[Σιγκαπούρη]

Η Σιγκαπούρη, επίσημα Δημοκρατία της Σιγκαπούρης, είναι νησιωτική χώρα νότια της Μαλαισίας. Με έκταση μόλις 734,4 τετραγωνικά χιλιόμετρα είναι η μικρότερη χώρα της Νοτιοανατολικής Ασίας και μπορεί να χαρακτηριστεί μια σύγχρονη πόλη-κράτος. Βρίσκεται στο νοτιότερο άκρο της ηπειρωτικής Ασίας και της Μαλαισιανής χερσονήσου, μόλις μία μοίρα βόρεια από τον Ισημερινό.

Η Σιγκαπούρη ήταν μέχρι το 1965 βρετανική αποικία και έκτοτε είναι μέλος της Κοινοπολιτείας των Εθνών. Ο πληθυσμός της έχει πολυεθνική σύνθεση, καθώς περιλαμβάνει Κινέζους, Μαλαισιανούς, Ταμίλ και Ευρωπαίους. Έχει ισχυρή οικονομία και οι κάτοικοί της απολαμβάνουν υψηλό κατά κεφαλήν εισόδημα και βιοτικό επίπεδο. Το Σύνταγμα της χώρας ορίζει το πολίτευμα ως κοινοβουλευτική δημοκρατία, στην πράξη όμως ένα και μόνο κόμμα, το Λαϊκό Κόμμα Δράσης, μονοπωλεί την εξουσία από τότε που η χώρα κέρδισε την ανεξαρτησία της. Ο πληθυσμός της, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2023, είναι 5.917.600 κάτοικοι.

Η Σιγκαπούρη έχει μια ανεπτυγμένη οικονομία της αγοράς που θεωρείται εξαιρετικά φιλική στις επιχειρήσεις. Μαζί με το Χονγκ Κονγκ, τη Νότια Κορέα και την Ταϊβάν αναφέρεται ως μία από τις τέσσερις ασιατικές τίγρεις, αν και έχει μεγαλύτερο κατά κεφαλήν εισόδημα από τις υπόλοιπες. Η Σιγκαπούρη είναι γνωστή ως μια από τις πιο ελεύθερες, καινοτόμες, ανταγωνιστικές, δυναμικές και φιλικές προς τις εταιρείες χώρες του κόσμου. Ο δείκτης οικονομικής ελευθερίας για το 2015 κατέταξε τη Σιγκαπούρη ως τη δεύτερη πιο ελεύθερη οικονομία στον κόσμο. Επίσης, η Σιγκαπούρη κατατάσσεται συχνά ανάμεσα στις χώρες με τη λιγότερη διαφθορά, μαζί με τη Νέα Ζηλανδία και τις σκανδιναβικές χώρες. Η Σιγκαπούρη διαθέτει το μεγαλύτερο ποσοστό εκατομμυριούχων στον κόσμο, με ένα στα έξι νοικοκυριά να έχουν τουλάχιστον ένα εκατομμύριο δολάρια ΗΠΑ αναλώσιμο πλούτο. Αυτό δεν περιλαμβάνει ιδιοκτησία, εταιρείες και πολυτελή αγαθά, τα οποία θα αύξαναν το ποσοστό εκατομμυριούχων, καθώς η περιουσία στη Σιγκαπούρη είναι ανάμεσα στις ακριβότερες του κόσμου. Η Σιγκαπούρη δε διαθέτει ελάχιστο μισθό, θεωρώντας ότι έτσι μειώνεται η ανταγωνιστικότητά της. Επίσης, έχει μια από τις μεγαλύτερες ανισότητες στην κατανομή πλούτου ανάμεσα στις ανεπτυγμένες χώρες.

Μεγάλη ώθηση δίνει η γεωγραφική της θέση και ο ρόλος της ως διεθνές κέντρο διαμετακομιστικού εμπορίου. Το λιμάνι της είναι ένα από τα μεγαλύτερα στον κόσμο σε διακίνηση αγαθών. Η οικονομία βασίζεται επίσης στις εξαγωγές μεταποιημένων εισαγόμενων πρώτων υλών. Η βιομηχανία μεταποίησης είχε αποτελέσει το 26% του ΑΕΠ το 2005 και συνεχίζει να ακμάζει, καθώς περιλαμβάνει ηλεκτρονικά, πετρελαιοειδή, χημικά, μηχανολογικά και βιοϊατρικά προϊόντα. Η Σιγκαπούρη είναι η δεύτερη μεγαλύτερη αγορά τζόγου-καζίνο, το τρίτο μεγαλύτερο κέντρο διύλισης και εμπορίας πετρελαίου, ο μεγαλύτερος κατασκευαστής πλατφορμών πετρελαίου και κύριος κόμβος επιδιόρθωσης πλοίων, καθώς και ο μεγαλύτερος κόμβος παγκοσμίως για logistics. Σημαντικός τομέας είναι και ο τουρισμός, καθώς η Σιγκαπούρη είναι δημοφιλής τουριστικός προορισμός.

Η Σιγκαπούρη είναι το τέταρτο μεγαλύτερο κέντρο ανταλλαγής συναλλάγματος μετά το Λονδίνο, τη Νέα Υόρκη και το Τόκιο. Το νόμισμα της Σιγκαπούρης είναι το δολάριο Σιγκαπούρης, με σύμβολο S$ και συντομογραφία SGD.

[Εκπαιδευτικό σύστημα]

Η Σιγκαπούρη είναι ουσιαστικά μια πόλη-κράτος, ένα νησί με λίγο περισσότερους από πέντε εκατομμύρια κατοίκους και έλλειψη φυσικών πόρων. Όταν αποχώρησε στα μέσα της δεκαετίας του ’60 από τη Ομοσπονδία της Μαλαισίας, βασιζόταν μόνο στις εισαγωγές, μην έχοντας καν πόσιμο νερό. Η μοναδική της ελπίδα να πετύχει οικονομικά ήταν να αναπτύξει τους ανθρώπινους πόρους της μέσω της εκπαίδευσης και να δημιουργήσει καταρτισμένο εργατικό δυναμικό, που θα τη βοηθούσε να γίνει βιομηχανικό και έπειτα επιχειρηματικό κέντρο (το οποίο και εν τέλει πέτυχε).

Η κυβέρνηση, κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του ’80, θεώρησε πως έκαναν παιδιά οι λάθος άνθρωποι. Ο Λι Κουάν Γιου, ιδρυτής της σύγχρονης Σιγκαπούρης και πρωθυπουργός τότε, είχε εκφράσει τη δυσαρέσκειά του και τον φόβο του για τη δημιουργία μιας πιο χαζής κοινωνίας, επειδή υπήρχαν ανύπαντρες γυναίκες πτυχιούχοι, μια και οι άντρες πτυχιούχοι προτιμούσαν γυναίκες με χαμηλότερη μόρφωση. Ο Γιου πίστευε πως η νοημοσύνη είναι έμφυτη και κληρονομική (γεγονός που προφανώς δεν ισχύει απόλυτα, όπως αποδείχτηκε μέσα από έρευνες χρόνων) και έδινε κίνητρα για στείρωση σε γυναίκες χαμηλού μορφωτικού επιπέδου και φοροαπαλλαγές σε πτυχιούχες που γίνονταν μητέρες. Οργάνωνε μάλιστα και δωρεάν κρουαζιέρες αναψυχής για single πτυχιούχους, προκειμένου να γνωρίσουν εκεί έναν/μια σύντροφο ίδιου πνευματικού επιπέδου και να γεννήσουν πανέξυπνα παιδιά. Αυτή η νοοτροπία της ευγονικής επεκτάθηκε με κάποιον τρόπο και στην εκπαίδευση.

Στη Σιγκαπούρη, η προσχολική εκπαίδευση δεν είναι υποχρεωτική, οπότε σε ιδιωτικά προνηπιαγωγεία και νηπιαγωγεία φοιτούν μόνο τα παιδιά εύπορων οικογενειών. Οι μαθητές πηγαίνουν στην Α′ δημοτικού τη χρονιά που γίνονται επτά ετών, δηλαδή έναν χρόνο μετά τα παιδιά στην Ελλάδα. Μέσα σε κάθε σχολείο, οι τάξεις είναι –τα τέσσερα πρώτα χρόνια– μεικτών ικανοτήτων, αλλά κάθε δημοτικό έχει διαφορετικό κύρος και το να καταφέρουν να γίνουν τα παιδιά τους δεκτά στα κορυφαία σχολεία είναι το βασικό θέμα για τις νέες μητέρες και το κύριο θέμα συζήτησης στα νηπιαγωγεία.

Τα παιδιά που έχουν μεγαλύτερο αδέλφι που φοιτά σε «καλό σχολείο» έχουν προτεραιότητα στο να γίνουν δεκτά, ενώ ακολουθούν εκείνα των οποίων είτε κάποιο αδέλφι είτε κάποιος γονιός έχει αποφοιτήσει από το σχολείο αυτό. Αυτό θεωρείται ότι βοηθάει στη συνοχή της σχολικής κοινότητας και ότι διασφαλίζει σε όσους έχουν λάβει εκπαίδευση υψηλού κύρους ότι το προνόμιό τους αυτό θα κληροδοτηθεί και στο παιδί τους. Τις υπόλοιπες θέσεις καταλαμβάνουν παιδιά που οι γονείς τους έχουν βοηθήσει εθελοντικά το σχολείο τουλάχιστον έναν χρόνο πριν και έχουν αφιερώσει τουλάχιστον 40 ώρες ως σχολικοί τροχονόμοι, βοηθοί στο κυλικείο, στη βιβλιοθήκη κ.λ.π. Στα πιο επιθυμητά σχολεία, μάλιστα, οι γονείς για να γίνουν εθελοντές περνούν από συνέντευξη.

Τα προνομιούχα παιδιά που θα αποφοιτήσουν από τα κορυφαία δημοτικά σε ηλικία δώδεκα ετών έχουν περισσότερες πιθανότητες να αριστεύσουν στις απολυτήριες εξετάσεις (Primary School Leaving Examination, PSLE), ο βαθμός των οποίων έχει τεράστια επίπτωση στην πορεία της ζωής τους, καθορίζοντας το Γυμνάσιο στο οποίο θα συνεχίσουν τη φοίτησή τους και κατ’ επέκταση τις εξετάσεις που θα μπορούν να δώσουν μελλοντικά και το επάγγελμα που θα μπορούν να ασκήσουν. Στη Σιγκαπούρη οι γονείς θεωρούν καθήκον τους να παλέψουν με κάθε τρόπο να στείλουν τα παιδιά τους στα καλύτερα σχολεία, με αποτέλεσμα να μην τα αφήνουν στιγμή να χαλαρώσουν κατά τη διάρκεια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Στην αρχή της «ζωής» του νεοσύστατου κράτους, δεν γινόταν διαχωρισμός των τάξεων ανάλογα με το επίπεδο των παιδιών, όμως υπήρχαν προαγωγικές εξετάσεις κάθε χρόνο, με αποτέλεσμα πολλά παιδιά που κόβονταν, να σταματούν το σχολείο ακόμα και στα επτά ή στα οκτώ τους χρόνια. Το 1979, ξεκίνησε η επιπεδοποίηση των μαθητών στο τέλος της Γ′ Δημοτικού, η οποία, όμως, μέχρι το 2008 ήταν προβληματική, καθώς αρκετά παιδιά, αυτά που βρίσκονταν στο τρίτο και χαμηλότερο επίπεδο, δεν κατόρθωναν ποτέ να φτάσουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ύστερα από διαμάχες που πυροδοτήθηκαν από μια κινηματογραφική ταινία που καταδίκαζε το εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας, τα παιδιά περνούν στο τέλος της Δ′ δημοτικού από τεστ μέσα από τα οποία καθορίζεται ποια μαθήματα θα παρακολουθήσουν τα δυο τελευταία χρόνια σε υψηλό, ποια σε κανονικό και ποια σε βασικό επίπεδο, με το σύστημα να αναγνωρίζει ότι κάθε μαθητής μπορεί να είναι καλός ή κακός σε κάποια μόνο και όχι σε όλα τα αντικείμενα. Με άλλα λόγια, πλέον ο στόχος της εκπαίδευσης είναι να εντοπίζονται έγκαιρα τα ταλέντα και οι κλίσεις του κάθε δεκάχρονου παιδιού και να του προσφέρονται οι ανάλογες ευκαιρίες. Το ερώτημα, όμως, που τίθεται είναι αν όλα τα παιδιά στα δέκα τους χρόνια έχουν τους ίδιους ρυθμούς ανάπτυξης, αν όλα βρίσκονται, ας πούμε, στο ίδιο σημείο της καμπύλης. Και η απάντηση είναι προφανώς αρνητική.

Το σχολείο της Σιγκαπούρης, λοιπόν, είναι βασισμένο στην (παρωχημένη πλέον) ιδέα της στατικής νοημοσύνης. Και φυσικά, όπως όλα τα ασιατικά εκπαιδευτικά συστήματα, είναι και ανταγωνιστικό. Οι δάσκαλοί του είναι ιδιαίτερα καταρτισμένοι, με αξιοπρεπείς μισθούς και επιδοτούμενη επιμόρφωση καθ' όλη τη διάρκεια της σταδιοδρομίας τους, ενώ τους δίνονται διαρκώς κίνητρα για να βελτιώνονται και να εξελίσσονται.

Παρά το γεγονός αυτό, η πλειονότητα των γονέων των μαθητών του δημοτικού, κατά βάση κινεζικής καταγωγής, απαιτούν από τα παιδιά τους προσπάθεια και σκληρή δουλειά και στο σπίτι, ενώ ταυτόχρονα έχουν μεγάλες προσδοκίες και ανάλογη συμμετοχή στη μελέτη τους. Αγοράζουν συχνότατα σχολικά βοηθήματα με επιπλέον ασκήσεις και επιδιώκουν, ακόμα κι αν πιεστούν πολύ οικονομικά, να στείλουν τα παιδιά τους σε ιδιωτικό φροντιστήριο, ακόμα και μέχρι πολύ αργά το βράδυ, ώστε να γίνουν «οι πρώτοι των πρώτων».

Έτσι, στη Σιγκαπούρη η ανισότητα και ο ελιτισμός ανάμεσα σε έχοντες και μη γίνονται ακόμα πιο έντονα σε μια κοινωνία που a priori διαχωρίζει στο σχολικό πλαίσιο – και μάλιστα από πολύ νωρίς– τα παιδιά διαφορετικών ικανοτήτων και διαφορετικού οικογενειακού και οικονομικού υπόβαθρου, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό μια τυραννία των ικανών και των έξυπνων και ένα εκπαιδευτικό σύστημα εντελώς αναξιοκρατικό.

Για τις… πανσιγκαπούριες απολυτήριες εξετάσεις του δημοτικού οι γονείς δικαιούνται άδεια από τη δουλειά τους για να βοηθήσουν το παιδί τους στη μελέτη. Το κράτος θεωρεί τη βαθμολογία σε αυτές βασικό κριτήριο ακόμα και για την τοποθέτηση ενηλίκων σε καίριες κρατικές θέσεις, ενώ –προφανώς– ανοίγουν (ή κλείνουν) τον δρόμο για τη συνέχιση της φοίτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κάθε μαθητής μπορεί να κάνει αίτηση σε έξι γυμνάσια της επιλογής του και το αν θα γίνει αποδεκτός ή όχι εξαρτάται όχι μόνο από τον βαθμό του στις εξετάσεις, αλλά και από την απόφαση του κάθε σχολείου.

Οι βαθμοί καθορίζουν επίσης το επίπεδο που θα τοποθετηθεί το κάθε παιδί στο δευτεροβάθμιο σχολείο: Το 8% γίνεται δεκτό στο Υψηλού Κύρους Ολοκληρωμένο Πρόγραμμα, το 60% στην Ταχεία Κατεύθυνση, το 20% στην Κανονική Ακαδημαϊκή Κατεύθυνση, ενώ το 10% στην Κανονική Τεχνική Εκπαίδευση.

Ψυχολογία

Το άγχος είναι πανταχού παρόν και πηγάζει σε μεγάλο βαθμό από την οικογενειακή πίεση. Τα παιδιά δεν θέλουν να πηγαίνουν στο σχολείο, ενώ πρόσφατες έρευνες διαπίστωσαν ότι το 1/3 των μαθητών φοβούνται περισσότερο τις εξετάσεις παρά τον θάνατο των γονέων τους. Σημειωτέο: Οι γονείς μπορούν να κάνουν μήνυση στα (ενήλικα πλέον) παιδιά τους αν αυτά δεν τους στηρίξουν οικονομικά στα γηρατειά τους, αλλά αυτό θα είναι ανώφελο αν αυτά δεν έχουν αρκετά χρήματα να συντηρήσουν –εκτός από την οικογένειά τους– και τους γονείς τους, διότι δεν τα πήγαν καλά στις εξετάσεις που έδωσαν κάποτε, όταν ήταν μόλις δώδεκα ετών.

Αποτελέσματα

Παρότι το εκπαιδευτικό σύστημα της Σιγκαπούρης δεν οδηγεί σε δίκαια αποτελέσματα, έχει εντούτοις επιδείξει υψηλή αναλογία μαθητών που βρίσκονται πάνω από τα επίπεδα αναφοράς ως προς την κατανόηση κειμένου, τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Είναι, δηλαδή, λιγότεροι οι μαθητές που παίρνουν χαμηλή βαθμολογία στις δοκιμασίες PISA απ' ό,τι στις περισσότερες άλλες χώρες. Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει πως οι μαθητές αυτοί έχουν καλύτερες ακαδημαϊκές ευκαιρίες, αφού οι προνομιούχοι συμμαθητές τους στη χώρα τους βρίσκονται πάντα πιο μπροστά, καταλαμβάνοντας τις καλές θέσεις στα γυμνάσια και εξωθώντας τους προς λιγότερο ακαδημαϊκές κατευθύνσεις.

Είναι τούτο απαραίτητα κακό; Ίσως και όχι. Ναι μεν οι μισθοί των τεχνικών επαγγελμάτων δεν είναι ιδιαίτερα υψηλοί, όμως η αναβάθμιση της επαγγελματικής εκπαίδευσης έχει δημιουργήσει καταρτισμένους τεχνίτες και αξιοζήλευτα χαμηλούς δείκτες ανεργίας.

Ιδιαίτερα μαθήματα

Τα ιδιωτικά δίδακτρα είναι μια προσοδοφόρα βιομηχανία στη Σιγκαπούρη, καθώς πολλοί γονείς στέλνουν τα παιδιά τους για ιδιωτικά μαθήματα μετά το σχολείο. Μια δημοσκόπηση από την εφημερίδα The Straits Times το 2008 διαπίστωσε ότι από τους 100 φοιτητές που ερωτήθηκαν, μόνο 3 φοιτητές δεν είχαν καμία μορφή διδασκαλίας. Το 2010, η Shin Min Daily News υπολόγισε ότι υπήρχαν περίπου 540 κέντρα διδασκαλίας που προσφέρουν ιδιωτικά μαθήματα στη Σιγκαπούρη. Λόγω της μεγάλης ζήτησής τους, τα φροντιστήρια είναι σε θέση να χρεώνουν υψηλά τέλη για τις υπηρεσίες τους. έχουν ετήσιο κύκλο εργασιών 110,6 εκατομμυρίων δολαρίων SGD το 2005. Ωστόσο, αυτός ο κλάδος είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξέλεγκτος, αν και τα κέντρα διδασκαλίας πρέπει να εγγραφούν στο Υπουργείο Παιδείας. Δεν υπάρχει τέτοια απαίτηση για μεμονωμένους ιδιωτικούς δασκάλους.

[Τα μαθηματικά της Σιγκαπούρης]

Τα μαθηματικά της Σιγκαπούρης είναι μια μέθοδος διδασκαλίας που βασίζεται στο εθνικό πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών που χρησιμοποιείται από την πρώτη έως την έκτη τάξη στα σχολεία της Σιγκαπούρης. Ο όρος επινοήθηκε στις Ηνωμένες Πολιτείες για να περιγράψει μια προσέγγιση που αναπτύχθηκε αρχικά στη Σιγκαπούρη για να διδάξει στους μαθητές να μάθουν και να κατακτήσουν λιγότερες μαθηματικές έννοιες με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, καθώς και να μάθουν αυτές τις έννοιες χρησιμοποιώντας μια διαδικασία μάθησης τριών βημάτων: συγκεκριμένη, εικονογραφική και αφηρημένη. Στο συγκεκριμένο βήμα, οι μαθητές συμμετέχουν σε πρακτικές μαθησιακές εμπειρίες χρησιμοποιώντας φυσικά αντικείμενα που μπορεί να είναι καθημερινά αντικείμενα όπως συνδετήρες, τουβλάκια παιχνιδιών ή μαθηματικοί χειρισμοί, όπως η μέτρηση αρκούδων, κύβων συνδέσμων και δίσκων κλασμάτων. Ακολουθεί η σχεδίαση εικονογραφικών αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών. Στη συνέχεια, οι μαθητές επιλύουν μαθηματικά προβλήματα με αφηρημένο τρόπο χρησιμοποιώντας αριθμούς και σύμβολα.

Η ανάπτυξη των μαθηματικών της Σιγκαπούρης ξεκίνησε τη δεκαετία του 1980, όταν το Υπουργείο Παιδείας της Σιγκαπούρης ανέπτυξε τα δικά του εγχειρίδια μαθηματικών που επικεντρώθηκαν στην επίλυση προβλημάτων και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων σκέψης. Έξω από τη Σιγκαπούρη, αυτά τα σχολικά βιβλία υιοθετήθηκαν από διάφορα σχολεία στις Ηνωμένες Πολιτείες και σε άλλες χώρες όπως ο Καναδάς, το Ισραήλ, οι Κάτω Χώρες, η Ινδονησία, η Χιλή, η Ιορδανία, η Ινδία, το Πακιστάν, η Ταϊλάνδη, η Μαλαισία, η Ιαπωνία, η Νότια Κορέα, οι Φιλιππίνες και η Ηνωμένο Βασίλειο. Οι πρώτοι που υιοθέτησαν αυτά τα εγχειρίδια στις ΗΠΑ περιελάμβαναν γονείς που ενδιαφέρονταν για κατ' οίκον εκπαίδευση καθώς και περιορισμένο αριθμό σχολείων. Αυτά τα εγχειρίδια έγιναν πιο δημοφιλή μετά την κυκλοφορία των βαθμολογιών από διεθνείς εκπαιδευτικές έρευνες όπως οι Τάσεις στη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Επιστημών (TIMSS) και το Πρόγραμμα Διεθνούς Αξιολόγησης Μαθητών (PISA), οι οποίες έδειξαν τη Σιγκαπούρη στις τρεις πρώτες θέσεις του κόσμου από το 1995. Οι αμερικανικές εκδόσεις αυτών των σχολικών βιβλίων έχουν έκτοτε υιοθετηθεί από μεγάλο αριθμό σχολικών περιοχών, καθώς και από ναυλωμένα και ιδιωτικά σχολεία.

Μετά τις πρωτοβουλίες του προγράμματος σπουδών και της διδασκαλίας της Σιγκαπούρης, παρατηρήθηκαν δραματικές βελτιώσεις στην επάρκεια των μαθηματικών μεταξύ των μαθητών της Σιγκαπούρης σε διεθνείς αξιολογήσεις. Το TIMSS, μια διεθνής αξιολόγηση για τα μαθηματικά και την επιστήμη μεταξύ των μαθητών της τέταρτης και όγδοης τάξης, κατέταξε τους μαθητές της τέταρτης και όγδοης τάξης της Σιγκαπούρης πρώτους στα μαθηματικά τέσσερις φορές (1995, 1999, 2003 και 2015) μεταξύ των συμμετεχόντων εθνών. Ομοίως, το Πρόγραμμα Διεθνούς Αξιολόγησης Μαθητών (PISA) του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ), μια παγκόσμια μελέτη των σχολικών επιδόσεων 15χρονων μαθητών στα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και την ανάγνωση, κατέταξε τους μαθητές της Σιγκαπούρης πρώτους το 2015, και δεύτερους μετά τη Σαγκάη της Κίνας το 2009 και το 2012.

Καλύπτει λιγότερα θέματα σε μεγαλύτερο βάθος

Σε σύγκριση με ένα παραδοσιακό πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών των ΗΠΑ, τα μαθηματικά της Σιγκαπούρης επικεντρώνονται σε λιγότερα θέματα, αλλά τα καλύπτουν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Κάθε εγχειρίδιο μαθηματικών βασίζεται σε προηγούμενες γνώσεις και δεξιότητες, με τους μαθητές να τις κατέχουν πριν προχωρήσουν στην επόμενη τάξη. Οι μαθητές, επομένως, δεν χρειάζεται να ξαναμάθουν αυτές τις δεξιότητες στην επόμενη τάξη. Μέχρι το τέλος της έκτης τάξης, οι μαθητές μαθηματικών της Σιγκαπούρης έχουν κατακτήσει τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των κλασμάτων και μπορούν να λύσουν δύσκολα προβλήματα λέξεων πολλαπλών βημάτων.

Διαδικασία εκμάθησης τριών βημάτων

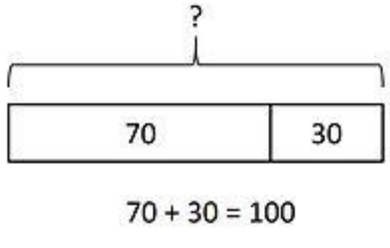
Τα μαθηματικά της Σιγκαπούρης διδάσκουν στους μαθητές μαθηματικές έννοιες σε μια διαδικασία μάθησης τριών βημάτων: συγκεκριμένη, εικονογραφική και αφηρημένη. Αυτή η διαδικασία μάθησης βασίστηκε στο έργο ενός Αμερικανού ψυχολόγου, του Jerome Bruner. Στη δεκαετία του 1960, ο Bruner διαπίστωσε ότι οι άνθρωποι μαθαίνουν σε τρία στάδια πρώτα χειριζόμενοι πραγματικά αντικείμενα πριν μεταβούν σε εικόνες και στη συνέχεια σε σύμβολα.

Το πρώτο από τα τρία βήματα είναι συγκεκριμένο, όπου οι μαθητές μαθαίνουν ενώ χειρίζονται αντικείμενα όπως τσιπς, ζάρια ή συνδετήρες. Οι μαθητές μαθαίνουν να μετρούν αυτά τα αντικείμενα (π.χ. συνδετήρες) παρατάσσοντάς τα στη σειρά. Στη συνέχεια μαθαίνουν βασικές αριθμητικές πράξεις όπως πρόσθεση ή αφαίρεση προσθέτοντας ή αφαιρώντας φυσικά τα αντικείμενα από κάθε σειρά.

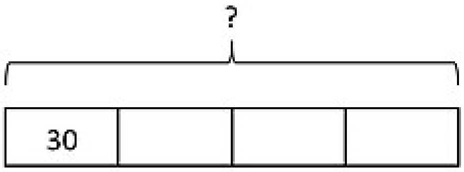
Στη συνέχεια, οι μαθητές μεταβαίνουν στο εικονογραφικό βήμα σχεδιάζοντας διαγράμματα που ονομάζονται «ραβδοειδή μοντέλα» για να αναπαραστήσουν συγκεκριμένες ποσότητες ενός αντικειμένου. Αυτό περιλαμβάνει τη σχεδίαση μιας ορθογώνιας ράβδου για την αναπαράσταση μιας συγκεκριμένης ποσότητας. Για παράδειγμα, εάν μια μικρή ράβδος αντιπροσωπεύει πέντε συνδετήρες, μια ράβδος που έχει διπλάσιο μήκος θα αντιπροσωπεύει δέκα. Με την οπτικοποίηση της διαφοράς μεταξύ των δύο ράβδων, οι μαθητές μαθαίνουν να λύνουν προβλήματα πρόσθεσης προσθέτοντας τη μία ράβδο στην άλλη, η οποία, σε αυτή την περίπτωση, θα παράγει μια απάντηση δεκαπέντε συνδετήρων. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτή τη μέθοδο για να λύσουν άλλα μαθηματικά προβλήματα που περιλαμβάνουν αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Η μοντελοποίηση ράβδων είναι πολύ πιο αποτελεσματική από την προσέγγιση «εικασία και έλεγχος», στην οποία οι μαθητές απλώς μαντεύουν συνδυασμούς αριθμών μέχρι να σκοντάψουν στη λύση.

Μόλις οι μαθητές μάθουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα χρησιμοποιώντας μοντελοποίηση ράβδων, αρχίζουν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα με αποκλειστικά αφηρημένα εργαλεία: αριθμούς και σύμβολα.

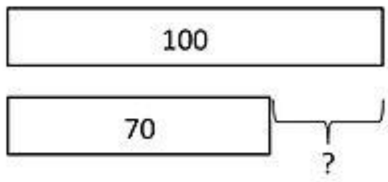
Ένα μοντέλο ράβδων που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος πρόσθεσης. Αυτή η εικονογραφική προσέγγιση χρησιμοποιείται συνήθως ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά της Σιγκαπούρης.



Το μοντέλο ολόκληρου του μέρους μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ενός προβλήματος πολλαπλασιασμού.



30 × 4 = 120



100 – 30 = 70

Το μοντέλο ράβδων μπορεί να σχεδιαστεί ως μοντέλο σύγκρισης για τη σύγκριση δύο ράβδων άνισου μήκους, οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση ενός προβλήματος αφαίρεσης.

[Πρωτοβάθμια εκπαίδευση]

Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση, που συνήθως αρχίζει στην ηλικία των επτά ετών, είναι ένα τετραετές βασικό στάδιο (Πρωτοβάθμια 1 έως 4) και ένα διετές στάδιο προσανατολισμού (Πρωτοβάθμια 5 έως 6). Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι υποχρεωτική. Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι δωρεάν για όλους τους πολίτες της Σιγκαπούρης στα σχολεία που υπάγονται στην αρμοδιότητα του Υπουργείου Παιδείας, αν και υπάρχει μηνιαία χρέωση έως και 13 SGD ανά μαθητή.

Το βασικό στάδιο είναι το πρώτο στάδιο της επίσημης εκπαίδευσης. Τα τέσσερα χρόνια, από την πρωτοβάθμια 1 έως 4, παρέχουν ένα θεμέλιο στα αγγλικά, τη μητρική γλώσσα (η οποία περιλαμβάνει τα τυπικά μανδαρινικά, μαλαισιανά, ταμίλ ή μια μη ταμιλική ινδική γλώσσα (NTIL), όπως τα χίντι, τα παντζάμπι και τα μπενγκάλι), τα μαθηματικά και την επιστήμη. Άλλα μαθήματα περιλαμβάνουν την αγωγή του πολίτη και την ηθική αγωγή, τις τέχνες και τις χειροτεχνίες, τη μουσική, την αγωγή υγείας, τις κοινωνικές σπουδές και τη φυσική αγωγή, τα οποία διδάσκονται σε όλη την πρωτοβάθμια εκπαίδευση 1 έως 6. Οι φυσικές επιστήμες διδάσκονται από την Πρωτοβάθμια 3 (ηλικία 9 ετών) και μετά.

Τα αγγλικά διδάσκονται ως πρώτη γλώσσα στο δημοτικό σχολείο, με το Υπουργείο Παιδείας να επιλέγει να το πράξει, καθώς τα αγγλικά είναι η lingua franca των διεθνών επιχειρήσεων, της επιστήμης και της τεχνολογίας. Ως εκ τούτου, ένα ισχυρό θεμέλιο στην αγγλική γλώσσα θεωρείται απαραίτητη δεξιότητα για ανάπτυξη. Η διγλωσσία θεωρείται ακρογωνιαίος λίθος του εκπαιδευτικού συστήματος της Σιγκαπούρης και όλοι οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν μια δεύτερη, μητρική γλώσσα (κινεζική γλώσσα, μαλαισιανή γλώσσα ή γλώσσα Ταμίλ) κατά την εγγραφή τους στο δημοτικό σχολείο, για να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές μπορούν στο μέλλον να αξιοποιήσουν τις ευκαιρίες που μπορούν να βρεθούν στο παγκόσμιο περιβάλλον.

Όλοι οι μαθητές προχωρούν στο στάδιο προσανατολισμού μετά την 4η Δημοτικού ανάλογα με τις ικανότητες του μαθητή. Οι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα σε διαφορετικά επίπεδα με βάση τις βαθμολογίες τους στα αντίστοιχα μαθήματα στο τέλος της Πρωτοβάθμιας 4. Τα μαθήματα της μητρικής γλώσσας προσφέρονται στα υψηλότερα, τυποποιημένα ή βασικά επίπεδα. Η επιστήμη και τα μαθηματικά μπορούν να ληφθούν σε επίπεδο προτύπου ή θεμελίωσης.

Μετά από έξι χρόνια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι μαθητές θα πρέπει να συμμετάσχουν στις εθνικές απολυτήριες εξετάσεις δημοτικού σχολείου (PSLE). Στη συνέχεια, οι μαθητές θα επιλέξουν το σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της επιλογής τους με βάση τα αποτελέσματά τους σε αυτή την εξέταση και την επιλογή τους. Οι μαθητές γίνονται επίσης δεκτοί σε ένα σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στο πλαίσιο ενός ξεχωριστού προγράμματος "άμεσης εισαγωγής στο σχολείο", σύμφωνα με το οποίο τα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι σε θέση να επιλέξουν έναν ορισμένο αριθμό μαθητών με βάση τα ειδικά ταλέντα τους πριν αυτοί οι μαθητές λάβουν το PSLE.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Με βάση τα αποτελέσματα του PSLE, οι μαθητές τοποθετούνται σε τρία διαφορετικά κομμάτια ή ροές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: "Express", "Normal (Academic)" ή "Normal (Technical)" μέχρι το 2023. Από το 2024, οι μαθητές θα χωριστούν σε G1, G2 και G3, σύμφωνα με το σχήμα Subject-Based Banding. Οι πολίτες της Σιγκαπούρης απαγορεύεται να παρακολουθούν διεθνή σχολεία στο νησί χωρίς άδεια του Υπουργείου Παιδείας.

Το "Express" είναι ένα τετραετές πρόγραμμα που οδηγεί στην εξέταση GCE O Level Σιγκαπούρης-Cambridge. Το "Normal (Academic)" είναι ένα τετραετές πρόγραμμα που οδηγεί στις εξετάσεις Normal (Academic) level (N(A)-level), με δυνατότητα πέμπτου έτους που οδηγεί στις εξετάσεις GCE O-level. Το κανονικό (ακαδημαϊκό) πρόγραμμα προσανατολίζεται στην προετοιμασία των μαθητών για τις εξετάσεις O-level στο πέμπτο έτος, με την επιφύλαξη καλών επιδόσεων στις εξετάσεις επιπέδου N (A) στο τέταρτο έτος. Το "Normal (Technical)" είναι ένα τετραετές πρόγραμμα που οδηγεί στην εξέταση Normal (Technical) level (N(T)-level).

[Εισαγωγή σε ιδρύματα μεταδευτεροβάθμιας εκπαίδευσης]

Μετά την ολοκλήρωση της 4ετούς ή 5ετούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι μαθητές θα συμμετάσχουν στην ετήσια εξέταση επιπέδου O, τα αποτελέσματα της οποίας καθορίζουν για ποια ιδρύματα μεταδευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μπορούν να υποβάλουν αίτηση. Οι βαθμοί του μαθήματος O Level κυμαίνονται από A1 (καλύτερο) έως F9 (χειρότερο).

Τα προ-πανεπιστημιακά κέντρα περιλαμβάνουν κατώτερα κολέγια (Junior College) για διετή πορεία που οδηγεί στο επίπεδο GCE A Σιγκαπούρης-Cambridge ή στο δίπλωμα International Baccalaureate (IB) ή στο Ινστιτούτο Millennia για τριετή πορεία που οδηγεί στο επίπεδο A. Τα προ-πανεπιστημιακά κέντρα δέχονται φοιτητές με αξιοκρατικά κριτήρια, με μεγαλύτερη έμφαση στην ακαδημαϊκή παρά στην εφαρμοσμένη εκπαίδευση.

Η εισαγωγή σε διετή προ-πανεπιστημιακά μαθήματα στα κατώτερα κολέγια μετά την αποφοίτησή τους από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθορίζεται από το σύστημα βαθμολόγησης L1R5 (Αγγλικά + 5 σχετικά θέματα). Ο υποψήφιος προσθέτει τους αριθμητικούς βαθμούς για έξι διαφορετικά μαθήματα: Αγγλικά (ή άλλη γλώσσα που λαμβάνεται στο επίπεδο της «πρώτης γλώσσας»), ένα μάθημα Ανθρωπιστικών Επιστημών, ένα μάθημα Φυσικών Επιστημών/Μαθηματικών, ένα μάθημα Ανθρωπιστικών Επιστημών/Φυσικών Επιστημών/Μαθηματικών και δύο άλλα μαθήματα οποιουδήποτε είδους.

Για την εισαγωγή σε τριετές προ-πανεπιστημιακό μάθημα στο Ινστιτούτο Millennia, χρησιμοποιείται το σύστημα βαθμολόγησης L1R4 (Αγγλικά + 4 σχετικά θέματα) και οι μαθητές πρέπει να βαθμολογηθούν κάτω από 20 μονάδες για να γίνουν δεκτοί. Οι σπουδαστές μπορούν να επιλέξουν οποιαδήποτε από τις ροές επιστήμης, τεχνών ή εμπορίου κατά την παρακολούθηση του τριετούς προ-πανεπιστημιακού μαθήματος.

Η εισαγωγή σε τριετή πολυτεχνική εκπαίδευση μετά την αποφοίτηση από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθορίζεται από το σύστημα βαθμολόγησης ELR2B2 (αγγλική γλώσσα + 2 σχετικά μαθήματα + 2 καλύτερα μαθήματα). Ο υποψήφιος προσθέτει τους αριθμητικούς βαθμούς για πέντε διαφορετικά μαθήματα: αγγλική γλώσσα, δύο συναφή μαθήματα που σχετίζονται με το μάθημα επιλογής στο πολυτεχνείο και δύο άλλα μαθήματα οποιουδήποτε είδους.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Η Σιγκαπούρη έχει έξι αυτόνομα πανεπιστήμια, συγκεκριμένα το Εθνικό Πανεπιστήμιο της Σιγκαπούρης, το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Nanyang, το Πανεπιστήμιο Διοίκησης της Σιγκαπούρης, το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο & Σχεδιασμού της Σιγκαπούρης, το Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Σιγκαπούρης και το Πανεπιστήμιο Κοινωνικών Επιστημών της Σιγκαπούρης.

Το Εθνικό Πανεπιστήμιο της Σιγκαπούρης (NUS) και το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Nanyang (NTU) έχουν περισσότερους από 30.000 φοιτητές και παρέχουν ένα ευρύ φάσμα προπτυχιακών και μεταπτυχιακών προγραμμάτων σπουδών, συμπεριλαμβανομένων διδακτορικών τίτλων. Και τα δύο είναι επίσης καθιερωμένα ερευνητικά πανεπιστήμια με χιλιάδες ερευνητικό προσωπικό και μεταπτυχιακούς φοιτητές. Από το 2022, και τα δύο πανεπιστήμια κατατάσσονται μεταξύ των κορυφαίων 20 στον κόσμο από την QS World University Rankings και Top 40 παγκοσμίως από την THE World University Rankings.

Ιδιωτικά Εκπαιδευτικά Ιδρύματα

Τα ξένα πανεπιστήμια που έχουν δημιουργήσει πανεπιστημιουπόλεις ή κέντρα αριστείας στη Σιγκαπούρη περιλαμβάνουν INSEAD, ESSEC, S P Jain School of Global Management, DigiPen Institute of Technology LSBF Singapore Campus, Technische Universität München, Sorbonne-Assas International Law School, Curtin Singapore και James Cook University Singapore.

Άλλα ξένα πανεπιστήμια προσφέρουν εξωτερικά προγράμματα σπουδών (EDPs) μέσω ιδιωτικών εκπαιδευτικών ιδρυμάτων όπως το Ινστιτούτο Διοίκησης της Σιγκαπούρης, το Ινστιτούτο Ανάπτυξης Διαχείρισης της Σιγκαπούρης και η Ακαδημία PSB. Πανεπιστήμια όπως το Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, το Πανεπιστήμιο RMIT, το Πανεπιστήμιο Southern Cross, το Πανεπιστήμιο Queen Margaret και το Cardiff Metropolitan University έχουν δημιουργήσει τέτοια εξωτερικά προγράμματα σπουδών στη Σιγκαπούρη για να παρέχουν στους ντόπιους και ξένους (ιδίως Ασιάτες) φοιτητές την ευκαιρία να αποκτήσουν δυτική πανεπιστημιακή εκπαίδευση σε ένα κλάσμα του κόστους που θα χρειαζόταν για σπουδές στον Καναδά. το Ηνωμένο Βασίλειο, τις ΗΠΑ ή την Αυστραλία.

[Το Singapore-Cambridge General Certificate of Education Advanced Level]

Το Singapore-Cambridge General Certificate of Education Advanced Level (ή Singapore-Cambridge GCE A-Level) είναι μια εξέταση GCE Advanced Level που διεξάγεται ετησίως στη Σιγκαπούρη και διεξάγεται από κοινού από το Υπουργείο Παιδείας (MOE), το Singapore Examinations and Assessment Board (SEAB) και το University of Cambridge Local Examinations Syndicate (UCLES).

Η εξέταση πραγματοποιείται από μαθητές μετά την ολοκλήρωση της προ-πανεπιστημιακής εκπαίδευσής τους σε κατώτερα κολέγια (JC) και κεντρικά ινστιτούτα και είναι επίσης ανοικτή σε ιδιώτες υποψηφίους. Η εξέταση GCE A-Level Σιγκαπούρης-Cambridge έχει αποσυνδεθεί από τις βρετανικές εξετάσεις A-Level από το 2002, όταν το MOE ανέλαβε τη διαχείριση των εθνικών εξετάσεων, λόγω διαφορών στα εκπαιδευτικά συστήματα των δύο χωρών.

Πρόγραμμα σπουδών

Το A-Level της Σιγκαπούρης διαφέρει ως προς τη δομή των εξετάσεων και το περιεχόμενο του θέματος από το GCE A-Level σε άλλες χώρες όπως το Ηνωμένο Βασίλειο.

Σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών, οι υποψήφιοι επιλέγουν μαθήματα από τρία επίπεδα σπουδών, δηλαδή Higher-1 (H1), Higher-2 (H2) και Higher-3 (H3). Τα μαθήματα σε επίπεδο H1 αποτελούν μία ακαδημαϊκή μονάδα, τα μαθήματα σε επίπεδο H2 αποτελούν δύο ακαδημαϊκές μονάδες, το H3 αν ληφθεί τότε δεν υπολογίζεται ως πρόσθετη μονάδα καθώς λαμβάνεται ως εις βάθος επέκταση του H2. Τα θέματα χωρίζονται σε γνώσεις, δεξιότητες και θέματα που βασίζονται στο περιεχόμενο. Τα μαθήματα δεξιοτήτων γνώσης περιλαμβάνουν Γενική Εργασία, Γνώση και Έρευνα και Εργασία Έργου. Τα μαθήματα που βασίζονται στο περιεχόμενο χωρίζονται σε γλώσσες, ανθρωπιστικές επιστήμες και τέχνες, μαθηματικά και επιστήμες.

Γενική εργασία και γνώση & έρευνα
Το General Paper (ή GP) σε επίπεδο H1 ή το Knowledge & Inquiry (ή KI) σε επίπεδο H2 είναι ακαδημαϊκά μαθήματα που προσφέρονται στην εξέταση Singapore-Cambridge GCE Advanced Level στο εκπαιδευτικό σύστημα της Σιγκαπούρης. Όλοι οι προ-πανεπιστημιακοί φοιτητές στη Σιγκαπούρη που αναλαμβάνουν την εξέταση Singapore-Cambridge GCE Advanced Level υποχρεούνται να δώσουν αυτά τα μαθήματα.
Η Γενική Εργασία στοχεύει να αναπτύξει στους μαθητές την ικανότητα να σκέφτονται κριτικά, να κατασκευάζουν πειστικά επιχειρήματα και να επικοινωνούν τις ιδέες τους χρησιμοποιώντας σαφή, ακριβή και αποτελεσματική γλώσσα. Επιπλέον, το General Paper ενθαρρύνει τους μαθητές να διερευνήσουν μια σειρά βασικών ζητημάτων παγκόσμιας και τοπικής σημασίας και παρέχει στους φοιτητές μια καλή βάση για να ευδοκιμήσουν σε έναν ταχέως μεταβαλλόμενο κόσμο.

[H1 Μαθηματικά]
100 βαθμοί, 3 ώρες
Ενότητα Α (Καθαρά Μαθηματικά): 40 βαθμοί
Ενότητα Β (Πιθανότητες &; Στατιστική): 60 βαθμοί
Η εξέταση H1 Maths αποτελείται από δύο ενότητες, την Ενότητα Α (εστιάζοντας σε θέματα Καθαρών Μαθηματικών) και την Ενότητα Β (εστιάζοντας στις Πιθανότητες και τη Στατιστική). Κάθε ενότητα έχει περίπου 5-8 ερωτήσεις διαφορετικής διάρκειας και βαθμολογίας, με τουλάχιστον 2 ερωτήσεις (τουλάχιστον 1 σε κάθε ενότητα) σχετικά με την εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά πλαίσια, συμπεριλαμβανομένων εκείνων των Επιχειρηματικών και Κοινωνικών Επιστημών. Σε αυτές τις ερωτήσεις εφαρμογής, οι οποίες θα έχουν ελάχιστη βαρύτητα 12 βαθμών, οι μαθητές αναμένεται επίσης να συνθέσουν απαντήσεις μέσω της ενσωμάτωσης εννοιών και δεξιοτήτων από διαφορετικά θέματα.
[H2 Μαθηματικά]
Ενότητα 1 (μόνο Καθαρά Μαθηματικά)
100 βαθμοί, 3 ώρες
Ενότητα 2
: 100 βαθμοί, 3 ώρες
Ενότητα Α (Καθαρά Μαθηματικά): 40 βαθμοί
Ενότητα Β (Πιθανότητες &; Στατιστική): 60 βαθμοί

Όλοι οι μαθητές του H2 Maths πρέπει να καθίσουν για 2 εργασίες, και οι δύο με ίση βαρύτητα. Το Paper 1 είναι ένα Pure Maths paper που αποτελείται από 10-12 ερωτήσεις διαφόρων βαθμών και ειδών, με τουλάχιστον 2 ερωτήσεις σχετικά με την εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά περιβάλλοντα. Κάθε ερώτηση εφαρμογής θα έχει βαρύτητα 12 βαθμών και μπορεί να απαιτεί έννοιες και δεξιότητες από περισσότερα από ένα θέματα.
Η Ενότητα 2 περιλαμβάνει τις Ενότητες Α και Β και περιλαμβάνει ερωτήσεις από θέματα Καθαρών Μαθηματικών και Πιθανοτήτων και Στατιστικής. Κάθε ενότητα έχει περίπου 5-8 ερωτήσεις ποικίλης έκτασης και βαθμολογίας, με τουλάχιστον 2 ερωτήσεις (μόνο στην Ενότητα Β) σχετικά με την εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά πλαίσια, συμπεριλαμβανομένων εκείνων των Επιχειρηματικών και Κοινωνικών Επιστημών. Σε αυτές τις ερωτήσεις εφαρμογής, οι οποίες θα έχουν ελάχιστη βαρύτητα 12 βαθμών, οι μαθητές αναμένεται επίσης να συνθέσουν απαντήσεις μέσω της ενσωμάτωσης εννοιών και δεξιοτήτων από διαφορετικά θέματα.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗΣ σε συνεργασία με
CAMBRIDGE ASSESSMENT INTERNATIONAL EDUCATION.

Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Τυπικού Επιπέδου.
GCE O-Level
October/November 2023
Paper 2
2 ώρες 15 λεπτά
Στοιχειώδη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Οι υποψήφιοι απαντούν στο Έγγραφο Ερωτήσεων.

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΩΤΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε τον αριθμό σας, τον αριθμό ευρετηρίου και το όνομά σας στο έργο που παραδίδετε.
Γράψτε με σκούρο μπλε ή μαύρο στυλό.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μολύβι HB για οποιαδήποτε διαγράμματα ή γραφήματα. Μη χρησιμοποιείτε συνδετήρες, κόλλα ή διορθωτικό υγρό. ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΤΕ πάνω στα BARCODE.

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.
Ο αριθμός των βαθμών δίνεται σε παρενθέσεις[ ]στο τέλος κάθε ερώτησης ή μέρους ερώτησης.

Εάν απαιτείται εργασία για οποιαδήποτε ερώτηση, πρέπει να εμφανίζεται μαζί με την απάντηση.
Η παράλειψη βασικής εργασίας θα έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια βαθμών.
Το σύνολο των βαθμών για αυτό το τεστ είναι 90.

Αναμένεται η χρήση εγκεκριμένης επιστημονικής αριθμομηχανής, όπου χρειάζεται
Εάν ο βαθμός ακρίβειας δεν προσδιορίζεται στην ερώτηση και εάν η απάντηση δεν είναι ακριβής, δώστε την απάντηση σε τρία σημαντικά στοιχεία. Δώστε τις απαντήσεις σε μοίρες με ένα δεκαδικό ψηφίο.
Για το π, χρησιμοποιήστε είτε την τιμή της αριθμομηχανής είτε 3,142.

Μαθηματικοί Τύποι

Ανατοκισμός

$$\textbf{Total amount} = \boldsymbol{P}\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{r}}{\mathbf{100}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

Υπολογισμοί

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου = $\boldsymbol{\pi r l}$

Εμβαδόν σφαίρας = $\mathbf{4}\boldsymbol{\pi r}^{\mathbf{2}}$

Όγκος κώνου= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi r}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{h}$

Όγκος σφαίρας= $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi r}^{\mathbf{3}}$

Εμβαδόν τριγώνου $\boldsymbol{ABC} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ab}\,\mathbf{sin}\boldsymbol{C}$

Μήκος τόξου= $\boldsymbol{r\theta}$,όπου το $\boldsymbol{\theta}$ είναι σε ακτίνια

Εμβαδόν τομέα= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}$,όπου $\boldsymbol{\theta}$ είναι σε ακτίνια

Τριγωνομετρία

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{bc}\cos \boldsymbol{A}$$

Στατιστική

Μέσος όρος= $\frac{\sum \boldsymbol{fx}}{\sum \boldsymbol{f}}$

Τυπική απόκλιση= $\sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{fx}^{\mathbf{2}}}{\sum \boldsymbol{f}} - \left(\frac{\sum \boldsymbol{fx}}{\sum \boldsymbol{f}}\right)^{\mathbf{2}}}$

1. Ο Sima και ο Ken μοιράζονται $\$480$ σε αναλογία $9:7$. Βρείτε πόσα πήρε ο καθένας. [2]

Λύση

Το $1/(9+7) = 1/16$ των 480 είναι $\$30$. Άρα ο Sima πήρε $9 \cdot 30 = \boxed{\$270}$ και ο Ken $7 \cdot 30 = \boxed{\$210}$

2.

a. Αν $\sin x^\circ = 0,9301$ βρείτε δύο πιθανές τιμές του x για $0 \leq x \leq 180$. [2]

b. Μετατρέψτε τα $1,36$ ακτίνια σε μοίρες. [1]

Λύση

a. Έχω $x^\circ = \sin^{-1} 0,9301 \vee x^\circ = 180^\circ - \sin^{-1} 0,9301 \Leftrightarrow$
$x^\circ = 68,4504085^\circ = \boxed{68,5^\circ}(1\sigma.\psi) \vee x^\circ = 111,549591 = \boxed{111,5^\circ}$.

b. Έχω $1,36\, rad = 1,36\, \frac{180^\circ}{\pi} = 77,922^\circ = \boxed{77,9^\circ}$

3.

a. Απλοποιήστε $(2c^3d^2)^3$.[1]

b. Έστω $16 \times 5^4 + 9 \times 25^2 = 5^k$. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να βρείτε την τιμή του k. Δείξτε την εργασία σας. [2]

Λύση

a. Έχω $(2c^3d^2)^3 = \boxed{8c^9d^6}$

b. Έχω $16 \times 5^4 + 9 \times 5^4 = 5^k \Leftrightarrow 25(5^4) = 5^k \Leftrightarrow 5^2(5^4) = 5^k \Leftrightarrow 5^6 = 5^k \Leftrightarrow \boxed{k = 6}$

4.

a. Έστω $M = p^{16} \times q^8 \times r^{12}$, όπου p, q και r. Εξηγήστε γιατί ο M είναι τέλειο τετράγωνο. [1]

b. Έστω $S = 2^8 \times 7^{10} \times 11^{15}$

i. Ο αριθμός $N = S \times k$ είναι τέλειος κύβος. Βρείτε την μικρότερη πιθανή τιμή του k. Γράψτε την απάντησή σας ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. [1]

ii. Έστω $T = 2^{20} \times 7^8 \times 11^{15}$. Βρείτε το ΕΚΠ των S και T ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. [1]

Λύση

a. Έχω $M = p^{16} \times q^8 \times r^{12} = (p^8)^2 \times (q^4)^2 \times (r^6)^2 = (p^8 \times q^4 \times r^6)^2$.

b.

i. Θέλω $2^8 \times 7^{10} \times 11^{15} \times k = \left(2^\alpha \times 7^\beta \times 11^\gamma\right)^3 = 2^{3\alpha} \times 7^{3\beta} \times 11^{3\gamma} \Rightarrow$

$k = 2^{3\alpha-8} \times 7^{3\beta-10} \times 11^{3\gamma-15}$. Αφού k φυσικός πρέπει $\begin{cases} 3\alpha - 8 \geq 0 \\ 3\beta - 10 \geq 0 \\ 3\gamma - 15 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 3 \\ \beta \geq 4 \\ \gamma \geq 5 \end{cases} \Rightarrow$

ο μικρότερος k προκύπτει για $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 5 \end{cases} \Rightarrow k = 2^{9-8} \times 7^{12-10} \times 11^{15-15} = \boxed{2^1 \times 7^2}$

ii. Έχω $S = 2^8 \times 7^{10} \times 11^{15}$ και $T = 2^{20} \times 7^8 \times 11^{15}$, άρα $\textit{ΕΚΠ} = \boxed{2^{20} \times 7^{10} \times 11^{15}}$

5. Ο Ravi επενδύει \$4500 με επιτόκιο 0,25% το μήνα ανατοκιζόμενα.

a. Εξηγήστε γιατί το επιτόκιο του πρώτου έτους δεν είναι το 3% των \$4500. [1]

b. Υπολογίστε την αξία της επένδυσής του στο τέλος των 12 μηνών. [2]

Λύση

a. Ισχύει ότι το επιτόκιο είναι ίσο με $4500(1 + \frac{0,25}{100})^{12} - 4500 = \$136,87 \neq \frac{3}{100}(4500) = \$135$.

b. Η αξία της επένδυσής θα είναι $4500 + 136,87 = \boxed{\$4636,87}$

6. Η έκφραση $x^2 - 14x + b$ είναι ισοδύναμη με την $(x + a)^2 - 25$.

a. Βρείτε την τιμή του a και του b. [2]

b. Η καμπύλη $y = x^2 - 14x + b$ σχεδιάζεται. Γράψτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της καμπύλης. [1]

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{x^2-14x+b=x^2-2\cdot 7x+7^2-7^2+b=(x-7)^2-7^2+b=(x+a)^2-25}$.
Άρα $\boxed{\boldsymbol{a=-7}}$ και $\boldsymbol{-49+b=-25 \Leftrightarrow b=-25+49 \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{b=24}}$

b. Έχω $\boldsymbol{y=(x-7)^2-25}$, άρα ο άξονας συμμετρίας της είναι ο $\boldsymbol{x=7}$.

7.

a. O Adrian έχει στη συλλογή του 550 γραμματόσημα. Αυξάνει τον αριθμό τους κατά 18%. Βρείτε τώρα τον αριθμό των γραμματοσήμων στη συλλογή του. [2]

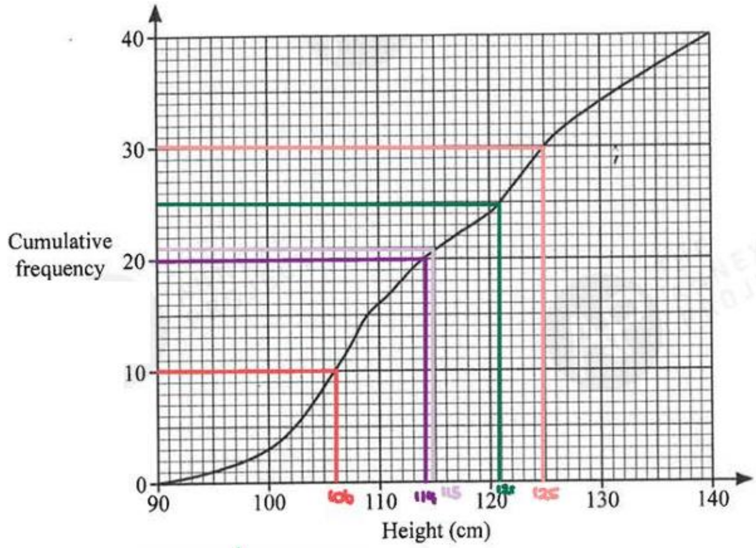
b. Η Μάι μαζεύει καρτ ποστάλ. Το 28% των καρτ ποστάλ είναι από την Αυστραλία. Το 55% των υπόλοιπων καρτ ποστάλ είναι από την Ευρώπη. Οι άλλες 81 καρτ ποστάλ είναι από την Ασία. Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των καρτ ποστάλ της συλλογής της. [2]

Λύση

a. O Adrian θα έχει $\boldsymbol{1,18\cdot 550=}$ $\boxed{\boldsymbol{649}}$ γραμματόσημα

b. Οι 81 καρτ ποστάλ αποτελούν το $\boldsymbol{100\%-28\%-55\%(100\%-28\%)=32,4\%=\frac{81\cdot 0,4}{100}=\frac{81}{250}}$ του συνόλου αυτών που έχει . Άρα έχει συνολικά $\boxed{\boldsymbol{250}}$ καρτ ποστάλ.

8. Μια ομάδα 40 παιδιών επισκέπτεται ένα θεματικό πάρκο. Το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων αντιπροσωπεύει τα ύψη τους.



a. Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα εκτιμήστε

i. Τη διάμεσο των υψών των παιδιών [1]

ii. Το ενδοτεταρτημοριακό πλάτος των υψών [2]

b. Για να επιτραπεί η είσοδος σε μια πτέρυγα του θεματικού πάρκου τα παιδιά πρέπει να έχουν ένα ελάχιστο ύψος, h cm. Μόνο σε 15 από τα παιδιά επιτράπηκε η είσοδος. Βρείτε το h. [1]

c. Η πληροφορία του διαγράμματος αθροιστικών συχνοτήτων φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

Height(Hcm)	$\boldsymbol{90<H\leqslant 100}$	$\boldsymbol{100<H\leqslant 110}$	$\boldsymbol{110<H\leqslant 120}$	$\boldsymbol{120<H\leqslant 130}$	$\boldsymbol{130<H\leqslant 140}$
Frequency	**3**	**13**	**8**	**10**	**6**

i. Βρείτε μια εκτίμηση του μέσου όρου των υψών των παιδιών. [1]

ii. Βρείτε μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των υψών των παιδιών. [1]

Λύση

a.

i. Έχω 40 παιδιά άρα η διάμεσος είναι ίση με $\boldsymbol{\delta=\frac{x_{20}+x_{21}}{2}=\frac{114+115}{2}=}$ $\boxed{\boldsymbol{114,5}}$ cm

ii. Το ενδοτεταρτημοριακό πλάτος είναι $\boldsymbol{x_{30}-x_{10}=125-106=}$ $\boxed{\boldsymbol{19}}$ cm

b. Σε $\boldsymbol{40-15=25}$ παιδιά δεν επιτράπηκε η είσοδος. Άρα έχω $\boldsymbol{h=x_{25}=}$ $\boxed{\boldsymbol{121}}$ $\boldsymbol{cm}$

c.

i. Έχω Μέσος όρος$=\boldsymbol{\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}=\frac{3(95)+13(105)+8(115)+10(125)+6(135)}{3+13+8+10+6}=115,75=}$ $\boxed{\boldsymbol{116}}$ cm.

ii. Έχω $\frac{\sum fx^2}{\sum f} = \frac{3(95)^2+13(105)^2+8(115)^2+10(125)^2+6(135)^2}{3+13+8+10+6} = \mathbf{13545}$.

Άρα τυπική απόκλιση= $\sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{13545 - (115,75)^2}} = \boxed{\mathbf{12,1}}$ cm.

9. Η Anhaa ταξιδεύει από τη Σιγκαπούρη στη Γαλλία. Θέλει να αλλάξει 780 δολάρια Σιγκαπούρης (\$) σε ευρώ (€). Θα έπαιρνε 1€ περισσότερα εάν άλλαζε τα χρήματα στη Σιγκαπούρη. Η συναλλαγματική ισοτιμία στη Γαλλία είναι €1=\$1,5953. Υπολογίστε τη συναλλαγματική ισοτιμία στη Σιγκαπούρη. Δώστε την απάντησή σας σε ευρώ ανά δολάριο Σιγκαπούρης. [2]

Λύση

Στην Γαλλία πήρε $\mathbf{780: 1,5953 = €488,93625}$. Στην Σιγκαπούρη θα έπαιρνε $\mathbf{€489,93625}$. Άρα στην Σιγκαπούρη η συναλλαγματική ισοτιμία είναι $\mathbf{489,93625: 780 = 0,628123} = \boxed{\mathbf{0,6281}}$ ευρώ ανά δολάριο Σιγκαπούρης.

10. Το $\boldsymbol{A}$ είναι το σημείο $(\mathbf{-2,3})$ και το $\boldsymbol{B}$ είναι το σημείο $(\boldsymbol{p,q})$. Η κλίση της γραμμής $\boldsymbol{AB}$ είναι $\frac{1}{3}$. Βρείτε το $\boldsymbol{p}$ σε σχέση με το $\boldsymbol{q}$. Δώστε την απάντησή σας στην απλούστερη μορφή της. [2]

Λύση

Έχω $\frac{3-q}{-2-p} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathbf{3(3-q) = 1(-2-p) \Leftrightarrow 9-3q = -2-p \Leftrightarrow -3q = -11-p} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{p = 3q-11}}$.

11. Γράψτε σε μορφή κλάσματος την έκφραση $\frac{3a}{4a-1} - \frac{2}{3a+1}$ [2]

Λύση

Έχω $\frac{3a}{4a-1} - \frac{2}{3a+1} = \frac{3a(3a+1)}{(4a-1)(3a+1)} - \frac{2(4a-1)}{(4a-1)(3a+1)} = \frac{9a^2+3a-8a+2}{(8a-1)(3a+1)} = \boxed{\frac{9a^2-5a+2}{(4a-1)(3a+1)}}$

12.

a. Παραγοντοποιήστε πλήρως

i. $\boldsymbol{x^3y + xy^3}$. [1]

ii. $\mathbf{15cd - 10ce + 12d^2 - 8de}$. [2]

b. Αναπτύξτε και απλοποιήστε $(\mathbf{2x+3a})(\mathbf{5x-2a})$. [2]

Λύση

a.

i. Έχω $\boldsymbol{x^3y + xy^3} = \boxed{\boldsymbol{xy(x^2+y^2)}}$

ii. $\mathbf{15cd - 10ce + 12d^2 - 8de = 5c(3d-2e) + 4d(3d-2e)} = \boxed{\mathbf{(5c+4d)(3d-2e)}}$

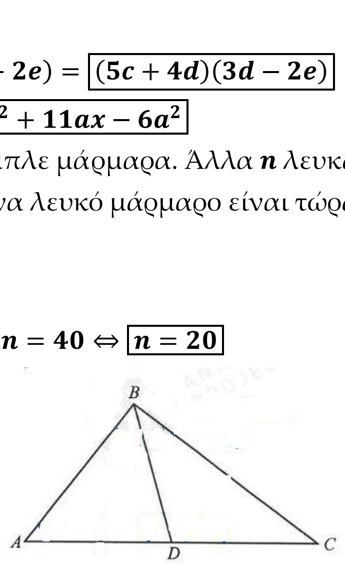
b. Έχω $(\mathbf{2x+3a})(\mathbf{5x-2a}) = \mathbf{10x^2 + 15ax - 4ax - 6a^2} = \boxed{\mathbf{10x^2 + 11ax - 6a^2}}$

13. Μια τσάντα περιέχει 12 κόκκινα μάρμαρα, 7 λευκά μάρμαρα και 6 μπλε μάρμαρα. Άλλα $\boldsymbol{n}$ λευκά μάρμαρα προστίθενται στην τσάντα. Η πιθανότητα να επιλέξετε ένα λευκό μάρμαρο είναι τώρα $\frac{3}{5}$. Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{n}$. [2]

Λύση

Έχω $\frac{n+7}{12+7+6+n} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \mathbf{5(n+7) = 3(25+n) \Leftrightarrow 5n+35 = 75+3n \Leftrightarrow 2n = 40} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{n = 20}}$

14. Το ABC είναι ένα τρίγωνο. Το D είναι ένα σημείο στο AC έτσι ώστε να ισαπέχει από τα σημεία A,B και C. Εξηγήστε γιατί η γωνία ABC είναι ορθή. [2]



Λύση

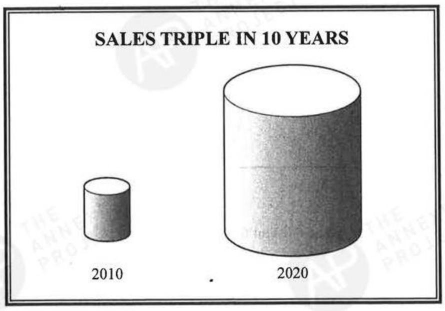
Αφού το D ισαπέχει από τα σημεία A,B και C, ένας κύκλος με κέντρο το D και διάμετρο AC περνά από το B. Άρα η γωνία ABC βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.

15. Εξηγήστε γιατί το $(\mathbf{2n-1})^2 - \mathbf{2(n-5)(2n-1)}$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για όλους τους ακέραιους n. [3]

Λύση

Έχω $(\boldsymbol{2n-1})^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{2}(\boldsymbol{n-5})(\boldsymbol{2n-1}) = (\boldsymbol{2n-1})(\boldsymbol{2n-1-2}(\boldsymbol{n-5})) = (\boldsymbol{2n-1})(\boldsymbol{2n-1-2n+10}) = \boldsymbol{9}(\boldsymbol{2n-1}) = \boldsymbol{3}(\boldsymbol{3}(\boldsymbol{2n-1})) = \boldsymbol{3k}$, δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.

16. Μια εταιρεία πουλά κονσερβοποιημένα τρόφιμα. Η εταιρεία εμφανίζει τα στοιχεία των πωλήσεων με αυτό το διάγραμμα. ΠΩΛΗΣΕΙΣ ΤΡΙΠΛΑΣΙΕΣ ΣΕ 10 ΧΡΟΝΙΑ. Το διάγραμμα δείχνει σχέδια δύο γεωμετρικά όμοιων στερεών. Οι διαστάσεις του κυλίνδρου για το 2020 είναι τρεις φορές τις αντίστοιχες διαστάσεις του κυλίνδρου για το 2010. Το γράφημα είναι παραπλανητικό. Εξηγήστε τι σημαίνει για τις πωλήσεις κονσερβοποιημένων τροφίμων από την εταιρεία. [1]



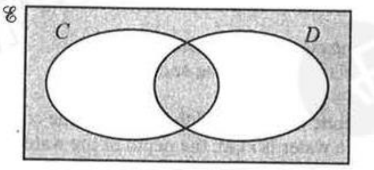
Λύση

Λόγω ομοιότητας των κυλίνδρων η αναλογία όγκων τους είναι $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$ που υποδηλώνει ότι οι πωλήσεις αυξήθηκαν υπερβολικά, κατά 27 φορές, και όχι 3 φορές που είναι η πραγματικότητα.

17.

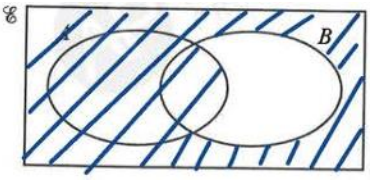
a. Σε ένα διάγραμμα Venn, σκιάστε την περιοχή που δηλώνει το σύνολο $\boldsymbol{A \cup B'}$. [1]

b. Χρησιμοποιήστε συμβολισμό συνόλων για να περιγράψετε τη σκιασμένη περιοχή του



σχήματος [1]

Λύση



a.

b. $\boxed{(\boldsymbol{CUD})' \cup (\boldsymbol{C \cap D})}$

18. Το διάγραμμα Α δείχνει έναν σφραγισμένο κώνο που περιέχει λίγο νερό. Το διάγραμμα Β δείχνει τη διατομή του κώνου και του νερού. Η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι 10 cm και το ύψος του κώνου είναι 20 cm. Η ακτίνα της επιφάνειας του νερού είναι $\boldsymbol{r}$ cm, το βάθος του νερού είναι $\boldsymbol{d}$ cm και η επιφάνεια του νερού είναι $\boldsymbol{h}$ cm κάτω από την κορυφή του κώνου.

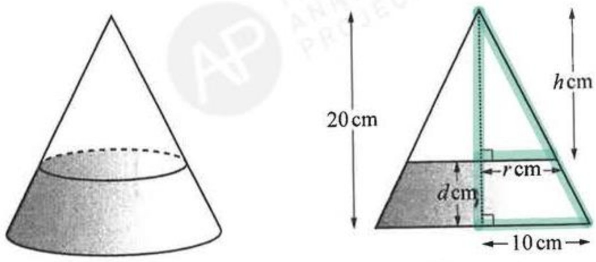


Diagram A Diagram B

a. Δείξτε ότι το βάθος του νερού, $\boldsymbol{d}$, είναι $\boldsymbol{20 - 2r}$. [1]

b. Ο όγκος του νερού στον κώνο είναι ίσος με τον όγκο του κενού χώρου στον κώνο. Υπολογίστε το d. [3]

Λύση

a. Από την ομοιότητα των δυο πράσινων τριγώνων έχω $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{10}} \Rightarrow \boldsymbol{20r = 10h \Rightarrow 20r = 10(20-d) \Rightarrow 20r = 200 - 10d \Rightarrow 10d = 200 - 20r} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d = 20 - 2r}}$

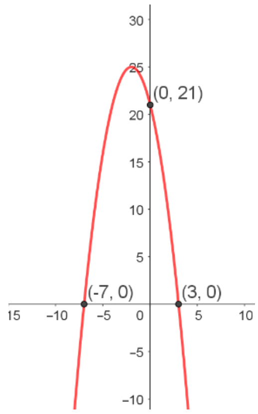
b. Έχω $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(10)^2(20) - \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 2r^2 h = 2000 \Rightarrow 2r^2(20-d) = 2000 \Rightarrow$ $2r^2(20 - 20 + 2r) = 2000 \Rightarrow 4r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = 500 \Rightarrow r = \sqrt[3]{500}$.
Άρα $d = 20 - 2\sqrt[3]{500} = \boxed{4,13}$ cm

19. Σχεδιάστε το γράφημα της $y = -(x-3)(x+7)$. Δείξτε ξεκάθαρα που τέμνει τους άξονες. [2]

Λύση

Για x=0, y=21, Άρα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0,21).

Για $y = 0$, $x = 3 \vee x = -7$. Άρα τέμνει τον άξονα των x στα σημεία (3,0) και (-7,0). Επιπλέον η παραβολή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Οπότε έχουμε το διπλανό γράφημα.



20. Απλοποιήστε $\frac{3x^2-8x-16}{(2x+1)^2-(x+3)^2}$. [3]

Λύση

Έχω $\frac{3x^2-8x-16}{(2x+1)^2-(x+3)^2} = \frac{(3x+4)(x-4)}{(2x+1-(x+3))(2x+1+(x+3))} = \frac{(3x+4)(x-4)}{(x-2)(3x+4)} = \boxed{\frac{x-4}{x-2}}$

21. Ένα κατάστημα πουλά σακούλες με φιστίκια και καρύδια. Ένα σακουλάκι με φιστίκια περιέχει 25,8 γραμμάρια πρωτεΐνης, 49,2 γραμμάρια λίπους και 16,1 γραμμάρια υδατάνθρακες και κοστίζει 1,60 δολάρια. Μια σακούλα καρύδια περιέχει x g πρωτεΐνης, 68,5 γραμμάρια λίπους και 4,2 γραμμάρια υδατάνθρακες και κοστίζει 2,80 δολάρια. Το περιεχόμενο των σακουλιών περιγράφεται μέσω του πίνακα $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 25,8 & 49,2 & 16,1 \\ x & 68,5 & 4,2 \end{pmatrix}$. Η Namita αγοράζει 4 σακούλες φιστίκια και 3 σακούλες καρύδια. Η Sian αγοράζει 5 σακουλάκια φιστίκια και 2 σακούλες καρύδια. Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να αντιπροσωπευτούν από τον πίνακα $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Βρείτε, σε όρους x, τον πίνακα $\boldsymbol{T} = \mathbf{BA}$.[2]

b. Οι ξηροί καρποί που αγόρασε η Namita περιέχουν 5,6 g περισσότερη πρωτεΐνη από τους ξηρούς καρπούς της Sian. Βρείτε την τιμή του x. [2]

c. Τα στοιχεία του πίνακα M, όπου $\mathbf{M} = \mathbf{BD}$, αντιπροσωπεύουν το συνολικό κόστος, σε δολάρια, των σακουλιών από ξηρούς καρπούς που αγόρασαν η Namita και η Sian. Γράψτε τον πίνακα $\mathbf{D}$. [1]

Λύση

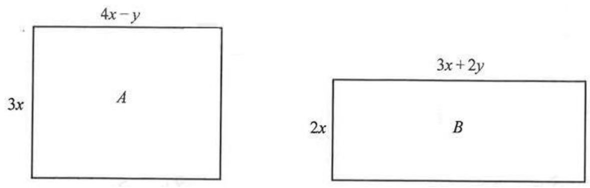
a. Έχω

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25,8 & 49,2 & 16,1 \\ x & 68,5 & 4,2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(25,8)+3x & 4(49,2)+3(68,5) & 4(16,1)+3(4,2) \\ 5(25,8)+2x & 5(49,2)+2(68,5) & 5(16,1)+2(4,2) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 103,2+3x & 402,3 & 77 \\ 129+2x & 383 & 88,9 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

b. Έχω $103,2 + 3x = 5,6 + 129 + 2x \Rightarrow \boxed{x = 31,4}$

c. Έχω $\boxed{\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1,60 \\ 2,80 \end{pmatrix}}$

22. Το διάγραμμα δείχνει δύο ορθογώνια, A και B. Εμφανίζονται οι διαστάσεις, σε εκατοστά, των δύο ορθογωνίων.



a. Τα δύο ορθογώνια έχουν ίσα εμβαδά. Βρείτε το y σε όρους x. Δώστε την απάντησή σας στην απλούστερη μορφή της. [2]

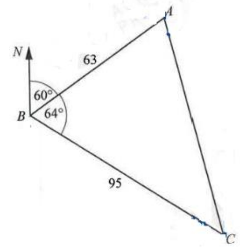
b. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου B είναι 16cm μεγαλύτερη από την περίμετρο του ορθογωνίου A. Βρείτε την τιμή του x. [3]

Λύση

a. Έχω $3x(4x-y)=2x(3x+2y) \Rightarrow 12x^2-3xy=6x^2+4xy \Rightarrow 6x^2=7xy \Rightarrow 6x=7y \Rightarrow \boxed{y=\frac{6x}{7}}$

b. Έχω $2(2x+3x+2y)=2\big(3x+(4x-y)\big)+16 \Rightarrow 10x+4y=14x-2y+16 \Rightarrow -4x+6y=16 \Rightarrow -4x+6\left(\frac{6x}{7}\right)=16 \Rightarrow \boxed{x=14}$

23. Τα A, B και C είναι τρία σημεία σε οριζόντιο έδαφος. $BA=63$m και το bearing??? του A από το B είναι 060°. $BC=95$ m και γωνία $ABC=64°$.



a. Βρείτε το bearing του B από το C. [1]

b. Βρείτε την απόσταση AC. [3]

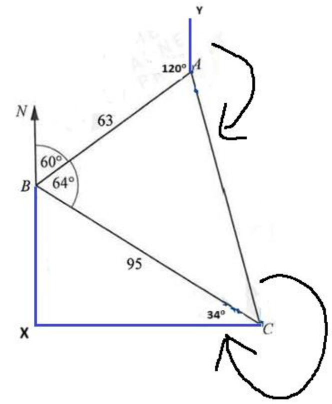
c. Βρείτε το bearing του C από το A. [3]

Λύση

a. Έχω $\angle XBC=180°-60°-64°=56°$
και $\angle XCB=180°-90°-56°=34°$
Άρα το bearing του B από το C είναι $270°+34°=\boxed{304°}$

b. Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε
$AC=63^2+95^2-2(63)(95)\cos 64° \Rightarrow AC=\sqrt{7746,697373}=88,01532465=\boxed{88,0}$ m

c. Έχω $\angle YAB=180°-60°=120°$και από το νόμο των ημιτόνων έχουμε $\frac{\sin 64°}{88,01532465}=\frac{\sin B\hat{A}C}{95} \Rightarrow B\hat{A}C=75,959$. Άρα το bearing του C από το A είναι $360°-B\hat{A}C-120°=164,041°=\boxed{164°}$



24. Η ένταση, $I\ watts/m^2$, της ακτινοβολίας από τον Ήλιο είναι αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης, D σε εκατομμύρια km, από τον Ήλιο.

a. Η μέση απόσταση του Άρη από τον Ήλιο είναι 228 εκατομμύρια χιλιόμετρα. Η μέση απόσταση της Γης από τον Ήλιο είναι 150 εκατομμύρια χιλιόμετρα. Η ένταση της ακτινοβολίας του Ήλιου στη Γη είναι περίπου $1370\ watt/m^2$. Όταν ο Άρης βρίσκεται στη μέση απόσταση του από τον Ήλιο, υπολογίστε την κατά προσέγγιση ένταση του Ηλιακή ακτινοβολία. [2]

b. Εξηγήστε τι συμβαίνει με την ένταση της ακτινοβολίας του Ήλιου όταν η απόσταση από τον Ήλιο είναι διπλάσια. [1]

Λύση

a. Έχω $I=\frac{k}{D^2}$. Όταν $D=150, I=1370$. Άρα $1370=\frac{k}{(150)^2} \Rightarrow k=30825000$. Όταν $D=228$, έχω $I=\frac{30825000}{(228)^2}=592,97=\boxed{593 watts/m^2}$

b. Η νέα ένταση θα είναι στο ένα τέταρτο της τιμής της αρχικής έντασης.

25. Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γραμμικής ακολουθίας είναι $\frac{1}{2}n(5n+1)$.

a. Βρείτε τους 3 πρώτους όρους της ακολουθίας. [2]

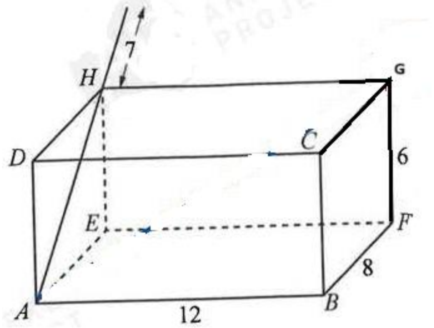
b. Βρείτε μια έκφραση για τον n-οστό όρο της ακολουθίας. [1]

Λύση

a. Έστω $S_n=\frac{1}{2}n(5n+1)$ και a_n οι όροι της ακολουθίας. Έχω $S_3=\frac{1}{2}3(15+1)=24$, $S_2=\frac{1}{2}2(10+1)=11$, $S_1=\frac{1}{2}1(5+1)=3$. Τότε $a_3=S_3-S_2=13$, $a_2=S_2-S_1=8$ και $a_1=S_1=3$. Άρα οι τρεις πρώτοι όροι είναι οι $\boxed{3}$, $\boxed{8}$ και $\boxed{13}$.

b. Έχω $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n(5n+1) - \frac{1}{2}(n-1)(5(n-1)+1) = \frac{1}{2}[n(5n+1) - (n-1)(5n-4)] = \frac{1}{2}[n + 5n + 4n - 4] = \frac{1}{2}[10n - 4] = \boxed{5n-2}$

26. Το διάγραμμα δείχνει ένα ανοιχτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 12 cm επί 8 cm επί 6 cm. Μία ράβδος τοποθετείται μέσα στο στερεό έναντι της έδρας $\boldsymbol{AEHD}$. Σε αυτή τη θέση, 7 cm της ράβδου προεξέχει έξω από το στερεό. Η θέση της ράβδου αλλάζει έτσι ώστε το μήκος έξω από το στερεό να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Υπολογίστε αυτό το μικρότερο μήκος. [4]



Λύση

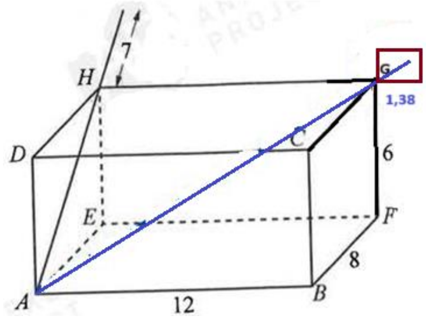
Έχω από πυθαγόρειο θεώρημα ότι $\boldsymbol{AH} = \sqrt{8^2+6^2} = \mathbf{10}$.

Άρα το μήκος της ράβδου είναι $\mathbf{10 + 7 = 17}$.

Για να προεξέχει όσο το δυνατόν λιγότερο η ράβδος, πρέπει να τοποθετεί κατα μήκος της διαγώνιου $\boldsymbol{AG}$.

Έχω $\boldsymbol{DG} = \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{208}$ και $(\sqrt{208})^2 + 6^2 = \boldsymbol{AG}^2 \Rightarrow \boldsymbol{AG} = \sqrt{244} < 17 = \sqrt{289}$.

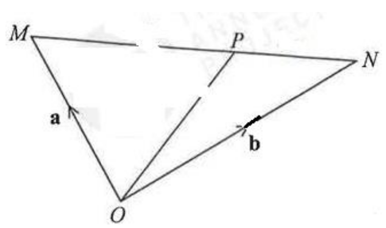
Άρα αυτό που προεξέχει έχει μήκος $17 - \sqrt{244} = \boxed{1{,}38}$ cm



27. Έστω το τρίγωνο $\boldsymbol{OMN}$, $\boldsymbol{P}$ σημείο του $\boldsymbol{MN}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{MP}:\boldsymbol{PN} = 3:2$. $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$.

a. Δείξτε ότι $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$. [2]

b. Το Q είναι σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{5}(\vec{a} + 9\vec{b})$.
Εξηγήστε γιατί τα σημεία $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{P}$ και $\mathbf{Q}$ είναι στην ίδια ευθεία. [3]



Λύση

a. Έχω $\overrightarrow{NM} = -\vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{NM} = \frac{2}{5}(-\vec{b} + \vec{a})$ και
$\overrightarrow{OP} = \vec{b} + \frac{2}{5}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a} = \frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$.

b. Έχω $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{5}(\vec{a} + 9\vec{b}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}(\vec{a} + 9\vec{b}) \Leftrightarrow -\vec{a} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}(\vec{a} + 9\vec{b}) \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}(6\vec{a} + 9\vec{b}) = \frac{3}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\overrightarrow{OP}$. Δηλαδή $\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OP}$, άρα τα σημεία $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{P}$ και $\mathbf{Q}$ είναι στην ίδια ευθεία.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗΣ σε συνεργασία με
CAMBRIDGE ASSESSMENT INTERNATIONAL EDUCATION.

Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Τυπικού Επιπέδου.
GCE O-Level
October/November 2023
Paper 1
2 ώρες 15 λεπτά
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Οι υποψήφιοι απαντούν στο Έγγραφο Ερωτήσεων.
Χωρίς Πρόσθετα υλικά

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΩΤΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε τον αριθμό σας, τον αριθμό ευρετηρίου και το όνομά σας στο έργο που παραδίδετε.
Γράψτε με σκούρο μπλε ή μαύρο στυλό.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μολύβι HB για οποιαδήποτε διαγράμματα ή γραφήματα. Μη χρησιμοποιείτε συνδετήρες, κόλλα ή διορθωτικό υγρό. ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΤΕ πάνω στα BARCODE.

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στα κενά που παρέχονται στην Ερωτήσεις.
Δώστε μη ακριβείς αριθμητικές απαντήσεις με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων ή 1 δεκαδικού ψηφίου στην περίπτωση των γωνιών σε μοίρες, εκτός εάν προσδιορίζεται διαφορετικό επίπεδο ακρίβειας στην ερώτηση.
Αναμένεται να χρησιμοποιήσετε μια εγκεκριμένη αριθμομηχανή, όπου απαιτείται.
Σας υπενθυμίζεται η ανάγκη για σαφή παρουσίαση στις απαντήσεις σας.
Ο αριθμός των βαθμών δίνεται σε παρενθέσεις[ ]στο τέλος κάθε ερώτησης ή μέρους ερώτησης.
Σύνολο βαθμών 90.

Τυπολόγιο

1. Άλγεβρα

Για την εξίσωση $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$,

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Διωνυμική επέκταση

$\boldsymbol{(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n}$, όπου $\boldsymbol{n}$ είναι ένας θετικός ακέραιος και $\boldsymbol{\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}}$

2. Τριγωνομετρία

Ταυτότητες

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\sec^2 A=1+\tan^2 A$$

$$\mathrm{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$$

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

$$\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$$

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

Τύποι για το τρίγωνο ABC

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$$

1. Βρείτε την τιμή της σταθεράς $\boldsymbol{c}$ έτσι ώστε η γραμμή $\boldsymbol{y = 2x + c}$ να είναι εφαπτομένη στην καμπύλη $\boldsymbol{y = x^2 + 3x + 1}$ [3]

Λύση

Για το σημείο επαφής ισχύει ότι $\boldsymbol{x^2 + 3x + 1 = 2x + c \Rightarrow x^2 + x + (1 - c) = 0}$

Αν έχει διπλή ρίζα η εξίσωση τότε η ευθεία εφάπτεται στην παραβολή, άρα αρκεί

$$\boldsymbol{\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 1 - 4(1)(1 - c) = 0 \Rightarrow 1 - 4 + 4c = 0 \Rightarrow 4c = 3 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{4}}}$$

2. Γράψτε την έκφραση $\frac{18+11x-2x^2}{(x-1)(x+2)^2}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων. [5]

Λύση

Θέλω $\frac{18+11x-2x^2}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{18 + 11x - 2x^2 = A(x + 2)^2 + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)}$$

Για $\boldsymbol{x = 1}$, έχω $\boldsymbol{A = \frac{18+11-2}{3^2} = 3}$

Για $\boldsymbol{x = -2}$, έχω $\boldsymbol{18 - 22 - 8 = C(-3) \Rightarrow -12 = -3C \Rightarrow C = 4}$

Για $\boldsymbol{x = 0}$, έχω $\boldsymbol{18 = 3(4) + B(-1)(2) + 4(-1) \Rightarrow 18 = 12 - 2B - 4 \Rightarrow 2B = -10 \Rightarrow B = -5}$.

Άρα $\boxed{\frac{18+11x-2x^2}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)} - \frac{5}{(x+2)} + \frac{4}{(x+2)^2}}$

3. Να δειχτεί ότι $\frac{\cos^2\theta}{(\mathrm{cosec}\theta-1)(\mathrm{cosec}\theta+1)} + \frac{\sin^2\theta}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)} = \boldsymbol{1}$. [5]

Λύση

Ισχύουν οι σχέσεις $\boldsymbol{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$, $\boldsymbol{1 + \cot^2\theta = cosec^2\theta}$, $\boldsymbol{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$

Άρα έχω

$$\frac{\cos^2\theta}{(\mathrm{cosec}\theta - 1)(\mathrm{cosec}\theta + 1)} + \frac{\sin^2\theta}{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)} = \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{cosec}^2\theta - 1} + \frac{\sin^2\theta}{\sec^2\theta - 1} = \frac{\cos^2\theta}{\cot^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta\tan^2\theta + \cot^2\theta\sin^2\theta}{(\cot^2\theta)(\tan^2\theta)} = \frac{\cos^2\theta\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin^2\theta}{1} = \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= 1$$

4.

a. Βρείτε το $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{xe^{-2x}})$ [3]

b. Συνεπώς βρείτε το $\int \boldsymbol{xe^{-2x}dx}$. [4]

Λύση

a. Έχω $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{xe^{-2x}}) = \boldsymbol{x(-2e^{-2x}) + e^{-2x}} = \boxed{\boldsymbol{-2xe^{-2x} + e^{-2x}}}$

b. Από το ερώτημα α) έχω

$$\int -2xe^{-2x} + e^{-2x}dx = xe^{-2x} + c \Rightarrow -2\int xe^{-2x}dx + \frac{e^{-2x}}{-2} = xe^{-2x} + c \Rightarrow -2\int xe^{-2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2x} + xe^{-2x} + c \Rightarrow \int xe^{-2x}dx = \frac{-1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}c$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}e^{-2x}(1 + 2x) + c'}$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{\cos\theta+4\sin\theta}{2\cos\theta+\sin\theta} = \boldsymbol{\cot\theta}$ για $-\frac{\pi}{2} \leqslant \boldsymbol{\theta} \leqslant \frac{\pi}{2}$. [6]

Λύση

Έχω $\frac{\cos\theta+4\sin\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta=2\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow 4\sin^2\theta-2\cos^2\theta=0 \Leftrightarrow$ $2\sin^2\theta-\cos^2\theta=0 \Leftrightarrow 2\sin^2\theta-\left(1-\sin^2\theta\right)=0 \Leftrightarrow 3\sin^2\theta=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{3}$

Άρα $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm sin\ 0,61548 \xRightarrow{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} \boxed{\theta=\pm 0,615\ rad}$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{ax^2}{x-a}$, για $x>a$, όπου a είναι μια θετική σταθερά.

a. Βρείτε την $f'(x)$. [2]

Η συνάρτηση g, που ορίζεται για $x>a$, έχει την ιδιότητα ότι $g'(x)=(x-a)^2f'(x)$. Η g φθίνει για $a<x<8$.

b. Βρείτε την τιμή του a. [4]

Λύση

a. Έχω $f'(x)=\frac{(x-a)(2ax)-(ax^2)}{(x-a)^2}=\frac{2ax^2-2a^2x-ax^2}{(x-a)^2}=\frac{ax^2-2a^2x}{(x-a)^2}=\boxed{\frac{ax(x-2a)}{(x-a)^2}}$

b. Αφού η g φθίνει για $a<x<8$ και είναι παραγωγίσιμη έχω $g'(x)<0 \Rightarrow (x-a)^2f'(x)<0 \Rightarrow ax(x-2a)<0 \xRightarrow{a>0} x(x-2a)<0 \Rightarrow 0<x<2a \xRightarrow{x>a} a<x<2a$

Αλλά έχω και $a<x<8$. Συνεπώς $2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$

7. Βρείτε το σύνολο τιμών της σταθεράς k για το οποίο η καμπύλη $y=kx^2+4x+k-3$ είναι εξ ολοκλήρου κάτω από τον οριζόντιο άξονα.

Λύση

Για να είναι ολόκληρη η παραβολή κάτω από τον οριζόντιο άξονα, πρέπει $k<0$.

Επιπλέον πρέπει $b^2-4ac<0 \Rightarrow 4^2-4k(k-3)<0 \Rightarrow 16-4k^2+12k<0 \Rightarrow k^2-3k-4>0 \Rightarrow$ $(k-4)(k+1)>0 \xRightarrow{k<0\Rightarrow k-4<0} k+1<0 \Rightarrow \boxed{k<-1}$

8. Η γραμμή $y-2x=12$ τέμνει την καμπύλη $x^2-xy+y^2=63$ σε δύο σημεία. Βρείτε τις συντεταγμένες αυτών των δύο σημείων. [5]

Λύση

Έχω $y=2x+12$ και με αντικατάσταση στην άλλη εξίσωση έχω ότι

$$x^2-x(2x+12)+(2x+12)^2=63 \Leftrightarrow x^2-2x^2-12x+4x^2+48x+144-63=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+36x+81=0 \Leftrightarrow x^2+12x+27=0 \Leftrightarrow (x+9)(x+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=-3 \vee x=-9$$

Για $x=-3$, $y=2\cdot(-3)+12=6$

Για $x=-9$, $y=2\cdot(-9)+12=-6$.

Άρα τα σημεία τομής των δύο γραμμών έχουν συντεταγμένες $\boxed{(-3,6)}$ και $\boxed{(-9,-6)}$

9. Μια καμπύλη έχει εξίσωση $y=1+x-\frac{x^2}{2}-2x^3$.

a. Βρείτε τις τετμημένες των κρίσιμων σημείων A και B της καμπύλης. [4]

b. Δίνεται ότι στο σημείο P της καμπύλης η κλίση μεγιστοποιείται

c. Δείξτε ότι το P και το μέσο του AB έχουν την ίδια τετμημένη. [4]

Λύση

a. Λύνω την $\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow -6x^2-x+1=0 \Leftrightarrow 6x^2+x-1=0 \Leftrightarrow (3x-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow$ $\boxed{x_A=-\frac{1}{2} \vee x_B=\frac{1}{3}}$

b. Λύνω την $\frac{d^2y}{dx^2}\geq 0 \Leftrightarrow -12x-1\geq 0 \Leftrightarrow -12x\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{12}$ άρα η κλίση της καμπύλης αυξάνει στο $\left(-\infty,-\frac{1}{12}\right]$ και φθίνει στο $[\frac{1}{12},\infty)$. Άρα η κλίση μεγιστοποιείται για $\boxed{x_P=-\frac{1}{12}}$

c. Το μέσο του AB έχει τετμημένη $\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{-1}{12} = x_P$

10. Ένας κύκλος με κέντρο C έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$..

a. Βρείτε τις συντεταγμένες του C και την ακτίνα του κύκλου. [4]

b. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων που ο κύκλος τέμνει τον άξονα των y. [2]

Το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το C και την αρχή των αξόνων O. Δίνεται ότι η απόσταση CX είναι τριπλάσια από την απόσταση OC.

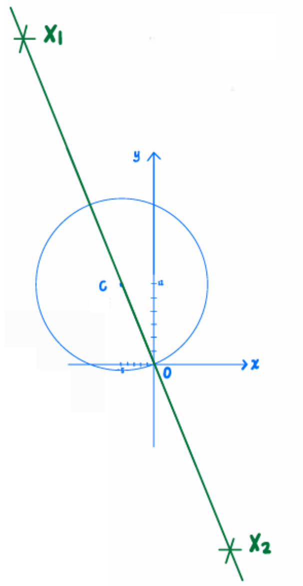
c. Βρείτε τις συντεταγμένες των πιθανών θέσεων του X. [4]

Λύση

a. Έχω $x^2 + 10x + y^2 - 24y = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 - 5^2 + (y-12)^2 - 12^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$$

άρα κύκλος με κέντρο το σημείο $\boxed{C(-5,12)}$ και ακτίνα $\boxed{r = 13}$



b. Για $x = 0$ έχω $y^2 - 24y = 0 \Leftrightarrow y(y-24) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 24$.

Άρα τα σημεία που ο κύκλος τέμνει τον άξονα των y έχουν συντεταγμένες $\boxed{(0,0)}$ και $\boxed{(0,24)}$

c. Τα σημεία O, C, X είναι συνευθειακά.

Διακρίνω περιπτώσεις

1) Το C είναι ανάμεσα στα O, X. Τότε $\overrightarrow{CX} = 3\overrightarrow{OC} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_X - x_C = 3(x_C - x_O) \\ y_X - y_C = 3(y_C - y_O) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_X + 5 = 3(-5) \\ y_X - 12 = 3(12) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_X = -20 \\ y_X = 48 \end{cases}$. Άρα $\boxed{X_1(-20,48)}$

2) Το O είναι ανάμεσα στα C, X. Τότε $\overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{CO} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_X - x_O = 2(x_O - x_C) \\ y_X - y_O = 2(y_O - y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_X = 2(5) = 10 \\ y_X = 2(-12) = -24 \end{cases}$.

Άρα $\boxed{X_2(10,-24)}$

11. Μια κυκλική λιμνούλα νερού αμελητέου πάχους επεκτείνεται πάνω σε ένα λεπτό κομμάτι χαρτιού. Τη χρονική στιγμή t δευτερόλεπτα ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας, r cm, της λιμνούλας δίνεται από τον τύπο $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{2t+1}$ cm/s, όπου k είναι μια σταθερά. Αρχικά η ακτίνα της λιμνούλας είναι 1 cm και η ακτίνα αυξάνεται με ρυθμό $0,5$ cm/s.

a. Να δειχτεί ότι $k = 0,5$ [1]

b. Βρείτε μια έκφραση του r ως προς το t.[4]

c. Συνεπώς βρείτε τον ρυθμό αύξησης του εμβαδού της λιμνούλας αφού αυτή επεκταθεί για 3 δευτερόλεπτα. [4]

Λύση

a. Έχω την $t = 0$ ότι $0,5 = \frac{k}{2(0)+1} \Rightarrow \boxed{k = 0,5}$

b. Έχω $\frac{dr}{dt} = \frac{0,5}{2t+1} \Rightarrow r = \int \frac{0,5}{2t+1} dt = 0,5 \int \frac{1}{2t+1} dt = 0,5 \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right] + c = \frac{1}{4}\ln(2t+1) + c$.

Αφού την $t = 0$, $r = 1$ έχω ότι $1 = \frac{1}{4}\ln(0+1) + c \Rightarrow c = 1$. Άρα $\boxed{r = \frac{1}{4}\ln(2t+1) + 1}$

c. Έχω $E = \pi r^2 \Rightarrow E'(t) = 2\pi r(t) r'(t)$ με $r(3) = \frac{1}{4}\ln(2 \cdot 3 + 1) + 1 = 1,4865$ και $r'(3) = \frac{0,5}{2 \cdot 3 + 1}$

Άρα $E'(3) = 2\pi r(3) r'(3) = 0,66713 = \boxed{0,667 cm^2/s}$

12. Μια μπάλα ρίχνεται κάθετα προς τα πάνω. Το ύψος της, h m, πάνω από το έδαφος τη στιγμή t δευτερόλεπτα μετά ρίχνεται δίνεται από τον τύπο $h = 1,75 + 5t - 5t^2$.

a. Αναφέρετε το ύψος πάνω από το έδαφος από το οποίο εκτοξεύεται η μπάλα. [1]
b. Εκφράστε το h στην μορφή $\boldsymbol{a+b(t+c)^2}$, όπου $\boldsymbol{a,b}$ και $\boldsymbol{c}$ είναι σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν. [3]
c. Συνεπώς βρείτε το μέγιστο ύψος της μπάλας και την χρονική στιγμή που φτάνει η μπάλα σε αυτό το ύψος. [2]
d. Η μπάλα χτυπά στο έδαφος. Εξηγήστε γιατί ο χρόνος που χρειάζεται για να χτυπήσει η μπάλα στο έδαφος δεν είναι διπλάσιος από τον χρόνο που βρέθηκε στο μέρος (c).
e. Βρείτε την χρονική περίοδο που η μπάλα βρίσκεται τουλάχιστον 2 μέτρα πάνω από το έδαφος. [3]

Λύση

a. Την $\boldsymbol{t=0}$, έχω $\boxed{\boldsymbol{h=1,75m}}$
b. Έχω $\boldsymbol{h=1,75+5t-5t^2=-5(t^2-t)+1,75=-5\left[(t-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2\right]+1,75=-5(t-\frac{1}{2})^2+1,25+1,75=3-5(t-\frac{1}{2})^2}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{a=3,b=-5,c=-0,5}}$
c. Από το ερώτημα b προκύπτει ότι το μέγιστο ύψος της μπάλας είναι τα $\boxed{\boldsymbol{3m}}$ την χρονική στιγμή $\boxed{\boldsymbol{t=0,5s}}$
d. Αυτό οφείλεται στο ότι η μπάλα δεν πετάχτηκε από το έδαφος, αλλά ρίχτηκε από αρχικό ύψος 1,75μ.
e. Λύνω την εξίσωση $\boldsymbol{3-5(t-\frac{1}{2})^2=2\Rightarrow 5(t-\frac{1}{2})^2=1\Rightarrow t-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}\Rightarrow}$

$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{5}}\Rightarrow t=0,052786s\vee 0,94721s}$.

Άρα το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι ίσο με $\boldsymbol{0,94721-0,052786=}\boxed{\boldsymbol{0,894s}}$

13. Η μεσοκάθετος της ευθείας που ενώνει τα σημεία $\boldsymbol{A(2,h)}$ και $\boldsymbol{B(-8,-7)}$ διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{X\left(h,-\frac{13}{2}\right)}$, όπου το $\boldsymbol{h}$ είναι μια σταθερά.

a. Εκφράστε την κλίση της μεσοκάθετης της ευθείας $\boldsymbol{AB}$ ως προς $\boldsymbol{h}$. [3]
b. Συνεπώς βρείτε τις πιθανές τιμές του $\boldsymbol{h}$. [7]

Λύση

a. Η κλίση της AB είναι $\boldsymbol{\frac{h-(-7)}{2-(-8)}=\frac{h+7}{10}}$, συνεπώς η κλίση της μεσοκαθέτου είναι $\boxed{\boldsymbol{-\frac{10}{h+7}}}$
b. Το μέσο του AB είναι το σημείο $\mathrm{M}\boldsymbol{\left(\frac{-8+2}{2},\frac{-7+h}{2}\right)=\left(-3,\frac{h-7}{2}\right)}$.

Έχω $\boldsymbol{\lambda_{MX}=\frac{\frac{-13}{2}-\left(\frac{h-7}{2}\right)}{h-(-3)}=\frac{-13-(h-7)}{2(h+3)}=\frac{-6-h}{2h+6}}$.

Αφού $\boldsymbol{\lambda_{MX}=-\frac{10}{h+7}\Rightarrow\frac{-6-h}{2h+6}=-\frac{10}{h+7}\Rightarrow(-6-h)(h+7)=-10(2h+6)\Rightarrow}$

$$\boldsymbol{-6h-42-h^2-7h=-20h-60\Rightarrow h^2-7h-18=0\Rightarrow(h+2)(h-9)=0}$$

$$\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{h=-2\vee 9}}$$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗΣ σε συνεργασία με
CAMBRIDGE ASSESSMENT INTERNATIONAL EDUCATION.

Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Τυπικού Επιπέδου.

GCE O-Level

October/November 2023

Paper 2

2 ώρες 15 λεπτά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι υποψήφιοι απαντούν στο Έγγραφο Ερωτήσεων.
Χωρίς Πρόσθετα υλικά

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΩΤΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε τον αριθμό σας, τον αριθμό ευρετηρίου και το όνομά σας στο έργο που παραδίδετε.
Γράψτε με σκούρο μπλε ή μαύρο στυλό.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μολύβι HB για οποιαδήποτε διαγράμματα ή γραφήματα. Μη χρησιμοποιείτε συνδετήρες, κόλλα ή διορθωτικό υγρό. ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΤΕ πάνω στα BARCODE.

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στα κενά που παρέχονται στην Ερωτήσεις.
Δώστε μη ακριβείς αριθμητικές απαντήσεις με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων ή 1 δεκαδικού ψηφίου στην περίπτωση των γωνιών σε μοίρες, εκτός εάν προσδιορίζεται διαφορετικό επίπεδο ακρίβειας στην ερώτηση.
Αναμένεται να χρησιμοποιήσετε μια εγκεκριμένη αριθμομηχανή, όπου απαιτείται.
Σας υπενθυμίζεται η ανάγκη για σαφή παρουσίαση στις απαντήσεις σας.
Ο αριθμός των βαθμών δίνεται σε παρενθέσεις[ ]στο τέλος κάθε ερώτησης ή μέρους ερώτησης.
Σύνολο βαθμών 90.

Τυπολόγιο

1. Άλγεβρα

Για την εξίσωση $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Διωνυμική επέκταση

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + b^n$, όπου $\boldsymbol{n}$ είναι ένας θετικός ακέραιος και $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$

2. Τριγωνομετρία

Ταυτότητες

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$
$$\mathrm{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$
$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$
$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$
$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Τύποι για το τρίγωνο ABC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$$

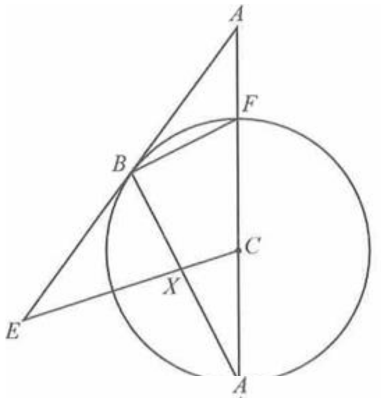
1. Ο συντελεστής του $\boldsymbol{x^3}$ στο ανάπτυγμα του $(\boldsymbol{k+2x})(\boldsymbol{2-\frac{1}{2}x})^{\boldsymbol{6}}$ είναι μηδέν. Βρείτε την τιμή της σταθεράς $\boldsymbol{k}$. [5]

Λύση

Έχω $(\boldsymbol{k+2x})[\boldsymbol{2^6+6(2^5)(-\frac{1}{2}x)+15(2^4)(-\frac{1}{2}x)^2+20(2^3)(-\frac{1}{2}x)^3+\cdots}]=(\boldsymbol{k+2x})(\boldsymbol{64-96x+60x^2-20x^3+\cdots})$.

Ο συντελεστής του $\boldsymbol{x^3}$ είναι $\boldsymbol{0=k(-20)+2(60)\Rightarrow 0=120-20k\Rightarrow \boxed{k=6}}$

2. Το διάγραμμα δείχνει έναν κύκλο, με κέντρο $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{FD}$ διάμετρο. Η εφαπτομένη στο σημείο $\boldsymbol{B}$ στον κύκλο συναντά την προέκταση του $\boldsymbol{DF}$ στο σημείο $\boldsymbol{A}$. Το σημείο $\boldsymbol{E}$ βρίσκεται στην προέκταση του $\boldsymbol{AB}$ και το $\boldsymbol{X}$ είναι το σημείο τομής του $\boldsymbol{BD}$ με $\boldsymbol{EC}$.

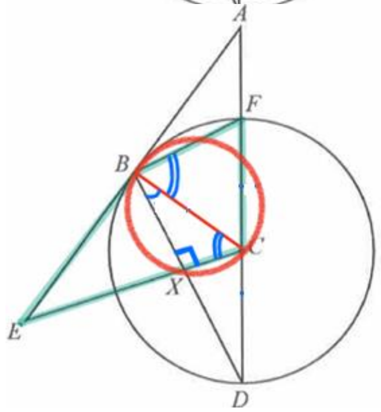


a. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $\boldsymbol{ABD}$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\boldsymbol{AFB}$. [4]

Ένας κύκλος περνά από τα σημεία $\boldsymbol{B, C}$ και $\boldsymbol{X}$ με το $\boldsymbol{BC}$ διάμετρο.

b. Τι είδους τετράπλευρο είναι το $\boldsymbol{EBFC}$; Δώστε λόγους για να υποστηρίξετε την απάντησή σας. [5]

Λύση



a. Έχω $\boldsymbol{B\hat{A}D=F\hat{A}B}$ (κοινή γωνία) και $\boldsymbol{A\hat{D}B=A\hat{B}F}$ (χορδής και εφαπτομένης)
Άρα αφού έχουν δυο γωνίες ίσες μία προς μία, $\boldsymbol{\Delta\, ABD\approx \Delta\, AFB}$

b. Αφού $\boldsymbol{BC}$ διάμετρος, έχω $\boldsymbol{B\hat{X}C=90°}$.
Αφού $\boldsymbol{FD}$ διάμετρος, έχω $\boldsymbol{F\hat{B}D=90°}$.
Αλλά $\boldsymbol{F\hat{B}C=F\hat{B}D-C\hat{B}D=90°-C\hat{B}X=B\hat{C}X}$.
Άρα $\boldsymbol{BF//CX}$ (εντός εναλλάξ γωνίες ίσες).
Άρα το τετράπλευρο $\boldsymbol{EBFC}$ είναι τραπέζιο.

3. Το τσάι ρίχνεται σε ένα άδειο φλιτζάνι. Η θερμοκρασία, $\boldsymbol{T_c}$ °C, του τσαγιού στο φλιτζάνι, $\boldsymbol{t}$ λεπτά αφού σερβιριστεί, μοντελοποιείται με τον τύπο $\boldsymbol{T_c=86e^{-0.06t}}$.

a. Αναφέρετε την αρχική θερμοκρασία του τσαγιού. [1]

b. Βρείτε τον χρόνο που απαιτείται για να φτάσει η θερμοκρασία του τσαγιού στους 37° . [3]

c. Λίγο τσάι χύνεται σε ένα άδειο φλιτζάνι και ταυτόχρονα ο ίδιος όγκος τσαγιού χύνεται σε μια άδεια φιάλη. Η θερμοκρασία, $\boldsymbol{T_f}$ °C, του τσαγιού στη φιάλη τη στιγμή $\boldsymbol{t}$ λεπτά μετά την έκχυσή του στη φιάλη δινεται από τον τύπο $\boldsymbol{T_f=86e^{-\lambda t}}$ όπου το $\boldsymbol{\lambda}$ είναι μια σταθερά. Ο τύπος για $\boldsymbol{T_c}$ εξακολουθεί να ισχύει.

i. Μετά από μία ώρα η θερμοκρασία του τσαγιού στη φιάλη είναι 82 °C. Βρείτε το $\boldsymbol{\lambda}$. [2]

ii. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας από το μέρος (c) (i) βρείτε την ώρα που η θερμοκρασία του τσαγιού στο φλιτζάνι είναι η μισή θερμοκρασία του τσαγιού στη φιάλη. [3]

Λύση

a. Για $\boldsymbol{t=0}$, έχω $\boldsymbol{T_c=86e^0=\boxed{86°C}}$

b. Λύνω την εξίσωση

$$\boldsymbol{37=86e^{-0.06t}\Leftrightarrow \frac{37}{86}=e^{-0.06t}\Leftrightarrow ln\left(\frac{37}{86}\right)=-0.06t\Leftrightarrow t=14,057=\boxed{14,1\ mins}}$$

c.

i. Λύνω την εξίσωση $\boldsymbol{82 = 86e^{-60\lambda} \Leftrightarrow \frac{82}{86} = e^{-60\lambda} \Leftrightarrow ln\left(\frac{82}{86}\right) = -60\lambda \Leftrightarrow}$

$$\boldsymbol{\lambda = 0,00079380 = \boxed{0,000794}}$$

ii. Έχω $\boldsymbol{T_c = \frac{1}{2}T_f \Rightarrow 86e^{-0,06t} = \frac{1}{2} \times 86e^{-0,0007938t} \Rightarrow 86e^{-0,06t} = 43e^{-0,0007938t} \Rightarrow 2 = e^{-0,0007938t + 0,06t} \Rightarrow 2 = e^{0,0592062t} \Rightarrow ln\,2 = 0,0592062t \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{t = 11,707 = \boxed{11,7\ mins}}$$

4. Να μην χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή για αυτήν την ερώτηση.

a. Με χρήση της ταυτότητας $\boldsymbol{\tan 2A}$ δείξτε ότι $\boldsymbol{\tan 15° = 2 - \sqrt{3}}$. [5]

b. Δείξτε ότι $\boldsymbol{\tan 15° - \tan 105° = 4}$. [5]

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$

Για $\boldsymbol{A = 15°}$, έχω $\boldsymbol{\tan 30° = \frac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°} \Rightarrow 1 - \tan^2 15° = 2\sqrt{3}\tan 15° \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{\tan^2 15° + 2\sqrt{3}\tan 15° - 1 = 0 \Rightarrow \tan 15° = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2}}$$

$$\boldsymbol{= -\sqrt{3} \pm 2 \xRightarrow{\tan 15^0 > 0} \boxed{\tan 15° = 2 - \sqrt{3}}}$$

b. Έχω $\boldsymbol{\tan 15° - \tan 105° = \tan 15° - \tan(90° + 15°) = \tan 15° - cot(-15°) = \tan 15° + cot\,15° = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 4}$

5. Όταν $\boldsymbol{y = 3\cos 3x - 5\sin 3x}$, η έκφραση $\boldsymbol{p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + 14y + 34\sin 3x}$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\boldsymbol{A\cos 3x + B\sin 3x}$ όπου τα $\boldsymbol{p, q, A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι σταθερές.

a. Δείξτε ότι $\boldsymbol{A = 42 - 27p - 15q}$ και βρείτε το $\boldsymbol{B}$ ως προς $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$.[7]

b. Στην περίπτωση που τα $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι και τα δύο μηδέν, βρείτε τις τιμές των $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$. [3]

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{y = 3\cos 3x - 5\sin 3x \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 3(-3\sin 3x) - 5(3\cos 3x) = -9\sin 3x - 15\cos 3x \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = -9(3\cos 3x) - 15(-3\sin 3x) = -27\cos 3x + 45\sin 3x}$$

Άρα $\boldsymbol{p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + 14y + 34\sin 3x =}$

$$\boldsymbol{p(-27\cos 3x + 45\sin 3x) + q(-9\sin 3x - 15\cos 3x) + 14(3\cos 3x - 5\sin 3x) + 34sin 3x}$$

$$\boldsymbol{= (-27p - 15q + 42)\cos 3x + (45p - 9q - 36)\sin 3x}$$

Άρα $\boldsymbol{\boxed{A = 42 - 27p - 15q}}$ και $\boldsymbol{\boxed{B = -36 + 45p - 9q}}$

b. Λύνω το σύστημα $\boldsymbol{\begin{cases} 42 - 27p - 15q = 0 \\ -36 + 45p - 9q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9p + 5q = 14 \\ 5p - q = 4 \end{cases} \Leftrightarrow}$

$$\boldsymbol{\begin{cases} 9p + 5(5p - 4) = 14 \\ q = 5p - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34p = 34 \\ q = 5p - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{p = 1} \\ \boxed{q = 1} \end{cases}}$$

6.

a. Δείξτε ότι ο $\boldsymbol{2x + 1}$ είναι παράγοντας του $\boldsymbol{6x^3 - 7x^2 - x + 2}$ και συνεπώς παραγοντοποιήστε πλήρως το $\boldsymbol{6x^3 - 7x^2 - x + 2}$. [5]

b. Να λυθεί η εξίσωση $\boldsymbol{6(4^y) + 2(2^{-y}) = 7(2^y) + 1}$. [5]

c. Δείξτε ότι η αρνητική λύση από το μέρος (b) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\boldsymbol{1 - log_a b}$ όπου τα $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι ακέραιοι προς προσδιορισμό.[2]

Λύση

a. Έστω $p(x) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2$

Άρα $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 0$.

Άρα ο $2x + 1 = 2\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ είναι παράγοντας του $p(x)$

Έχω $(6x^3 - 7x^2 - x + 2):(2x + 1) = (6x^3 - 7x^2 - x + 2):\left(2\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right) =$
$\left(3x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right):\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$, οπότε από το παρακάτω σχήμα Horner

3	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	
3	-5	2	0	

προκύπτει $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (2x + 1)(3x^2 - 5x + 2) = \boxed{(2x + 1)(3x - 2)(x - 1)}$

b. Θέτω $u = 2^y$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται $6u^2 + \frac{2}{u} - 7u - 1 = 0 \Leftrightarrow 6u^3 + 2 - 7u^2 - u = 0 \Leftrightarrow 6u^3 - 7u^2 - u + 2 = 0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} (2u + 1)(3u - 2)(u - 1) = 0$.

Άρα $2^y = -\frac{1}{2}$, αδύνατη, ή

$2^y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln 2^y = \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 2} = \boxed{-0,585}$ ή

$2^y = 1 \Leftrightarrow y = \boxed{0}$.

c. Έχω $\frac{\ln\frac{2}{3}}{\ln 2} = \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1 - \log_2 3$, άρα $\boxed{a = 2}$ και $\boxed{b = 3}$

7.

a. Το γράφημα της $y = a\cos bx$ έχει ένα μέγιστο σημείο στο $\left(\frac{7\pi}{2}, 10\right)$ και το επόμενο μέγιστο σημείο μετά από αυτό έχει συντεταγμένες $\left(\frac{9\pi}{2}, 10\right)$. Βρείτε τις τιμές των σταθερών θετικών a και b. [2]

b. Ένα σωματίδιο, που ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή, έχει ταχύτητα, v m/s, τη στιγμή t δευτερόλεπτα, $t \geq 0$, που δίνεται από το τύπο $v = 5\sin 0,2t + c$, όπου το c είναι μια θετική σταθερά.

   i. Βρείτε τη μικρότερη τιμή του c ώστε το σωματίδιο να μην αλλάξει ποτέ την κατεύθυνσή του. [3]

   ii. Στην περίπτωση που $c = 8$ βρείτε τη συνολική απόσταση που διανύθηκε από το σωματίδιο στο τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησής του. [6]

Λύση

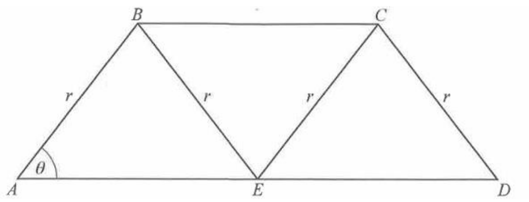
a. Έχω $a\cos bx \leq \boxed{a = 10}$ και επειδή τα διαδοχικά μέγιστα απέχουν όσο μια περίοδο έχω $T = \frac{9\pi}{2} - \frac{7\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \boxed{b = 2}$

b.

   i. Για να μην αλλάξει κατεύθυνση αρκεί να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή ότι $v \geq 0 \Leftrightarrow 5\sin 0,2t + c \geq 0 \Leftrightarrow c \geq -5\sin 0,2t \geq -5 \cdot (-1) = 5$. Άρα η μικρότερη τιμή είναι η $\boxed{c = 5}$

   ii. Έχω $v = 5\sin 0,2t + 8 > 0$ κάθε χρονική στιγμή. Άρα Η ζητούμενη απόσταση είναι το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το γράφημα ταχύτητας-χρόνου. Άρα $S = \int_{t=2}^{t=3} 5\sin 0,2t + 8dt = \left[\frac{-5\cos 0,2t}{0,2} + 8t\right]_2^3 = [(-25\cos 0,6 + 24) - (-25\cos 0,4 + 16)]$=10,393=$\boxed{10,4m}$

8. Το διάγραμμα δείχνει ένα συμμετρικό ξύλινο πλαίσιο $\boldsymbol{ABCDEA}$ που αποτελείται από επτά κομμάτια ξύλου. Τα σημεία $\boldsymbol{A, E, D}$ είναι συνευθειακά. Τα τμήματα $\boldsymbol{AB, BE, EC}$ και $\boldsymbol{CD}$ έχουν μήκος $\boldsymbol{r}$ m, όπου το $\boldsymbol{r}$ είναι μια σταθερή. Η γωνία $\boldsymbol{BAE = \theta}$ για $\boldsymbol{0^\circ < \theta < 90^\circ}$.



a. Εκφράστε το εμβαδόν που περικλείεται από το πλαίσιο ως προς $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{\sin 2\theta}$. [3]

b. Δεδομένου ότι το $\boldsymbol{\theta}$ μπορεί να ποικίλλει, βρείτε, ως προς $\boldsymbol{r}$, το μέγιστο δυνατό εμβαδόν που περικλείεται από το πλαίσιο και την τιμή $\boldsymbol{\theta}$ στην οποία συμβαίνει αυτό. Δεν απαιτείται να αιτιολογήσετε ότι αυτή η περιοχή είναι μέγιστο. [2]

Ένα παρόμοιο πλαίσιο είναι κατασκευασμένο από ένα κομμάτι ξύλου μήκους $\boldsymbol{8r\sin\theta}$ m. Δεν υπάρχει ξύλο που περίσσεψε.

c. Δείξτε ότι $\boldsymbol{4\sin\theta - 3\cos\theta = 2}$. [2]

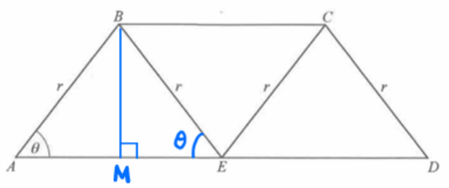
d. Αφού εκφράσετε την $\boldsymbol{4\sin\theta - 3\cos\theta}$ με τη μορφή $\boldsymbol{R\sin(\theta - \alpha)}$, όπου $\boldsymbol{R > 0}$ και $\boldsymbol{0^o < \alpha < 90^o}$, βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\theta}$. [5]

Λύση

a. Αφού $\boldsymbol{AB = BE}$, έχω $\boldsymbol{\angle BEA = \theta}$ (ισοσκελές). Συνεπώς, $\boldsymbol{\angle ABE = 180^o - 2\theta}$ και $\boldsymbol{(ABCDEA) = 3(ABE) = 3 \times \frac{1}{2}(r)(r)\sin(180^o - 2\theta) = \boxed{\frac{3}{2}r^2\sin 2\theta}}$

b. Έχω $\boldsymbol{\frac{3}{2}r^2\sin 2\theta \le \boxed{\frac{3}{2}r^2}}$ για κάθε $\boldsymbol{0^\circ < \theta < 90^\circ}$ με την μέγιστη αυτήν τιμή να λαμβάνεται για $\boldsymbol{\sin 2\theta = 1 = \sin 90^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}}$

c. Έχω από το σχήμα ότι



$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{ME}{r} \Leftrightarrow ME = r\cos\theta \Leftrightarrow AE = 2r\cos\theta}$.

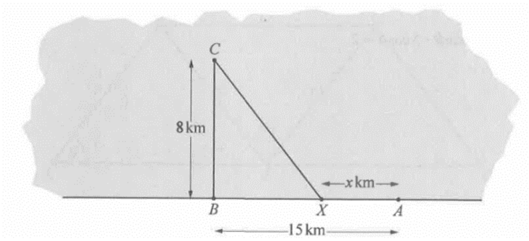
Άρα

$\boldsymbol{8r\sin\theta = 3(2r\cos\theta) + 4r \Leftrightarrow 8r\sin\theta - 6r\cos\theta = 4r \Leftrightarrow 4\sin\theta - 3\cos\theta = 2}$

d. Έχω $\boldsymbol{R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5}$ και $\boldsymbol{\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36,870^\circ}$

Οπότε $\boldsymbol{4\sin\theta - 3\cos\theta = 5\sin(\theta - 36,9^\circ) \Rightarrow 5\sin(\theta - 36\cdot 870^\circ) = 2 \Rightarrow \sin(\theta - 36,870^\circ) = 0,4 \Rightarrow \theta - 36,870^\circ = 23,578^\circ \Rightarrow \theta = 60,488^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 60,5^\circ}}$

9. Το διάγραμμα δείχνει ανώμαλο επίπεδο έδαφος (σκιασμένο) που οριοθετείται από έναν ευθύ επίπεδο δρόμο $\boldsymbol{BXA}$. Το σημείο $\boldsymbol{C}$ βρίσκεται στο ανώμαλο έδαφος και το $\boldsymbol{B}$ είναι το σημείο στο δρόμο που βρίσκεται πιο κοντά στο $\boldsymbol{C}$. Η απόσταση $\boldsymbol{AB}$ είναι $\boldsymbol{15}$ km και το $\boldsymbol{BC}$ είναι $\boldsymbol{8}$ km. Ένας δρομέας cross-country βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{A}$ στο δρόμο και πρέπει να φτάσει στο σημείο $\boldsymbol{C}$ όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Ο δρομέας μπορεί να διατηρήσει ταχύτητα $\boldsymbol{5}$ km/h στο δρόμο αλλά μόνο $\boldsymbol{3}$ km/h πάνω από το ανώμαλο έδαφος. Ο δρομέας συνειδητοποιεί ότι για να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος για να φτάσει στο $\boldsymbol{C}$, είναι απαραίτητο να φύγει από το δρόμο κάποια στιγμή $\boldsymbol{X}$ μεταξύ $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ και, στη συνέχεια, να τρέξει απευθείας από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{C}$. Έστω $\boldsymbol{AX = x}$ km και $\boldsymbol{T}$ ο συνολικός χρόνος, σε ώρες, που πήρε τον δρομέα για να φτάσει από το $\boldsymbol{A}$ στο $\boldsymbol{X}$ και μετά από το $\boldsymbol{X}$ στο $\boldsymbol{C}$.



a. Δείξτε ότι $\boldsymbol{T = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 289}}{3}}$. [3]

b. Βρείτε μια έκφραση για $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ και επομένως δείξτε ότι η τιμή του x για την οποία ο χρόνος που απαιτείται είναι ο ελάχιστος ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 - 30x + 189 = 0$. [6]

c. Επομένως, βρείτε τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται, σε ώρες και λεπτά, για να φτάσει ο δρομέας από A σε C. Δεν απαιτείται να αιτιολογήσουν ότι αυτός ο χρόνος είναι ελάχιστος. [3]

Λύση

a. Έχω $BX = (15 - x)km$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα ότι $CX = \sqrt{8^2 + (15 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 30x + 225 + 64} = \sqrt{x^2 - 30x + 289}$. Άρα ο συνολικός χρόνος, σε ώρες, που πήρε τον δρομέα για να φτάσει από το A στο X και μετά από το X στο C είναι $T = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-30x+289}}{3}$

b. Έχω $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(x^2 - 30x + 289)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x - 30) = \boxed{\frac{1}{5} + \frac{x-15}{3\sqrt{x^2-30x+289}}}$

Ο χρόνος ελαχιστοποιείται όταν $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + \frac{x-15}{3\sqrt{x^2-30x+289}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-15}{3\sqrt{x^2-30x+289}} = \frac{-1}{5} \Leftrightarrow 5x - 75 = -3\sqrt{x^2 - 30x + 289} \Rightarrow (5x - 75)^2 = 9(x^2 - 30x + 289) \Rightarrow 25x^2 - 750x + 5625 = 9x^2 - 270x + 2601 \Rightarrow 16x^2 - 480x + 3024 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 189 = 0$

c. Έχω $x^2 - 30x + 189 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x - 21) = 0$

Άρα $x = 9$ ή $x = 21 > 15$, απορρίπτεται.

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει ο δρομέας από A σε C είναι

$$T = \frac{9}{5} + \frac{\sqrt{9^2 - 30(9) + 289}}{3} = \frac{9}{5} + \frac{10}{3} = \frac{77}{15}h = 5\frac{2}{15}h = 5\frac{8}{60}h = \boxed{5h\,8min}$$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗΣ σε συνεργασία με
CAMBRIDGE ASSESSMENT INTERNATIONAL EDUCATION.

Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Προχωρημένου Επιπέδου.

GCE A-Level **Higher 2**

October/November 2023

Paper 1

3 ώρες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι υποψήφιοι απαντούν στο Έγγραφο Ερωτήσεων.

Πρόσθετα υλικά: Τυπολόγιο-12 σελίδων (MF26). List_MF26_y22_sy.pdf (seab.gov.sg)

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΩΤΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε τον αριθμό σας, τον αριθμό ευρετηρίου και το όνομά σας στο έργο που παραδίδετε.
Γράψτε με σκούρο μπλε ή μαύρο στυλό.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μολύβι HB για οποιαδήποτε διαγράμματα ή γραφήματα. Μη χρησιμοποιείτε συνδετήρες, κόλλα ή διορθωτικό υγρό. ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΤΕ πάνω στα BARCODE.

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στα κενά που παρέχονται στην Ερωτήσεις.
Δώστε μη ακριβείς αριθμητικές απαντήσεις με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων ή 1 δεκαδικού ψηφίου στην περίπτωση των γωνιών σε μοίρες, εκτός εάν προσδιορίζεται διαφορετικό επίπεδο ακρίβειας στην ερώτηση.
Αναμένεται να χρησιμοποιήσετε μια εγκεκριμένη αριθμομηχανή γραφημάτων.
Επιτρέπονται μη υποστηριζόμενες απαντήσεις από μια αριθμομηχανή γραφημάτων, εκτός εάν μια ερώτηση δηλώνει συγκεκριμένα διαφορετικά.
Όπου οι μη υποστηριζόμενες απαντήσεις από μια αριθμομηχανή γραφημάτων δεν επιτρέπονται σε μια ερώτηση, πρέπει να παρουσιάσετε τα μαθηματικά βήματα χρησιμοποιώντας μαθηματικές σημειώσεις και όχι εντολές αριθμομηχανής
Σας υπενθυμίζεται η ανάγκη για σαφή παρουσίαση στις απαντήσεις σας.
Ο αριθμός των βαθμών δίνεται σε παρενθέσεις[ ]στο τέλος κάθε ερώτησης ή μέρους ερώτησης.

1.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη $\ln y = (11-5x)^2$ στο σημείο της με $x = 2$. [5]

Λύση

Για $x = 2, \ln y = (11-10)^2 = 1 \Rightarrow y = e$

Παραγωγίζοντας την δοσμένη σχέση έχω : $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2(11-5x)(-5) \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -10(11-5x)$

Για $x = 2, y = e$, έχω $\frac{1}{e}\frac{dy}{dx} = -10(11-10) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -10e$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - e = -10e(x-2) \Rightarrow y - e = -10ex + 20e \Rightarrow$

$$\boxed{y = -10ex + 21e}$$

2.

Οι τέσσερις πρώτοι όροι μιας ακολουθίας είναι οι $u_1 = 10, u_2 = 61, u_3 = 206$ and $u_4 = 469$. Δίνεται ότι η u_n είναι ένα κυβικό πολυώνυμο.

α) Βρείτε το u_n ως προς n. [3]

β) Βρείτε τις τιμές του n για τα οποία το u_n είναι μεγαλύτερο του 25000. [2]

Λύση

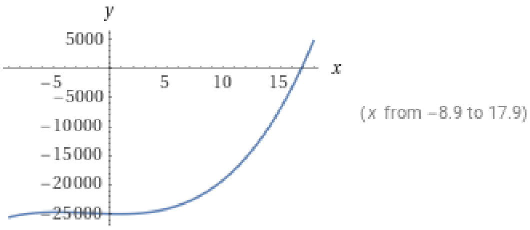
α) Έστω $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Τότε έχω

$$\begin{aligned} 10 &= a + b + c + d \\ 61 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 206 &= 27a + 9b + 3c + d \\ 469 &= 64a + 16b + 4c + d \end{aligned}$$

Με χρήση αριθμομηχανής έχω $a = 4, b = 23, c = -46, d = 2$

β) Με χρήση αριθμομηχανής σχεδιάζω την γραφική παράσταση της $y = 4x^3 + 23x^2 - 46x + 2 - 25000$ που τέμνει τον οριζόντιο άξονα για $x \approx 16.876$

Άρα $u_n > 25000$ για $\boxed{n \geq 17, n \in \mathbb{Z}^+}$



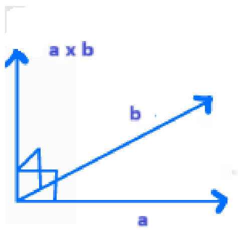
3.

Έστω διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοια, ώστε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. Επιπλέον δίνεται ότι το διάνυσμα $(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a})$ είναι κάθετο στο $(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b})$.

α) Να δειχτεί ότι $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$. [3]

β) Συνεπώς βρείτε την γωνία μεταξύ των διευθύνσεων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$. [3]

Λύση



α) Έχω $[(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a}] \perp [(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b}] \Rightarrow [(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a}] \cdot [(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b}] = 0 \Rightarrow$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot b = 0 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 1 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 1$$

Σημείωση : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, αφού $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ και $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$

β) Έχω $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = -1$ και $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 1$

Με διαίρεση κατά μέλη έχω $\tan\theta = -1 \Rightarrow \boxed{\theta = 135^\circ}$

4.

α) Βρείτε το $\int \cos px \cos qx \, dx$ όπου p και q είναι σταθερές με $p \neq q$ και $p \neq -q$. [2]

β) Δεδομένου ότι $n \neq 0$, να δειχτεί ότι $\int x \cos nx \, dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + c$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. [3]

γ) Με χρήση του ερωτήματος β) να δειχτεί ότι, για όλους τους θετικούς ακεραίους $\boldsymbol{n}$, η τιμή του $\int_0^{\pi} \boldsymbol{x}\cos \boldsymbol{nx}$ d$\boldsymbol{x}$ μπορεί να εκφραστεί ως $\frac{k}{n^2}$, όπου η πιθανή(ές) τιμή (ές) του $\boldsymbol{k}$ πρέπει να βρεθούν. [2]

δ) Με χρήση του ερωτήματος β) να βρεθεί η ακριβής τιμή του $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x\cos 2x|dx$. [3]

Λύση

α) Έχω

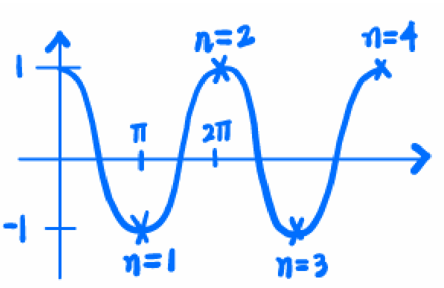
$$\int \cos px \cdot \cos qx\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos px \cdot \cos qx\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(p+q)x + \cos(p-q)x\,dx$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{(p-q)}\right] + C}$$

β) Έχω

$$\int x\cdot\cos nx\,dx = x\cdot\frac{\sin nx}{n} - \int \frac{\sin nx}{n}dx = \frac{x\cdot\sin nx}{n} - \left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right] + C = \frac{x\cdot\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C$$

γ) Είναι

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx = \left[\frac{x\cdot\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi\sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0$$
$$-\frac{\cos 0}{n^2} = 0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$
$$= \boxed{\begin{cases} \dfrac{-2}{n^2}, & n = 2k+1, k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{0}{n^2}, & n = 2k, k\in\mathbb{Z} \end{cases}}$$



δ) Έχω $|x\cdot\cos 2x| = \begin{cases} x\cdot\cos 2x, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ -x\cdot\cos 2x, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$, αφού $|\cos 2x| = \begin{cases} \cos 2x, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ -\cos 2x, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

Άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x\cdot\cos 2x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos 2x\,dx = \left[\frac{x\cdot\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x\cdot\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left[\frac{\pi}{8} + 0 - 0 - \frac{1}{4}\right] - \left[0 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - 0\right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

5.

α) Με την μέθοδο των διαφορών δείξτε ότι $\sum_{r=2}^{n} \ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right] = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$. [3]

β) Να δειχτεί ότι η αντίστοιχη άπειρη σειρά συγκλίνει και να βρεθεί το άθροισμα αυτό. [2]

γ) Να δειχτεί ότι $\sum_{r=10}^{20} \ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right] = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$, όπου $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ είναι ακέραιοι που πρέπει να βρεθούν. [2]

Λύση

α)

Έχω $\sum_{r=2}^{n} \ln(r-1) + \ln(r+1) - 2\ln 2 = (\ln 1 + \ln 3 - 2\ln 2)$

$$+(\ln 2 + \ln 4 - 2\ln 3)$$
$$+(\ln 3 + \ln 5 - 2\ln 4)$$
$$+(\ln 4 + \ln 6 - 2\ln 5)$$
$$+(\ln 5 + \ln 7 - 2\ln 6)$$
$$+\cdots+$$
$$+[\ln(n-2) + \ln n - 2\ln(n-1)]$$
$$+[\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n]$$
$$= \ln 1 - 2\ln 2 + \ln 2 + \ln n + \ln(n+1) - 2\ln n = -\ln 2 - \ln n + \ln(n+1)$$
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$$

β) Έχω

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=2}^{n}\ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln 2=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)-\ln 2=\ln 1-\ln 2=\boxed{-\ln 2}$$

γ) Έχω

$$\sum_{r=10}^{20}\ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right]=\sum_{r=2}^{20}\ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right]-\sum_{r=2}^{9}\ln\left[\frac{(r-1)(r+1)}{r^2}\right]$$

$$=\left(\ln\frac{21}{20}-\ln 2\right)-\left(\ln\frac{10}{9}-\ln 2\right)=\ln\left[\frac{21}{20}\div\frac{10}{9}\right]=\ln\left[\frac{21}{20}\times\frac{9}{10}\right]=\ln\left(\frac{189}{200}\right)$$

άρα $\boxed{a=189, b=200}$

6.

α) Με χρήση του τύπου της διπλάσιας γωνίας, να δειχτεί ότι $cos^4\theta=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)$. [2]

β) Η περιοχή R βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και ορίζεται από την καμπύλη $y^4=(9-x^2)^3$, τον x-άξονα και της ευθείες $x=1.5$ και $x=3$. Η περιοχή R στρέφεται γύρω από τον x-άξονα κατά 2π ακτίνια. Με χρήση της αντικατάστασης $x=3\sin\theta$, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται. [6]

Λύση

α) Έχω

$$cos4\theta=\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)^2=\frac{1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{4}=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\left[\frac{\cos 4\theta+1}{2}\right]\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)=\frac{1}{8}(2+4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta)$$

$$=\frac{1}{8}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)$$

β) Έχω

$$\mathrm{R}=\pi\int_{x=1,5}^{x=3}y^2dx=\pi\int_{1,5}^{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Θέτω $x=3\sin\theta\Rightarrow\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$.

Για $x=1,5$ έχω $1,5=3\sin\theta\Rightarrow sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$, ενώ για $x=3\sin\theta\Rightarrow 3=3\sin\theta\Rightarrow sin\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$.

Άρα

$$\mathrm{R}=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(9-9\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 3\cos\theta d\theta=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}9^{\frac{3}{2}}(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot 3\cos\theta d\theta=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}81\cos^4\theta d\theta$$

$$=81\frac{\pi}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3)d\theta=\frac{81\pi}{8}\left[\frac{\sin 4\theta}{4}+\frac{4\sin 2\theta}{2}+3\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{81\pi}{8}\left[(0+0+\frac{3\pi}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{8}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{2})\right]=\boxed{81\frac{\pi}{8}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)}$$

7.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής $\mathrm{f}:x\to\left|\frac{2x+4}{3-x}\right|$, $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 3$.

α) Σχεδιάστε το γράφημα της $y=f(x)$, δώστε τις εξισώσεις πιθανών ασύμπτωτων και τις συντεταγμένες των σημείων όπου η καμπύλη τέμνει τους άξονες. [3]

β) Κατά συνέπεια, βρείτε το σύνολο τιμών της f. [1]

γ) Εξηγήστε γιατί η συνάρτηση f^2 δεν υφίσταται. (με f^2 εννοεί $f(f(x))$). [1]

Το πεδίο ορισμού της f περιορίζεται περαιτέρω στο $x\leq a$, όπου το a είναι μια σταθερά.

δ) Βρείτε την μέγιστη τιμή του a έτσι ώστε η συνάρτηση f^{-1} να υπάρχει. [1]

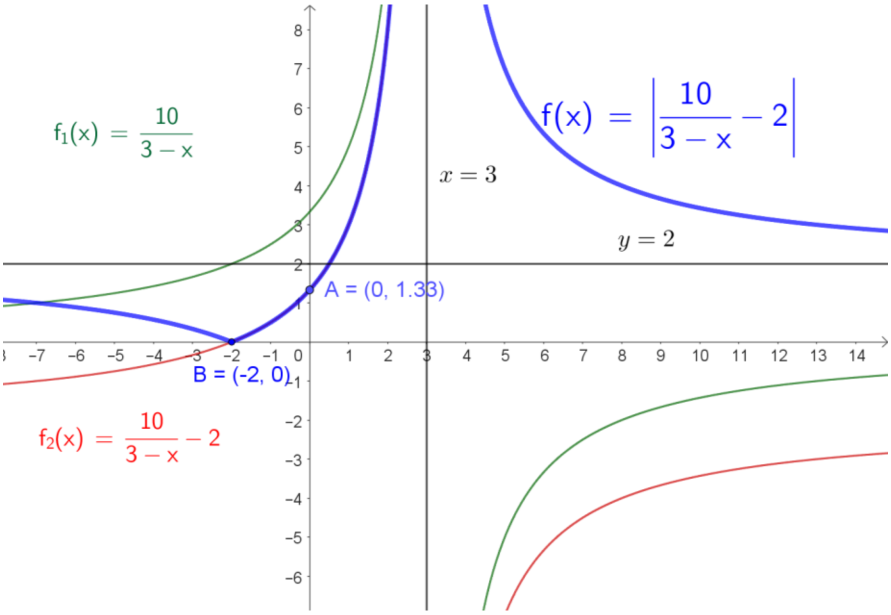
ε) Κατά συνέπεια, βρείτε την $f^{-1}(x)$ και το πεδίο ορισμού της. [4]

Λύση

α) Για $y=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $B(-2,0)$.

Για $x=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $A\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

Έχω $f(x)=\left|\frac{2x+4}{3-x}\right|=\left|\frac{2x-6+10}{3-x}\right|=\left|\frac{10}{3-x}-2\right|$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=3$. Έχω $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{10}{3-x}-2\right|=2$, άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=2$ στο $\pm\infty$. Τέλος η C_f προκύπτει από κατακόρυφη μετακίνηση της $\frac{10}{3-x}$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες και αναστροφή μετά ως προς τον οριζόντιο άξονα των τμημάτων της υπερβολής που ήταν κάτω από τον οριζόντιο άξονα. Τελικά έχω την C_f του παρακάτω σχήματος (μπλε γραμμή).



β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $A_f=[0,\infty)$

γ) Για να έχει νόημα η $f\big(f(x)\big)$ πρέπει $f(x)\in D_f$ για κάθε $x\in D_f$ δηλαδή $f(x)\neq 3$ για κάθε $x\in D_f$, που δεν ισχύει αφού $f(1)=3$ και $f(13)=3$.

δ) Για να ορίζεται η f^{-1} πρέπει η f να είναι μονότονη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$. Από το γράφημα προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει όταν $\alpha\le -2$. Άρα η μέγιστη τιμή είναι $\boxed{\alpha=-2}$

ε) Έχω για $x\le -2$, $y\in[0,2)$ και $\frac{2x+4}{3-x}\le 0$. Άρα

$$f(x)=-\left(\frac{2x+4}{3-x}\right)\Leftrightarrow y=\frac{-2x-4}{3-x}\Leftrightarrow 3y-xy=-2x-4\Leftrightarrow 2x-xy=-4-3y\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-4-3y}{2-y}=\frac{4+3y}{y-2}\Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{4+3x}{x-2},D_{f^{-1}}=[0,2)}$$

8.

Μην χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή για να απαντήσετε σε αυτήν την ερώτηση.

α) (i) Γράψτε τον αριθμό z, όπου $z=-1+\sqrt{3}i$, στην μορφή $re^{i\theta}$, where $r>0$ και $-\pi<\theta\le\pi$. [2]

(ii) Βρείτε την ελάχιστη θετική ακέραια τιμή του n τέτοια, ώστε ο $\frac{z^n}{iz^*}$ να είναι φανταστικός αριθμός. [3]

β) Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς v και w που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$2v+|w|=1$$
$$3v-\mathrm{i}w=-3+4\mathrm{i}$$

Δώστε τις απαντήσεις στην μορφή $a+\mathrm{i}b$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί. [5]

Λύση

α) (i) Έχω $|z|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$. Άρα $z=-1+\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}i\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(ii) Έχω $\left|\frac{z^n}{iz^*}\right|=\frac{|z|^n}{|z^*|}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$,

$$\arg\left(\frac{z^n}{iz^*}\right) = \arg z^n - \arg iz^* = n\arg z - [\arg i + \arg z^*] = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4n\pi - 3\pi + 4\pi}{6}$$
$$= \frac{\pi}{6}(4n+1)$$

Άρα $\frac{z^n}{iz^*} = 2^{n-1}\left[\cos\frac{\pi}{6}(4n+1) + i\sin\frac{\pi}{6}(4n+1)\right]$

Για να είναι ο $\frac{z^n}{iz^*}$ φανταστικός αριθμός πρέπει $\cos\frac{\pi}{6}(4n+1) = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}(4n+1) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow$ $(4n+1) = \pm 3 + 12k = \cdots 3, 15, 27, \ldots \Psi\ \ldots 9, 21, 33, \ldots \Leftrightarrow 4n = \cdots 2, 14, 26, \ldots \Psi\ \ldots 8, 20, 32, \ldots \overset{n\in\mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} n = 2, 5, 8, ..$

Άρα $\boxed{n = 2}$

β)

Έχω $v = \frac{1-|w|}{2} - 3$

Άρα $3\left[\frac{1-|w|}{2}\right] - iw = -3 + 4i \Leftrightarrow 3 - 3|w| - 2iw = -6 + 8i$

Έστω $w = a + bi$. Τότε έχω

$$3 - 3|a+bi| - 2i(a+bi) = -6 + 8i \Leftrightarrow 3 - 3\sqrt{a^2+b^2} - 2ai + 2b = -6 + 8i \Leftrightarrow$$
$$\left(3 - 3\sqrt{a^2+b^2} + 2b + 6\right) + (-2a - 8)i = 0$$

Άρα $-2a - 8 \Rightarrow a = -4$ και

$$3 - 3\sqrt{16+b^2} + 2b + 6 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{16+b^2} = 2b + 9 \Rightarrow 9(16+b^2) = 4b^2 + 36b + 81$$

$\Rightarrow 5b^2 - 36b + 63 = 0 \Rightarrow (5b-21)(b-3) = 0 \Rightarrow b = \frac{21}{5} \vee b = 3$, δεκτές αφού $2b + 9 \geq 0$.

Αν $\boxed{\mathrm{w} = -4 + \frac{21}{5}\mathrm{i}}$, τότε $\mathrm{v} = \frac{1-\left|-4+\frac{21}{5}\mathrm{i}\right|}{2} = \frac{1-\sqrt{(-4)^2+\left(\frac{21}{5}\right)^2}}{2} = \frac{1-\sqrt{16+\frac{441}{25}}}{2} = \frac{1-\sqrt{\frac{841}{25}}}{2} = \frac{1-\frac{29}{5}}{2} \Rightarrow \boxed{\mathrm{v} = \frac{-12}{5}}$

Αν $\boxed{\mathrm{w} = -4 + 3\mathrm{i}}$, τότε $\mathrm{v} = \frac{1-|-4+3\mathrm{i}|}{2} = \frac{1-5}{2} \Rightarrow \boxed{\mathrm{v} = -2}$

9.

Η ευθεία l_1 περνά από το σημείο A με συντεταγμένες $(-3, 1, 2)$ και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, όπου a είναι μια σταθερά. Η ευθεία l_2 έχει εξίσωση $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 5$. Δίνεται ότι οι l_1 και l_2 τέμνονται στο σημείο B.

α) Βρείτε την τιμή του a και τις συντεταγμένες του B. [5]

β) Το επίπεδο π_1 περιέχει το σημείο A και είναι κάθετο στην l_2.

(i) Βρείτε την απόσταση του B από το π_1. [3]

(ii) Συνεπώς, βρείτε την ακριβή γωνία μεταξύ των l_1 και π_1. [2]

γ) Το επίπεδο π_2 είναι κάθετο στο π_1 και περιέχει την l_1. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του π_2. [3]

Λύση

α) Έχω

$$\ell_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\ell_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Άρα για την τομή τους πρέπει

$$\begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ 1+\lambda \\ 2+a\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3\mu \\ 1+2\mu \\ 5+\mu \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -3+2\lambda = -2+3\mu \\ 1+\lambda = 1+2\mu \Leftrightarrow \lambda = 2\mu \\ 2+a\lambda = 5+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\mu = 1+3\mu \\ \lambda = 2\mu \\ 2+a\lambda = 5+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2\mu \\ 2+2a = 5+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2\mu \\ \boxed{a = 2} \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής είναι το $B\begin{pmatrix}-2+3\mu\\1+2\mu\\5+\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3\\1+2\\5+1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}}$

β) (i) Αφού το $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ είναι κάθετο στο επίπεδο π_1, αυτό θα έχει εξίσωση της μορφής $3x+2y+z+D=0$.

Αφού περνά από το $A(-3,1,2)$, θα έχω $3(-3)+2+2+D=0 \Rightarrow D=5$. Άρα π_1: $3x+2y+z+5=0$.

Άρα $d(B,\pi_1)=\frac{|3\cdot 1+2\cdot 3+6+5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{14}}\approx 5,35$

(ii) Αν θ η γωνία μεταξύ των l_1 και του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο π_1, δηλαδή το $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, τότε έχω

$$cos\theta=\frac{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}\right|}=\frac{10}{\sqrt{9}\sqrt{14}}=\frac{10}{3\sqrt{14}}$$

Η γωνία φ μεταξύ των l_1 και του π_1 θα είναι η συμπληρωματική της θ,

άρα $sin\varphi=cos\theta=\frac{10}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \varphi=\sin^{-1}\frac{10}{3\sqrt{14}}=\boxed{63,0^\circ}$

γ) Για το κάθετο διάνυσμα, n_2, στο επίπεδο π_2 έχω $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$.

Άρα το π_2 έχει εξίσωση της μορφής $-3x+4y+z+D=0$.

Αφού το π_2 περνά από το $A(-3,1,2)$, θα έχω $-3(-3)+4+2+D=0 \Rightarrow D=-15$.

Άρα $\boxed{\pi_2: -3x+4y+z-15=0}$

10.

Η μάζα ενός ατόμου εξαρτάται τόσο από τον ημερήσιο ρυθμό πρόσληψης ενέργειας όσο και από τον ημερήσιο ρυθμό ενεργειακής δαπάνης.

Σε αυτήν την ερώτηση, η μάζα είναι σε kg, ο χρόνος είναι σε ημέρες και μετριούνται η ενεργειακή πρόσληψη και η ενεργειακή δαπάνη. Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας ενός ατόμου σε σχέση με το χρόνο είναι ανάλογος με τη διαφορά μεταξύ της ενεργειακής πρόσληψης και της ενεργειακής δαπάνης.

Ο Andrew έχει μάζα M kg και η ενεργειακή του πρόσληψη είναι σταθερή σε C Θερμίδες ανά ημέρα. Για κάθε κιλό του δαπανά 30 θερμίδες την ημέρα.

α) Δείξτε ότι $\frac{dM}{dt}=k(C-30M)$,όπου t είναι ο χρόνος και k είναι μια σταθερά. [1]

Η αρχική μάζα του Andrew είναι 110 κιλά.

β) Να βρείτε την ενεργειακή πρόσληψη έτσι ώστε να διατηρεί τη μάζα του στα 110kg. [1]

Ως μέρος ενός νέου σχεδίου υγείας, ο Andrew καθορίζει την ενεργειακή του πρόσληψη στο 80% της τιμής που βρίσκεται στο μέρος (β).

γ) Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση στο μέρος (α), δείξτε ότι η μάζα του Andrew ενώ βρίσκεται στο σχέδιο ικανοποιεί την εξίσωση $M=88+22e^{-30kt}$. [4]

Η μάζα του Andrew μετά από 75 ημέρες στο σχέδιο είναι 100 κιλά

δ) Βρείτε τον αριθμό των επιπλέον ημερών που απαιτούνται στο σχέδιο για να πέσει η μάζα του Andrew κάτω από τα 96 kg. [4]

ε) (i) Σχεδιάστε ένα γράφημα της μάζας του Andrew ενώ βρίσκεται σε αυτό το σχέδιο. Εξηγήστε γιατί ο Andrew δεν μπορεί να πετύχει μάζα 80 κιλών χρησιμοποιώντας αυτό το σχέδιο. [2]

(ii) Δηλώστε το εύρος των πιθανών τιμών ενεργειακής πρόσληψης για τις οποίες ο Andrew θα μπορούσε να επιτύχει μάζα 80 kg. [1]

Λύση

α) Δεδομένου ότι η μάζα του Andrew είναι Mkg, η ενεργειακή του δαπάνη είναι ανά ημέρα είναι $= \boldsymbol{30 \times M = \ 30M}$

Δεδομένου ότι $\frac{\mathbf{dM}}{\mathbf{dt}} \propto (\boldsymbol{C - 30M})$ έχω ότι: $\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{k(C - 30M)}$, όπου $\boldsymbol{k}$ μια σταθερά.

β) Αφού $\boldsymbol{M = 110kg}$ και η μάζα σταθερή έχω $\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} = \mathbf{0}$

Άρα $\boldsymbol{K\big(C - 30(110)\big) = 0 \Rightarrow C = 3300}$ θερμίδες/ημέρα

γ) Έχω $\boldsymbol{C_2 = 0,8C = 2640}$ θερμίδες/ημέρα, άρα $\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{k(2640 - 30M) = 30K(88 - M)}$

Οπότε

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{88} - \boldsymbol{M}} \boldsymbol{dM} = \boldsymbol{30k} \int \boldsymbol{dt} \Rightarrow \boldsymbol{-ln|88 - M| = 30kt + c \Rightarrow ln|88 - M| = -30kt - c \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{88 - M = \pm e^{-30kt-c} = \pm e^{-c} \cdot e^{-30kt} = Ae^{-30kt}}, \text{ όπου } \boldsymbol{A = \pm e^{-c}}$$

Άρα $\boldsymbol{M = 88 - Ae^{-30kt}}$.

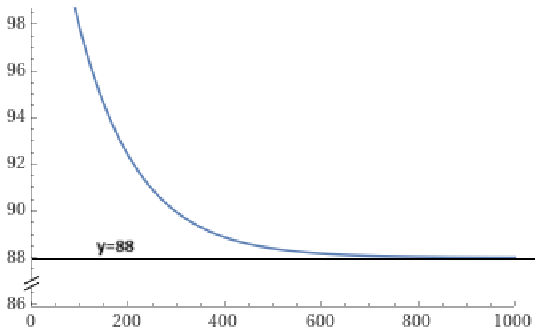
Την $\mathbf{t = 0, M = 110kg}$ οπότε $\boldsymbol{110 = 88 - Ae^0 \Rightarrow A = -22 \Rightarrow} \boxed{\boldsymbol{M = 88 + 22e^{-30kt}}}$

δ) Όταν $\boldsymbol{t = 75, M = 100kg}$ άρα έχω $\boldsymbol{100 = 88 + 22e^{-30(75k)}e^{-2250k} = \frac{6}{11} \Rightarrow 12 = 22e^{-2250k} \Rightarrow e^{-2250k} = \frac{6}{11} \Rightarrow -2250K = \ln\frac{6}{11} \Rightarrow K = 0.00026939}$

Όταν θα φτάσει τα 96 kg θα ισχύει ότι

$\boldsymbol{96 = 88 + 22e^{-0.0080818t} \Rightarrow e^{-0.0080818t} = \frac{4}{11} \Rightarrow -0.0080818t = ln\frac{4}{11} \Rightarrow t = 125,17}$ μέρες

Άρα οι επιπλέον ημέρες είναι : $\boldsymbol{126 - 75 =} \boxed{\mathbf{51}}$



ε) (i) Έχω ότι $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{88 + 22e^{-0.0080818t} = 88 + 0 = 88}$. Άρα το γράφημα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $\boldsymbol{y = 88}$. Η συνάρτηση Μ είναι εκθετική, φθίνουσα και θα έχει το γράφημα του σχήματος.

Τέλος $\boldsymbol{88 + 22e^{-0.0080818t} \geq 88 + 0 > 80}$, οπότε ο Andrew δεν μπορεί να πετύχει μάζα 80 κιλών χρησιμοποιώντας αυτό το σχέδιο.

(ii) όπως δείξαμε στο γ) ερώτημα ισχύει ότι

$\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{k(2640 - 30M) = 30K(88 - M)}$ και η μάζα του δεν κατεβαίνει κάτω από 88 Kg.

Αν βάζαμε κατανάλωση $\mathbf{30 \cdot 80 = 2400}$ θερμίδες θα παίρναμε με το ίδιο σκεπτικό ότι $\frac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{k(2400 - 30M) = 30k(80 - M)}$ και η μάζα του δεν κατεβαίνει κάτω από 80 Kg. Άρα για να πέσει κάτω από τα 80 kg αρκεί $\boxed{\boldsymbol{0 < C < 2400}}$

11.

Η Wei αποταμιεύει για ένα ακίνητο που σκοπεύει να αγοράσει στο μέλλον. Η Wei πρέπει να μαζέψει τουλάχιστον $**50000**. Αποταμιεύει τακτικά σε έναν λογαριασμό που δεν προσφέρει κανένα τόκο. Κάνει μια αρχική κατάθεση $$\boldsymbol{\alpha}$ στις 31 Ιανουαρίου 2021. Κάθε επόμενο μήνα, καταθέτει **50** $ περισσότερα από όσα κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα. Η τελική της κατάθεση γίνεται στις 31 Δεκεμβρίου 2023.

α) Βρείτε, με ακρίβεια σεντ, τη μικρότερη τιμή $\boldsymbol{\alpha}$ ώστε να εξοικονομήσει τουλάχιστον **50.000** $. [2]

Η Wei έχει κανονίσει να αγοράσει ένα ακίνητο την 1η Ιανουαρίου 2024 με τη βοήθεια ενός δανείου **400000** $. Οι όροι του δανείου είναι ότι ένας τόκος **0,1%** προστίθεται στο οφειλόμενο ποσό στην αρχή κάθε μήνα, με το πρώτο ποσό τόκου να προστίθεται την 1η Ιανουαρίου 2024. Η Wei πραγματοποιεί μηνιαία αποπληρωμή $$\boldsymbol{x}$ στο τέλος κάθε μήνα, με πρώτη εξόφληση στις 31 Ιανουαρίου 2024.

β) Δείξτε ότι το ποσό, σε δολάρια, που οφείλει η Wei στο τέλος των $\boldsymbol{n}$ μηνών είναι

$\boldsymbol{400000 \times 1.001^n - 1000x(1.001^n - 1)}$. [3]

γ) (i) Έστω ότι το δάνειο αποπληρώνεται σε 360 μηνιαίες δόσεις. Βρείτε την αξία της μηνιαίας δόσης στο πλησιέστερο σεντ. [2]

(ii) Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας στο μέρος (γ) (i) για να υπολογίσετε τους συνολικούς τόκους που καταβλήθηκαν για το δάνειο σε αυτήν την περίπτωση. [1]

δ) (i) Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Wei αποφασίζει να αποπληρώσει το δάνειο με $\$\mathbf{1600}$ ανά μήνα για $\boldsymbol{k}$ μήνες, συν μια τελική μηνιαία αποπληρωμή $\$\boldsymbol{y}$, όπου $\boldsymbol{y} < \mathbf{1600}$. Βρείτε τα $\boldsymbol{k}$ και $\boldsymbol{y}$. [4]

(ii) Βρείτε λοιπόν τη συνολική εξοικονόμηση για την Wei, αν πραγματοποιήσει τις πληρωμές όπως στο μέρος (δ)(i) αντί για τις πληρωμές στο μέρος (γ)(i), δίνοντας την απάντησή σας σε 4 σημαντικά νούμερα. [1]

Λύση

α) Οι καταθέσεις της είναι οι πρώτοι 36 όροι της αριθμητικής προόδου $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\mathbf{50}, \boldsymbol{a}+\mathbf{100}, \ldots$

Άρα αρκεί $\boldsymbol{S_{36}} \geq \mathbf{50000} \Rightarrow \frac{36}{2}\left(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{35(50)}\right) \geq \mathbf{50000} \Rightarrow \boldsymbol{a} \ \geq \mathbf{513,89}$

άρα το ελάχιστο ποσό είναι $\boxed{\boldsymbol{a} = \$\mathbf{513,89}}$

β) Έχω τον ακόλουθο πίνακα οφειλών.

n	Ποσό που χρωστά η Wei στο τέλος του n-οστού μήνα
1	$\mathbf{(400000 \times 1,001) - x}$
2	$\mathbf{[(400000 \times 1,001) - x] \times 1,001 - x = 400000(1,001)^2 - 1,001x - x}$
3	$\mathbf{[(400000(1,001)^2 - 1,001x - x] \times 1,001 - x = 400000(1,001)^3 - 1,001^2x - 1,001x - x}$
…	…
n	$\mathbf{400000(1,001)^n - 1,001^{n-1}x - 1,001^{n-2}x - \cdots\cdots - 1,001x - x}$ $\mathbf{= 400000(1,001)^n - x\left[\underbrace{1 + 1,001 + 1,001^2 + \cdots + 1,001^{n-1}}_{\text{άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου}}\right]}$ $\mathbf{= 400000(1,001)^n - x\left[\frac{1,001^n - 1}{1,001 - 1}\right]}$ $\mathbf{= 400000(1,001^n) - 1000x(1 \cdot 001^n - 1)}$

γ) (i) Αφού στους 360 μήνες εξοφλείται το δάνειο θα ισχύει ότι

$$\mathbf{400000(1,001^{360}) - 1000 \times (1,001^{360} - 1) = 0 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{400000(1,001^{360})}}{\mathbf{1000(1,001^{360} - 1)}} = \mathbf{1323,634777} = \boxed{\$\mathbf{1323,63}}$$

(ii) Οι τόκοι που καταβλήθηκαν είναι οι 360 δόσεις μείον οι 400000 άρα $\mathbf{360(1323,634777) - 400000 = 476508,51956} = \boxed{\$\mathbf{576508,52}}$

δ) (i) Έχω τώρα ότι $\boldsymbol{x} = \$\mathbf{1600}$ οπότε λύνω την ανισότητα

$$\mathbf{400000(1,001^k) - 1000(1600)(1,001^k - 1) < 0 \Leftrightarrow 400000(1,001^k) - 160000(1,001^k - 1) < 0}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 1600000(1,001^k - 1) > 400000(1,001^k) \Leftrightarrow 1,001^k - 1 > 0,25(1,001^k) \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{0.75(1,001^k) > 1 \Leftrightarrow 1,001^k > \frac{4}{3} \Leftrightarrow k > \frac{\boldsymbol{ln}\frac{4}{3}}{\ln 1,001} \Leftrightarrow k > 287.83}$$

Άρα $\boxed{\boldsymbol{k} = \mathbf{287}}$

Επομένως μετά από 287 μήνες η Wei χρωστά

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{400000(1,001^{287}) - 1000(1600)(1,001^{287} - 1)} = \boxed{\$\mathbf{1320,22}}$$

ε) Έχω

$\mathbf{360(1323,63477) - [(1600 \times 287) + 1320,217991]} = \$\ \mathbf{15\,988,30173}$

Ή με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων $\boxed{\$\mathbf{15990}}$

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗΣ σε συνεργασία με
CAMBRIDGE ASSESSMENT INTERNATIONAL EDUCATION.

Γενικό Πιστοποιητικό Εκπαίδευσης Προχωρημένου Επιπέδου.

GCE A-Level **Higher 2**

October/November 2021

Paper 2

3 ώρες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι υποψήφιοι απαντούν στο Έγγραφο Ερωτήσεων.

Πρόσθετα υλικά: Τυπολόγιο-12 σελίδων (MF26) List_MF26_y22_sy.pdf (seab.gov.sg)

ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΠΡΩΤΑ ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Γράψτε τον αριθμό σας, τον αριθμό ευρετηρίου και το όνομά σας στο έργο που παραδίδετε.
Γράψτε με σκούρο μπλε ή μαύρο στυλό.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μολύβι HB για οποιαδήποτε διαγράμματα ή γραφήματα. Μη χρησιμοποιείτε συνδετήρες, κόλλα ή διορθωτικό υγρό. ΜΗΝ ΓΡΑΦΕΤΕ πάνω στα BARCODE.

Απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στα κενά που παρέχονται στην Ερωτήσεις.
Δώστε μη ακριβείς αριθμητικές απαντήσεις με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων ή 1 δεκαδικού ψηφίου στην περίπτωση των γωνιών σε μοίρες, εκτός εάν προσδιορίζεται διαφορετικό επίπεδο ακρίβειας στην ερώτηση.
Αναμένεται να χρησιμοποιήσετε μια εγκεκριμένη αριθμομηχανή γραφημάτων.
Επιτρέπονται μη υποστηριζόμενες απαντήσεις από μια αριθμομηχανή γραφημάτων, εκτός εάν μια ερώτηση δηλώνει συγκεκριμένα διαφορετικά.
Όπου οι μη υποστηριζόμενες απαντήσεις από μια αριθμομηχανή γραφημάτων δεν επιτρέπονται σε μια ερώτηση, πρέπει να παρουσιάσετε τα μαθηματικά βήματα χρησιμοποιώντας μαθηματικές σημειώσεις και όχι εντολές αριθμομηχανής
Σας υπενθυμίζεται η ανάγκη για σαφή παρουσίαση στις απαντήσεις σας.
Ο αριθμός των βαθμών δίνεται σε παρενθέσεις[ ]στο τέλος κάθε ερώτησης ή μέρους ερώτησης.

Ενότητα Α: Καθαρά Μαθηματικά [40]

1. Μία από τις ρίζες της εξίσωσης $x^3+2x^2+ax+b=0$, όπου οι α και b είναι πραγματικοί αριθμοί, είναι η $1+\frac{1}{2}i$. Βρείτε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης και τις τιμές των α και b. [5]

Λύση

Αφού οι συντελεστές της πολυωνυμικής εξίσωσης είναι πραγματικοί αριθμοί προκύπτει ότι ο συζυγής μιγαδικός του $1+\frac{1}{2}i$, δηλαδή ο $\boxed{1-\frac{1}{2}i}$, είναι ρίζα της εξίσωσης. Άρα $x^3+2x^2+ax+b=\left(x-1-\frac{1}{2}i\right)\left(x-1+\frac{1}{2}i\right)(x-c)$, όπου c η τρίτη ρίζα του πολυωνύμου.

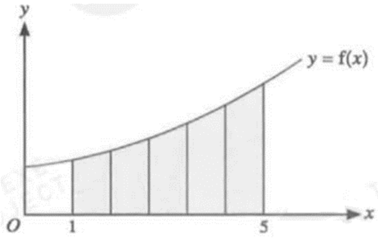
Έχω $x^3+2x^2+ax+b=\left(x-1-\frac{1}{2}i\right)\left(x-1+\frac{1}{2}i\right)(x-c)=\left((x-1)^2+\frac{1}{4}\right)(x-c)=$

$$\left(x^2-2x+\frac{5}{4}\right)(x-c)=x^3-cx^2-2x^2+2cx+\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}c=$$

$x^3+(-c-2)x^2+\left(2c+\frac{5}{4}\right)x-\frac{5}{4}c$.

Άρα συγκρίνοντας τους συντελεστές έχω $\begin{cases}2=-c-2\\ \alpha=2c+\frac{5}{4}\\ b=-\frac{5}{4}c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{\begin{matrix}c=-4\\ \alpha=-6,75\\ b=5\end{matrix}}\end{cases}$

2. Το διάγραμμα δείχνει ένα σκίτσο της καμπύλης $y=f(x)$. Η περιοχή κάτω από την καμπύλη μεταξύ $x=1$ και $x=5$, που εμφανίζεται σκιασμένο στο διάγραμμα, είναι η A. Αυτή η περιοχή χωρίζεται σε 5 κάθετες λωρίδες ίσου πλάτους, h.



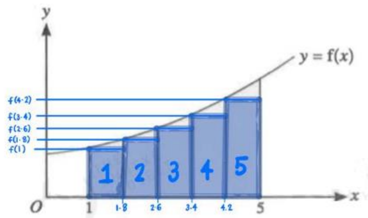
   a. Βρείτε την τιμή του h και δείξτε, χρησιμοποιώντας ένα σκίτσο, ότι το $\sum_{n=0}^{4}\big(f(1+nh)\big)h$ είναι μικρότερο από το περιοχή A. [2]
   b. Βρείτε μια παρόμοια έκφραση που είναι μεγαλύτερη από το εμβαδόν του A. [1]

Σας δίνεται τώρα ότι $f(x)=\frac{1}{20}x^2+1$.

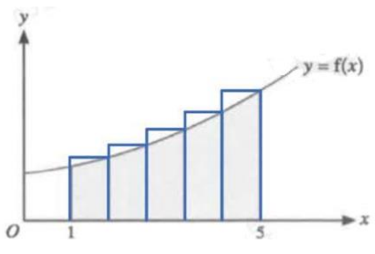
   c. Χρησιμοποιήστε την έκφραση που δίνεται στο μέρος (α) και την έκφρασή σας από το μέρος (β) για να βρείτε το κατώτερο και το ανώτερο άκρο για το εμβαδόν της περιοχής A. [2]
   d. Σχεδιάστε το γράφημα μιας συνάρτησης $y=g(x)$, μεταξύ $x=1$ και $x=5$, για την οποία το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης, του x-άξονα και των γραμμών $x=1$ και $x=5$ είναι μικρότερη από $\sum_{n=0}^{4}\big(f(1+nh)\big)h$. [1]

Λύση

a. Έχω $h=\frac{5-1}{5}=0.8$. Το $\sum_{n=0}^{4}\big(f(1+nh)\big)h=\sum_{n=0}^{4}\big(f(1+n0,8)\big)0,8$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι το άθροισμα των εμβαδών των 5 ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη. Άρα είναι μικρότερο του A

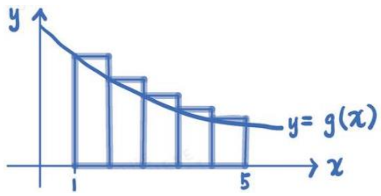


b. Η έκφραση $\boxed{\sum_{n=1}^{5}\big(f(1+nh)\big)h}$ δίνει το εμβαδόν των 5 ορθογωνίων του παρακάτω σχήματος και υπερβαίνει την περιοχή A.



c. Με την βοήθεια της αριθμομηχανής έχω για το κάτω άκρο της A ότι $\sum_{n=0}^{4}\big(f(1+n0,8)\big)0,8=0.8\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{20}(1+0.8n)^2+1=\boxed{5,608}$ τ.μ., ενώ για το άνω άκρο της ότι $\sum_{n=1}^{5}\big(f(1+n0,8)\big)0,8=0.8\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{20}(1+0.8n)^2+1=\boxed{6,568}$ τ.μ.

d. Αρκεί η συνάρτηση g να είναι φθίνουσα στο διάστημα [1,5], π.χ.



3.

a. Η συνάρτηση h ορίζεται από το $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{3}$,για $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g ορίζεται από $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{x} \mapsto \frac{x+1}{5x-1}$, για $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0.2}$.

i. Βρείτε το $\boldsymbol{gh}(\mathbf{2})$. [2]

ii. Βρείτε την τιμή του x για την οποία $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1,4}$. [1]

b. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ ορίζεται από το $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \frac{x+a}{2x+b}$, για $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{k}$.

i. Δώστε μια έκφραση για το $\boldsymbol{k}$ και εξηγήστε γιατί αυτή η τιμή των $\boldsymbol{x}$ πρέπει να εξαιρεθεί από τον πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{f}$ [2]

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι τέτοια ώστε $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$ για όλα τα $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}$

ii. Προσδιορίστε τις πιθανές τιμές των $\boldsymbol{a}$ και των $\boldsymbol{b}$. [3]

iii. Βρείτε μια έκφραση για το $\mathbf{f}^{-1}(-\mathbf{4})$. [1]

Λύση

a.

i. Έχω $\boldsymbol{h}(\mathbf{2}) = \frac{1}{2}\mathbf{2}^2 + \mathbf{3} = \mathbf{5}$. Άρα $\boldsymbol{gh}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{g}(\mathbf{5}) = \frac{5+1}{5\cdot 5-1} = \boxed{\frac{1}{4}}$

ii. Έχω $\frac{7}{5} = \frac{x+1}{5x-1} \Leftrightarrow 5x + 5 = 35x - 7 \Leftrightarrow 30x = 12 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}}$

b.

i. Πρέπει $2x + b \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-b}{2}$. Επομένως, $\boxed{k = \frac{-b}{2}}$. Αφού το $f\left(-\frac{b}{2}\right)$ δεν ορίζεται, το $x = \frac{-b}{2}$ πρέπει να εξαιρείται από το πεδίο ορισμού της f.

ii. Έχω για $x \in D_f$, ότι $y = \frac{x+a}{2x+b} \Leftrightarrow 2xy + by = x + a \Leftrightarrow 2xy - x = a - by \overset{y\neq 0,5}{\Longleftrightarrow} x = \frac{a-by}{2y-1}$ άρα $f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{2x-1}$. Θέλω $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{x+a}{2x+b} = \frac{a-bx}{2x-1} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2\alpha x - a = 2\alpha x - 2bx^2 - b^2x + ab \Leftrightarrow 2x^2 - x - a = -2bx^2 - b^2x + ab$. Με σύγκριση συντελεστών προκύπτει ότι $\boxed{b = -1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αλλά για να ορίζεται η $f^{-1}(x)$ πρέπει η f να είναι $1-1$. Παρατηρώ ότι $f(x) = \frac{x+a}{2x-1} = \frac{x+a}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$. Αν $\alpha = -\frac{1}{2}$, τότε $f(x) = \frac{1}{2}$ και δεν είναι $1-1$. Άρα $\boxed{\alpha \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$

iii. Έχω $f^{-1}(x) = \frac{a-bx}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(-4) = \frac{a+4b}{-8-1} = \boxed{-\frac{a+4b}{9}}$

4. Η κυρία Wong είναι πρόεδρος ενός κολυμβητικού συλλόγου. Επινοεί ένα πρόγραμμα εκπαίδευσης για τα μέλη του συλλόγου. Τα μέλη κολυμπούν 10 μήκη πισίνας. Ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσετε το πρώτο μήκος είναι 40 δευτερόλεπτα και ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσετε το τελευταίο μήκος είναι 25 δευτερόλεπτα. Οι χρόνοι που λαμβάνονται για καθένα από τα 10 μήκη είναι σε αριθμητική πρόοδο.

a. Βρείτε τον συνολικό χρόνο που χρειάζεται για να κολυμπήσετε 10 μήκη πισίνας χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα της κυρίας Wong. [2]

Ένα από τα μέλη του κλαμπ, ο Alfie, επινοεί ένα διαφορετικό πρόγραμμα προπόνησης. Στο πρόγραμμα του Alfie ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσει το πρώτο μήκος είναι 25 δευτερόλεπτα και ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσει το τελευταίο μήκος είναι 40 δευτερόλεπτα. Οι χρόνοι που λαμβάνονται για καθένα από τα 10 μήκη είναι σε γεωμετρική πρόοδο.

Η Suzie κολυμπά 30 μήκη. Κολυμπά 10 μήκη χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα της κυρίας Wong, μετά κολυμπά 10 μήκη με 25 δευτερόλεπτα για κάθε μήκος και μετά κολυμπά 10 μήκη χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα του Alfie. Το μήκος της πισίνας είναι 35 μέτρα.

b. Βρείτε τη μέση ταχύτητα της Suzie για το κολύμπι 30 μηκών της. [5]

c. Προσδιορίστε εάν, ακριβώς 8 λεπτά μετά την έναρξη της κολύμβησης, η Suzie κολυμπάει μακριά ή προς την αφετηρία της. [2]

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{\alpha_1 = 40}$, $\boldsymbol{\alpha_{10} = 40 + 9\omega = 25 \Leftrightarrow}$ **9ω=25-40** $\boldsymbol{\Leftrightarrow \omega = \frac{-5}{3}}$

Άρα για το συνολικό χρόνο έχω $\boldsymbol{s_{10} = \frac{10}{2}\left[2(40) + 9\left(-\frac{5}{3}\right)\right] = 5[80 - 15)] = \boxed{325s}}$

b. Για τα πρώτα 10 μήκη θέλει 325s. Για τα επόμενα 10 μήκη θέλει $\boldsymbol{10 \times 25 = 250s}$. Για τα τελευταία μήκη (πρόγραμμα Alfie) έχουμε $\boldsymbol{\beta_1 = 25}$, $\boldsymbol{\beta_{10} = 25\lambda^9 = 40 \Leftrightarrow \lambda = 1,0536}$.

Άρα θέλει χρόνο $\boldsymbol{S_{10} = \frac{25(1,0536^{10}-1)}{1,0536-1} = 319,797s}$.

Συνεπώς η μέση ταχύτητα της Suzie είναι $\boldsymbol{v = \frac{s_{ολικό}}{t_{ολικό}} = \frac{30\times 35}{325+250+319,79} = \boxed{1,17m/s}}$

c. Έχω $\boldsymbol{8mins = 480s}$ και $\boldsymbol{\frac{480-325}{25} = 6,2}$ που σημαίνει ότι η Suzie έχει διανύσει 16 μήκη πισίνας και ξεκινά το 17ο μήκος, άρα απομακρύνεται από το σημείο εκκίνησης.

5.

a. Βρείτε το $\boldsymbol{\tan^2 \int 5\,x dx}$. [2]

b. Βρείτε το $\boldsymbol{\int_0^b sin\,2\,x \cdot \sin 3\,x dx}$. [3]

c. Βρείτε το $\boldsymbol{\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx}$, όπου $\boldsymbol{1 < a < b}$. [3]

d. Με χρήση της αντικατάστασης $\boldsymbol{u = 1 + e^{2x}}$ βρείτε το $\boldsymbol{\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3} dx}$. [3]

Λύση

a. Έχω $\boldsymbol{\int \tan^2 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \tan^2\, u\, du = \frac{1}{5}\int \tan^2\, x\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \boxed{\frac{1}{5}(tan(x) - x) + c}}$

b. Έχω $\boldsymbol{= \int_0^b \sin 3\,x\, \sin 2\,x dx = \frac{1}{2}\int_0^b \cos x - \cos 5\,x dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right]_0^b = \boxed{\frac{1}{2}\left(\sin b - \frac{\sin 5b}{5}\right)}}$

c. Έχω $\boldsymbol{\int_a^b \frac{1}{x \ln x} dx = \int_a^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = [\ln\, |\ln\, x|]_a^b = \ln\,(\ln\, b) - \ln\,(\ln\, a) = \boxed{\ln\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)}}$

d. Αφού $\boldsymbol{u = 1 + e^{2x}}$, έχω $\boldsymbol{du = 2e^{2x} dx}$.

Οπότε $\boldsymbol{\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3} dx = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int u^{-3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4u^2} + c = \boxed{-\frac{1}{4(1+e^{2x})^2} + c}}$

Ενότητα Β : Πιθανότητες και Στατιστική [60]

6. Ένα μη δίκαιο σπίνερ 5 πλευρών δίνει τις τιμές 1,2,3,4 και 5 με τις πιθανότητες που φαίνονται στον πίνακα, όπου $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ είναι σταθερές.

Τιμή	1	2	3	4	5
Πιθανότητα	0,2	0,3	p	p	q

Δεδομένου ότι η διακύμανση της τιμής είναι 1,61, υπολογίστε τη μέση βαθμολογία. [7]

Λύση

Έχω $\boldsymbol{0,2+0,3+2p+q=1 \Leftrightarrow q=0,5-2p}$

Ακόμα έχω

$$\boldsymbol{E(X)=0,2+0,6+3p+4p+5q=0,8+7p+5q}$$
$$\boldsymbol{E(X^2)=0,2+0,3(4)+9p+16p+25q=1,4+25p+25q}$$

Για την διακύμανση ισχύει ότι $\boldsymbol{Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{1,61=1,4+25p+25q-(0,8+7p+5q)^2-2}$$

Με αντικατάσταση του q έχω

$$\boldsymbol{1,61=1,4+25p+25(0,5-2p)-[0.8+7p+5(0,5-2p)]^2}$$
$$\boldsymbol{1,61=13,9-25p-[3,3-3p]^2}$$
$$\boldsymbol{1,61=13,9-25p-(10,89-19,8p+9p^2)}$$
$$\boldsymbol{9p^2-5,2p-1,4=0 \Rightarrow p=\frac{1}{5} \vee p=-\frac{7}{9}}\text{απορρίπτεται.}$$

Άρα $\boldsymbol{q=0,5-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}}$ και τελικά $\boldsymbol{E(X)=0.8+7\left(\frac{1}{5}\right)+5\left(\frac{1}{10}\right)=\boxed{2,7}}$

7. Όταν εκτελεί ένα κόλπο, ένας μάγος λέει τη λέξη ABRACADABRA. Τα 11 γράμματα αυτής της λέξης είναι σε μια σειρά.

a. Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων των γραμμάτων που μπορούν να γίνουν. [2]

b. Βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών ρυθμίσεων στις οποίες τα 2 B είναι το ένα δίπλα στο άλλο, τα 2 R είναι το ένα δίπλα στο άλλο, ακριβώς 4 από τα A είναι το ένα δίπλα στο άλλο και το C είναι δίπλα στο D. [3]

c. Δεδομένου ότι τα 11 γράμματα είναι διατεταγμένα τυχαία, βρείτε την πιθανότητα να είναι και τα 5A μαζί. [3]

Λύση

a. Έχω 5A,2B,2R. Άρα $\frac{11!}{5!2!2!}=\boxed{\mathbf{83160}}$ διαφορετικές διατάξεις.

b. Για τα τρία πακέτα , το BB, το RR και το CD (ή DC) έχω $\mathbf{3!\times 2}$ διατάξεις. Τα άλλα δύο πακέτα A και AAAA θα τοποθετηθούν στις 4 θέσεις γύρω ή ανάμεσα στα πρώτα πακέτα. Άρα για την τοποθέτηση αυτών των δυο πακέτων έχω $\binom{4}{2}=\mathbf{6}$ επιλογές. Επειδή όμως έχει σημασία και η σειρά τοποθέτησης των 2 αυτών πακέτων έχω για τα πακέτα αυτά $\mathbf{6\times 2}$ επιλογές. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχω τελικά $\mathbf{3!\times 2\times 6\times 2}=\boxed{\mathbf{144}}$ διατάξεις.

c. Θεωρώ τα 5A ένα γράμμα από μια λέξη 7 γραμμάτων (τα άλλα είναι τα 2B,2R,1C,1D). Άρα το πλήθος των τρόπων που τα 5A μαζί είναι $\frac{7!}{2!2!}=\mathbf{1260}$.

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\mathbf{1260}}{\mathbf{83160}}=\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{66}}}$

8. Ένας κατασκευαστής αυτοκινήτων ισχυρίζεται ότι τα μπροστινά ελαστικά σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο αυτοκινήτου έχουν μέση διάρκεια ζωής 20000 μίλια. Μετά τα σχόλια των πελατών, ο διευθυντής πωλήσεων επιθυμεί να ελέγξει εάν η διάρκεια ζωής των ελαστικών είναι μεγαλύτερη από 20000 μίλια.

a. Εξηγήστε γιατί ο διευθυντής πωλήσεων πρέπει να πραγματοποιήσει ένα μονόπλευρο τεστ. Να αναφέρετε υποθέσεις για το τεστ, ορίζοντας τυχόν σύμβολα που χρησιμοποιείτε. [3]

Ο διευθυντής πωλήσεων επικοινωνεί με τους πελάτες και συλλέγει λεπτομέρειες σχετικά με τη διάρκεια ζωής ενός τυχαίου δείγματος 50 από αυτά τα ελαστικά. Οι διάρκειες ζωής, σε $\boldsymbol{x}$ χιλιάδες μίλια, συνοψίζονται παρακάτω.

$$\boldsymbol{\Sigma(x-20)=9,4}$$
$$\boldsymbol{\Sigma(x-20)^2=38,76}$$

b. Υπολογίστε αμερόληπτες εκτιμήσεις του μέσου όρου πληθυσμού και της διασποράς της διάρκειας ζωής των ελαστικών. [2]

c. Δοκιμάστε, στο επίπεδο σημαντικότητας 5%, εάν η μέση διάρκεια ζωής των μπροστινών ελαστικών είναι μεγαλύτερη από 20000 μίλια. [3]

d. Εξηγήστε γιατί αυτό το τεστ θα ήταν ακατάλληλο αν ο διευθυντής πωλήσεων είχε λάβει ένα τυχαίο δείγμα από 15 ελαστικά. [1]

Λύση

a. Καθώς ο διευθυντής επιθυμεί να ελέγξει εάν η διάρκεια ζωής των ελαστικών είναι μεγαλύτερη από 20.000 μίλια, αυτό θα απαιτούσε ένα μονόπλευρο τεστ. Ένα δίπλευρο τεστ πραγματοποιείται μόνο εάν ο διευθυντής επιθυμεί να ελέγξει εάν αλλάζει ο μέσος όρος ζωής στα ελαστικά από τα 20000 μίλια.

Άρα $\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Μηδενική υπόθεση}\quad \boldsymbol{H_0: \mu = 20000} \\ \textbf{Εναλλακτική υπόθεση}\ \boldsymbol{H_1: \mu > 20000}\end{array}}$, όπου μ ο μέσος όρος ζωής των ελαστικών.

b. Έχω $\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\Sigma(x-20)}{50} + 20 = \frac{9,4}{50} + 20 = 20,188 = \boxed{20188\,miles}}$.

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{49}\left[\sum(x-20)^2 - \frac{\left(\sum(x-20)\right)^2}{50}\right] = \frac{1}{49}\left[38,76 - \frac{9,4^2}{50}\right] = 0,754955(thousand\ miles)^2}$$
$$\boldsymbol{= 754.955 miles^2}$$

c. Έστω X η διάρκεια ζωής ενός ελαστικού (σε μίλια). Αφού $\boldsymbol{n > 30}$, ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, άρα $\boldsymbol{\bar{x} \sim N\left(20000, \frac{754955}{50}\right)}$. Για να δοκιμάσουμε την $\begin{cases}\textbf{Μηδενική υπόθεση}\quad \boldsymbol{H_0: \mu = 20000} \\ \textbf{Εναλλακτική υπόθεση}\ \boldsymbol{H_1: \mu > 20000}\end{cases}$ με 5% επίπεδο βεβαιότητας υπολογίζουμε το στατιστικό $\mathbf{z} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim \boldsymbol{N(0,1)}$. Έχω $\boldsymbol{z = \frac{20188-20000}{\sqrt{\frac{754955}{50}}} = 1,5300}$.

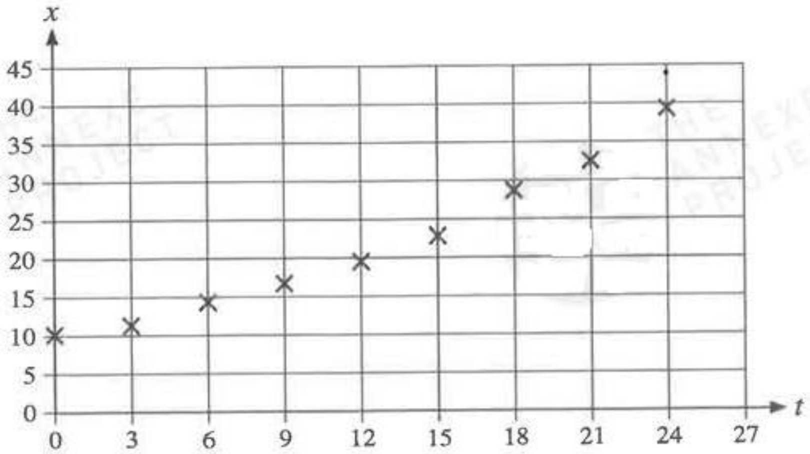
Από την αριθμομηχανή προκύπτει ότι $\boldsymbol{p-value = 0,0630 > 0,05}$, άρα **δεν** υπάρχουν επαρκή στοιχεία στο 5% επίπεδο σημαντικότητας για την **απόρριψη** του $\boldsymbol{H_0}$. δηλ. η διάρκεια ζωής των ελαστικών παραμένει στα 20000 μίλια.

d. Αν $\boldsymbol{n = 15}$ τότε το μέγεθος του δείγματος δεν είναι αρκετά μεγάλο ώστε να προσεγγιστεί το $\boldsymbol{\bar{x}}$ με μια κανονική κατανομή. Ως εκ τούτου, το Z-test δεν θα ήταν κατάλληλο.

9. Σε μια χημική αντίδραση η μάζα, σε $\boldsymbol{x}$ γραμμάρια, ενός συγκεκριμένου προϊόντος τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ λεπτά δίνεται σε αυτόν τον πίνακα

	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$\boldsymbol{x}$	10,1	11,3	14,3	16,7	19,5	22,8	28,7	32,5	39,3

Η τιμή του συντελεστή συσχέτισης είναι 0,9803 με ακρίβεια σε 4 σημαντικά ψηφία. Το διάγραμμα διασποράς για τα δεδομένα φαίνεται παρακάτω



a. Ο Toby επιχειρεί να μοντελοποιήσει τη σχέση μεταξύ $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{t}$ με μια ευθεία γραμμή. Εξηγήστε αν αυτό είναι πιθανό να παρέχει ένα καλό μοντέλο. [1]

Ο Toby δοκιμάζει τώρα ένα μοντέλο στο οποίο το $\boldsymbol{x}$ έχει μετατραπεί σε $\boldsymbol{\ln x}$.

b.
  - (i) Σχεδιάστε ένα διάγραμμα διασποράς $\boldsymbol{\ln x}$ έναντι $\boldsymbol{t}$ για τα δεδομένα που δίνονται στον πίνακα. [1]
  - (ii) Ο Toby μοντελοποιεί τα δεδομένα με την εξίσωση $\mathbf{ln}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{dt}$. Βρείτε τις τιμές των σταθερών $\boldsymbol{c}$ και $\boldsymbol{d}$ και δηλώστε την τιμή του συντελεστή συσχέτισης για αυτό το μοντέλο. [3]

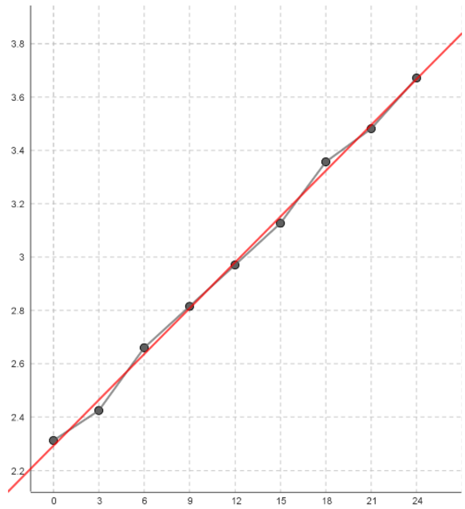
c. Σχόλιο για τα δύο μοντέλα του Toby. [2]

Λύση

a. Παρόλο που ο συντελεστής συσχέτισης είναι κοντά στο 1 (r=0,9803), το διάγραμμα διασποράς υποδηλώνει ότι όσο αυξάνεται το t, το x αυξάνεται με αυξανόμενο ρυθμό. Ως εκ τούτου, μια ευθεία γραμμή είναι απίθανο να παρέχει καλό μοντέλο!

b. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
lnx	2,31	2,42	2,66	2,82	2,97	3,13	3,36	3,48	3,67



Με την βοήθεια λογισμικού έχουμε ότι:

$\boldsymbol{c} = \mathbf{2,2927} = \boxed{\mathbf{2,29}}$

$\boldsymbol{d} = \mathbf{0,057271} = \boxed{\mathbf{0,0573}}$

$\boldsymbol{r} = \mathbf{0,99869} = \boxed{\mathbf{0,999}}$

c. Έστω το μοντέλο Α είναι $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bt}$ και το μοντέλο Β είναι $\boldsymbol{\ln x} = \mathbf{2,29} + \mathbf{0,0573}\boldsymbol{t}$. Δεδομένου ότι η τιμή $\boldsymbol{r}$ για το μοντέλο Β είναι πιο κοντά στο 1 από ότι στο μοντέλο Α, το μοντέλο Β είναι πιο κατάλληλο για τα δεδομένα που συλλέξαμε. Επιπλέον, το διάγραμμα διασποράς για το μοντέλο Β δείχνει μια ισχυρότερη γραμμική σχέση από το μοντέλο Α.

10. Σε αυτήν την ερώτηση θα πρέπει να δηλώσετε τις παραμέτρους τυχόν κανονικών κατανομών που χρησιμοποιείτε.

Μια εταιρεία κατασκευάζει ξύλινα σκαμπό με 3 πόδια από 4 συμπαγή εξαρτήματα - ένα κάθισμα σε μορφή δίσκου και 3 πόδια το καθένα σε μορφή μακριού, λεπτού κυλίνδρου. Τα καθίσματα και τα πόδια αγοράζονται χύμα από άλλη εταιρεία. Σε μια χρονική περίοδο διαπιστώθηκε ότι οι μάζες των καθισμάτων κατανέμονται κανονικά. Το 80% των καθισμάτων έχουν μάζα μικρότερη από 2,1 kg και το 15% των καθισμάτων έχουν μάζα μικρότερη από 1,95 kg

a. Βρείτε τη μέση μάζα των καθισμάτων και δείξτε ότι η τυπική απόκλιση είναι 0,0799 kg, με ακρίβεια 3 σημαντικά στοιχεία. [3]

Οι μάζες των ποδιών, σε kg, ακολουθούν την κατανομή $\boldsymbol{N(1,2;0,02^2)}$

b. Βρείτε τον αναμενόμενο αριθμό ποδιών με μάζα μεγαλύτερη από 1,21 kg σε μια τυχαία επιλεγμένη σειρά από 500 πόδια. [2]

c. Βρείτε την πιθανότητα ότι η συνολική μάζα ενός τυχαία επιλεγμένου καθίσματος και 3 τυχαία επιλεγμένων ποδιών είναι ανάμεσα στα 5,6 kg και 5,7 kg [3]

Για να γίνουν τα σκαμπό, ανοίγονται κυκλικές τρύπες στα καθίσματα και τοποθετούνται τα πόδια σε αυτά. Σε αυτή τη διαδικασία, η μάζα των καθισμάτων διαμορφώνεται ως μειωμένη κατά 9% και οι μάζες των ποδιών παραμένουν αμετάβλητες.

d. Βρείτε την πιθανότητα ότι η συνολική μάζα ενός τυχαία επιλεγμένου διάτρητου καθίσματος και 3 τυχαίων επιλεγμένων ποδιών να είναι λιγότερο από 5,6 κιλά [3]

Οι οπές που γίνονται στα καθίσματα έχουν διαμέτρους, σε mm, που ακολουθούν την κατανομή $\boldsymbol{N(31;0,4^2)}$ και οι διάμετροι των ποδιών, σε mm, ακολουθούν την κατανομή $\boldsymbol{N(30,7;0,3^2)}$. Εάν η διάμετρος ενός ποδιού είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο μιας τρύπας, τότε το πόδι πρέπει να το τρίψουμε για να ταιριάζει. Εάν η διάμετρος μιας οπής είναι μεγαλύτερη από 0,8 mm μεγαλύτερη από τη διάμετρο ενός ποδιού, τότε πρέπει να προστεθεί επένδυση όταν το πόδι είναι κολλημένο στο κάθισμα.

e. Ένα σκαμπό είναι κατασκευασμένο από ένα τυχαία επιλεγμένο διάτρητο κάθισμα και 3 τυχαία επιλεγμένα πόδια. Τα πόδια είναι σε συνδυασμό με τις τρύπες τυχαία. Βρείτε την πιθανότητα, ότι τα 3 πόδια να μπορούν να τοποθετηθούν χωρίς ανάγκη για οποιοδήποτε τρίψιμο ή επένδυση. [4]

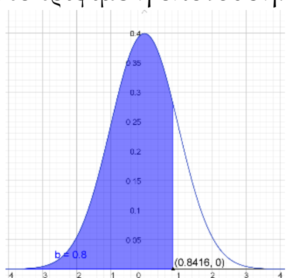
Λύση

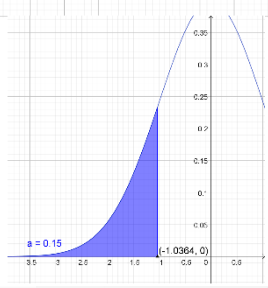
a. Έστω $\boldsymbol{X}$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την μάζα του καθίσματος σε kg και ότι αυτή ακολουθεί την κανονικά κατανομή, δηλαδή $\boldsymbol{X \sim N(\mu,\sigma^2)}$.

Έχω $\boldsymbol{P(X<2,1)=0,8 \Rightarrow P\left(Z<\frac{2,1-\mu}{\sigma}\right)=0,8 \Rightarrow \frac{2,1-\mu}{\sigma}=0,84162 \Rightarrow \mu=2,1-0,84162\sigma}$.

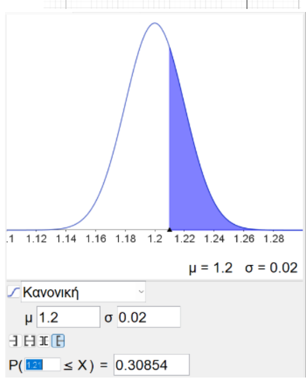
Ακόμα έχω $\boldsymbol{P(X<1,95)=0,15 \Rightarrow P\left(Z<\frac{1,95-\mu}{\sigma}\right)=0,15 \Rightarrow \frac{1,95-\mu}{\sigma}=-1,0364 \Rightarrow \mu=1,95+1,0364\sigma}$.

Από την επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{\begin{cases}\mu=2,1-0,84162\sigma\\ \mu=1,95+1,0364\sigma\end{cases} \Rightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{c}\mu=2,03\\ \sigma=0,0799\end{array}}\right.}$



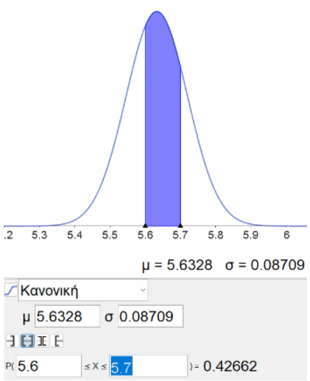


b. Έστω $\boldsymbol{\Pi}$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την μάζα του ποδιού σε kg και ότι αυτή ακολουθεί την κανονικά κατανομή, δηλαδή $\boldsymbol{\Pi \sim N(1,2;0,02^2)}$. Με την βοήθεια λογισμικού προκύπτει ότι $\boldsymbol{P(\Pi>1,21)=0,30854}$. Έστω $\boldsymbol{Y}$ ο αριθμός των ποδιών με μάζα μεγαλύτερη από 1,21 Kg σε μια τυχαία επιλεγμένη παρτίδα 500 ποδιών. Τότε έχω $\boldsymbol{Y \sim B(500;0,30854)}$ και $\boldsymbol{E(Y)=500\times 0,30854=154,27=\boxed{154}}$ (3 σημαντικά ψηφία)



c. Έχω $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{2,0328; 0,0799^2}), \boldsymbol{\Pi} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{1,2; 0.02^2})$

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}] + 3\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\Pi}_1] = 2,0328 + 3 \times 1,2 = 5,6328$$
$$\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3] = \boldsymbol{Var}[\boldsymbol{X}] + 3\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{\Pi}_1] = 0,0799^2 + 3 \times 0,02^2$$
$$= 0,0075840 = 0,087086^2$$



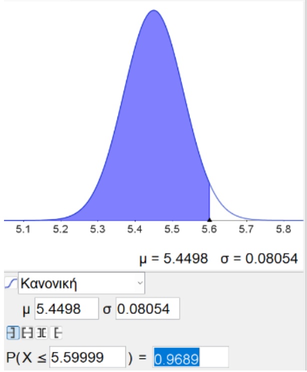
Άρα $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3 \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{5,6328; 0,087086^2})$

Με την βοήθεια λογισμικού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{P}(5,6 < \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3 < 5,7) = 0,42662 = \boxed{0,427}$$

d. Έχω λόγω της κατά 9% μείωσης της μάζας του καθίσματος ότι

$$\boldsymbol{E}(0,91\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3) = 0,91 \times 2,0328 + 3 \times 1,2 = 5,4498$$
$$\boldsymbol{Var}(0,91\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3) = 0,91^2 \times 0,0799^2 + 3 \times 0,02^2$$
$$= 0,0064866 = 0,08054^2$$

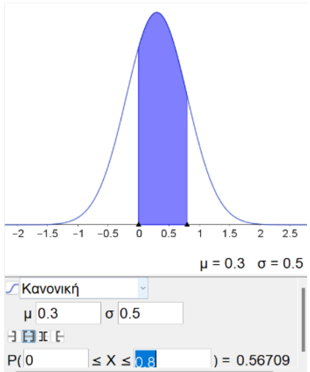


Άρα $\mathbf{0,91}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_3 \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{5,4498; 0,08054^2})$

Με την βοήθεια λογισμικού προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{P}(0,91\boldsymbol{X} + \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3 < 5,6) = 0,96890 = \boxed{0,969}$$

e. Έστω $\boldsymbol{\Delta}$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την διαφορά διαμέτρου καθίσματος μείον διάμετρο ποδιού. Τότε $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{31 - 30,7 - 0,3}$ και $\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{0,4^2 + 0,3^2 = 0,5^2}$. Άρα $\boldsymbol{\Delta} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0,3; 0,5^2})$. Για να μην χρειαστώ τρίψιμο ή επένδυση για κάθε πόδι αρκεί $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\Delta} \leq \mathbf{0,8}$. Με την βοήθεια λογισμικού προκύπτει ότι $\boldsymbol{P}(\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\Delta} \leq \mathbf{0,8}) = \mathbf{0,56709}$. Άρα η πιθανότητα τα τρία ανεξάρτητα πόδια να ταιριάξουν χωρίς τρίψιμο ή επένδυση είναι ίση με $\mathbf{0,56709^3 = 0,18237} = \boxed{0,182}$



11. Μια εταιρεία κατασκευάζει μια μεγάλη ποικιλία εξαρτημάτων για χρήση σε οικιακές συσκευές.

a. Η εταιρεία εισάγει έναν νέο τύπο φωτιστικού για ψυγεία. Κάθε μέρα ένας επόπτης επιλέγει ένα δείγμα 100 από τα φωτιστικά για δοκιμή.

(i) Πώς πρέπει να επιλέγονται τα φωτιστικά; Δώστε έναν λόγο για αυτήν τη μέθοδο επιλογής. [2]

Ο επόπτης καταγράφει τον αριθμό των ελαττωματικών εξαρτημάτων φωτισμού που βρέθηκαν σε διάστημα 150 εργάσιμων ημερών. Τα αποτελέσματά φαίνονται στον πίνακα

Number faulty	0	1	2	3	4	5	6	7	8 or more
Number of days	4	19	38	41	22	16	6	4	0

(ii) Χρησιμοποιήστε τις πληροφορίες στον πίνακα για να υπολογίσετε το p, την πιθανότητα να είναι ελαττωματικό ένα φωτιστικό. [1]

(iii) Υποθέτοντας ότι ο αριθμός των ελαττωματικών εξαρτημάτων που βρέθηκαν κάθε μέρα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή B(100, p), βρείτε τον αναμενόμενο αριθμό ημερών κατά τις οποίες βρέθηκαν 3 ελαττωματικά εξαρτήματα σε μια περίοδο των 150 εργάσιμων ημερών. [2]

b. Η εταιρεία κατασκευάζει επίσης θερμαντικά στοιχεία για ηλεκτρικούς φούρνους. Ένας σταθερός αριθμός από τυχαία επιλεγμένα στοιχεία θέρμανσης ελέγχονται κάθε μέρα και ο αριθμός που βρέθηκε ότι είναι ελαττωματικός συμβολίζεται με $\boldsymbol{X}$.

(i) Αναφέρετε, στο πλαίσιο, δύο υποθέσεις που απαιτούνται για το $\boldsymbol{X}$ να μοντελοποιηθεί καλά με μια διωνυμική κατανομή. [2]

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\boldsymbol{X}$ έχει την κατανομή B(80, 0,02).

(ii) Βρείτε την πιθανότητα, σε μια τυχαία επιλεγμένη ημέρα, να είναι ο αριθμός των στοιχείων που βρέθηκαν ελαττωματικά μεταξύ 1 και 4 συμπεριλαμβανομένων. [2]

(iii) Βρείτε την πιθανότητα, σε μια τυχαία επιλεγμένη εργάσιμη εβδομάδα 5 ημερών, να διαπιστωθεί ότι περισσότερα από 3 στοιχεία είναι ελαττωματικά σε τουλάχιστον 2 ημέρες. [3]

(iv) Βρείτε την πιθανότητα ότι, σε μια τυχαία επιλεγμένη εργάσιμη εβδομάδα 5 ημερών, βρίσκονται όχι περισσότερα από 8 στοιχεία ελαττωματικά συνολικά [2]

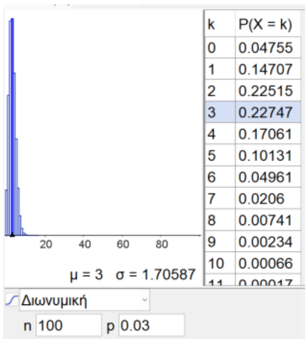
Λύση

a.

i. Τα φωτιστικά θα πρέπει να επιλέγονται τυχαία από τους κατασκευαστές κάθε την ημέρα. Αυτό εξασφαλίζει μια αμερόληπτη (ή δίκαιη) εκπροσώπηση του πληθυσμού των φωτιστικών που παράγονται από την εταιρεία.

ii. Έχω $\mathbf{p} = \frac{(0\times4)+(1\times19)+(2\times38)+(3\times41)+(4\times22)+(5\times16)+(6\times6)+(7\times4)}{150\times100} = \boxed{0,03}$

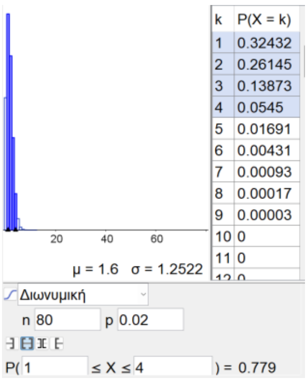
iii. Έστω $\boldsymbol{X}$ η τ.μ. που υποδηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών εξαρτημάτων από τα 100 φωτιστικά ανά ημέρα, άρα $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{B}(\mathbf{100}; \mathbf{0,03})$. Με την βοήθεια λογισμικού έχω $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{3}) = \mathbf{0,22747}$. Έστω $\boldsymbol{Y}$ η τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των ημερών από 150, εκ των οποίων 3 φωτιστικά είναι ελαττωματικά ανά ημέρα, άρα $\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{B}(\mathbf{150}, \mathbf{0,22747})$. Οπότε ο αναμενόμενος αριθμός ημερών είναι $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{150} \times \mathbf{0,22747} = \boxed{\mathbf{34,1}}$ μέρες.



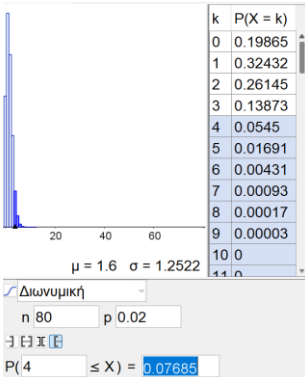
b.

i. 1. Η εμφάνιση ή όχι ενός ελαττωματικού θερμαντικού στοιχείου είναι ανεξάρτητη από τα άλλα θερμαντικά στοιχεία. 2. Η πιθανότητα ελαττωματικού θερμαντικού στοιχείου παραμένει σταθερή.

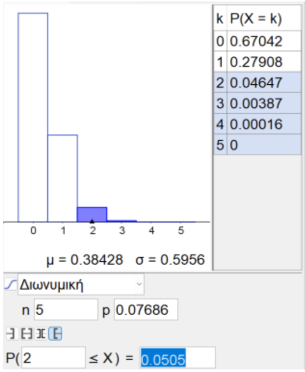
ii. Έχω $\boldsymbol{P}(\mathbf{1} \leq \boldsymbol{X} \leq \mathbf{4}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \leq \mathbf{4}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{0}) = \mathbf{0,778996} = \boxed{\mathbf{0,779}}$.



iii. Έστω $\boldsymbol{W}$ η τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των ημερών από τις 5, κατά τις οποίες βρέθηκαν ελαττωματικά περισσότερα από 3 στοιχεία, δηλαδή $\boldsymbol{W} \sim \boldsymbol{B}(\mathbf{5}, \boldsymbol{p})$.

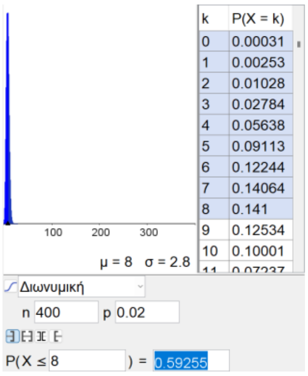


Έχω $\boldsymbol{p = P(X > 3) = P(X \geq 4) = 0,076855}$.



Άρα $\boldsymbol{P(W \geq 2) = 1 - P(W \leq 1) = \boxed{0,0505}}$

iv. Έστω $\boldsymbol{T}$ η τ.μ. που δηλώνει τον συνολικό αριθμό ελαττωματικών στοιχείων από $\boldsymbol{5 \times 80 = 400}$ στοιχεία. Άρα $\boldsymbol{T \sim B(400; 0,02)}$. Έχω $\boldsymbol{P(T \leq 8) = 0,59255 = \boxed{0,593}}$



[Πηγές]

Σιγκαπούρη - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

Ένα ταξίδι στα καλύτερα εκπαιδευτικά συστήματα του κόσμου: Σιγκαπούρη (talcmag.gr)

https://en.wikipedia.org/wiki/Singapore_math

https://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_Singapore

https://www.talcmag.gr/hot/sigkapouri/

A Level Maths - The Complete Guide to H1/H2 Math in Singapore (singaporetuitionteachers.com)

Synthetic Division Calculator - eMathHelp

https://www.seab.gov.sg/docs/default-source/national-examinations/syllabus/alevel/2022syllabus/List_MF26_y22_sy.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Singapore-Cambridge_GCE_Advanced_Level

https://www.seab.gov.sg/docs/default-source/national-examinations/syllabus/alevel/2025-a-level-syllabus/8865_y25_sy.pdf

https://www.moe.gov.sg/post-secondary/a-level-curriculum-and-subject-syllabuses

https://singaporetuitionteachers.com/a-level-maths/

https://www.theannexeproject.com/2023-a-level-h2-mathematics-paper-1-solution/