[Ρωσία]
Η Ρωσία (ρωσικά: Россия), επίσημα Ρωσική Ομοσπονδία (Российская Федерация) είναι χώρα που βρίσκεται στη βόρεια Ευρασία. Πολίτευμά της είναι Ομοσπονδιακή Ημιπροεδρική δημοκρατία και αποτελείται από 85 ομοσπονδιακά κρατίδια. Με έκταση 17.098.246 τ.χλμ. αποτελεί το μεγαλύτερο κράτος του πλανήτη, καλύπτοντας πάνω από το ένα όγδοο της παγκόσμιας κατοικήσιμης γης. Είναι η ένατη σε πληθυσμό χώρα παγκοσμίως, με 146.447.400 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2023. Πρωτεύουσα της χώρας και μεγαλύτερη πόλη είναι η Μόσχα. Η επίσημη γλώσσα είναι τα ρωσικά και νόμισμα το ρούβλι.
Η Ρωσία εκτείνεται τόσο στην Ασία όσο και στην Ευρώπη, με το μεγαλύτερο τμήμα αυτής να εκτείνεται στην Ασία (Σιβηρία). Πολιτισμικά όμως είναι πιο κοντά στην Ευρώπη, με το ευρωπαϊκό τμήμα της χώρας να περιλαμβάνει περίπου το 77% του συνολικού πληθυσμού. Η χώρα διαθέτει το μεγαλύτερο απόθεμα πυρηνικών όπλων στον κόσμο, με τις τρίτες υψηλότερες στρατιωτικές δαπάνες. Οι εκτεταμένοι ορυκτοί και ενεργειακοί πόροι της Ρωσίας είναι οι μεγαλύτεροι στον κόσμο και συγκαταλέγεται μεταξύ των κορυφαίων παραγωγών πετρελαίου και φυσικού αερίου παγκοσμίως. Είναι μόνιμο μέλος του Συμβουλίου Ασφαλείας των Ηνωμένων Εθνών, μέλος της G20, της ΟΣΣ, των BRICS, της APEC, του ΟΑΣΕ και του ΠΟΕ, καθώς και το ηγετικό μέλος της Κοινοπολιτείας Ανεξάρτητων Κρατών, του ΟΣΣΑ και της Ευρασιατικής Οικονομικής Ένωσης. Η Ρωσία φιλοξενεί επίσης 30 Μνημεία Παγκόσμιας Κληρονομιάς της UNESCO.

[Εκπαίδευση στη Ρωσία]
Στη Ρωσία, το κράτος παρέχει τις περισσότερες εκπαιδευτικές υπηρεσίες που ρυθμίζουν την εκπαίδευση μέσω του Υπουργείου Παιδείας και Επιστημών. Οι περιφερειακές αρχές ρυθμίζουν την εκπαίδευση εντός των δικαιοδοσιών τους εντός του ισχύοντος πλαισίου των ομοσπονδιακών νόμων. Οι δαπάνες της Ρωσίας για την εκπαίδευση αυξήθηκαν από 2.7% του ΑΕΠ το 2005 σε 3.8% το 2013, αλλά παραμένουν κάτω από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ 5.2%.

Πριν από το 1990, η πορεία της σχολικής εκπαίδευσης στη Σοβιετική Ένωση διαρκούσε 10 χρόνια, αλλά στο τέλος του 1990 άρχισε να λειτουργεί επίσημα ένα 11ετές πρόγραμμα. Η εκπαίδευση στα κρατικά δευτεροβάθμια σχολεία είναι δωρεάν. Η πρώτη τριτοβάθμια (πανεπιστημιακή) εκπαίδευση είναι δωρεάν με κρατήσεις: σημαντικός αριθμός φοιτητών εγγράφονται με πλήρη αμοιβή. Οι άνδρες και οι γυναίκες μαθητές έχουν ίσα μερίδια σε όλα τα στάδια της εκπαίδευσης, εκτός από την τριτοβάθμια εκπαίδευση όπου οι γυναίκες οδηγούν με 57%.

Το ποσοστό αλφαβητισμού στη Ρωσία είναι 99.7% (99.7% για τους άνδρες, 99.6% για τις γυναίκες). Σύμφωνα με μια εκτίμηση του ΟΟΣΑ του 2016 , το 54% των ενηλίκων της Ρωσίας (ηλικίας 25 έως 64 ετών) έχουν αποκτήσει τριτοβάθμια εκπαίδευση, δίνοντας στη Ρωσία το δεύτερο υψηλότερο επίπεδο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης μεταξύ 35 χωρών-μελών του ΟΟΣΑ, το 47.7% έχουν ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (το πλήρες πρόγραμμα 11 ετών), το 26.5% έχουν ολοκληρώσει το γυμνάσιο (9 ετών) και το 8.1% έχουν στοιχειώδη εκπαίδευση (τουλάχιστον 4 ετών).

Σε σύγκριση με άλλες χώρες του ΟΟΣΑ, η Ρωσία έχει μερικά από τα μικρότερα μεγέθη τάξεων και μερικές από τις συντομότερες ώρες διδασκαλίας ετησίως.

Το 2014, το ινστιτούτο Πήρσον αξιολόγησε την εκπαίδευση της Ρωσίας ως την 8η καλύτερη στην Ευρώπη και την 13η καλύτερη στον κόσμο. Το εκπαιδευτικό επίτευγμα της Ρωσίας αξιολογήθηκε ως το 21ο υψηλότερο στον κόσμο και οι γνωστικές δεξιότητες των μαθητών ως το 9ο υψηλότερο. Το 2015 ο ΟΟΣΑ κατέταξε τα μαθηματικά και τις επιστημονικές δεξιότητες των Ρώσων μαθητών ως την 34η καλύτερη στον κόσμο, μεταξύ Σουηδίας και Ισλανδίας.

Ο Τζόζεφ Στίγκλιτζ, πρώην επικεφαλής οικονομολόγος της Παγκόσμιας Τράπεζας, δήλωσε ότι ένα από τα καλά πράγματα που κληρονόμησε η Ρωσία από τη σοβιετική εποχή ήταν «ένα υψηλό επίπεδο εκπαίδευσης, ειδικά σε τεχνικούς τομείς τόσο σημαντικούς για τη Νέα Οικονομία»

[Επίπεδα εκπαίδευσης]
Σύμφωνα με το νόμο, το εκπαιδευτικό σύστημα της Ρωσίας περιλαμβάνει 2 τύπους εκπαίδευσης : Την γενική και την επαγγελματική.

Η γενική εκπαίδευση έχει τα ακόλουθα επίπεδα:
- Προσχολική εκπαίδευση (επίπεδο 0 σύμφωνα με το ISCED)
- Πρωτοβάθμια γενική εκπαίδευση (επίπεδο 1 σύμφωνα με το ISCED) - η διάρκεια της φοίτησης είναι 4 έτη
- Βασική γενική εκπαίδευση (επίπεδο 2 σύμφωνα με το ISCED) - η διάρκεια της φοίτησης είναι 5 έτη
- Δευτεροβάθμια γενική εκπαίδευση (επίπεδο 3 σύμφωνα με το ISCED - η διάρκεια της φοίτησης είναι 2 έτη

Επιπλέον, υπάρχει επίσης μια πρόσθετη γενική εκπαίδευση (ομάδες φοίτησης και λέσχες με βάση την σχολή).

Η επαγγελματική εκπαίδευση έχει τα ακόλουθα επίπεδα:
- Κατάρτιση για επαγγέλματα - είναι διαθέσιμη βάσει της πρωτοβάθμιας γενικής εκπαίδευσης. Η διάρκεια της φοίτησης εξαρτάται από το συγκεκριμένο επάγγελμα, κατά κανόνα, που δεν υπερβαίνει τους αρκετούς μήνες.
- Επαγγελματική εκπαίδευση - διατίθεται βάση της βασικής γενικής εκπαίδευσης ή της δευτεροβάθμιας γενικής εκπαίδευσης, με την διάρκεια της φοίτησης να είναι 3 έτη (με βάση τη δευτεροβάθμια γενική εκπαίδευση) ή τα 4 έτη (με βάση τη βασική γενική εκπαίδευση, στην περίπτωση αυτή το πρόγραμμα περιλαμβάνει τη δευτεροβάθμια γενική εκπαίδευση)

[Πρωτοβάθμια εκπαίδευση]
Τα νηπιαγωγεία, σε αντίθεση με τα σχολεία, ρυθμίζονται από τις περιφερειακές και τοπικές αρχές. Το Υπουργείο Παιδείας και Επιστημών ρυθμίζει μόνο ένα σύντομο πρόγραμμα προσχολικής προετοιμασίας για παιδιά ηλικίας 5-6 ετών. Το 2004 η κυβέρνηση προσπάθησε να χρεώσει το πλήρες κόστος των νηπιαγωγείων στους γονείς. Η ευρεία δημόσια αντίθεση προκάλεσε αντιστροφή της πολιτικής. Επί του παρόντος, οι τοπικές αρχές μπορούν νομίμως να χρεώνουν τους γονείς όχι περισσότερο από το 20% του κόστους. Δίδυμα, παιδιά φοιτητών, πρόσφυγες, βετεράνοι του Τσερνομπίλ και άλλες προστατευόμενες κοινωνικές ομάδες δικαιούνται δωρεάν υπηρεσία.

Το σοβιετικό σύστημα προέβλεπε σχεδόν καθολική υπηρεσία πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (νηπιαγωγείο, ηλικίας 1 έως 3 ετών) και νηπιαγωγείου (ηλικίας 3 έως 7 ετών) στις αστικές περιοχές, απαλλάσσοντας τις εργαζόμενες μητέρες από τις ανάγκες φροντίδας των παιδιών κατά τη διάρκεια της ημέρας. Μέχρι τη δεκαετία του 1980, υπήρχαν 88.000 προσχολικά ιδρύματα. Καθώς ο φόρτος σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αυξήθηκε και μετακινήθηκε από το πρότυπο των δέκα σε έντεκα ετών, τα προγράμματα νηπιαγωγείου μετατοπίστηκαν από την κατάρτιση βασικών κοινωνικών δεξιοτήτων ή φυσικών ικανοτήτων στην προετοιμασία για την είσοδο στο σχολικό επίπεδο.

Η βελτίωση της οικονομίας μετά την κρίση του 1998, σε συνδυασμό με την ιστορική δημογραφική κορύφωση, είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του ποσοστού γεννήσεων, που καταγράφηκε για πρώτη φορά το 2005. Οι μεγάλες πόλεις αντιμετώπισαν έλλειψη κενών θέσεων νηπιαγωγείου νωρίτερα, το 2002. Η λίστα αναμονής του νηπιαγωγείου της Μόσχας περιελάμβανε 15.000 παιδιά. Στην πολύ μικρότερη πόλη Τομσκ (πληθυσμός 488.000) έφτασε τις 12.000. Η πόλη της Μόσχας καθιέρωσε εξειδικευμένες επιτροπές νηπιαγωγείων που είναι επιφορτισμένες με τον εντοπισμό κενών θέσεων για τα παιδιά. Οι γονείς εγγράφουν τα παιδιά τους στη λίστα αναμονής μόλις γεννηθούν. Ανεξάρτητοι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι οι δωροδοκίες ή οι «δωρεές» για την εισαγωγή σε νηπιαγωγεία ανταγωνίζονται σε ποσό με τις εισαγωγές στο πανεπιστήμιο, ενώ οι αρχές αντικρούουν την κατηγορία.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Γενικό πλαίσιο

Υπήρχαν 59.260 σχολεία γενικής εκπαίδευσης το σχολικό έτος 2007-2008. Ο αριθμός περιλαμβάνει 4.965 σχολεία προηγμένης μάθησης που ειδικεύονται σε ξένες γλώσσες, μαθηματικά κ.λπ. 2.347 ανώτερα σχολεία γενικής χρήσης, και 1.884 σχολεία για όλες τις κατηγορίες παιδιών με ειδικές ανάγκες. Δεν περιλαμβάνει την επαγγελματική τεχνική σχολή και τις τεχνικές. Τα ιδιωτικά σχολεία αντιπροσώπευαν το 0,3% των εγγραφών στο δημοτικό σχολείο το 2005.

Η εννεαετής δευτεροβάθμια εκπαίδευση στη Ρωσία είναι υποχρεωτική από την 1η Σεπτεμβρίου 2007. Μέχρι το 2007, περιοριζόταν σε εννέα έτη με προαιρετικές τις τάξεις 10-11. Ένας μαθητής ηλικίας 15 έως 18 ετών μπορεί να εγκαταλείψει το σχολείο με την έγκριση του γονέα του και των τοπικών αρχών, και χωρίς τη συγκατάθεσή τους όταν φτάσει στην ηλικία των 18 ετών. Η αποβολή από το σχολείο για πολλαπλές παραβιάσεις που διαταράσσουν τη σχολική ζωή είναι δυνατή από την ηλικία των 15 ετών.

Η εντεκάχρονη σχολική περίοδος χωρίζεται σε στοιχειώδεις (έτη 1-4), μεσαίες (έτη 5-9) και ανώτερες (έτη 10-11) τάξεις. Η απόλυτη πλειοψηφία των παιδιών φοιτούν σε σχολεία πλήρους προγράμματος που παρέχουν εντεκάχρονη εκπαίδευση. Σχολεία που περιορίζονται σε στοιχειώδεις ή στοιχειώδεις και μεσαίες τάξεις υπάρχουν συνήθως στις αγροτικές περιοχές.

Τα παιδιά των δημοτικών τάξεων συνήθως διαχωρίζονται από τις άλλες τάξεις μέσα στον δικό τους όροφο ενός σχολικού κτιρίου. Διδάσκονται, ιδανικά, από έναν μόνο δάσκαλο και στα τέσσερα στοιχειώδη έτη (εκτός από τη σωματική άσκηση και, εάν υπάρχουν, τις ξένες γλώσσες). Το 98,5% των δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι γυναίκες. Ξεκινώντας από το πέμπτο έτος, κάθε ακαδημαϊκό μάθημα διδάσκεται από ειδικό καθηγητή (80,4% γυναίκες το 2004). Η αναλογία μαθητών προς εκπαιδευτικούς (11:1) είναι στο ίδιο επίπεδο με τις ανεπτυγμένες ευρωπαϊκές χώρες. Οι μέσοι μηνιαίοι μισθοί των εκπαιδευτικών το 2008 κυμαίνονται από 6.200 ρούβλια (200 δολάρια ΗΠΑ) στη Μορδοβία έως 21.000 ρούβλια (700 δολάρια ΗΠΑ) στη Μόσχα.

Το σχολικό έτος εκτείνεται από την 1η Σεπτεμβρίου έως το τέλος Μαΐου και χωρίζεται σε τέσσερις περιόδους. Το πρόγραμμα σπουδών στα σχολεία είναι σταθερό. Σε αντίθεση με ορισμένες δυτικές χώρες, οι μαθητές ή οι γονείς τους δεν έχουν επιλογή θεμάτων σπουδών. Το φορτίο τάξης ανά μαθητή (638 ώρες το χρόνο για εννιάχρονα, 893 για δεκατριάχρονα) είναι χαμηλότερο από ό, τι στη Χιλή, το Περού ή την Ταϊλάνδη, και ελαφρώς χαμηλότερο από ό,τι στις περισσότερες πολιτείες των Ηνωμένων Πολιτειών, αν και οι επίσημες ώρες συχνά επισυνάπτονται με πρόσθετη εργασία στην τάξη. Οι μαθητές βαθμολογούνται σε κλίμακα 5 βημάτων, που κυμαίνεται στην πράξη από 2 ("απαράδεκτο") έως 5 ("εξαιρετικό"). Το 1 είναι ένα σπάνια χρησιμοποιούμενο σημάδι ακραίας αποτυχίας.

Ορισμένα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης διεξάγουν, εκτός από το τυπικό πρόγραμμα, μια εις βάθος μελέτη ορισμένων θεμάτων (σχολεία που επικεντρώνονται στα μαθηματικά, τις ξένες γλώσσες, τις τέχνες, τα στρατιωτικά μαθήματα κ.λπ.). Αυτά τα σχολεία θεωρούνται πιο διάσημα από τα συνηθισμένα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

[Επιλογή επαγγελματικής κατάρτισης]
Με την ολοκλήρωση ενός εννεαετούς προγράμματος ο μαθητής έχει την επιλογή είτε να ολοκληρώσει τα υπόλοιπα δύο χρόνια στο κανονικό σχολείο, είτε να μεταφερθεί σε εξειδικευμένη σχολή επαγγελματικής κατάρτισης. Ιστορικά, αυτά χωρίστηκαν σε τεχνικά σχολεία χαμηλού κύρους και καλύτερα αναγνωρισμένες τεχνικές και ιατρικές σχολές (νοσηλευτικού επιπέδου). Στη δεκαετία του 2000, πολλά τέτοια ιδρύματα, εάν λειτουργούν, έχουν μετονομαστεί σε κολέγια. Παρέχουν στους μαθητές πτυχίο επαγγελματικών δεξιοτήτων και πιστοποιητικό γυμνασίου ισοδύναμο με 11ετή εκπαίδευση σε κανονικό σχολείο. Το πρόγραμμα, λόγω της συνιστώσας επαγγελματικής κατάρτισης, εκτείνεται σε διάστημα 3 ετών.

Όλα τα πιστοποιητικά δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (απολυτήριο, ρωσικά: аттестат зрелости), ανεξάρτητα από το ίδρυμα έκδοσης, συμμορφώνονται με το ίδιο εθνικό πρότυπο και θεωρούνται, τουλάχιστον νομικά, πλήρως ισοδύναμα. Το κράτος ορίζει ένα ελάχιστο (και σχεδόν εξαντλητικό) σύνολο θεμάτων σπουδών που πρέπει να εμφανίζονται σε κάθε πιστοποιητικό. Στην πράξη, η παράταση των περιόδων σπουδών σε τρία έτη θέτει ελαφρώς σε μειονεκτική θέση τους άρρενες σπουδαστές των επαγγελματικών σχολών που σκοπεύουν να συνεχίσουν: φθάνουν σε ηλικία στρατολόγησης πριν από την αποφοίτησή τους ή αμέσως μετά από αυτήν και κανονικά πρέπει να υπηρετήσουν στο στρατό πριν υποβάλουν αίτηση σε ιδρύματα προπτυχιακού επιπέδου.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]
Το Ρωσικό σύστημα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης είναι ένα από τα παλαιότερα στον κόσμο. Υπάρχουν σήμερα περισσότερα από 740 Πανεπιστήμια (Δημόσια και Ιδιωτικά). Κάθε χρόνο τα Ρωσικά Πανεπιστήμια φιλοξενούν πάνω από 300.000 διεθνείς φοιτητές, τους οποίους προετοιμάζουν σε περισσότερους από 350 διαφορετικούς κλάδους σπουδών.
Η Ρωσία διαθέτει σημαντικό αριθμό Πανεπιστημίων διεθνούς κύρους, όπως είναι το Κρατικό Πανεπιστήμιο «Λομονόσοφ» της Μόσχας (МГУ), το Κρατικό Πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης, το Κρατικό Πανεπιστήμιο Διεθνών Σχέσεων της Μόσχας (МГИМО), το Κρατικό Γλωσσολογικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας (МГЛУ), το Φυσικο-Τεχνικό Ινστιτούτο Μόσχας (МФТИ), το Κρατικό Πανεπιστήμιο – Ανώτατη Σχολή Οικονομίας (ВШЭ), το Ρωσικό Ινστιτούτο Θεατρικής Τέχνης (ГИТИС), το Ρωσικό Πανεπιστήμιο Φιλίας των Λαών (РУДН).

Η Ρωσία είναι διεθνώς αναγνωρισμένη για το υψηλό ακαδημαϊκό της επίπεδο, ιδιαίτερα στις θετικές επιστήμες. Οι διεθνείς φοιτητές έχουν την δυνατότητα να επιλέξουν ανάμεσα σε 741 Πανεπιστήμια σε 83 περιοχές της χώρας, και ανάμεσα σε περισσότερους από 400 κλάδους σπουδών, από μαθηματικά και φυσικές επιστήμες μέχρι δραματικές τέχνες.

[Τριτοβάθμια (πανεπιστημιακό επίπεδο) εκπαίδευση]
Σύμφωνα με έκθεση της UNESCO του 2005, περισσότερο από το ήμισυ του ρωσικού ενήλικου πληθυσμού έχει ολοκληρώσει τριτοβάθμια εκπαίδευση, η οποία είναι διπλάσια από τον μέσο όρο του ΟΟΣΑ.

Ο Andrei Fursenko, Υπουργός Παιδείας, αγωνίζεται για τη μείωση του αριθμού των ιδρυμάτων για την εξάλειψη των εργοστασίων διπλωμάτων και των υποβαθμισμένων κολεγίων. Τον Απρίλιο του 2008 η στάση του εγκρίθηκε από τον πρόεδρο Ντμίτρι Μεντβέντεφ: «Αυτό το ποσό, περίπου χίλια πανεπιστήμια και δύο χιλιάδες spinoffs, δεν υπάρχει πουθενά αλλού στον κόσμο. Μπορεί να είναι πάνω από την κορυφή ακόμη και για την Κίνα ... Οι συνέπειες είναι σαφείς: υποτίμηση του εκπαιδευτικού επιπέδου». Ακόμη και οι υποστηρικτές της μείωσης όπως ο Yevgeny Yasin παραδέχονται ότι η κίνηση θα ενισχύσει την εδραίωση της ακαδημαϊκής κοινότητας στη Μόσχα, την Αγία Πετρούπολη και το Νοβοσιμπίρσκ και θα καταστρέψει τις επαρχίες, αφήνοντας τες χωρίς κολέγια για την κατάρτιση τοπικών δασκάλων. Για λόγους σύγκρισης, οι Ηνωμένες Πολιτείες έχουν συνολικά 4.495 ιδρύματα που είναι επιλέξιμα για τον τίτλο IV, που χορηγούν πτυχία: 2.774 ιδρύματα πτυχίου BA/BSc και 1.721 ιδρύματα πτυχίου AA/ASc.

Παραδοσιακό μοντέλο
Σε αντίθεση με το μοντέλο διαδικασίας των Ηνωμένων Πολιτειών ή της Μπολόνια, η ρωσική τριτοβάθμια εκπαίδευση παραδοσιακά δεν χωριζόταν σε προπτυχιακό (πτυχίο) και μεταπτυχιακό (μεταπτυχιακό) επίπεδο. Αντ 'αυτού, η τριτοβάθμια εκπαίδευση πραγματοποιήθηκε σε ένα μόνο στάδιο, συνήθως πέντε ή έξι ετών σε διάρκεια, το οποίο οδήγησε σε ειδικό δίπλωμα. Τα διπλώματα ειδικότητας θεωρήθηκαν ισότιμα με τα δυτικά προσόντα MSc/MA. Ένας πτυχιούχος ειδικότητας δεν χρειαζόταν περαιτέρω ακαδημαϊκά προσόντα για να ακολουθήσει επαγγελματική σταδιοδρομία, με εξαίρεση ορισμένους (αλλά όχι όλους) κλάδους ιατρικών επαγγελμάτων που απαιτούσαν μεταπτυχιακό.

Ιστορικά, η πολιτική τριτοβάθμια εκπαίδευση διαιρέθηκε μεταξύ μιας μειοψηφίας των παραδοσιακών πανεπιστημίων ευρείας διδακτέας ύλης και ενός μεγαλύτερου αριθμού στενών ινστιτούτων εξειδίκευσης (συμπεριλαμβανομένων των σχολών τέχνης). Πολλά από αυτά τα ινστιτούτα, όπως το Ινστιτούτο Μηχανικής Φυσικής της Μόσχας και το Ινστιτούτο Κινηματογράφου Gerasimov, συγκεντρώνονται κυρίως στη Μόσχα και την Αγία Πετρούπολη. Τα ινστιτούτα των οποίων οι απόφοιτοι έχουν μεγάλη ζήτηση σε όλη τη Ρωσία, όπως τα ιατρικά ινστιτούτα και τα ινστιτούτα των εκπαιδευτικών, κατανέμονται πιο ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη χώρα. Τα ινστιτούτα εξόρυξης και μεταλλουργίας βρίσκονται σε περιοχές πλούσιες σε μεταλλεύματα και τα θαλάσσια και αλιευτικά ινστιτούτα βρίσκονται σε κοινότητες θαλάσσιων λιμένων.
Τα προγράμματα σπουδών ήταν (και εξακολουθούν να είναι) αυστηρά καθορισμένα για ολόκληρη τη διάρκεια σπουδών. Οι μαθητές έχουν ελάχιστες επιλογές στον προγραμματισμό της ακαδημαϊκής τους προόδου. Η κινητικότητα μεταξύ ιδρυμάτων με συμβατά προγράμματα σπουδών επιτρεπόταν σπάνια, συνήθως λόγω οικογενειακής μετεγκατάστασης από πόλη σε πόλη.

Η διαδικασία της Μπολόνια
Η Ρωσία βρίσκεται στη διαδικασία μετάβασης από το παραδοσιακό μοντέλο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ασυμβίβαστο με τα υπάρχοντα δυτικά ακαδημαϊκά πτυχία, σε μια δομή πτυχίου σύμφωνη με το μοντέλο της διαδικασίας της Μπολόνια. (Η Ρωσία συνυπέγραψε τη Διακήρυξη της Μπολόνια το 2003.) Το 2007 η Ρωσία θέσπισε ένα νόμο που αντικαθιστά το παραδοσιακό πενταετές μοντέλο εκπαίδευσης με μια προσέγγιση δύο επιπέδων: ένα τετραετές πτυχίο (ρωσικά: бакалавр) που ακολουθείται από ένα διετές μεταπτυχιακό (ρωσικά: магистр, magistr) πτυχίο.

Η κίνηση έχει επικριθεί για την απλή τυπική προσέγγισή της: αντί να αναδιαμορφώσουν το πρόγραμμα σπουδών τους, τα πανεπιστήμια θα εισάγουν απλώς μια πιστοποίηση BSc / BA στη μέση των τυπικών πενταετών ή εξαετών προγραμμάτων τους. Η αγορά εργασίας γενικά αγνοεί την αλλαγή και οι επικριτές προβλέπουν ότι τα αυτόνομα πτυχία BSc / BA δεν θα αναγνωριστούν ως «πραγματική» πανεπιστημιακή εκπαίδευση στο άμεσο μέλλον, καθιστώντας το πτυχίο περιττό και ανεπιθύμητο χωρίς περαιτέρω εξειδίκευση. Η απόλυτη πλειοψηφία των φοιτητών τους ολοκληρώνει και τα έξι χρόνια του προγράμματος σπουδών MSc / MA, θεωρώντας το στάδιο BSc / BA ως άχρηστο στην πραγματική ζωή.

Τέλος, ενώ η πενταετής εξειδικευμένη εκπαίδευση ήταν προηγουμένως δωρεάν για όλους τους φοιτητές, το νέο στάδιο MSc/MA δεν είναι. Το κόστος είναι αναπόφευκτο επειδή μόνο το πτυχίο BSc / BA θεωρείται άχρηστο. Οι υπερασπιστές της διαδικασίας της Μπολόνια υποστηρίζουν ότι τα τελευταία χρόνια του ειδικού προγράμματος ήταν επίσημα και άχρηστα: τα ακαδημαϊκά προγράμματα ήταν χαλαρά και μη απαιτητικά, επιτρέποντας στους μαθητές να εργαστούν αλλού. Η περικοπή του πενταετούς εξειδικευμένου προγράμματος σε τετραετές BSc / BA δεν θα μειώσει το πραγματικό ακαδημαϊκό περιεχόμενο των περισσότερων από αυτά τα προγράμματα.

[Τα 23 καλύτερα πανεπιστήμια (ΑΕΙ) της Ρωσικής Ομοσπονδίας]

Τα 23 καλύτερα πανεπιστήμια (ΑΕΙ) της Ρωσικής Ομοσπονδίας από επιστημονικής και ερευνητικής άποψης

1. Κρατικό πανεπιστήμιο της Μόσχας ονόματη Μ.Β. Λομονόσοβ (Μόσχα).
Διεύθυνση : www.msu.ru
2. Κρατικό πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης (Αγία Πετρούπολη).
Διεύθυνση: www.spbu.ru
3. Εθνικό πανεπιστήμιο των πυρηνικών ερευνών «ΜΙΦΙ».
Διεύθυνση: www.mephi.ru
4. Εθνικό ερευνητικό πολυτεχνικό πανεπιστήμιο της πόλης Τομσκ.
Διεύθυνση: www.tsu.ru
5. Φισικό-τεχνικό ινστιτούτο της Μόσχας (Εθνικό ερευνητικό πανεπιστήμιο, Μόσχα) (ΜΦΤΙ).
Διεύθυνση: www.mipt.ru
6. Νότιο Ομοσπονδιακό πανεπιστήμιο.
Διεύθυνση: www.sfedu.ru
7. Κρατικό Πολυτεχνείο της Αγίας Πετρούπολης (Αγία Πετρούπολη).
Διεύθυνση: http://nru.spbstu.ru
8. Εθνικό Ερευνητικό Κρατικό πανεπιστήμιο του Νοβοσιμπίρσκ (Νοβοσιμπίρσκ).
Διεύθυνση: www.nsu.ru
9. Ομοσπονδιακό Πανεπιστήμιο του Καζάν (Καζάν).
Διεύθυνση: www.kpfu.ru
10. Ομοσπονδιακό Πανεπιστήμιο της Σιβηρίας.
Διεύθυνση: www.sfu-kras.ru
11. Οικονομικό Πανεπιστήμιο ονόματι του Γ.Β. Πλεχάνοβ.
Διεύθυνση: www.rea.ru
12. Εθνικό Ερευνητικό Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο «ΜΙΣκαιΣ»,«МИСиС».
Διεύθυνση : www.misis.ru
13. Διεθνής Ανώτατη Σχολή Επιχειρήσεων της Μόσχας (ΜΙΡΜΠΙΣ).
Διεύθυνση: www.mirbis.ru
14. Κρατικό Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας ονόματι του Ν. Μπάουμαν.

Διεύθυνση: www.bmstu.ru
15. Εθνικό Ερευνητικό Πανεπιστήμιο Πληροφοριακών Τεχνολογιών, Μηχανικής και Οπτικής (Αγία Πετρούπολη).
Διεύθυνση: www.ifmo.ru
16. Κρατικό Ινστιτούτο Διεθνών Σχέσεων ΥΠΕΞ της Ρωσίας.
Διεύθυνση: www.mgimo.ru
17. Ρώσικο Κρατικό Πανεπιστήμιο Ανθρωπιστικών σπουδών.
Διεύθυνση: http://rsuh.ru
18. Ρώσικο Πανεπιστήμιο Φιλίας των Λαών.
Διεύθυνση: www.rudn.ru
19. Κρατικό Γλωσσολογικό Πανεπιστήμιο της Μόσχας.
Διεύθυνση: www.linguanet.ru
20. Εθνικό Ερευνητικό Πανεπιστήμιο «Ανώτατη Οικονομική Σχολή».
Διεύθυνση: www.hse.ru
21. Κρατικό Πανεπιστήμιο Πετρελαίου και Αερίου του Τιουμέν (Τιουμέν).
Διεύθυνση: www.tsogu.ru
22. Ρώσικο Κρατικό Πανεπιστήμιο Πετρελαίου και Αερίου ονόματι I.M. Γκουμπκινά (Μόσχα).
Διεύθυνση: www.gubkin.ru
23. Ρώσικο Κρατικό Παιδαγωγικό Πανεπιστήμιο ονόματι του Α.Ι. Γκέρτσεν (Αγία Πετρούπολη).
Διεύθυνση: www.herzen.spb.ru

[Ενιαία κρατική εξέταση, ΕΓЭ]

Παραδοσιακά, τα πανεπιστήμια και τα ινστιτούτα διεξήγαγαν τις δικές τους εξετάσεις εισαγωγής. Δεν υπήρχε ομοιόμορφο μέτρο των ικανοτήτων των αποφοίτων. Οι βαθμοί που εκδόθηκαν από τα γυμνάσια θεωρήθηκαν ασυμβίβαστοι λόγω των διαφορών βαθμολόγησης μεταξύ σχολείων και περιφερειών. Το 2003 το Υπουργείο Παιδείας ξεκίνησε το πρόγραμμα Ενιαίας Κρατικής Εξέτασης (ΕΓЭ). Το σύνολο των τυποποιημένων εξετάσεων για τους αποφοίτους γυμνασίου, που εκδίδονται ομοιόμορφα σε όλη τη χώρα και βαθμολογούνται ανεξάρτητα από τους σχολάρχες του μαθητή, παρόμοιο με το SATs της Βόρειας Αμερικής, υποτίθεται ότι θα αντικαταστήσει τις εισαγωγικές εξετάσεις στα κρατικά πανεπιστήμια. Έτσι, οι μεταρρυθμιστές σκέφτηκαν, το ΕΓЭ θα έδινε τη δυνατότητα σε ταλαντούχους πτυχιούχους από απομακρυσμένες τοποθεσίες να ανταγωνίζονται για εισαγωγή στα πανεπιστήμια της επιλογής τους, εξαλείφοντας ταυτόχρονα τη δωροδοκία που σχετίζεται με την εισαγωγή, που τότε εκτιμήθηκε σε 1 δισεκατομμύριο δολάρια ΗΠΑ ετησίως. Το 2003, 858 εργαζόμενοι σε πανεπιστήμια και κολέγια κατηγορήθηκαν για δωροδοκία. Το "τέλος" εισόδου στο Ινστιτούτο Διεθνών Σχέσεων της Μόσχας φέρεται να έφτασε τα 30.000 δολάρια ΗΠΑ.

Οι επικεφαλής των πανεπιστημίων αντιστάθηκαν στην αλλαγή. Ωστόσο, οι νομοθέτες θέσπισαν το ΕΓЭ και είναι πλήρως υποχρεωτικό από το 2009. Ορισμένα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης εξακολουθούν να έχουν τη δυνατότητα να εισαγάγουν τις δικές τους εισαγωγικές εξετάσεις εκτός από τη βαθμολογία ΕΓЭ.

Δομή

Η ΕΓЭ είναι η καθολική εξέταση για όλους τους αποφοίτους του έτους 11. Τα μαθηματικά (βασικό ή προχωρημένο επίπεδο) και η ρωσική γλώσσα είναι υποχρεωτικά και υπάρχει μια σειρά προαιρετικών εξετάσεων επιλογής - Φυσική, Χημεία, Βιολογία, Ιστορία, Κοινωνικές Επιστήμες, Λογοτεχνία, ξένες γλώσσες - συνήθως το πανεπιστήμιο απαιτεί ένα ή δύο μαθήματα επιλογής για εισαγωγή στο πρόγραμμα. Στα κορυφαία πανεπιστήμια απαιτείται ελάχιστη βαθμολογία για πλήρη υποτροφία διδάκτρων, ορισμένα κορυφαία πανεπιστήμια έχουν επίσης το δικαίωμα να οργανώσουν εσωτερικές εξετάσεις και συνεντεύξεις.

Η εξέταση είναι μια μορφή κρατικής τελικής πιστοποίησης για εκπαιδευτικά προγράμματα δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης, χρησιμοποιούνται υλικά μέτρησης ελέγχου τυποποιημένης μορφής.

Στο ρωσικό σύστημα εισαγωγής, οι σχολικοί βαθμοί ή οι εξωσχολικές δραστηριότητες έχουν μικρή σημασία, η βαθμολογία των εξετάσεων είναι σχεδόν ο πιο σημαντικός παράγοντας. Μόνο τα καλά αποτελέσματα της Ολυμπιάδας το νίκησαν - λίγες από τις ρωσικές ολυμπιάδες σας δίνουν αυτόματη εισαγωγή στα περισσότερα πανεπιστήμια

Η ΕΓЭ είναι η υποχρεωτική εξέταση για όλους τους αποφοίτους δημόσιων ρωσικών σχολείων που επιθυμούν να παρακολουθήσουν υψηλότερο επίπεδο εκπαίδευσης στη Ρωσία. Η εξέταση αποτελείται από τέσσερα στοιχεία, δύο από τα οποία είναι υποχρεωτικά (απόκτηση γλώσσας στη Ρωσία και Μαθηματικά υψηλότερο και τυπικό επίπεδο) και δύο από τα οποία είναι μαθήματα επιλογής (συνήθως προκαθορισμένα από το μονοπάτι / κατεύθυνση που επέλεξε ο μαθητής κατά τη διάρκεια του 9ου έτους του σχολείου πριν από το ΕΓЭ).

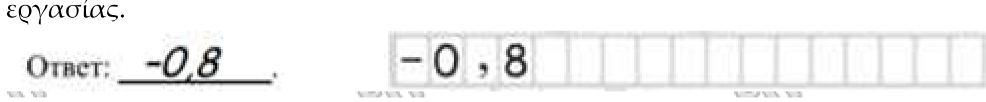
Η ΕΓЭ αποτελείται από δύο μέρη (που υποδηλώνονται ως I και II).

Το μέρος I περιέχει εργασίες στις οποίες ο μαθητής πρέπει να δώσει μια σύντομη γραπτή απάντηση. Συνήθως είναι πολλά γράμματα ή αριθμοί.

Το Μέρος II περιέχει μία ή περισσότερες εργασίες στις οποίες ο μαθητής χρησιμοποιεί τη δημιουργικότητά του για να ολοκληρώσει. Ανάλογα με το θέμα, μια εργασία μπορεί να είναι μια μαθηματική άσκηση, ένα δοκίμιο ή μια ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί με επιχειρήματα. Σε αντίθεση με το μέρος I, το οποίο διορθώνεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή, το μέρος II αξιολογείται από έναν καθηγητή κάθε γνωστικού αντικειμένου της εξέτασης από την εξεταστική επιτροπή της περιφέρειας όπου διεξάγεται η εξέταση.

Επιλογή της πρώιμης Ενιαίας Κρατικής Εξέτασης του βασικού επιπέδου 27.03.2023
Ενιαία Κρατική Εξέταση στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Βασικό επίπεδο

Οδηγίες για την εκτέλεση της εργασίας
Το γραπτό περιλαμβάνει 21 εργασίες. Έχετε 3 ώρες (180 λεπτά) για να ολοκληρώσετε την εργασία. Οι απαντήσεις στις εργασίες καταγράφονται σύμφωνα με τα παρακάτω δείγματα ως αριθμός ή ακολουθία αριθμών. Αρχικά, γράψτε τις απαντήσεις στις εργασίες στο πεδίο απαντήσεων στο κείμενο της εργασίας και, στη συνέχεια, μεταφέρετέ τις στο φύλλο απαντήσεων Νο 1 στα δεξιά του αριθμού της αντίστοιχης εργασίας.



Εάν η απάντηση είναι μια ακολουθία αριθμών, όπως στο παρακάτω παράδειγμα, γράψτε αυτή την ακολουθία στο φύλλο απαντήσεων αριθ. 1 χωρίς κενά, κόμματα ή άλλους πρόσθετους χαρακτήρες.

Όλα τα έντυπα των Ενιαίων Κρατικών Εξετάσεων συμπληρώνονται με έντονο μαύρο μελάνι. Κατά την ολοκλήρωση εργασιών, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα πρόχειρο. Οι εγγραφές στο πρόχειρο, καθώς και στο κείμενο των υλικών μέτρησης ελέγχου, δεν λαμβάνονται υπόψη κατά την αξιολόγηση του έργου. Συνοψίζονται οι πόντοι που λάβατε για τις ολοκληρωμένες εργασίες. Προσπαθήστε να ολοκληρώσετε όσο το δυνατόν περισσότερες εργασίες και να βαθμολογηθείτε με την υψηλότερη βαθμολογία. Όταν τελειώσετε, βεβαιωθείτε ότι η απάντηση σε κάθε εργασία στο Φύλλο Απαντήσεων Νο 1 είναι γραμμένη με τον σωστό αριθμό.
Σας ευχόμαστε καλή επιτυχία!
Η απάντηση στις εργασίες 1-11 είναι ακέραιος ή δεκαδικός αριθμός. Σημειώστε τον αριθμό στο πεδίο απάντησης στο κείμενο της εργασίας και, στη συνέχεια, μεταφέρετε τον στο ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ Νο 1 στα δεξιά του αριθμού της αντίστοιχης εργασίας, ξεκινώντας από το πρώτο κελί. Γράψτε κάθε αριθμό, σύμβολο μείον και κόμμα σε ξεχωριστό κελί. Δεν χρειάζεται να γράψετε τις μονάδες μέτρησης.

[Δομή της εξέτασης]
Σύνολο ασκήσεων: 21, όλες με σύντομη απάντηση.
Η μέγιστη κύρια βαθμολογία για την εργασία είναι 21.
Ο συνολικός χρόνος της εργασίας είναι 3 ώρες (180 λεπτά).
Οι ασκήσεις προέρχονται από τράπεζα θεμάτων. https://mathb-ege.sdamgia.ru/?redir=1

Άσκηση	Επαληθεύσιμα αποτελέσματα θέματος από την εκμάθηση του κύριου εκπαιδευτικού προγράμματος	Μέγιστη βαθμολογία για την ολοκλήρωση της εργασίας	Κατά προσέγγιση χρόνος για την ολοκλήρωση της εργασίας από έναν πτυχιούχο που σπούδασε μαθηματικά στο βασικό επίπεδο (λεπτά.)
1η	Αξιολόγηση τιμών και μετασχηματισμός εκφράσεων	1	7
2η	Ικανότητα επίλυσης προβλημάτων κειμένου διαφορετικών τύπων, μελέτης της ληφθείσας λύσης και αξιολόγησης της ευλογοφάνειας των αποτελεσμάτων, της ικανότητας εκτίμησης του μεγέθους των αντικειμένων στον περιβάλλοντα κόσμο	1	5
3	Δυνατότητα εξαγωγής πληροφοριών που παρουσιάζονται σε πίνακες, διαγράμματα, γραφήματα	1	5
4	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων, ικανότητα επίλυσης διαφορετικών τύπων προβλημάτων κειμένου	1	4
5	Ικανότητα υπολογισμού των πιθανοτήτων των γεγονότων στις απλούστερες περιπτώσεις	1	10
6	Δυνατότητα εξαγωγής πληροφοριών που παρουσιάζονται σε πίνακες, διαγράμματα, γραφήματα	1	11
7	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: συνάρτηση, συνεχής συνάρτηση, παράγωγος, προσδιορισμό της τιμής μιας συνάρτησης από την τιμή ενός ορίσματος. Ικανότητα περιγραφής γραφικά της συμπεριφοράς και των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης	1	7
8	Ικανότητα διεξαγωγής τεκμηριωμένης συλλογιστικής	1	8
9	• Ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της επιπεδομετρίας κατά την επίλυση προβλημάτων. Ικανότητα εκτίμησης του μεγέθους των αντικειμένων στον κόσμο γύρω μας	1	6

10	Ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων	1	10
11	Να λύσει τα απλούστερα στερεομετρικά προβλήματα εύρεσης γεωμετρικών μεγεθών, να χρησιμοποιήσει επιπεδομετρικά γεγονότα και μεθόδους για την επίλυση στερεομετρικών προβλημάτων	1	11
12	Ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων	1	8
13	Να λύσει τα απλούστερα στερεομετρικά προβλήματα εύρεσης γεωμετρικών μεγεθών, να χρησιμοποιήσει επιπεδομετρικά γεγονότα και μεθόδους για την επίλυση στερεομετρικών προβλημάτων	1	8
14	Αξιολόγηση τιμών και μετασχηματισμός εκφράσεων	1	5
15	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων, ικανότητα επίλυσης διαφορετικών τύπων προβλημάτων κειμένου	1	8
16	Ικανότητα αξιολόγησης αξιών και μετασχηματισμού εκφράσεων	1	7
17	Επίλυση εκθετικών, τριγωνομετρικών και λογαριθμικών εξισώσεων	1	7
18	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων, επίλυσης εκθετικών και λογαριθμικών ανισοτήτων	1	8
19	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων, ικανότητα επίλυσης προβλημάτων κειμένου διαφορετικών τύπων, δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου για την επίλυση ενός προβλήματος	1	15
20	Ικανότητα επίλυσης διαφορετικών τύπων προβλημάτων κειμένου, επίλυσης εξισώσεων	1	15
21	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων, ικανότητα επίλυσης προβλημάτων κειμένου διαφορετικών τύπων, δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου για την επίλυση ενός προβλήματος	1	15

Ενιαία Κρατική Εξέταση στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Βασικό επίπεδο. 27.03.2023

1. Υπάρχουν 250 φύλλα χαρτιού Α4 σε συσκευασία. Σε μια εβδομάδα, 700 φύλλα καταναλώνονται στο γραφείο. Ποια είναι η μικρότερη ποσότητα συσκευασιών χαρτιού που θα φτάσει για 8 εβδομάδες ;

Λύση

Σε 8 εβδομάδες καταναλώνονται $\mathbf{8 \times 700 = 5600}$ φύλλα χαρτιού. Έχω $\mathbf{5600/250 = 22,4}$. Άρα θα χρειαστούν τουλάχιστον $\boxed{\mathbf{23}}$ συσκευασίες χαρτιού.

2. Αντιστοιχίστε τις τιμές με τις πιθανές τιμές τους: αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο στην πρώτη στήλη με το αντίστοιχο στοιχείο από τη δεύτερη στήλη.

Αξίες	Πιθανές τιμές
Α) εμβαδόν διαμερίσματος τριών δωματίων	1) 0,7 εκτάρια
Β) εμβαδόν γηπέδου ποδοσφαίρου	2) 100 τ.μ.
Γ) εμβαδόν της επικράτειας της Ρωσίας	3) 97,5 τ.εκ.
Δ) εμβαδόν τραπεζογραμματίου ονομαστικής αξίας 100 ρούβλια	4) 17,1 εκατομμύρια τετραγωνικά χιλιόμετρα

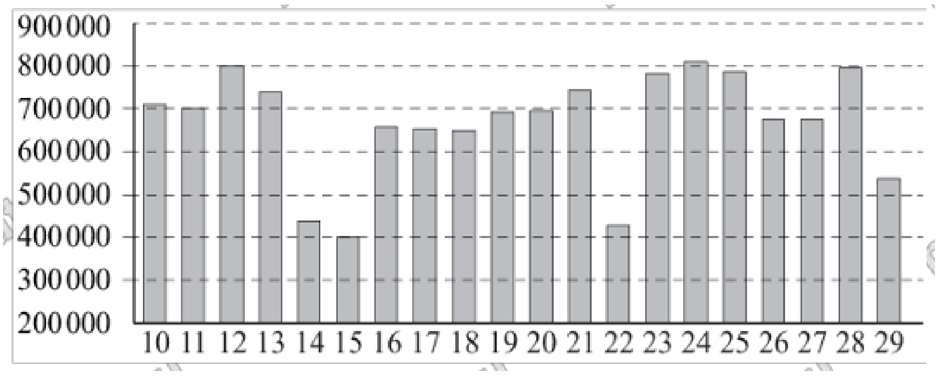
Στον πίνακα κάτω από κάθε γράμμα που αντιστοιχεί στην τιμή, αναφέρετε τον αριθμό της πιθανής αξίας του.

Α	Β	Γ	Δ

Λύση

Α	Β	Γ	Δ
2	1	4	3

3. Το διάγραμμα δείχνει τον αριθμό των επισκεπτών στην ιστοσελίδα RIA Novosti όλες τις ημέρες από τις 10 Νοεμβρίου έως τις 29 Νοεμβρίου 2009. Οι ημέρες του μήνα υποδεικνύονται οριζόντια και ο αριθμός των επισκεπτών του ιστότοπου για μια δεδομένη ημέρα υποδεικνύεται κάθετα. Χρησιμοποιήστε το διάγραμμα για να προσδιορίσετε τον αριθμό των επισκεπτών στον ιστότοπο RIA Novosti που ήταν ο μικρότερος κατά τη διάρκεια της καθορισμένης περιόδου.



Λύση

Την 15η μέρα ο αριθμός των επισκεπτών ήταν ο μικρότερος την περίοδο αυτή, άρα $\boxed{\mathbf{400.000}}$.

4. Το εμβαδόν του τετράπλευρου μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha}$, όπου $\boldsymbol{d_1}$ και $\boldsymbol{d_2}$ είναι τα μήκη των διαγωνίων του τετράπλευρου, $\boldsymbol{\alpha}$ είναι η γωνία μεταξύ των διαγωνίων. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο, βρείτε το εμβαδόν S, εάν $\boldsymbol{d_1 = 4}$, $\boldsymbol{d_2 = 7}$ και $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{2}{7}}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{2}{7} = \boxed{4}}$

5. Το επιστημονικό συνέδριο πραγματοποιείται σε 3 ημέρες. Έχουν προγραμματιστεί συνολικά 50 ομιλίες: 18 την πρώτη ημέρα, οι υπόλοιπες κατανέμονται εξίσου μεταξύ των ημερών. Η σειρά των ομιλιών καθορίζεται τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα η παρουσίαση του καθηγητή Μ. να προγραμματιστεί για την τελευταία ημέρα του συνεδρίου;

Λύση

Τις 2 τελευταίες μέρες έχουν προγραμματιστεί συνολικά 50-18=32 ομιλίες, 16 την ημέρα. Άρα η πιθανότητα η παρουσίαση του καθηγητή Μ. να προγραμματιστεί την τελευταία μέρα του συνεδρίου είναι $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{50}} = \boxed{\mathbf{0,32}}$

6. Ένα ανεξάρτητο εργαστήριο εμπειρογνωμόνων καθορίζει την αξιολόγηση των μηχανημάτων κοπής κρέατος με βάση έναν συντελεστή τιμής ίσο με 0,01 της μέσης τιμής τους P (σε ρούβλια), και δείκτες λειτουργικότητας F, ποιότητας Q και σχεδιασμού D. Η βαθμολογία R υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο $\boldsymbol{R = 3(F + Q) + D - 0,01P}$.

Ο πίνακας δείχνει τις τιμές και τους δείκτες τεσσάρων μοντέλων μηχανημάτων κοπής κρέατος.

Μοντέλο μηχανής κοπής κρέατος	Τιμή μηχανήματος κοπής κρέατος (ρούβλια ανά τεμάχιο)	Λειτουργικότητα	Ποιότητα	Σχεδιασμός
Α	2500	2	1	1
Β	3400	1	2	3
Γ	4200	4	2	4
Δ	3300	1	3	2

Βρείτε την υψηλότερη βαθμολογία του μηχανήματος κοπής κρέατος από αυτές που παρουσιάζονται στον πίνακα.

Λύση

Έχω για το μηχάνημα Α βαθμολογία $\boldsymbol{R = 3(2 + 1) + 1 - 0,01 \cdot 2500 = -15}$.

Έχω για το μηχάνημα Β βαθμολογία $\boldsymbol{R = 3(1 + 2) + 3 - 0,01 \cdot 3400 = -22}$.

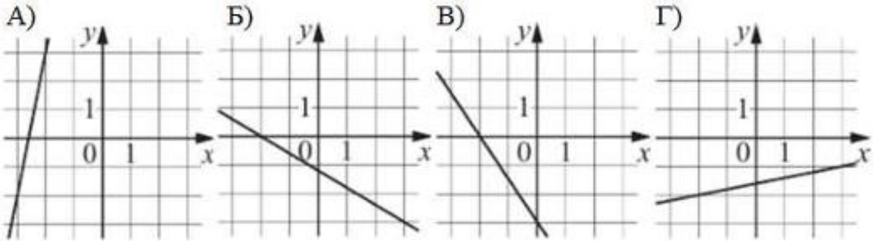
Έχω για το μηχάνημα Γ βαθμολογία $\boldsymbol{R = 3(4 + 2) + 4 - 0,01 \cdot 4200 = -20}$.

Έχω για το μηχάνημα Δ βαθμολογία $\boldsymbol{R = 3(1 + 3) + 2 - 0,01 \cdot 3300 = -19}$.

Η υψηλότερη βαθμολογία είναι του Α, $\boxed{\mathbf{-15}}$.

7. Τα σχήματα δείχνουν γραφήματα συναρτήσεων της μορφής $\boldsymbol{y = kx + b}$. Δημιουργήστε μια αντιστοιχία μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων και των συντελεστών διεύθυνσης των γραμμών.

Γραφικά.



Συντελεστές διεύθυνσης 1) 0,2 2) 5 3) − 1,5 4) -0,6

Στον πίνακα, κάτω από κάθε γράμμα, εισαγάγετε τον κατάλληλο αριθμό

Α	Β	Γ	Δ

Λύση

Έχω $\boldsymbol{k} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, οπότε για το γράφημα Α έχω $\boldsymbol{k} = \frac{5}{1} = \mathbf{5}$, για το Β $\boldsymbol{k} = \frac{-4}{6} = \mathbf{-0,6}$, για το Γ $\boldsymbol{k} = \frac{-4,5}{3} = \mathbf{-1,5}$, για το Δ $\boldsymbol{k} = \frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$. Άρα

Α	Β	Γ	Δ
2	4	3	1

8. Υπάρχουν 30 φοιτητές στην ομάδα, εκ των οποίων 20 φοιτητές έλαβαν τεστ στα οικονομικά και 20 φοιτητές έλαβαν τεστ στα αγγλικά. Επιλέξτε τις δηλώσεις που προκύπτουν από τα παρεχόμενα δεδομένα. Σε αυτή την ομάδα:

1) τουλάχιστον 10 φοιτητές δεν έλαβαν τεστ ούτε στα οικονομικά ούτε στα αγγλικά,

2) τουλάχιστον 10 φοιτητές έλαβαν τεστ τόσο στα οικονομικά όσο και στα αγγλικά,

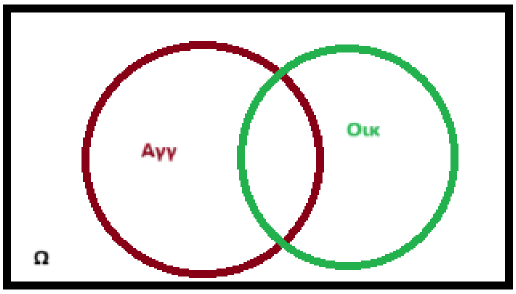
3) όχι περισσότεροι από 20 φοιτητές έλαβαν τεστ τόσο στα οικονομικά όσο και στα αγγλικά,

4) υπάρχει 1 φοιτητής που δεν έλαβε τεστ στα αγγλικά, αλλά πήρε ένα τεστ στα οικονομικά.

Στην απάντησή σας, σημειώστε τους αριθμούς των επιλεγμένων δηλώσεων, χωρίς κενά, κόμματα ή άλλους πρόσθετους χαρακτήρες.

Λύση

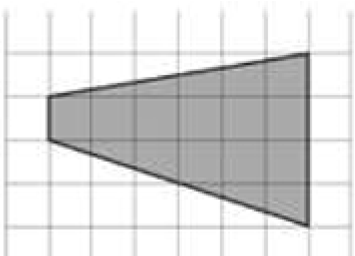
Έχω το παρακάτω διάγραμμα Venn



1) Ψευδές, αφού ισχύει μόνο αν το σύνολο των 20 φοιτητών που έλαβαν τεστ στα αγγλικά συμπίπτει με το σύνολο των 20 φοιτητών που πήραν τεστ στα οικονομικά.
2) Έχω $\boldsymbol{N(A \cap O) \geq N(A) + N(O) - N(A \cup O) = 20 + 20 - 30 = 10}$. Άρα αληθές.
3) Αληθές, αφού $\boldsymbol{N(A \cap O) \leq N(A) = 20}$ και $\boldsymbol{N(A \cap O) \leq N(O) = 20}$
4) Έχω $\boldsymbol{N(O \backslash A) = N(O) - N(O \cap A) \leq 20 - 10 = 10}$. Άρα μπορεί να υπάρχει 1 τέτοιος φοιτητής ή 2 ή 10. Άρα Ψευδές.

Άρα Αληθείς οι προτάσεις $\boxed{\mathbf{23}}$

9. Το σχέδιο εδάφους χωρίζεται σε τετράγωνα. Κάθε κελί είναι ένα τετράγωνο διαστάσεων $\mathbf{1}\boldsymbol{m} \times \mathbf{1}\boldsymbol{m}$. Βρείτε την περιοχή του οικοπέδου που απεικονίζεται στο σχέδιο. Δώστε την απάντηση σε τετραγωνικά

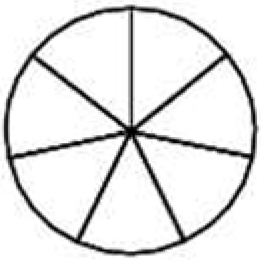


μέτρα.

Λύση

Έχω τραπέζιο με β=1, Β=4 και υ=6. Άρα $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{B+\beta}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\upsilon} = \frac{\mathbf{4+1}}{\mathbf{2}}\mathbf{6} = \boxed{\mathbf{15}}$

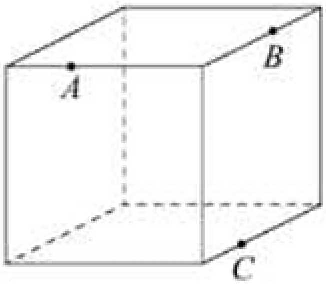
10. Η εικόνα δείχνει πώς μοιάζει ένας τροχός 7 ακτίνων. Πόσες ακτίνες θα υπάρχουν σε έναν τροχό εάν η γωνία μεταξύ των παρακείμενων ακτίνων σε αυτόν είναι 20°;



Λύση

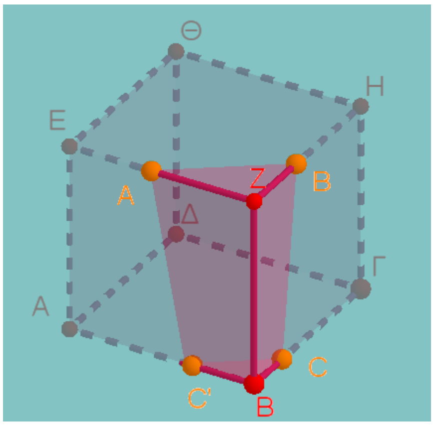
Έχω κύκλο $\mathbf{360^o}$, άρα $\mathbf{360^o/20^o = 18}$ ακτίνες.

11. Το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία A, B και C χωρίζει τον κύβο σε δύο πολύεδρα. Πόσες κορυφές έχει το προκύπτον πολύεδρο με τον μεγάλο αριθμό εδρών;

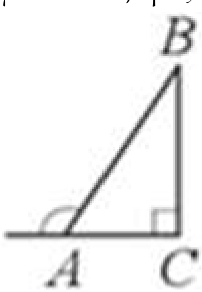


Λύση

Έστω ο κύβος ΑΒΓΔΕΖΗΘ. Το επίπεδο που περνά από τα ABC χωρίζει τον κύβο στο ABZC′CB πεντάεδρο και στο ΕΘΗΒΑΑΔΓCC′ επτάεδρο, που έχει $\boxed{\mathbf{10}}$ κορυφές.



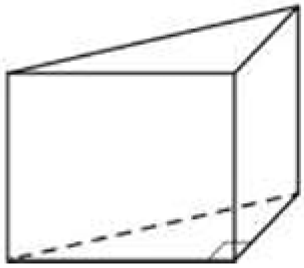
12. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABC, η εξωτερική γωνία στην κορυφή A είναι 120°. Το πόδι AC = 17. Βρείτε την υποτείνουσα AB.



Λύση

Έχω $\boldsymbol{AB} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{B\hat{A}C})} = \frac{\mathbf{17}}{\boldsymbol{cos}(\mathbf{180-120})} = \frac{\mathbf{17}}{\boldsymbol{cos}(\mathbf{60})} = \frac{\mathbf{17}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \boxed{\mathbf{34}}$

13. Στη βάση ενός ορθού πρίσματος βρίσκεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο, τα πόδια του οποίου είναι μήκους 3 και 16. Βρείτε τον όγκο του πρίσματος εάν το ύψος του είναι 3.



Λύση

Έχω $\boldsymbol{V = S \cdot h} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{16} \ \cdot \mathbf{3} = \boxed{\mathbf{72}}$

14. Βρείτε την τιμή της έκφρασης $\mathbf{4,1 \cdot 7,7 + 0,86}$

Λύση

Έχω $\mathbf{4,1 \cdot 7,7 + 0,86 = 31,57 + 0,86 =} \boxed{\mathbf{32,43}}$

15. Η τιμή του προϊόντος προς πώληση μειώθηκε κατά 30%, και τώρα κοστίζει 350 ρούβλια. Πόσα ρούβλια κοστίζει το προϊόν πριν από την πώληση;

Λύση

Τελική τιμή = Αρχική τιμή επί (1-0,3). Άρα 350= Αρχική τιμή επί 0,7. Άρα η αρχική τιμή ήταν $\frac{\mathbf{350}}{\mathbf{0,7}} = \boxed{\mathbf{500}}$

16. Βρείτε την τιμή της έκφρασης $(\sqrt{\mathbf{10}} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{10}} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$

Λύση

Έχω $(\sqrt{\mathbf{10}} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{10}} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}) = \sqrt{\mathbf{10}}^{\mathbf{2}} - \left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{10 - 12 =} \boxed{\mathbf{-2}}$

17. Βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης $\mathbf{3}^{\boldsymbol{x-8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

Λύση

Έχω $\mathbf{3}^{\boldsymbol{x-8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} \Leftrightarrow \mathbf{3}^{\boldsymbol{x-8}} = \mathbf{3}^{\mathbf{-2}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - \mathbf{8} = \mathbf{-2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boxed{\mathbf{6}}$

18. Καθένας από τους τέσσερις αριθμούς της αριστερής στήλης αντιστοιχεί σε διάστημα στη δεξιά στήλη.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΜΗΜΑ
Α)$\mathbf{\log_2 3\ 5}$	1) $[\mathbf{1}; \mathbf{2}]$
Β) $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}$	2) $[\mathbf{2}; \mathbf{3}]$
Γ) $\sqrt{\mathbf{13}}$	3) $[\mathbf{3}; \mathbf{4}]$
Δ) $\mathbf{0,39^{-1}}$	4) $[\mathbf{5}; \mathbf{6}]$

Γράψτε τον κατάλληλο αριθμό κάτω από κάθε γράμμα στον πίνακα που δίνεται στην απάντηση.

Α	Β	Γ	Δ

Λύση

Έχω $\mathbf{\log_2 35} \in [\mathbf{\log_2 32}\,; \mathbf{\log_2 64}] = \left[\mathbf{\log_2 2^5}\,; \mathbf{\log_2 2^6}\right] = [\mathbf{5}; \mathbf{6}]$, $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}} \in \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{4}}\right] = [\mathbf{1}; \mathbf{2}]$, $\sqrt{\mathbf{13}} \in \left[\sqrt{\mathbf{9}}; \sqrt{\mathbf{16}}\right] = [\mathbf{3}; \mathbf{4}]$ και $\mathbf{0,39^{-1}} \in [\mathbf{0,5^{-1}}; \mathbf{0,3333^{-1}}] = [\mathbf{2}; \mathbf{3}]$. Άρα

Α	Β	Γ	Δ
4	1	3	2

19. Βρείτε έναν τετραψήφιο αριθμό που είναι πολλαπλάσιο του 88 του οποίου τα ψηφία είναι όλα διαφορετικά και άρτια. Στην απάντησή σας, προσδιορίστε έναν τέτοιο αριθμό.

Λύση

Ένας αριθμός διαιρείται με το 88 εάν διαιρείται με το 8 και με το 11. Διαιρετός με το 8: Ένας αριθμός διαιρείται με το 8 εάν και μόνο εάν τα τρία τελευταία ψηφία του είναι μηδενικά ή σχηματίζουν έναν αριθμό που διαιρείται με το 8. Διαιρετότητα με το 11: Ένας αριθμός διαιρείται με το 11 εάν το άθροισμα των ψηφίων στις ζυγές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων στις μονές θέσεις ή η διαφορά μεταξύ αυτών των αθροισμάτων διαιρείται με το 11. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα διαιρετότητας με 8 και λαμβάνοντας υπόψη ότι όλα τα ψηφία του επιθυμητού αριθμού πρέπει να είναι άρτια και διαφορετικά, παίρνουμε ότι τα τελευταία ψηφία του αριθμού μπορεί να είναι: 024, 048, 064, 208, 240, 264, 280, 408, 480, 608, 624, 640, 648, 680, 824, 840, 864. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα διαιρετότητας με 11, παίρνουμε οι αριθμοί που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι οι: $\boxed{\mathbf{6248, 8624, 2640}}$.

Μια άλλη λύση.

Ο αριθμός που αναζητάτε έχει τέσσερα από τα πέντε ψηφία 0, 2, 4, 6 και 8, καθένα από τα οποία λαμβάνεται μία φορά. Επιπλέον, το άθροισμα των ψηφίων των χιλιάδων και των δεκάδων πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων των εκατοντάδων και των μονάδων, και τα τρία τελευταία ψηφία του επιθυμητού αριθμού πρέπει να σχηματίζουν έναν τριψήφιο αριθμό διαιρούμενο με οκτώ. Έστω ότι υπάρχουν 8 χιλιάδες, τότε οι δεκάδες θα πρέπει να είναι 2 και οι εκατοντάδες και μονάδες θα πρέπει να είναι 4 και 6. Σημειώστε ότι ο αριθμός 8624 ικανοποιεί την προϋπόθεση. Όμοια σκεφτόμαστε για αριθμούς που ξεκινούν με 2, 4 και 6.

20. Το αυτοκίνητο οδηγούσε το πρώτο τρίτο της διαδρομής με ταχύτητα 60 km/h, το δεύτερο τρίτο με ταχύτητα 120 km/h και το τελευταίο τρίτο με ταχύτητα 110 km/h. Βρείτε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου σε όλη τη διαδρομή. Δώστε την απάντηση σε km/h

Λύση

Αν 3s ήταν η συνολική διαδρομή σε km, τότε χρειάστηκε $\frac{s}{60}+\frac{s}{120}+\frac{s}{110}=\frac{3s}{120}+\frac{s}{110}=\frac{s}{40}+\frac{s}{110}=\frac{150s}{4400}$ ώρες. Άρα η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν $\frac{3s}{\frac{150s}{4400}}=\frac{1}{\frac{5}{440}}=\boxed{88}$ km/h

21. Η Petya ανταλλάσσει μικρές μάρκες με μεγάλες. Σε μια ανταλλαγή, παίρνει 3 μεγάλες μάρκες, δίνοντας 10 μικρές. Πριν από τις ανταλλαγές, η Petya είχε 100 μάρκες (υπήρχαν τόσο μεγάλες όσο και μικρές) και μετά έγινε 65. Πόσες ανταλλαγές έκανε;

Λύση

Σε κάθε ανταλλαγή οι μάρκες της μειώνονται κατά 10-3=7 μάρκες. Αφού οι μάρκες από 100 έγιναν 65, οι μάρκες της μιώθηκαν κατά 35 , άρα έγιναν $\frac{35}{7}=\boxed{5}$ ανταλλαγές.

Ενιαία Κρατική Εξέταση στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασικά Υλικά Αναφοράς

Άλγεβρα

Πίνακας τετραγώνων ακεραίων από 0 έως 99

Δεκάδες	Μονάδες									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ για $a \geq 0, b \geq 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ για $a \geq 0, b > 0$

Οι ρίζες της τετραγωνικής εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ αν } b^2 - 4ac > 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ αν } b^2 - 4ac = 0$$

Συντομευμένοι τύποι πολλαπλασιασμού

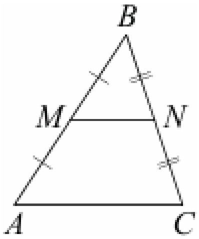
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Εκθέτης και λογάριθμος

Ιδιότητες βαθμού	Ιδιότητες λογαρίθμου
$a > 0, \quad b > 0$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{\log_a b} = b$ $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a b^k = k\log_a b$

Γεωμετρία

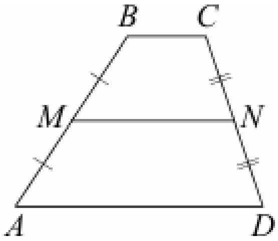
Τρίγωνο και μέση γραμμή



MN — ср. лин.

$MN \parallel AC$

$MN = \dfrac{AC}{2}$



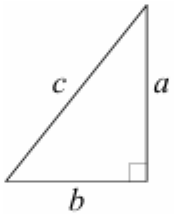
$BC \parallel AD$

MN — ср. лин.

$MN \parallel AD$

$MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

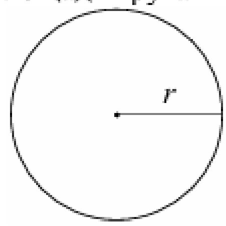
Теорема Пифагора



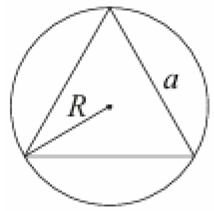
$a^2 + b^2 = c^2$

Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$



Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



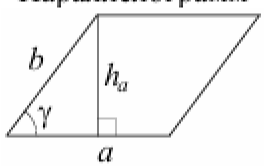
$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Εμβαδόν σχήματος

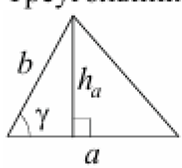
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

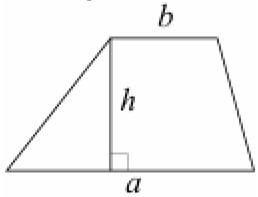
Треугольник



$S = \dfrac{1}{2}ah_a$

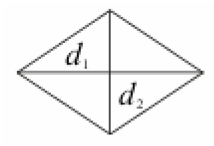
$S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

Ромб

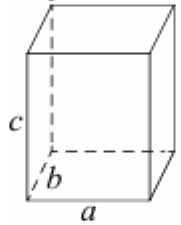


d_1, d_2 – диагонали

$S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2$

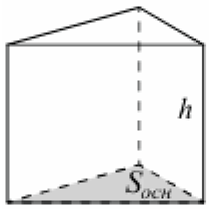
Επιφάνειες και όγκοι στερεών

Прямоугольный параллелепипед



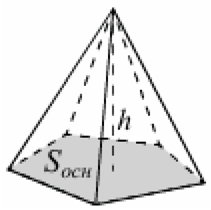
$$V = abc$$

Прямая призма



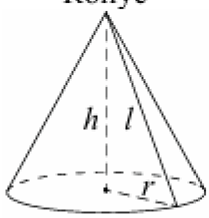
$$V = S_{\text{îñí}}\, h$$

Пирамида



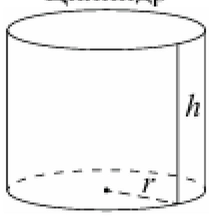
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{îñí}}\, h$$

Конус



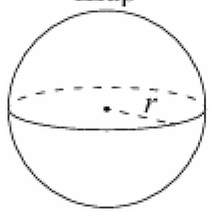
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$S_{\text{áîê}} = \pi r l$$

Цилиндр



$$V = \pi r^2 h$$
$$S_{\text{áîê}} = 2\pi r h$$

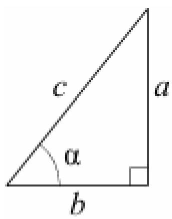
Шар



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$S = 4\pi r^2$$

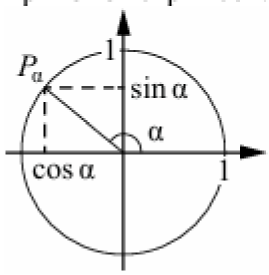
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Прямоугольный треугольник



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

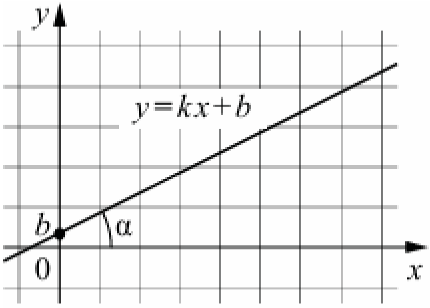
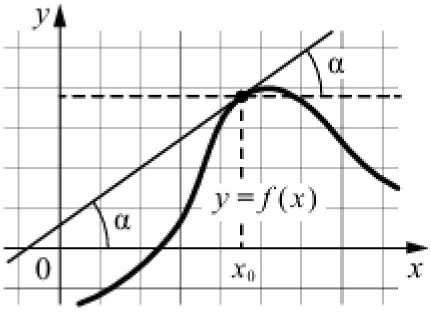
Тригонометрическая окружность



Βασική τριγωνομετρική ταυτότητα: $\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Ορισμένες τιμές τριγωνομετρικών συναρτήσεων

α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

Γραμμική συνάρτηση	Γεωμετρική έννοια της παραγώγου
 $k = \mathrm{tg}\,\alpha$	 $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$

Ενιαία Κρατική Εξέταση στα Μαθηματικά - Εξειδικευμένα μαθηματικά

Αλλαγές στην Ενιαία Κρατική Εξέταση στα Μαθηματικά από το 2024.

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη, συμπεριλαμβανομένων 19 εργασιών. Το μέρος 1 περιέχει 12 ασκήσεις σύντομης απάντησης βασικών και προχωρημένων επιπέδων δυσκολίας. Το μέρος 2 περιέχει 7 εργασίες με λεπτομερή απάντηση αυξημένων και υψηλών επιπέδων δυσκολίας.

3 ώρες και 55 λεπτά διατίθενται για την ολοκλήρωση της εξεταστικής εργασίας στα μαθηματικά.

Το πρώτο μέρος της εξέτασης περιλαμβάνει επιπλέον των πριν το 2024 εξετάσεων μια εργασία στη γεωμετρία (εργασία 2), η οποία δοκιμάζει την ικανότητα προσδιορισμού των συντεταγμένων ενός σημείου, διανύσματος, εκτέλεσης πράξεων σε διανύσματα, υπολογισμού του μήκους και των συντεταγμένων ενός διανύσματος, της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων (κωδικός 13 στον κατάλογο επαληθεύσιμων απαιτήσεων για τα αποτελέσματα του θέματος της γνώσης του βασικού εκπαιδευτικού προγράμματος της δευτεροβάθμιας γενικής εκπαίδευσης. κωδικός 7.5 για τον κατάλογο των στοιχείων περιεχομένου).

Η μέγιστη βαθμολογία για την ολοκλήρωση του γραπτού έχει αυξηθεί από 31 σε 32.

Η εξέταση για το 2024 λοιπόν θα έχει την παρακάτω δομή.

Άσκηση	Επαληθεύσιμα αποτελέσματα θέματος από την εκμάθηση του κύριου εκπαιδευτικού προγράμματος	Μέγιστη βαθμολογία για την ολοκλήρωση της εργασίας	Κατά προσέγγιση χρόνος για την ολοκλήρωση της εργασίας από έναν πτυχιούχο που σπούδασε μαθηματικά στο βασικό επίπεδο (σε λεπτά)	Κατά προσέγγιση χρόνος για την ολοκλήρωση της εργασίας από έναν πτυχιούχο που σπούδασε μαθηματικά σε εξειδικευμένο επίπεδο (σε λεπτά)
1η	Ικανότητα λειτουργίας με έννοιες: επίπεδη γωνία, περιοχή σχήματος, παρόμοιες φιγούρες. ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της γεωμετρίας κατά την επίλυση προβλημάτων. Ικανότητα υπολογισμού γεωμετρικών μεγεθών (μήκος, γωνία, εμβαδόν) χρησιμοποιώντας τύπους και μεθόδους που έχουν μάθει	1	5	3
2η	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: διάνυσμα, διανυσματικές συντεταγμένες, άθροισμα διανυσμάτων, γινόμενο διανύσματος κατά αριθμό, γινόμενο κουκκίδων, γωνία μεταξύ διανυσμάτων.	1	5	3

	ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ στο τεστ του 2023 που παρουσιάζουμε παρακάτω.			
3	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: σημείο, γραμμή, επίπεδο, μέγεθος γωνίας, γωνία επιπέδου, διεδρική γωνία, γωνία μεταξύ γραμμών, γωνία μεταξύ ευθείας γραμμής και επιπέδου, γωνία μεταξύ επιπέδων, απόσταση από σημείο σε επίπεδο, απόσταση μεταξύ γραμμών, απόσταση μεταξύ επιπέδων, όγκος σχήματος, επιφάνεια. ικανότητα χρήσης γεωμετρικών σχέσεων για την επίλυση προβλημάτων. ικανότητα υπολογισμού γεωμετρικών μεγεθών (μήκος, γωνία, εμβαδόν, όγκος, επιφάνεια) χρησιμοποιώντας τους μελετημένους τύπους και μεθόδους. Ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων	1	10	3
4	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: τυχαίο γεγονός, πιθανότητα τυχαίου γεγονότος. Ικανότητα υπολογισμού πιθανότητας	1	5	2
5	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: τυχαίο γεγονός, πιθανότητα τυχαίου γεγονότος. ικανότητα υπολογισμού της πιθανότητας χρησιμοποιώντας γραφικές μεθόδους. εφαρμόζουν τους τύπους πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πιθανοτήτων, τον τύπο πλήρους πιθανότητας, συνδυαστικά γεγονότα και τύπους	1	15	7
6	Ικανότητα επίλυσης εξισώσεων, ανισοτήτων και συστημάτων χρησιμοποιώντας ποικίλες τεχνικές	1	5	2
7	Ικανότητα υπολογισμού τιμών και μετασχηματισμού εκφράσεων με δυνάμεις και λογαρίθμους, μετασχηματισμού κλασματικών-ορθολογικών εκφράσεων	1	5	3
8	• Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: συνάρτηση, ακρότατα συνάρτησης, υψηλότερες και χαμηλότερες τιμές της συνάρτησης στο διάστημα, παράγωγος της συνάρτησης, αντιπαράγωγο. βρείτε την εξίσωση της	1	10	5

	εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης. ικανότητα εύρεσης παραγώγων στοιχειωδών συναρτήσεων. την ικανότητα χρήσης της παραγώγου για τη μελέτη συναρτήσεων, για την εύρεση των υψηλότερων και χαμηλότερων τιμών συναρτήσεων. Βρείτε τις περιοχές των σχημάτων χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα			
9	Ικανότητα μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων στη γλώσσα των μαθηματικών. συνθέτουν εκφράσεις, εξισώσεις, ανισότητες και τα συστήματά τους ανάλογα με την κατάσταση του προβλήματος, μελετούν τα κατασκευασμένα μοντέλα χρησιμοποιώντας άλγεβρα, εξετάζουν τη λύση που λαμβάνεται και αξιολογούν την αληθοφάνεια των αποτελεσμάτων	1	10	5
10	Ικανότητα επίλυσης προβλημάτων κειμένου διαφορετικών τύπων, σύνθεσης εκφράσεων, εξισώσεων, ανισοτήτων και των συστημάτων τους ανάλογα με την κατάσταση του προβλήματος, εξέτασης της ληφθείσας λύσης και αξιολόγησης της ευλογοφάνειας των αποτελεσμάτων	1	15	6
11	Ικανότητα έκφρασης εξαρτήσεων μεταξύ ποσοτήτων με τύπους. Χρήση ιδιοτήτων και γραφημάτων συναρτήσεων για την επίλυση εξισώσεων	1	15	8
12	Ικανότητα λειτουργίας με έννοιες: το άκρο μιας συνάρτησης, οι υψηλότερες και χαμηλότερες τιμές μιας συνάρτησης στο διάστημα. ικανότητα εύρεσης παραγώγων στοιχειωδών συναρτήσεων. την ικανότητα χρήσης της παραγώγου για τη μελέτη συναρτήσεων, για την εύρεση Υψηλότερες και χαμηλότερες τιμές συνάρτησης	1	15	8
13	Ικανότητα επίλυσης εξισώσεων, ανισοτήτων και συστημάτων χρησιμοποιώντας ποικίλες τεχνικές	2	20	10
14	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: σημείο, γραμμή, επίπεδο,	3	40	20

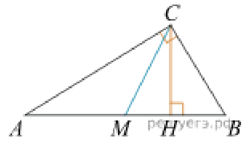
	τμήμα, ακτίνα, μέγεθος γωνίας, γωνία επιπέδου, διεδρική γωνία, τριγωνική γωνία, τεμνόμενες γραμμές, παραλληλισμός και κάθετος γραμμών και επιπέδων, γωνία μεταξύ γραμμών, γωνία μεταξύ γραμμής και επιπέδου, γωνία μεταξύ επιπέδων, απόσταση από σημείο σε επίπεδο, απόσταση μεταξύ γραμμών, απόσταση μεταξύ επιπέδων. εμβαδόν σχήματος, όγκος σχήματος, πολύεδρο, επιφάνεια περιστροφής, επιφάνεια, διατομή· ικανότητα κατασκευής τμήματος πολυέδρου, απεικόνισης πολυέδρων, μορφών και επιφανειών περιστροφής, των τμημάτων τους. Χρησιμοποιήστε γεωμετρικές σχέσεις για την επίλυση προβλημάτων. βρείτε και υπολογίστε γεωμετρικά μεγέθη (μήκος, γωνία, εμβαδόν, όγκος, επιφάνεια) χρησιμοποιώντας τύπους και μεθόδους. Ικανότητα χρήσης των μελετημένων γεγονότων και θεωρημάτων της γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων			
15	Ικανότητα επίλυσης εξισώσεων, ανισοτήτων και συστημάτων χρησιμοποιώντας ποικίλες τεχνικές	2	30	15
16	Ικανότητα μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων στη γλώσσα των μαθηματικών. συνθέτουν εκφράσεις, εξισώσεις, ανισότητες και τα συστήματά τους ανάλογα με την κατάσταση του προβλήματος, μελετούν τα κατασκευασμένα μοντέλα χρησιμοποιώντας τη συσκευή άλγεβρας, ερμηνεύουν το αποτέλεσμα που λαμβάνεται. Ικανότητα επίλυσης διαφορετικών τύπων προβλημάτων κειμένου, συμπεριλαμβανομένων εργασιών από τον τομέα της διαχείρισης προσωπικών και οικογενειακών οικονομικών	2	30	25
17	Ικανότητα λειτουργίας με έννοιες: σημείο, γραμμή, τμήμα, δέσμη, μέγεθος γωνίας. την ικανότητα να χρησιμοποιούν τα μελετημένα γεγονότα και θεωρήματα της γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων, να χρησιμοποιούν γεωμετρικές σχέσεις στην επίλυση	3	—	35

	προβλημάτων. Ικανότητα εύρεσης και υπολογισμού γεωμετρικών μεγεθών (μήκος, γωνία, εμβαδόν) χρησιμοποιώντας τύπους και μεθόδους που έχουν μάθει			
18	Ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: ταυτότητα, μετασχηματισμός ταυτότητας, εξίσωση, ανισότητα, σύστημα εξισώσεων και ανισοτήτων, ισοδυναμία εξισώσεων, ανισότητες και συστήματα. Ικανότητα επίλυσης εξισώσεων, ανισοτήτων και συστημάτων χρησιμοποιώντας μια ποικιλία τεχνικών. επιλύουν εξισώσεις, ανισότητες και συστήματα με μια παράμετρο. την ικανότητα έκφρασης εξαρτήσεων μεταξύ ποσοτήτων με τύπους. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες συναρτήσεων και γραφήματα για την επίλυση εξισώσεων, ανισοτήτων και προβλημάτων παραμέτρων	4	—	35
19	Γνώση μεθόδων απόδειξης, αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων. την ικανότητα να δίνουν παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, να διεξάγουν τεκμηριωμένη συλλογιστική κατά την επίλυση προβλημάτων, να αξιολογούν τη λογική ορθότητα της συλλογιστικής · ικανότητα λειτουργίας με τις ακόλουθες έννοιες: σύνολα φυσικών, ακέραιων, ρητών, πραγματικών αριθμών, υπόλοιπο modulo. την ικανότητα χρήσης των σημείων διαιρετότητας, του μικρότερου κοινού διαιρέτη και του μικρότερου κοινού πολλαπλάσιου. Δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου για την επίλυση του προβλήματος	4	—	40

Ενιαία Κρατική Εξέταση στα Μαθηματικά 27.03.2023. Πρώιμο κύμα. Moskva.

Εξειδικευμένα μαθηματικά

1.



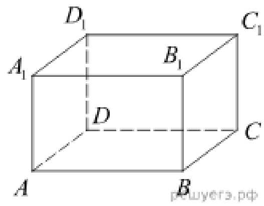
Η οξεία γωνία $\boldsymbol{B}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι $\boldsymbol{66°}$. Βρείτε τη γωνία μεταξύ *του ύψους του* $\boldsymbol{CH}$ *και της* διάμεσου $\boldsymbol{CM}$ που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας. Δώστε την απάντηση σε μοίρες.

Λύση.

Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ίση με το μισό της, οπότε $\boldsymbol{AM = MC}$. Επομένως, οι γωνίες $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{ACM}$ είναι ίσες με τις γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $\boldsymbol{AMC}$. Η προβολή του ύψους είναι πιο κοντά στην κορυφή της μεγαλύτερης οξείας γωνίας. Έχω:

$$\angle \boldsymbol{MCH} = \angle \boldsymbol{C} - \angle \boldsymbol{ACM} - \angle \boldsymbol{BCH} = \mathbf{90^\circ - 24^\circ - (90^\circ - 66^\circ) = 66^\circ - 24^\circ} = \boxed{\mathbf{42^\circ}}$$

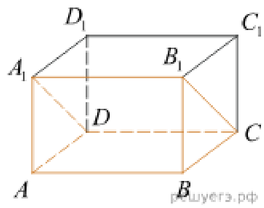
2.



Βρείτε τον όγκο ενός πολυέδρου του οποίου οι κορυφές είναι σημεία $\boldsymbol{A, D, A_1, B, C, B_1}$ ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ στο οποίο

$\boldsymbol{AB = 3, AD = 4, AA_1 = 5}$.

Λύση.



Όπως φαίνεται στο σχήμα, το πολύεδρο $\boldsymbol{ADA_1BCB_1}$ είναι το ήμισυ του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. Επομένως, ο όγκος του δίνεται από τον τύπο: $\boldsymbol{V_{ADA_1BCB_1} = \frac{1}{2}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \boxed{\mathbf{30}}$.

3.

Σε ένα τυχαίο πείραμα, ένα δίκαιο νόμισμα ρίχνεται δύο φορές. Βρείτε την πιθανότητα ότι τα κεφάλια θα εμφανιστούν ακριβώς μία φορά.

Λύση.

Υπάρχουν 4 αποτελέσματα του πειράματος που είναι εξίσου πιθανά: κεφάλι-κεφάλι, κεφάλι-γράμματα, γράμματα-κεφάλι, γράμματα-γράμματα. Το κεφάλι εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε δύο περιπτώσεις. Επομένως, η πιθανότητα να πέσουν τα κεφάλια ακριβώς 1 φορά είναι $\mathbf{\frac{2}{4} = \frac{1}{2}} = \boxed{\mathbf{0,5}}$.

4.

Στο εμπορικό κέντρο, δύο πανομοιότυπα μηχανήματα αυτόματης πώλησης πωλούν τσίχλες. Η πιθανότητα ότι το μηχάνημα θα ξεμείνει από τσίχλες μέχρι το τέλος της ημέρας είναι 0,4. Η πιθανότητα ότι και τα δύο μηχανήματα θα ξεμείνουν από τσίχλες είναι 0,2. Βρείτε την πιθανότητα ότι μέχρι το τέλος της ημέρας, θα παραμείνει τσίχλα και στις δύο μηχανές.

Λύση.

Έστω τα γεγονότα

A = οι τσίχλες θα εξαντληθούν στο πρώτο μηχάνημα,

B = οι τσίχλες θα εξαντληθούν στο δεύτερο μηχάνημα.

Τότε

$\boldsymbol{A \cap B}$ = Οι τσίχλες θα εξαντληθούν και στις δύο μηχανές,

$\boldsymbol{A \cup B}$ = Οι τσίχλες θα εξαντληθούν σε τουλάχιστον ένα μηχάνημα.

Έχω $\boldsymbol{P(A) = P(B) = 0,4}$ και $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,2}$

Έχω $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,4 + 0,4 - 0,2 = 0,6}$.

Άρα, η πιθανότητα του αντίθετου γεγονότος, ότι θα παραμένει τσίχλα και στις δύο μηχανές, είναι $\mathbf{1} - \mathbf{0,6} = \boxed{\mathbf{0,4}}$.

5.

Βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{\mathbf{19+5}\boldsymbol{x}} = \mathbf{2}$.

Λύση.

Αν τετραγωνίσουμε έχουμε τα εξής: $\mathbf{19+5}\boldsymbol{x} = \mathbf{4} \Leftrightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{x} = \mathbf{-15} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boxed{\mathbf{-3}}$. Δεκτή.

6.

Βρείτε την τιμή της έκφρασης $\sqrt{\mathbf{48}}\cos^2\frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} - \sqrt{\mathbf{12}}$.

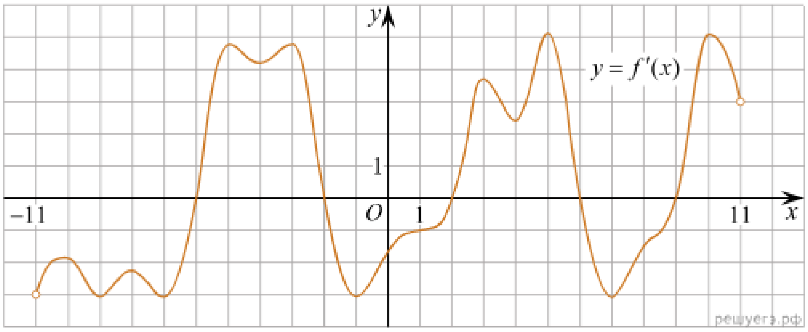
Λύση.

Από τον τύπο συνημιτόνου της διπλής γωνίας έχω:

$$\sqrt{48}\cos^2\frac{19\pi}{12} - \sqrt{12} = \sqrt{12}\left(2\cos^2\frac{19\pi}{12} - 1\right) = \sqrt{12}\cos\frac{19\pi}{6} = \sqrt{12}\cos\left(4\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{12}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= \sqrt{12}\cos\frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-3}.$$

7.

Το σχήμα δείχνει το γράφημα της παραγώγου της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)}$ που ορίζεται στο διάστημα $(\mathbf{-11;11})$. Βρείτε τον αριθμό των ακροτάτων σημείων της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)}$ στο διάστημα $[\mathbf{-10;10}]$.



Λύση.

Τα ακρότατα σημεία αντιστοιχούν στα σημεία αλλαγής του προσήμου της παραγώγου. Η παράγωγος αλλάζει πρόσημο στα σημεία $\mathbf{-6, -2, 2, 6, 9}$. Έτσι, στο διάστημα $[\mathbf{-10;10}]$ η συνάρτηση έχει $\boxed{\mathbf{5}}$ ακρότατα σημεία.

Σημείωση: Στην Ελλάδα θα παίρναμε ως ακρότατα και τα άκρα -10 και 10 του κλειστού διαστήματος.

8.

Ο κλωβός κατάδυσης, ο οποίος την αρχική στιγμή περιέχει ένα $\boldsymbol{v} = \mathbf{3}$ γραμμομόρια αέρα με $\boldsymbol{V_1} = \mathbf{8}\boldsymbol{l}$ όγκο, κατεβαίνει αργά στον πυθμένα της δεξαμενής. Το έργο που εκτελείται από τη συμπίεση του αέρα ορίζεται από την έκφραση $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\log_2\frac{\boldsymbol{V_1}}{\boldsymbol{V_2}}$ (J), όπου $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{5,75}$ είναι μια σταθερή και η θερμοκρασία του αέρα είναι $\boldsymbol{T} = \mathbf{300K}$. Πόσο όγκο $\boldsymbol{V_2}$ (σε λίτρα) θα πάρει ο αέρας εάν έγιναν 10.350 joules έργου κατά τη συμπίεση του αερίου;

Λύση.

Έχω μα αντικατάσταση των δεδομένων ότι :

$$5,75\cdot 3\cdot 300\cdot\log_2\frac{8}{V_2} = 10350 \Leftrightarrow \log_2\frac{8}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{8}{V_2} = 4 \Leftrightarrow V_2 = \boxed{2}\,l.$$

9.

Ένας εργοδηγός μπορεί να ολοκληρώσει μια εργασία σε **12** ώρες, ενώ ένας άλλος μπορεί να την ολοκληρώσει σε **6** ώρες. Πόσες ώρες θα χρειαστούν και οι δύο εργοδηγοί για να ολοκληρώσουν την εργασία, δουλεύοντας μαζί;

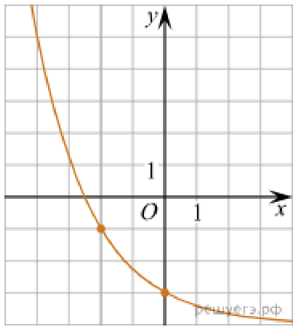
Λύση.

Ο πρώτος εργοδηγός κάνει το $\mathbf{1/12}$ της εργασίας ανά ώρα και ο δεύτερος κάνει το $\mathbf{1/6}$ της εργασίας ανά ώρα. Ως εκ τούτου, δουλεύοντας μαζί, οι εργοδηγοί κάνουν $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ της δουλειάς ανά ώρα. Ως εκ τούτου, οι εργοδηγοί θα ολοκληρώσουν όλη την εργασία σε $\boxed{4}$ ώρες.

Μια άλλη λύση.

Δύο εργοδηγοί που εργάζονται μαζί σε **12** ώρες μπορούν να ολοκληρώσουν **3** τέτοιες εργασίες, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούν να ολοκληρώσουν μία παραγγελία σε $\frac{12}{3}=4$ ώρες.

10.



Το σχήμα δείχνει ένα γράφημα μιας συνάρτησης της φόρμας $\boldsymbol{f(x)=a^x+b}$ Βρείτε την τιμή του$\boldsymbol{f(-8)}$.

Λύση. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)=a^x+b}$ είναι ένα διάστημα $(\boldsymbol{b};+\infty)$ Από το σχήμα το σύνολο των τιμών αυτής της συνάρτησης είναι $(-4;+\infty)$ επομένως, $\boldsymbol{b=-4}$. Δεδομένου ότι $\boldsymbol{f(-2)=-1}$ βρίσκουμε :

$\boldsymbol{-1=a^{-2}-4 \Leftrightarrow a^{-2}=3 \Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Επειδή η συνάρτηση είναι φθίνουσα έχω $\boldsymbol{0<\alpha<1}$. Άρα $\boldsymbol{\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Έτσι, $\boldsymbol{f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x-4}$ και τελικά:

$$\boldsymbol{f(-8)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-8}-4=81-4=\boxed{77}}$$

Σημείωση.

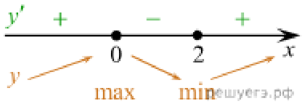
Η τιμή του $\boldsymbol{b}$ μπορεί να βρεθεί με άλλο τρόπο. Έχω ότι $\boldsymbol{f(0)=-3}$ επομένως, δηλ. $\boldsymbol{a^0+b=-3}$, $\boldsymbol{b=-4}$.

11.

Βρείτε το τοπικό ελάχιστο σημείο της συνάρτησης $\boldsymbol{y=x^3-3x^2+2}$

Λύση.

Η παράγωγος της δεδομένης συνάρτησης είναι: $\boldsymbol{y'=3x^2-6x=3x(x-2)}$ με ρίζες $\boldsymbol{x=0, x=2}$

Ο πίνακας προσήμων είναι: 

Άρα τοπικό ελάχιστο σημείο στο $\boldsymbol{x=2}$

12.

α) Λύστε την εξίσωση: $\boldsymbol{\log_3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x+81\right)=4}$

β) Καθορίστε τις ρίζες αυτής της εξίσωσης που ανήκουν στο διάστημα $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$

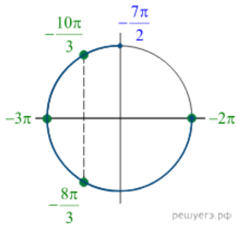
Λύση.

α) Μετασχηματισμός της αρχικής εξίσωσης:

$$\boldsymbol{\log_3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x+81\right)=4 \Leftrightarrow \sin x+\sin 2x+81=81 \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right] k \in \mathbb{Z}.$$

β) Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε: $x \in \left\{-3\pi, -2\pi, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}\right\}$



13.

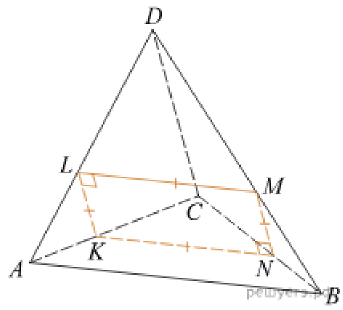
Έστω τετράεδρο $ABCD$. Τα σημεία K, L, M, N βρίσκονται στις ακμές AC, AD, DB και BC αντίστοιχα, έτσι ώστε το τετράπλευρο $KLMN$ να είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $2, AK : KC = 2 : 3$.

α) Αποδείξτε ότι $BM: MD = 2:3$

β) Βρείτε την απόσταση του σημείου C από το επίπεδο $KLMN$ εάν γνωρίζετε ότι ο όγκος του τετράεδρου $ABCD$ είναι 25.

Λύση.

α) Το τετράπλευρο $KLMN$ είναι τετράγωνο, οπότε *οι γραμμές* KN και LM είναι παράλληλες. Επομένως, η γραμμή LM είναι παράλληλη με το επίπεδο ABC. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές LM και AB που βρίσκονται στο επίπεδο ADB δεν έχουν κοινά σημεία. Ως εκ τούτου, είναι παράλληλες. Έτσι, και οι τρεις ευθείες *γραμμές* KN, LM και AB είναι παράλληλες. Ομοίως, τα τμήματα KL, MN και CD είναι παράλληλα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή για τα τρίγωνα ACB και CBD, έχουμε: $\frac{BM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC} = \frac{2}{3}$



β) Η απόσταση από το σημείο C έως το επίπεδο KLM είναι ίση με το ύψος του τετραέδρου $CKMN$ που λαμβάνεται από το σημείο C. Η βάση αυτού του τετραέδρου είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο KMN, το εμβαδόν του οποίου είναι $S_{KMN} = \frac{1}{2} KN \cdot NM = 2$

Επομένως $d(C, KMN) = h_c = \frac{3V_{CKMN}}{S_{KMN}}$

Έστω ότι το τμήμα DH είναι το ύψος του τετράεδρου $DABC$ και το τμήμα MH_1 είναι το ύψος του τετράεδρου $MKCN$. Ας εκφράσουμε τον όγκο του τετράεδρου $MKCN$ όσον αφορά τον όγκο του τετράεδρου $DABC$:

$$V_{MKCN} = \frac{1}{3} \cdot MH_1 \cdot S_{CKN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} DH \cdot \frac{9}{25} S_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} V_{DABC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} \cdot 25 = \frac{18}{5}$$

Ας αντικαταστήσουμε τις τιμές που βρέθηκαν:

$$d(C, KMN) = \frac{3V_{CKMN}}{S_{KMN}} = \frac{3 \cdot \frac{18}{5}}{2} = \frac{54}{10} = \boxed{5,4}$$

14.

Να λυθεί η ανισότητα $\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leqslant 5 \cdot 2^x + 7$

Λύση.

Θέτουμε $2^x = t$ και έχουμε ότι:

$$\frac{t^2 + 2t - 36}{t - 5} + \frac{4t^2 - 32t + 4}{t - 8} \leqslant 5t + 7 \Leftrightarrow \frac{t(t-5) + 7t - 36}{t - 5} + \frac{4t(t-8) + 4}{t - 8} \leqslant 5t + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{7(t-5) - 1}{t - 5} + 4t + \frac{4}{t - 8} \leqslant 5t + 7 \Leftrightarrow 7 - \frac{1}{t - 5} + \frac{4}{t - 8} \leqslant 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{t - 5} + \frac{4}{t - 8} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-(t-8) + 4(t-5)}{(t-5)(t-8)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3(t-4)}{(t-5)(t-8)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} t \leqslant 4, \\ 5 < t < 8. \end{array}\right.$$

Ας επιστρέψουμε στην αρχική μεταβλητή. Έχω:

$$\left\{\begin{array}{c} 2^x \leqslant 4, \\ 5 < 2^x < 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \leqslant 2, \\ \log_2 5 < x < 3. \end{array}\right.$$

Άρα $x \in \boxed{(-\infty; 2] \cup (\log_2 5\,; 3)}$

15.

Τον Ιούλιο του 2023, προγραμματίζεται η λήψη δανείου για ένα ορισμένο ποσό. Οι όροι επιστροφής είναι οι εξής:

– Κάθε Ιανουάριο, το χρέος αυξάνεται κατά 25% σε σύγκριση με το τέλος του προηγούμενου έτους.

– Από τον Φεβρουάριο έως τον Ιούνιο κάθε έτους, μέρος της οφειλής πρέπει να καταβάλλεται εφάπαξ.

Πόσα ρούβλια σκοπεύετε να δανειστείτε από την τράπεζα εάν γνωρίζετε ότι το δάνειο θα εξοφληθεί πλήρως σε τρεις ίσες δόσεις (δηλαδή σε τρία χρόνια) και το συνολικό ποσό των πληρωμών μετά την πλήρη αποπληρωμή του δανείου είναι 65.500 ρούβλια περισσότερο από το ποσό δανεισμού;

Λύση.

Ας υποθέσουμε ότι το ποσό του δανείου είναι *S* ρούβλια και η ετήσια πληρωμή είναι *ίση με x* ρούβλια. Κάθε Ιανουάριο, το χρέος αυξάνεται κατά 25%, δηλαδή $\boldsymbol{k = 1,25}$. Ας συμπληρώσουμε τον πίνακα.

Έτος (αριθμός έτους)	Χρέος τον Ιανουάριο (σε ρούβλια)	Πληρωμή (σε ρούβλια)	Χρέος τον Ιούλιο (σε ρούβλια)
2023			S
2024(1)	$\boldsymbol{kS}$	x	**kS-x**
2025(2)	$\boldsymbol{k(kS-x)}$	x	$\boldsymbol{k(kS-x)-x}$
2026(3)	$\boldsymbol{k(k(kS-x)-x)}$	x	$\boldsymbol{k(k(kS-x)-x)-x=0}$

Ας λύσουμε ως προς *το S*:

$$\boldsymbol{k(k(kS-x)-x)-x=0 \Leftrightarrow k^3S-x(k^2+k+1)=0 \Leftrightarrow S=\frac{x(k^2+k+1)}{k^3} \Leftrightarrow S=\frac{x(k^3-1)}{k^3(k-1)}}$$

Στη συνέχεια, δεδομένου ότι $\boldsymbol{k=1,25=\frac{5}{4}}$ έχουμε:

$$\boldsymbol{S=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^3-1}{\left(\frac{5}{4}\right)^3\left(\frac{5}{4}-1\right)}x=\frac{\frac{125}{64}-1}{\frac{125}{64}\cdot\frac{1}{4}}x=\frac{4\cdot 61\cdot 64}{125\cdot 64}x=\frac{244}{125}x}$$

Το ποσό των πληρωμών είναι 65.500 ρούβλια περισσότερο από το ποσό δανεισμού. Έτσι, $\boldsymbol{3x-65500=S}$ από όπου έχουμε $\boldsymbol{x=\frac{S+65500}{3}}$ οπότε παίρνουμε

$\boldsymbol{S=\frac{\frac{S+65500}{3}\cdot 244}{125} \Leftrightarrow 375S=244S+244\cdot 65500 \Leftrightarrow 131S=244\cdot 65500 \Leftrightarrow S=244\cdot 500 \Leftrightarrow S=\boxed{122000}}$ ρούβλια.

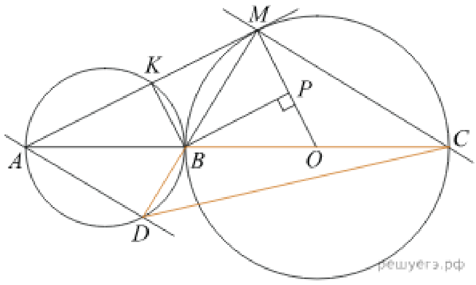
16.

Μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{A}$ εφάπτεται σε έναν κύκλο με διάμετρο $\boldsymbol{BC}$ στο σημείο $\boldsymbol{M}$ και τέμνει έναν κύκλο με διάμετρο $\boldsymbol{AB}$ στο σημείο $\boldsymbol{K}$ για δεύτερη φορά. Η προέκταση του τμήματος $\boldsymbol{MB}$ τέμνει τον κύκλο με διάμετρο $\boldsymbol{AB}$ στο σημείο $\boldsymbol{D}$.

α) Αποδείξτε ότι η $\boldsymbol{AD}$ και η $\boldsymbol{MC}$ είναι παράλληλες.

β) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{DBC}$ εάν $\boldsymbol{AK = 5}$ και $\boldsymbol{KM = 25}$.

Λύση.



α) Τα σημεία $\boldsymbol{M}$ και D βρίσκονται σε κύκλους με διάμετρο $\boldsymbol{BC}$ και $\boldsymbol{AB}$ αντίστοιχα, επομένως $\angle \boldsymbol{BMC} = \angle \boldsymbol{BDA} = \mathbf{90}°$

Οι ευθείες $\boldsymbol{AD}$ και $\boldsymbol{MC}$ είναι κάθετες στην ίδια γραμμή $\boldsymbol{MD}$, επομένως οι ευθείες $\boldsymbol{AD}$ και $\boldsymbol{MC}$ είναι παράλληλες.

β) Έστω ότι το σημείο $\boldsymbol{O}$ είναι το κέντρο ενός κύκλου με διάμετρο $\boldsymbol{BC}$. Στη συνέχεια, τα τμήματα $\boldsymbol{OM}$ και $\boldsymbol{AM}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (ακτίνα επαφής και εφαπτομένη). Οι ευθείες $\boldsymbol{BK}$ και $\boldsymbol{AM}$ είναι επίσης μεταξύ τους κάθετες, επομένως οι ευθείες $\boldsymbol{OM}$ και $\boldsymbol{BK}$ είναι παράλληλες. Έστω $\boldsymbol{BK} = \boldsymbol{x}$. Το τρίγωνο $\boldsymbol{AMO}$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\boldsymbol{AKB}$ με λόγο ομοιότητας 6, οπότε $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OM} = \mathbf{6}\boldsymbol{x}$. Ας φέρουμε την κάθετη $\boldsymbol{BP}$ από το σημείο $\boldsymbol{B}$ στη γραμμή $\boldsymbol{OM}$. Δεδομένου ότι *το τετράπλευρο* $\boldsymbol{BKMP}$ είναι ορθογώνιο, βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{KM} = \mathbf{25},$$
$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{MP} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{BK} = 6\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, $\boldsymbol{OB}^2 = \boldsymbol{BP}^2 + \boldsymbol{OP}^2$, από το οποίο $\mathbf{36}\boldsymbol{x}^2 = \mathbf{625} + \mathbf{25}\boldsymbol{x}^2 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{25\sqrt{11}}{11}$.

Δεδομένου ότι οι γραμμές $\boldsymbol{AD}$ και $\boldsymbol{MC}$ είναι παράλληλες, έχουμε:

$$E_{DBC} = E_{MDC} - E_{MBC} = E_{MAC} - E_{MBC} = E_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 30x = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{25\sqrt{11}}{11} = \boxed{\frac{375\sqrt{11}}{11}}$$

17.

Βρείτε όλες τις τιμές *του a*, ώστε η εξίσωση

$$\sqrt{1-2x}\ln(25x^2 - a^2) = \sqrt{1-2x}\ln(5x - a)$$

να έχει ακριβώς μία ρίζα.

Λύση.

Η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sqrt{1-2x} \cdot (\ln(25x^2 - a^2) - \ln(5x - a)) = 0$$

Πρώτη περίπτωση:

$$\begin{cases} \sqrt{1-2x} = 0, \\ 25x^2 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ 5x + a > 0, \\ 5x - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{2} < a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Δεύτερη περίπτωση:

$$\begin{cases} \ln(25x^2 - a^2) = \ln(5x - a), \\ 1 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - a^2 = 5x - a, \\ 5x - a > 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + a = 1, \\ 5x - a > 0, \\ 1 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-a}{5}, \\ 1 - 2a > 0, \\ \frac{3}{5} + \frac{2a}{5} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-a}{5}, \\ -\frac{3}{2} \leqslant a < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Οι ρίζες $x = \frac{1}{2}$ και $x = \frac{1-a}{5}$ συμπίπτουν όταν $a = -\frac{3}{2}$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παίρνουμε ότι η αρχική εξίσωση:

– για $a \leqslant -\frac{5}{2}$ δεν έχει ρίζες

— για $-\frac{5}{2} < a \leqslant -\frac{3}{2}$ έχει μία μόνο ρίζα $x = \frac{1}{2}$

— για $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$ έχει δύο ρίζες, $x = \frac{1}{2}$ και $x = \frac{1-a}{5}$

— για $\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{5}{2}$ έχει μία μόνο ρίζα $x = \frac{1}{2}$

Έτσι, η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο $-\frac{5}{2} < a \leqslant -\frac{3}{2}$ ή στο $\frac{1}{2} \leqslant a < \frac{5}{2}$ άρα $a \in \boxed{\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)}$

18.

Δίνεται ένας φυσικός αριθμός. Σε αυτόν τον αριθμό μπορείτε είτε να προσθέσετε το τριπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του είτε να αφαιρέσετε το τριπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του. Μετά την προσθήκη ή την αφαίρεση αυτή, ο αριθμός πρέπει να παραμείνει φυσικός.

(α) Είναι δυνατόν να πάρω τον αριθμό **29** ξεκινώντας από τον αριθμό **128**;

(β) Είναι δυνατόν να πάρω τον αριθμό **31** ξεκινώντας από τον αριθμό **128**;

(γ) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που θα μπορούσε να ληφθεί ξεκινώντας από τον αριθμό **128**;

Λύση

α) Αφαιρέστε το τριπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τρεις φορές:

$\mathbf{128 - 3 \cdot 11 = 95}$

$\mathbf{95 - 3 \cdot 14 = 53}$

$\mathbf{53 - 3 \cdot 8 = 29}$.

β) Το τριπλάσιο άθροισμα των ψηφίων ενός αριθμού διαιρείται με το **3**, οπότε αυτές οι πράξεις δεν αλλάζουν το υπόλοιπο του αριθμού όταν διαιρείται με το **3**. Ο αριθμός **128**, όταν διαιρείται με το **3**, δίνει υπόλοιπο **2** ενώ ο αριθμός **31** δίνει υπόλοιπο **1**. Ως εκ τούτου, είναι αδύνατο να ληφθεί ο αριθμός **31** από τον **128** με τέτοιες πράξεις.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι ο αριθμός **1** δεν μπορεί να ληφθεί. Ας ξεκινήσουμε με τον αριθμό **29** στο σημείο α) και ας δείξουμε πώς να πάρουμε τον αριθμό **2**:

$$\mathbf{29 + 3 \cdot 11 = 62}$$
$$\mathbf{62 - 3 \cdot 8 = 38}$$
$$\mathbf{38 - 3 \cdot 11 = 5}$$
$$\mathbf{5 + 3 \cdot 5 = 20}$$
$$\mathbf{20 + 3 \cdot 2 = 26}$$
$$\mathbf{26 - 3 \cdot 8 = \boxed{2}}$$

Ενιαία Κρατική Εξέταση στα Μαθηματικά 01.06.2023. Κύριο κύμα. Μόσχα
Εξειδικευμένα μαθηματικά.
Μέρος 2ο (Το 1ο μέρος που αποτελείται από 12 ερωτήσεις σύντομης απάντησης παραλείπεται.)

1.

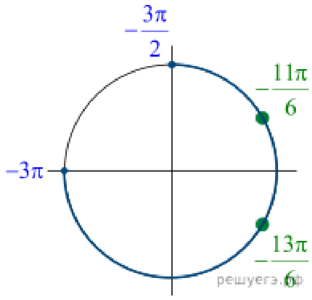
α) Λύστε την εξίσωση $\mathbf{2\cos^3 x = \sqrt{3}\sin^2 x + \cos x}$

β) Βρείτε όλες τις ρίζες αυτής της εξίσωσης που ανήκουν στο διάστημα $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Λύση.

(α) Από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα προκύπτει ότι $\mathbf{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$ από όπου παίρνουμε: $\mathbf{2\cos^3 x = \sqrt{3}(1-\cos^2 x) + \cos x \Leftrightarrow 2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{3} = 0}$

Θέτω $\boldsymbol{t = \cos x}$, οπότε έχω



$$\begin{aligned} &2t^3 + \sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3} = \\ &= (2t^3 - \sqrt{3}t^2) + (2\sqrt{3}t^2 - 3t) + (2t - \sqrt{3}) = \\ &= (2t - \sqrt{3})(t^2 + \sqrt{3}t + 1). \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου παράγοντα είναι $\mathbf{-1}$, επομένως δεν έχει ρίζες.

Η $\mathbf{2t - \sqrt{3} = 0}$ έχει μια ρίζα την $\boldsymbol{t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

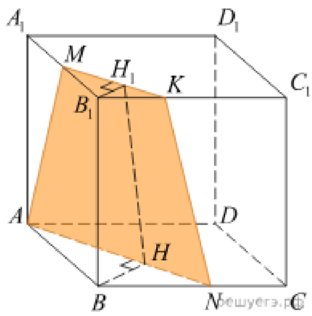
β) Χρησιμοποιώντας τον τριγωνομετρικό κύκλο, έχω $\boxed{x \in \left\{-\frac{13\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}\right\}}$

2.

Η βάση του ορθού πρίσματος $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ είναι ένα παραλληλόγραμμο. Οι ακμές $\boldsymbol{A_1B_1, B_1C_1}$ και $\boldsymbol{BC}$ έχουν σημεία $\boldsymbol{M, K}$ και $\boldsymbol{N}$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\boldsymbol{B_1K : KC_1 = 1:2}$, το $\boldsymbol{AMKN}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις $\mathbf{2}$ και $\mathbf{3}$.

α) Αποδείξτε ότι το $\boldsymbol{N}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{BC}$.

β) Βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $\boldsymbol{AMKN}$, εάν ο όγκος του πρίσματος $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ είναι $\mathbf{12}$ και το ύψος του είναι $\mathbf{2}$.



Λύση.

α) Σημειώστε ότι οι πλευρές των τριγώνων $\boldsymbol{MB_1K}$ και $\boldsymbol{ABN}$ είναι αντίστοιχα παράλληλες, επομένως αυτά τα τρίγωνα είναι όμοια με λόγο $\boldsymbol{\lambda = \frac{MK}{AN} = \frac{2}{3}}$.

Οπότε: $\boldsymbol{\frac{B_1K}{BN} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow BN = \frac{3}{2}B_1K \Leftrightarrow BN = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}B_1C_1 \Leftrightarrow BN = \frac{B_1C_1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{BN = \frac{BC}{2}}$.

β) Δεδομένου ότι το ύψος του πρίσματος $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ είναι $\mathbf{2}$, ο όγκος του είναι ίσος με το διπλάσιο του εμβαδού του παραλληλογράμμου $\boldsymbol{ABCD}$, τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $\boldsymbol{ABCD}$ είναι $\mathbf{6}$. Άρα $\boldsymbol{S_{ABN} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}\cdot 6 = \frac{3}{2}}$. Τα εμβαδά των όμοιων τριγώνων $\boldsymbol{MB_1K}$ και $\boldsymbol{ABN}$ έχουν λόγο το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους, οπότε: $\boldsymbol{S_{B_1MK} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{ABN} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2} = \frac{2}{3}}$

Έστω $\boldsymbol{BH}$ και $\boldsymbol{B_1H_1}$ να είναι τα ύψη των τριγώνων $\boldsymbol{ABN}$ και $\boldsymbol{MB_1K}$,

τότε $\boldsymbol{BH = \frac{2S_{ABN}}{AN} = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{3} = 1}$, εξ ου και $\boldsymbol{B_1H_1 = \frac{2}{3}\cdot BH = \frac{2}{3}}$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχω: $\boldsymbol{H_1H = \sqrt{BB_1^2 + (BH - B_1H_1)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}}$.

Σημειώστε ότι σύμφωνα με το θεώρημα τριών καθέτων, το $\boldsymbol{H_1H}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{AN}$, οπότε το $\boldsymbol{H_1H}$ είναι το ύψος του τραπεζοειδούς $\boldsymbol{AMKN}$. Οπότε: $\boldsymbol{S_{AMKN} = HH_1\cdot\left(\frac{MK+AN}{2}\right) = \frac{\sqrt{37}}{3}\cdot\left(\frac{2+3}{2}\right)} = \boxed{\frac{5\sqrt{37}}{6}}$.

3.

Να λυθεί η ανισότητα $\frac{\log_2(x^2)-\log_3(x^2)}{\log_6^2(2x^2-10x+12,5)+1} \geqslant 0$

Λύση. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός για όλες τις τιμές της μεταβλητής για την οποία ορίζεται. Επομένως, για: $2x^2-10x+12,5>0 \Leftrightarrow (x-2,5)^2>0 \Leftrightarrow x \neq 2,5$

Ο αριθμητής του κλάσματος πρέπει να είναι μη αρνητικός. Άρα

$$\log_2 x^2-\log_3 x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x^2}{\ln 2}-\frac{\ln x^2}{\ln 3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x^2(\ln 3-\ln 2)}{\ln 3 \ln 2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Δεδομένης της $x \neq 2,5$ έχω: $\boxed{x \in (-\infty;-1] \cup [1;2,5) \cup (2,5;+\infty)}$

4.

Τον Ιούλιο του 2025, σχεδιάζεται να λάβουμε δάνειο από τράπεζα ύψους **800** χιλιάδων ρούβλια για **10** χρόνια. Οι προϋποθέσεις για την επιστροφή του είναι οι εξής:

– Κάθε Ιανουάριο, το χρέος αυξάνεται κατά $r\%$ σε σύγκριση με το τέλος του προηγούμενου έτους (r είναι ακέραιος).

– από τον Φεβρουάριο έως τον Ιούνιο, μέρος της οφειλής πρέπει να εξοφληθεί·

– τον Ιούλιο του 2026, του 2027, του 2028, του 2029, του 2030, το χρέος πρέπει να είναι κατά ένα σταθερό ποσό μικρότερο από το χρέος του Ιουλίου του προηγούμενου έτους·

– τον Ιούλιο του 2030, το χρέος θα πρέπει να είναι 200 χιλιάδες ρούβλια

– τον Ιούλιο του 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, η οφειλή πρέπει να είναι μικρότερη από την οφειλή του Ιουλίου του προηγούμενου έτους κατά ένα άλλο σταθερό ποσό·

– Έως τον Ιούλιο του 2035, το χρέος θα πρέπει να αποπληρωθεί πλήρως.

Βρείτε το r εάν το συνολικό ποσό των πληρωμών δανείου είναι **1480** χιλιάδες ρούβλια.

Λύση.

Έστω το αρχικό ποσό δανείου $S = 800$ χιλιάδες ρούβλια, x το σταθερό ποσό κατά το οποίο μειώνεται το χρέος κάθε *Ιούλιο* από το 2026 έως το 2030 και y από το 2031 έως το 2035. Στη συνέχεια, τα ποσά του χρέους τον Ιούλιο για τα έτη από το 2025 έως το 2035 θα είναι:

$$S, S-x, S-2x, S-3x, S-4x, S-5x=200,$$
$$S-5x-y, S-5x-2y, S-5x-3y, S-5x-4y, S-5x-5y=0.$$

Από την εξίσωση για το 2030 προκύπτει ότι $x = 120$ χιλιάδες ρούβλια, και από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι $x + y = 160$ χιλιάδες ρούβλια. Επομένως, $y = 40$ χιλιάδες ρούβλια.

Στη συνέχεια, οι δεδουλευμένοι τόκοι από το 2026 έως το 2035 με επιτόκιο $k=\frac{r}{100}$ είναι:

$$kS, k(S-x), k(S-2x), k(S-3x), k(S-4x), k(S-5x),$$
$$k(S-5x-y), k(S-5x-2y), k(S-5x-3y), k(S-5x-4y),$$

και οι πληρωμές στα αντίστοιχα έτη θα είναι:

$$kS+x, k(S-x)+x, k(S-2x)+x, k(S-3x)+x, k(S-4x)+x,$$
$$k(S-5x)+y, k(S-5x-y)+y, k(S-5x-2y)+y, k(S-5x-3y)+y, k(S-5x-4y)+y.$$

Στη συνέχεια, το άθροισμα των πληρωμών πού είναι ίσο με το άθροισμα δύο διαφορετικών αριθμητικών προόδων πέντε όρων η καθεμία, ισούται με:

$$\frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2}\cdot 5+\frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2}\cdot 5=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8000k+600-4200k+200-400k=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3400k=680 \Leftrightarrow k=0.2 \Leftrightarrow \boxed{r=20}$$

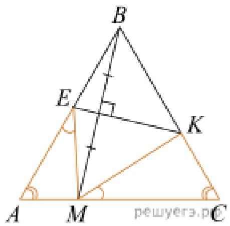
5.

Έστω σημείο $\boldsymbol{M}$ στην πλευρά $\boldsymbol{AC}$ του ισόπλευρου τριγώνου $\boldsymbol{ABC}$. Η μεσοκάθετη του $\boldsymbol{BM}$ τέμνει τα $\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{BC}$ στα σημεία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{K}$, αντίστοιχα.

α) Αποδείξτε ότι οι γωνίες $\boldsymbol{AEM}$ και $\boldsymbol{KMC}$ είναι ίσες.

β) Βρείτε την αναλογία των εμβαδών των τριγώνων $\boldsymbol{AEM}$ και $\boldsymbol{MKC}$ εάν $\boldsymbol{AM}:\boldsymbol{CM} = \boldsymbol{2}:\boldsymbol{5}$

Λύση.



α) Από τη συμμετρία σε σχέση με το τμήμα ΕΚ, παίρνουμε ότι τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΕΒΚ είναι ίσα, επομένως, $\angle \boldsymbol{EMK} = \boldsymbol{60^\circ}$

Αν $\angle \boldsymbol{AEM} = \boldsymbol{\alpha}$. Τότε $\angle \boldsymbol{AME} = \boldsymbol{180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha}$.

Έτσι $\angle \boldsymbol{KMC} = \boldsymbol{180^\circ} - \angle \boldsymbol{AME} - \angle \boldsymbol{EMK} = \boldsymbol{180^\circ - (120^\circ - \alpha) - 60^\circ = \alpha} = \angle \boldsymbol{AEM}$.

β) Έστω $\boldsymbol{AM = 2x, MC = 5x, AE = y, EM = EB = 7x - y}$ και σύμφωνα με το θεώρημα συνημιτόνου: $\boldsymbol{EM^2 = AM^2 + AE^2 - 2 \cdot AE \cdot AM \cdot \frac{1}{2}}$,

επομένως $\boldsymbol{(7x-y)^2 = (2x)^2 + y^2 - 2x \cdot y \Leftrightarrow 49x^2 - 14xy + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 45x^2 = 12xy \Leftrightarrow y = \frac{45}{12}x = \frac{15}{4}x}$.

Τα τρίγωνα ΑΕΜ και CMK είναι όμοια (δύο γωνίες ίσες). Ο συντελεστής ομοιότητας είναι:

$$\frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{MC}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{5x}} = \frac{\frac{\boldsymbol{15}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{5x}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}$$

Έτσι, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΕΜ και ΜΚC είναι:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{S_{AEM}}}{\boldsymbol{S_{MKC}}} = \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{16}}}$$

6.

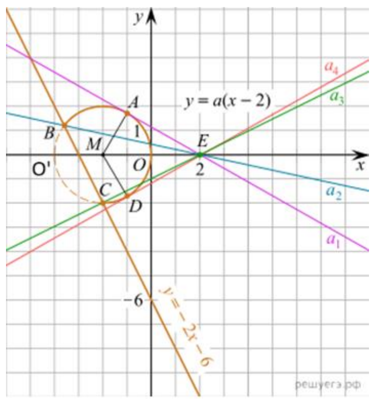
Βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{a}$, ώστε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων να έχει 2 διαφορετικές λύσεις.

$$\begin{cases} \boldsymbol{(x^2 + y^2 + 4x) \cdot \sqrt{2x + y + 6} = 0,} \\ \boldsymbol{y = a(x-2)} \end{cases}$$

Λύση.

Ας μετασχηματίσουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος:

$$\boldsymbol{(x^2 + y^2 + 4x) \cdot \sqrt{y + 2x + 6} = 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x = 0,} \\ \boldsymbol{y + 2x + 6 = 0,} \\ \boldsymbol{y + 2x + 6 \geqslant 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4,} \\ \boldsymbol{y = -2x - 6,} \\ \boldsymbol{y \geqslant -2x - 6.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{(x+2)^2 + y^2 = 4,} \\ \boldsymbol{y = -2x - 6,} \\ \boldsymbol{y \geqslant -2x - 6.} \end{cases}$$



Στο σύστημα συντεταγμένων xOy, το γράφημα του προκύπτοντος συστήματος θα είναι η ένωση μιας ευθείας γραμμής $\boldsymbol{y = -2x - 6}$ και ενός τόξου ενός κύκλου ακτίνας 2 με κέντρο ένα σημείο $\boldsymbol{M(-2;0)}$ που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή $\boldsymbol{y = -2x - 6}$ (επισημαίνεται με πορτοκαλί χρώμα). Το γράφημα της δεύτερης εξίσωσης του αρχικού συστήματος $\boldsymbol{y = a(x-2)}$ είναι μια δέσμη ευθειών (α) που διέρχονται από ένα σημείο $\boldsymbol{E(2;0)}$.

Ο κύκλος $\boldsymbol{(x+2)^2 + y^2 = 4}$ και η ευθεία (ε): $\boldsymbol{y = -2x - 6}$ τέμνονται στα σημεία $\boldsymbol{B(-3,6;1,2)}$ και $\boldsymbol{C(-2;-2)}$.

Έστω ότι η ευθεία με $\boldsymbol{a = a_1}$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α, η ευθεία με $\boldsymbol{a = a_4}$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο D, η ευθεία με $\boldsymbol{a = a_2}$ περνάει από το σημείο B και η ευθεία με $\boldsymbol{a = a_3}$ περνάει από το σημείο C.

Στη συνέχεια, το αρχικό σύστημα εξισώσεων

– έχει μία λύση για $\boldsymbol{a < -2}$, (οι ευθείες α και ε ως μη παράλληλες τέμνονται στο 4ο τεταρτημόριο, η ευθεία α και ο κύκλος όχι)

– δεν έχει λύσεις για $\boldsymbol{a = -2}$, (οι ευθείες α και ε είναι παράλληλες, η ευθεία α και ο κύκλος δεν τέμνονται)
– έχει μία λύση για $\boldsymbol{-2 < a < a_1}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται στο 2ο τεταρτημόριο, η ευθεία α και ο κύκλος όχι)
–έχει **δύο** λύσεις για $\boldsymbol{a = a_1}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος στο σημείο A)
–έχει τρεις λύσεις για $\boldsymbol{a_1 < a < a_2}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος σε δύο σημεία στο 2ο τεταρτημόριο)
–έχει **δύο** λύσεις για $\boldsymbol{a_2 \leqslant a \leqslant a_3}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος σε ένα σημείο)
–έχει τρεις λύσεις για $\boldsymbol{a_3 < a < a_4}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος σε δύο σημεία)
–έχει **δύο** λύσεις για $\boldsymbol{a = a_4}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος στο σημείο D)
– έχει μία λύση για $\boldsymbol{a > a_4}$, (οι ευθείες α και ε τέμνονται, η ευθεία α και ο κύκλος όχι)
Ας βρούμε τώρα τις τιμές $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ και $\boldsymbol{a_4}$.
Από τις συντεταγμένες του σημείου B έχω : $\boldsymbol{1,2 = a_2(-3,6-2) \Leftrightarrow a_2 = -\frac{3}{14}}$
Από τις συντεταγμένες του σημείου C έχω : $\boldsymbol{-2 = a_3(-2-2) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}}$
Τα τετράγωνα των εφαπτομένων τμημάτων είναι ίσα με το γινόμενο των τεμνόμενων τμημάτων, άρα $\boldsymbol{AE^2 = DE^2 = O'E \cdot OE \Leftrightarrow AE^2 = DE^2 = 2 \cdot 6 \Leftrightarrow AE = DE = 2\sqrt{3}}$
$\boldsymbol{a_1 = -\mathrm{tg}\angle AEM = -\frac{AM}{AE} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, a_4 = \mathrm{tg}\angle DEM = \frac{DM}{AE} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$
Έτσι, το αρχικό σύστημα έχει ακριβώς **δύο** λύσεις, όταν $\boldsymbol{a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3}{14} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}, \acute{\eta}\, a = \frac{\sqrt{3}}{3}}$
Άρα $\boxed{\boldsymbol{a \in \left[-\frac{3}{14}; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}}$

7.
Δίνεται ένα γνήσιο ανάγωγο κλάσμα $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$. Με μία κίνηση, μπορείτε να αυξήσετε τον αριθμητή με τον παρονομαστή και τον παρονομαστή κατά δύο αριθμητές, δηλαδή να πάρετε το γνήσιο ανάγωγο κλάσμα $\boldsymbol{\frac{a+b}{b+2a}}$
α) Είναι δυνατόν να πάρω το κλάσμα $\boldsymbol{\frac{29}{41}}$ από το κλάσμα $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$;
β) Είναι δυνατόν να πάρω το κλάσμα $\boldsymbol{\frac{6}{7}}$ από ένα συγκεκριμένο κλάσμα σε 2 κινήσεις;
γ) Έστω κλάσμα $\boldsymbol{\frac{c}{d}}$ μεγαλύτερο του $\boldsymbol{\frac{7}{10}}$. Βρείτε το ελάχιστο κλάσμα $\boldsymbol{\frac{c}{d}}$ που δεν μπορεί να ληφθεί από άλλο γνήσιο ανάγωγο κλάσμα σε 2 κινήσεις.
Λύση.
(α) Έχω $\boldsymbol{\frac{2}{3} \mapsto \frac{2+3}{3+2\cdot 2} = \frac{5}{7} \mapsto \frac{5+7}{5+2\cdot 5} = \frac{12}{17} \mapsto \frac{12+17}{17+2\cdot 12} = \frac{29}{41}}$. Άρα είναι δυνατόν.
β) Έχω ότι $\boldsymbol{\frac{a}{b} \mapsto \frac{a+b}{b+2a} \mapsto \frac{2b+3a}{3b+4a}}$
Αν $\boldsymbol{\frac{2b+3a}{3b+4a} = \frac{6}{7}}$, τότε $\boldsymbol{6(3b+4a) = 7(2b+3a) \Leftrightarrow 3a + 4b = 0.}$ Πού είναι αδύνατο για τους φυσικούς αριθμούς.
γ) Εάν $\boldsymbol{\frac{2b+3a}{3b+4a} = x}$ τότε έχω $\boldsymbol{3bx + 4ax = 2b + 3a \Leftrightarrow a(4x-3) = b(2-3x) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3x-2}{3-4x}}$
Δεδομένου ότι $\boldsymbol{x > 0,7}$, ο αριθμητής αυτού του κλάσματος είναι θετικός. Εάν ο παρονομαστής είναι επίσης θετικός, τότε $\boldsymbol{x \in (0,7; 0,75)}$.
Αν επιλέξουμε ένα κλάσμα $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ (και μόνο ένα κλάσμα, προσέξτε) που είναι ίσο με $\boldsymbol{\frac{3x-2}{3-4x}}$, παίρνουμε το απαιτούμενο x. Ωστόσο, εξακολουθεί να είναι απαραίτητο αυτό το κλάσμα να είναι γνήσιο, δηλαδή να ισχύει ότι $\boldsymbol{3x - 2 < 3 - 4x}$ ήτοι $\boldsymbol{x < \frac{5}{7} \approx 0,714.}$ Έτσι, μπορούν να ληφθούν **όλοι οι μικρότεροι του** $\boldsymbol{\frac{5}{7}}$ αριθμοί.
Για $\boxed{\boldsymbol{x = \frac{5}{7}}}$ έχω $\boldsymbol{7(2b+3a) = 5(3b+4a)}$ από όπου $\boldsymbol{a = b}$, που έρχεται σε αντίθεση με την προϋπόθεση.

[Πηγές]
Ρωσία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

Education in Russia - Wikipedia

https://4ege.ru/matematika/68361-demoversii-ege-2024-po-matematike.html

https://4ege.ru/trening-matematika/67494-variant-dosrochnogo-ege-2023-bazovogo-urovnja.html
https://4ege.ru/materials_podgotovka/67480-realnye-varianty-ege-2023.html

https://www.magtu.ru/abit/15492-programmy-vstupitelnykh-ispytanij-2023-bs.html?ckattempt=1
https://ege.sdamgia.ru/
https://ege.sdamgia.ru/methodist
https://www.at.alleng.org/edu/math3.htm
https://mathb-ege.sdamgia.ru/?redir=1

https://archeia.moec.gov.cy/mc/610/spoudes_rosia.pdf

Ρωσική ανώτατη εκπαίδευση – russ

Τα 23 καλύτερα πανεπιστήμια (ΑΕΙ) της Ρωσικής Ομοσπονδίας | Γραφείο Διασύνδεσης Δ.Π.Θ. (duth.gr)
https://career.duth.gr/portal/?q=node/10237