη $(\mathbf{5\times 5})$ άρα $\mathbf{1}$ κατανομή

β) 25 φορτηγά σε μία από τις 5 πόλεις και κανένα στις άλλες $(\mathbf{4\times 0+25})$, άρα $\mathbf{5}$ κατανομές

γ) 21 φορτηγά σε μία από τις 5 πόλεις και από ένα στις άλλες $(\mathbf{4\times 1+21})$, άρα $\mathbf{5}$ κατανομές

δ) 17 φορτηγά σε μία από τις 5 πόλεις και από δύο στις άλλες $(\mathbf{4\times 2+17})$, άρα $\mathbf{5}$ κατανομές

ε) 13 φορτηγά σε μία από τις 5 πόλεις και από τρεις στις άλλες $(\mathbf{4\times 3+13})$, άρα $\mathbf{5}$ κατανομές

στ) 9 φορτηγά σε μία από τις 5 πόλεις και από 4 στις άλλες $(\mathbf{4\times 4+9})$, άρα $\mathbf{5}$ κατανομές

Συνολικά για την επιλογή (D) έχω $\mathbf{1+5\cdot 5=26}$ κατανομές.

Για την επιλογή (E) αρχικά επιλέγω την μια από τις 5 πόλεις που δεν θα πάρει φορτηγό. Στην επόμενη φάση έχω να κατανείμω τα 25 φορτηγά στις 4 υπόλοιπες πόλεις. Αφού κάθε πόλη από τις 4 θα έχει τουλάχιστον 1 φορτηγό, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να κατανείμουμε τα $\mathbf{25-4=21}$ φορτηγά στις $\mathbf{4}$ πόλεις. Άρα τώρα έχω $\mathbf{21+4}$ θέσεις με $\mathbf{3}$ διαχωριστικές μπάρες ανάμεσά τους. Συνεπώς οι κατανομές της (E) είναι $\binom{\mathbf{21+3}}{\mathbf{4}}\cdot\mathbf{5} = \binom{\mathbf{24}}{\mathbf{4}}\cdot\mathbf{5}$.

Άρα A.

59. Έστω $\boldsymbol{Z_{30}}$ ο δακτύλιος των ακεραίων modulo 30, και έστω $\boldsymbol{U_{30}}$ η ομάδα όλων των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\boldsymbol{Z_{30}}$ υπό την πράξη του πολλαπλασιασμού. Έστω $\boldsymbol{\varphi}$ είναι ένας ομοιομορφισμός ομάδας από το $\boldsymbol{U_{30}}$ στο $\boldsymbol{U_{30}}$ με $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\varphi}) = \{\mathbf{1,11}\}$. Αν $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7}) = \mathbf{7}$, ποιο από τα παρακάτω στοιχεία αντιστοιχεί η $\boldsymbol{\varphi}$ επίσης στο 7;
(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 29

Αφού $\mathbf{ker}(\boldsymbol{\varphi}) = \{\mathbf{1,11}\}$ έχω $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{11}) = \mathbf{1}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7}) = \mathbf{7}$. Αφού έχω πολλαπλασιαστικό ομοιομορφισμό ισχύει ότι $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b})$. Άρα $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{11\cdot 7}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{11})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7}) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{77}) = \mathbf{1\cdot 7} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{17}) = \mathbf{7}$, αφού δουλεύω mod 30. Ακόμα έχω $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7\cdot 7}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7}) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{49}) = \mathbf{7\cdot 7} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{19}) = \mathbf{19}$, όμοια $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{7^3}) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{3}}(\mathbf{7}) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{343}) = \mathbf{7^3} = \mathbf{343} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{13}) = \mathbf{13}$. Τέλος έχω $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{11\cdot 19}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{11})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{19}) \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{209}) = \mathbf{1\cdot 19} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{29}) = \mathbf{19}$. Άρα C

60. Ένας πίνακας $\boldsymbol{M}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{LU}$, όπου $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. Αν $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{x}$ είναι η λύση του συστήματος $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{b}$, ποια είναι η πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος $\boldsymbol{x}$;
(A) $\mathbf{-2}$ (B) $\mathbf{-1}$ (C) $\mathbf{0}$ (D) 1 (E) 2

Έστω $\boldsymbol{Ux} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$. Τότε έχω $\boldsymbol{Mx = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow L} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Άρα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, άρα B

61. Μια πρωταρχική 10η ρίζα της μονάδας ορίζεται ως ένας μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{z}$ τέτοιος, ώστε $\boldsymbol{z^{10} = 1}$ αλλά $\boldsymbol{z^k \neq 1}$ για κάθε ακέραιο $\boldsymbol{k}$, όπου $\boldsymbol{1 \leq k \leq 9}$. Αν $\boldsymbol{S}$ είναι το άθροισμα και $\boldsymbol{P}$ είναι το γινόμενο όλων των πρωταρχικών 10ων ριζών της μονάδας, τότε

(A) $\boldsymbol{S = -1}$ και $\boldsymbol{P = 1}$

(B) $\boldsymbol{S = 0}$ και $\boldsymbol{P = -1}$

(C) $\boldsymbol{S = 0}$ και $\boldsymbol{P = 1}$

(D) $\boldsymbol{S = 1}$ και $\boldsymbol{P = -1}$

(E) $\boldsymbol{S = 1}$ και $\boldsymbol{P = 1}$

Έχω $\boldsymbol{z^{10} = 1 \Leftrightarrow z^{10} - 1 = 0 \Leftrightarrow \prod_{i=0}^{9}(z - z_i) = 0}$

Οι πρωταρχικές ρίζες της μονάδας είναι το σύνολο $\left\{\boldsymbol{e^{\frac{2\pi ik}{10}} : 1 \leq k \leq n, gcd(k, 10) = 1}\right\} =$ $\left\{\boldsymbol{e^{\frac{2\pi ik}{10}} : k \in \{1,3,7,9\}}\right\} = \left\{\boldsymbol{e^{\frac{2\pi i}{10}}, e^{\frac{6\pi i}{10}}, e^{\frac{14\pi i}{10}}, e^{\frac{18\pi i}{10}}}\right\}$ =. Άρα $\boldsymbol{S = e^{\frac{2\pi i}{10}} + e^{\frac{6\pi i}{10}} + e^{-\frac{6\pi i}{10}} + e^{-\frac{2\pi i}{10}}} =$

$\boldsymbol{e^{-\frac{6\pi i}{10}}\left(1 + e^{\frac{4\pi i}{10}} + e^{\frac{8\pi i}{10}} + e^{\frac{12\pi i}{10}}\right) = e^{-\frac{6\pi i}{10}} \frac{\left(e^{\frac{4\pi i}{10}}\right)^4 - 1}{e^{\frac{4\pi i}{10}} - 1} = e^{-\frac{6\pi i}{10}} \frac{e^{\frac{16\pi i}{10}} - 1}{e^{\frac{4\pi i}{10}} - 1} = \frac{e^{\frac{10\pi i}{10}} - e^{\frac{-6\pi i}{10}}}{e^{4\pi i/10} - 1} = \frac{-1 - e^{\frac{-6\pi i}{10}}}{e^{4\pi i/10} - 1} = \frac{-e^{\frac{6\pi i}{10}} - 1}{e^{10\pi i/10} - e^{\frac{6\pi i}{10}}}} =$ $\boldsymbol{\frac{-e^{\frac{6\pi i}{10}} - 1}{-1 - e^{\frac{6\pi i}{10}}} = 1}$ και $\boldsymbol{P = e^{2\pi i/10} \cdot e^{6\pi i/10} \cdot e^{14\pi i/10} \cdot e^{18\pi i/10} = e^{40\pi i/10} = 1}$. Άρα E

Γενικά ισχύει ότι το γινόμενο των πρωταρχικών $\boldsymbol{n}$-οστών ριζών της μονάδας είναι $\boldsymbol{P = 1}$ εκτός αν $\boldsymbol{n = 2}$, ενώ το άθροισμά τους είναι $\boldsymbol{\mu(n)}$, όπου $\boldsymbol{\mu}$ είναι η συνάρτηση Möbius. Ισχύει ότι $\boldsymbol{\mu(n)} =$

$$\begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{αν } \boldsymbol{n = 1}, \\ \mathbf{0} & \textbf{αν } \boldsymbol{a^2 \mid n} \textbf{ για κάποιο } \boldsymbol{a > 1} (\textbf{αν ο } \boldsymbol{n} \textbf{ έχει παράγοντα που είναι τετράγωνο πρώτου}), \\ \boldsymbol{(-1)^k} & \textbf{αν ο } \boldsymbol{n} \textbf{ είναι γινόμενο } \boldsymbol{k} \textbf{ διαφορετικών πρώτων.} \end{cases}$$

άρα $\boldsymbol{S = \mu(10) = \mu(2 \cdot 5) = (-1)^2 = 1}$, όπως πριν.

62. Για καθεμιά από τις παρακάτω μετρικές $\boldsymbol{d}$, θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$. Για ποια από τις μετρικές ο $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ ΔΕΝ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος;

(A) $\boldsymbol{d(x, y) = |x - y|}$

(B) $\boldsymbol{d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|}$

(C) $\boldsymbol{d(x, y) = |x^3 - y^3|}$

(D) $\boldsymbol{d(x, y) = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}|}$

(E) $\boldsymbol{d(x, y) = \begin{cases} 0 & if\ x = y \\ 1 & if\ x \neq y \end{cases}}$

Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \boldsymbol{d})$ είναι πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathbb{R}$, συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathbb{R}$.

Για το (A) : Έστω ότι η $(\mathbf{x_n})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$. Η ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη αφού για $\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{1}$, έχω $\exists\mathbf{N_o}\in\mathbb{N}:\forall\mathbf{m},\mathbf{n}\geq\mathbf{N_0}\Longrightarrow|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_m}|<\mathbf{1}$ και λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $|\mathbf{x_m}|\leq|\mathbf{x_{N_0}}|+|\mathbf{x_m}-\mathbf{x_{N_0}}|\leq|\mathbf{x_{N_0}}|+\mathbf{1}$

Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχω ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία, άρα $\lim\limits_{\mathbf{j}\to\infty}\mathbf{x_{n_j}}=\mathbf{x}$. Το όριο αυτό της υποακολουθίας είναι το όριο της ακολουθίας Cauchy αφού $\forall\boldsymbol{\epsilon}>\mathbf{0}\ \exists\mathbf{N}\in\mathbb{N}:\forall\mathbf{m},\mathbf{n}\geq\mathbf{N_0}\Longrightarrow|\mathbf{x_m}-\mathbf{x_n}|<\frac{\epsilon}{2}$

Σημειώνουμε ότι το $\lim\limits_{\mathbf{j}\to\infty}\mathbf{x_{n_j}}=\mathbf{x}$ σημαίνει ότι $\exists\mathbf{N_1}\in\mathbb{N}:\forall\mathbf{j}\geq\mathbf{N_1}\Longrightarrow\left|\mathbf{x_{n_j}}-\mathbf{x}\right|<\frac{\epsilon}{2}$

Έχω τώρα ότι $\forall\boldsymbol{\epsilon}>\mathbf{0}\ \exists\mathbf{N},\mathbf{N_1}\in\mathbb{N}:\forall\mathbf{n},\mathbf{n_j}\geq\mathbf{N},\forall\mathbf{j}\geq\mathbf{N_1}$, ισχύει ότι $\left|\mathbf{x_{n_j}}-\mathbf{x}\right|\leq\left|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n_j}}\right|+\left|\mathbf{x_{n_j}}-\mathbf{x}\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\boldsymbol{\epsilon}.$ Συνεπώς μια τυχαία ακολουθία Cauchy συγκλίνει στο R. Άρα ο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$ είναι πλήρης.

Για το (B) : Θεωρούμε την ακολουθία $(\boldsymbol{x_n})$, όπου $\boldsymbol{x_n}=\boldsymbol{n}$. Θα δείξουμε ότι η $(\boldsymbol{x_n})$ είναι Cauchy αλλά όχι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αφού $\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{n})\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ καθώς $\boldsymbol{n}\longrightarrow\infty$, τότε για δεδομένο τυχαίο $\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0}$, υπάρχει $\boldsymbol{N}$ τέτοιο, ώστε $\left|\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{n})-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N}$. Άρα για κάθε $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\boldsymbol{N}$, έχω $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_m},\boldsymbol{x_n})=|\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{m})-\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{n})|\leq\left|\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{m})-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\frac{\pi}{2}-\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{n})\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\boldsymbol{\varepsilon}.$ Συνεπώς η $(\boldsymbol{x_n})$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε, προς αντίφαση, ότι η $(\boldsymbol{x_n})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ με τη δεδομένη μετρική. Εξ ορισμού, υπάρχει ένα $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x_n},\boldsymbol{x})=\lim\limits_{n\to\infty}|\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{n})-\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{x})|=\mathbf{0}$, που τότε σημαίνει ότι το $\boldsymbol{arctan}(\boldsymbol{x})$ πρέπει να ισούται με $\frac{\pi}{2}$, από τη μοναδικότητα του ορίου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$, δεδομένου ότι $\mathbf{arctan}(\boldsymbol{x})<\frac{\pi}{2}$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$.

Για το (C) Έστω ότι η $(\mathbf{x_n})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$. Τότε, και η $(\mathbf{x_n^3})$ είναι Cauchy στο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$, άρα συγκλίνει σε κάποιο $\mathbf{x'}$ (αφού ο χώρος αυτός είναι πλήρης). Έστω $\mathbf{x}=(\mathbf{x'})^{\frac{1}{3}}$. Τότε, $\mathbf{d}(\mathbf{x_n},\mathbf{x})=|\mathbf{x_n^3}-\mathbf{x^3}|=|\mathbf{x_n^3}-\mathbf{x'}|\to\mathbf{0}.$ Άρα και η $(\mathbf{x_n^3})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Άρα ο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$ είναι πλήρης.

Όμοια το (D).

Για το (E) δηλαδή τη διακριτή μετρική: έστω $(\boldsymbol{x_n})$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}$, τότε αυτή είναι τελικά σταθερή. Συνεπώς, συγκλίνει. Άρα ο $(\mathbb{R},\mathbf{d})$ είναι πλήρης.

Τελική απάντηση B.

63. $\int_0^{\pi}\frac{\sin(100x)}{\sin x}\boldsymbol{dx}=$

(A) $\mathbf{0}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 50 (E) $\mathbf{50\pi}$

Θέτω $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{x}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{u}$ με $\boldsymbol{du}=-\boldsymbol{dx}$ Έχω $\boldsymbol{I}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(100x)}{\sin x}\boldsymbol{dx}=\int_{\pi}^{0}\frac{\sin(100(\pi-u))}{\sin(\pi-u)}(-\mathbf{1})\boldsymbol{du}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(100\pi-100u)}{\sin(u)}\boldsymbol{du}=\int_0^{\pi}\frac{\sin(-100u)}{\sin(u)}\boldsymbol{du}=-\int_0^{\pi}\frac{\sin(100u)}{\sin(u)}\boldsymbol{du}=-\boldsymbol{I}\Rightarrow\mathbf{2}\boldsymbol{I}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$, άρα A

64. Θεωρούμε ότι οι $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\boldsymbol{g}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ και $\boldsymbol{g}'(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις πρέπει να είναι αληθείς;

I. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχής συνάρτηση σε μια γειτονιά του **0.**

II. Η συνάρτηση $\frac{f^2-f}{2g-g^3}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχής συνάρτηση σε μια γειτονιά του **0.**

III. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση σε μια γειτονιά του **0.**

(A) Καμιά (B) I μόνο (C) I και II μόνο (D) I και III μόνο (E) I, II, και III

Η $\frac{f}{g}$ είναι ασυνεχής στο 0 αφού δεν ορίζεται σε αυτό. Θεωρώ την επέκτασή της $\boldsymbol{i(x)} = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \boldsymbol{c}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases}$. Για να είναι συνεχής στο 0 αρκεί $\lim_{x\to 0} \boldsymbol{i(x)} = \boldsymbol{i(0)} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \in \mathbb{R}$, άρα $\boldsymbol{i(x)} = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \frac{f'(0)}{g'(0)}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases}$, άρα Ι αληθής.

Όμοια, έστω $\boldsymbol{ii(x)} = \begin{cases} \frac{f^2-f}{2g-g^3}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \boldsymbol{c}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases}$.

Έχω $\lim_{x\to 0} \frac{f^2-f}{2g-g^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2f'(x)f(x)-f'(x)}{2g'(x)-3g'(x)g^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \frac{2f(x)-1}{2-3g^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-1}{2-3g^2(x)} = -\frac{1}{2}\frac{f'(0)}{g'(0)}$. Άρα για $\boldsymbol{c} = -\frac{f'(0)}{2g'(0)}$, η $\boldsymbol{ii(x)}$ είναι συνεχής στο 0, η ΙΙ αληθής.

Έστω $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 lnx}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases}$, $\boldsymbol{g(x) = x}$. Για να είναι παραγωγίσιμη η επέκταση της $\frac{f}{g}$ πρέπει να είναι πρώτα και συνεχής. Δείξαμε ότι η συνεχής επέκταση της $\boldsymbol{f/g}$, είναι η $\boldsymbol{i(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{f(x)/g(x)}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{xlnx}, & \boldsymbol{κοντά\ στο\ 0} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{για\ x = 0} \end{cases}$. Όμως, η $\boldsymbol{i}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού $\lim_{x\to 0} \frac{xlnx-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Άρα η ΙΙΙ ψευδής. Άρα C

65. Σε έναν συγκεκριμένο πληθυσμό ανδρών, το 5 τοις εκατό των ανδρών έχει στεφανιαία νόσο. Μια διαγνωστική εξέταση χρησιμοποιείται για να δείξει εάν ένας άνδρας έχει ή όχι τη νόσο, αλλά η εξέταση δεν είναι πάντα σωστή. Για τους άνδρες που έχουν τη νόσο, το τεστ είναι σωστό το 24 τοις εκατό των φορών, ενώ για τους άνδρες που δεν έχουν τη νόσο, το τεστ είναι σωστό το 98 τοις εκατό των περιπτώσεων. Εάν ένας άνδρας επιλεγεί τυχαία από τον πληθυσμό και το τεστ δείχνει ότι έχει τη νόσο, τότε η πιθανότητα ότι το τεστ είναι σωστό πλησιάζει περισσότερο σε ποιο από τα παρακάτω;

(A) 1% (B) 12% (C) 24% (D) 29% (E) 39%

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

$\boldsymbol{A}$: ο εξεταζόμενος είναι ασθενής

$\boldsymbol{\Theta}$: το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό.

Έχω $\boldsymbol{P(A) = 0.05}$, $\boldsymbol{P(\Theta|A) = 0.24}$, $\boldsymbol{P(\Theta'|A') = 0.98}$. Ζητάμε την $\boldsymbol{P(A|\Theta)}$.

Έχω $\boldsymbol{P(\Theta) = P(\Theta \mid A)P(A) + P(\Theta \mid A')P(A') = 0.24 \cdot 0.05 + [1 - P(\Theta' \mid A')][1 - P(A)] =}$

$\boldsymbol{0.012 + 0.02 \cdot 0.95 = 0.031}$.

Έχω $\boldsymbol{P(A|\Theta) \cdot P(\Theta) = P(A) \cdot P(\Theta|A)} \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{P(A|\Theta)} = \frac{P(A)\cdot P(\Theta|A)}{P(\Theta)} = \boldsymbol{0.05} \cdot \frac{0.24}{0.031} = \frac{0.012}{0.031} = \frac{12}{31} = \boldsymbol{0.387 \cong 39\%}$, άρα Ε

66. Έστω $\boldsymbol{X = \{n \in Z: n \geq 2\}}$ ο τοπολογικός χώρος με την τοπολογία να δημιουργείται από σύνολα της μορφής $\boldsymbol{U_k}$ ={ $\boldsymbol{n \in X: n}$ διαιρεί τον $\boldsymbol{k}$} για $\boldsymbol{k \geq 2}$, έτσι, ώστε τα ανοιχτά σύνολα στο $\boldsymbol{X}$ να είναι το κενό σύνολο και αυθαίρετες ενώσεις των συνόλων $\boldsymbol{U_k}$. Για κάθε $\boldsymbol{n \in X}$, την κλειστή θήκη (closure) του $\{\boldsymbol{n}\}$ στο $\boldsymbol{X}$ είναι

(A) $\{\boldsymbol{n}\}$

(B) { $\boldsymbol{sn}$: $\boldsymbol{s}$ είναι ένας θετικός ακέραιος }

(C) { $\boldsymbol{t \in X: t}$ διαιρεί τον $\boldsymbol{n}$}

(D) $\{\boldsymbol{p}: \boldsymbol{p}$ είναι ένας πρώτος διαιρέτης του $\boldsymbol{n}\}$

(E) $\{\prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{p}_i : \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_m\}$ είναι οποιοδήποτε σύνολο από $\boldsymbol{m}$ διακριτούς πρώτους διαιρέτες του $\boldsymbol{n}\}$

Απάντηση Β.

Η τοπολογία έχει την παρακάτω μορφή $\boldsymbol{\tau} := \{\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{3}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}, \ldots\}$.

Το κλείσιμο του $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{n}\}$ είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον και περίεργο. Να θυμάστε ότι το $\overline{\boldsymbol{B}}$ είναι κατασκευασμένο από όλα τα όρια των ακολουθιών από $\boldsymbol{B}$. Ευτυχώς, δεδομένου ότι το $\boldsymbol{B}$ περιέχει ένα μόνο σημείο, υπάρχει μια ενιαία ακολουθία που ζει μέσα στο $\boldsymbol{B}$, δηλαδή η σταθερή ακολουθία $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}, \ldots$. Σε αντίθεση με αυτό που περιμένετε, το όριο αυτής της ακολουθίας δεν είναι μόνο το $\boldsymbol{n}$! Εξετάστε έναν αριθμό $\boldsymbol{sn}$. Επιλέξτε οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο που το περιέχει. Αυτό το ανοιχτό υποσύνολο θα περιέχει στη συνέχεια όλους τους διαιρέτες του $\boldsymbol{sn}$, οπότε ειδικότερα θα περιέχει το $\boldsymbol{n}$. Οποιαδήποτε γειτονιά του $\boldsymbol{sn}$ περιέχει τους όρους της ακολουθίας! Αυτό δείχνει ότι κάθε πολλαπλάσιο του $\boldsymbol{n}$ είναι ένα οριακό σημείο γι' αυτό, το οποίο δείχνει ιδιαίτερα ότι αυτή η τοπολογία δεν είναι Hausdorff. Επομένως, $\overline{\boldsymbol{B}} = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{n}, \mathbf{2}\boldsymbol{n}, \mathbf{3}\boldsymbol{n}, \mathbf{4}\boldsymbol{n}, \ldots\} = \{\boldsymbol{sn} \mid \boldsymbol{s} \in \mathbb{N}\}$.

Περισσότερα στην διεύθυνση https://math.stackexchange.com/questions/1892818/topology-over-mathbb-n

[Πηγές]

Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)
spoudes_ipa.pdf (moec.gov.cy)
https://archeia.moec.gov.cy/mc/610/spoudes_ipa.pdf
Fulbright_Guide_3rd.pdf
http://www.iie.org/en/Research-and-Publications/Open-Doors

Secondary Schools of the USA | Secondary education in the USA | Studies at an american secondary school (unipage.net)

SAT - Wikipedia
55 Official SAT PDFs & 96 Official ACT PDFs (mcelroytutoring.com)
SAT Exam 2024: Dates, Registration, Fees, Eligibility, Syllabus, Preparation & Results (geeksforgeeks.org)
SAT Resources | (wordpress.com)

ACT (test) - Wikipedia
ACT Practice Tests Download_ACTexam.net

AP Calculus - Wikipedia
AP Calculus AB/BC Revision | MyMathsCloud
AP Calculus BC Exam Questions – AP Central | College Board
AP Calculus BC Practice Tests_CrackAP.com

Graduate Record Examinations - Wikipedia
https://iancoley.org/gre/Practice%205.pdf