[Πολωνία]

Η Πολωνία, επίσημα Δημοκρατία της Πολωνίας (πολωνικά: Rzeczpospolita Polska, προφέρεται: Ζετσποσπολίτα Πόλσκα) είναι χώρα στην Κεντρικής Ευρώπης, που συνορεύει στα βόρεια με τη Ρωσία (με την περιφέρεια του Καλίνινγκραντ) και τη Λιθουανία, ανατολικά με τη Λευκορωσία και την Ουκρανία, στα νότια με τη Σλοβακία και την Τσεχία και στα δυτικά με τη Γερμανία. Τα περισσότερα από τα βόρεια σύνορα της Πολωνίας σηματοδοτούν τις ακτές της Βαλτικής Θάλασσας. Η ακτογραμμή της Πολωνίας στην Βαλτική Θάλασσα συνορεύει με τις ακτογραμμές της Δανίας και της Σουηδίας. Διαιρείται σε 16 βοϊβοδάτα, έχει έκταση 312.696 τ.χλμ. και έχει κατά κύριο λόγο εύκρατο εποχικό κλίμα.

Η Πολωνία έχει πληθυσμό σχεδόν 38,2 εκατομμυρίων κατοίκων και είναι η 5η πολυπληθέστερη χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης και η 8η πολυπληθέστερη χώρα της Ευρώπης. Είναι πολύ ομοιογενής χώρα, καθώς 36,5 εκατομμύρια άτομα δηλώνουν αποκλειστικά Πολωνοί, ενώ περίπου 900.000 δηλώνουν και κάποια άλλη εθνότητα πέρα από τη πολωνική.

Πρωτεύουσα της Πολωνίας είναι η Βαρσοβία, ενώ άλλες μεγάλες πόλεις είναι η Κρακοβία, το Βρότσλαβ, το Πόζναν, το Γκντανσκ και το Λοτζ. Επίσημη γλώσσα είναι η πολωνική και νόμισμα το ζλότι (σημαίνει χρυσός).

Η Πολωνία είναι μια ανεπτυγμένη αγορά και μια μεσαία δύναμη. Η Πολωνία έχει την έκτη μεγαλύτερη οικονομία στην Ευρωπαϊκή Ένωση σε ονομαστικό ΑΕΠ και την πέμπτη μεγαλύτερη κατά ΑΕΠ σε μονάδες αγοραστικής δύναμης. Η Πολωνία είναι μια χώρα με πολύ υψηλά επίπεδα διαβίωσης, ασφάλεια και οικονομική ελευθερία, καθώς και δωρεάν πανεπιστημιακή εκπαίδευση και καθολικό σύστημα υγειονομικής περίθαλψης.

Η Πολωνία έγινε μέλος της Ευρωπαϊκής Ένωσης την 1η Μαΐου του 2004 ενώ επιπλέον είναι μέλος του ΝΑΤΟ από το 1999, του ΟΗΕ, του ΟΟΣΑ (Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης) από το 1996, του ΠΟΕ (Παγκόσμιος Οργανισμός Εμπορίου) από το 1990 και της Ομάδας του Βίσεγκραντ από το 1991.

[Εκπαιδευτικό σύστημα]

Το σημερινό εκπαιδευτικό σύστημα της Πολωνίας βασίζεται σε μια διαρθρωτική μεταρρύθμιση που ξεκίνησε από τις αρχές του 2017. Ο κύριος στόχος της είναι να προσφέρει στους μαθητές ένα σταθερό υπόβαθρο γενικής εκπαίδευσης που απαιτείται για την περαιτέρω προσωπική ανάπτυξη και τις ανάγκες της σύγχρονης αγοράς εργασίας.

Η βασική δομή περιλαμβάνει:

- 8ετές Δημοτικό Σχολείο
- 4ετές Γενικό Γυμνάσιο (Λύκειο)
- 5ετές Τεχνικό Γυμνάσιο (Ανώτερη Επαγγελματική Σχολή)

Υποχρεωτική 9 ετής εκπαίδευση πλήρους φοίτησης που περιλαμβάνει:

- Μηδενική τάξη (μηδέν, zerówka). Μονοετής προπαρασκευαστική τάξη για το σχολείο. Συχνά βρίσκεται σε νηπιαγωγεία, αλλά μπορεί να είναι στο δημοτικό σχολείο, και να λειτουργεί χωριστά. Επιθυμητή ηλικία παραλαβής - 6 ετών. Σε ορισμένες περιπτώσεις επιτρέπεται η είσοδος παιδιών 7 ετών.
- Δημοτικό σχολείο. Οκτώ τάξεις. Η είσοδος είναι δυνατή σε 6-7 χρόνια, η αποφοίτηση, αντίστοιχα, στα 14-15 χρόνια. Σημειώστε ότι το «Δημοτικό Σχολείο» (Πολωνικά, szkoła podstawowa) στην Πολωνία ονομάζεται οκταετές σχολείο.

Υποχρεωτική εκπαίδευση μερικής φοίτησης :

Αφορά μαθητές ηλικίας 15-18 ετών και μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε στο Γυμνάσιο (Γενικό = liceum ogólnokształcące/ Τεχνικό= technikum) ή μέσω επαγγελματικής κατάρτισης που παρέχουν εργοδότες (Zasadnicza zzovła zawodowa). Στην πρώτη περίπτωση, θα λάβετε πλήρη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στη δεύτερη - ένα επάγγελμα. Η τρίτη περίπτωση είναι παρόμοια με την δεύτερη αλλά υποδηλώνει έλλειψη επαγγέλματος. Δηλαδή μετά την αποφοίτηση απαιτείται απολυτήριο λυκείου και για να αποκτήσεις επάγγελμα πρέπει να δώσεις επιπλέον εξετάσεις.

Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών συνεχίζει την εκπαίδευση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Οι απόφοιτοι Γενικών και Τεχνικών Γυμνασίων μπορούν να λάβουν μέρος στις εθνικές εξετάσεις για να αποκτήσουν το πιστοποιητικό Matura , το οποίο παρέχει πρόσβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Εξεταζόμενα μαθήματα:

Πολωνικά, Μαθηματικά, ξένη γλώσσα και κάποια μαθήματα επιλογής.

Το όλο σύστημα έχει σχεδιαστεί για να διασφαλίζει ότι οι νέοι κάτω των 22-23 ετών έχουν την ευκαιρία να λάβουν τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτά τα ηλικιακά κριτήρια δεν είναι υποχρεωτικά και ξεκινώντας από την τεχνική σχολή μπορούν να δράσουν και να σπουδάσουν αλλοδαποί διαφορετικών ηλικιών.

[Ποιο είναι το σύστημα αξιολόγησης στην Πολωνία;]

Στο πρώτο στάδιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (συνήθως τάξεις 1-3), οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν ένα περιγραφικό σύστημα αξιολόγησης της απόδοσης. Αυτή είναι μια αρκετά λεπτομερής εξήγηση των λαθών που έγιναν, των εργασιών που εκτελούνται εσφαλμένα ή, αντίθετα, είναι ενθαρρυντικές πληροφορίες σχετικά με καλά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια εισάγεται ένα σύστημα βαθμολόγησης έξι βαθμών (από 1 έως 6).

Η συμπεριφορά των μαθητών αξιολογείται χωριστά. Η συμπεριφορά μπορεί να είναι: αγενής, ακατάλληλη, σωστή, καλή, πολύ ευγενική και υποδειγματική. Αυτή η παράμετρος αντικατοπτρίζεται και στη γενική βαθμολογία επιτυχίας στο δημοτικό σχολείο.

[Ηλεκτρονικά ημερολόγια μαθητών στην Πολωνία]

Το ηλεκτρονικό ημερολόγιο έχει αντικαταστήσει το συνηθισμένο. Ωστόσο, σε αντίθεση με την παλιά μέθοδο, που ανατέθηκε στους μαθητές, ο δάσκαλος είναι υπεύθυνος για τη συμπλήρωση του ηλεκτρονικού ημερολογίου.

Οι σύνδεσμοι προς ένα συγκεκριμένο ημερολόγιο εκδίδονται στο σχολείο και μπορεί να είναι ξεχωριστές εγγραφές (εξουσιοδοτήσεις) για μαθητές και γονείς. Εκτός από την επιτυχία, αντικατοπτρίζει την εργασία για το σπίτι, τη δραστηριότητα στην τάξη, τη συμπεριφορά, τον κοινωνικό φόρτο εργασίας.

Υπάρχουν ακόμα ξεχωριστά διαθέσιμα εσωτερικά μέσα επικοινωνίας - συνομιλίες και e-mail τόσο μεταξύ μαθητών όσο και μεταξύ καθηγητών και γονέων μαθητών.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Στην Πολωνία υπάρχουν σχεδόν 400 Εκπαιδευτικά Ιδρύματα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και περισσότεροι από 1,1 εκατομμύρια φοιτητές. Τα περισσότερα προγράμματα σπουδών προσφέρονται στην Πολωνική και στην Αγγλική γλώσσα.

Τα Ιδρύματα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης της Πολωνίας χωρίζονται στα Δημόσια και στα Ιδιωτικά.

Παράλληλα, αυτές οι δυο κατηγορίες χωρίζονται σε Ακαδημαϊκά και σε Επαγγελματικά Ιδρύματα.

Όλα τα είδη Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων ελέγχονται από την Πολωνική Επιτροπή Διαπίστευσης η οποία είναι ανεξάρτητη αρχή που εξασφαλίζει και βελτιώνει την ποιότητα της Εκπαίδευσης.

Στην κατηγορία των Ακαδημαϊκών Ιδρυμάτων ανήκουν οι κλάδοι των Θετικών και Θεωρητικών Επιστημών. Τα συγκεκριμένα Ιδρύματα προσφέρουν 3 Κύκλους Σπουδών : Προπτυχιακό (Bachelor), Μεταπτυχιακό (Master) και Διδακτορικό (PhD).

Τα Επαγγελματικά Ιδρύματα προσφέρουν συνήθως μόνο Πρακτική Εκπαίδευση. Τα πιο πάνω προσφέρουν 1ο, 2ο και Μακράς Διάρκειας Κύκλο Σπουδών.

Οι φοιτητές στην Πολωνία έχουν την ευκαιρία να πραγματοποιήσουν μέρος των σπουδών τους σε άλλες χώρες της Ε.Ε. ή να κάνουν πρακτική άσκηση στο εξωτερικό. Επίσης, μπορούν να παρακολουθήσουν ένα από τα πολλά προγράμματα εκμάθησης της Πολωνικής γλώσσας (http://sjpdc.uni.lodz.pl/?language=en)

Το ακαδημαϊκό έτος ξεκινά συνήθως τον Οκτώβριο και λήγει τον Ιούνιο.

[Σχετικά με την εξέταση Matura]

Αφορά μαθητές που το σχολικό έτος 2023/2024 θα ολοκληρώσουν:

- 4ετές Γενικό Γυμνάσιο
- Μια τεχνική σχολή που εφαρμόζει το 4ετές πρόγραμμα σπουδών γυμνασίου
- 5ετές Τεχνικό Γυμνάσιο
- απόφοιτους 4ετούς Γενικού Λυκείου που αποφοίτησαν το σχολικό έτος 2022/2023
- άτομα που αποκτούν πιστοποιητικό ολοκλήρωσης 4ετούς γενικού λυκείου βάσει εξωσχολικών εξετάσεων·
- απόφοιτους μεταπρωτοβάθμιας δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με εξαίρεση εκείνους που έδωσαν εξετάσεις Matura για πρώτη φορά το 2019-2022 αλλά δεν έλαβαν πιστοποιητικό Matura ·
- πρόσωπα που είναι κάτοχοι πιστοποιητικού ή άλλου εγγράφου —που βεβαιώνει τη δευτεροβάθμια ή τομεακή δευτεροβάθμια εκπαίδευση— το οποίο έχει εκδοθεί στο εξωτερικό, αλλά δεν τους παρέχει δικαίωμα σπουδών στη Δημοκρατία της Πολωνίας, τα οποία συμμετέχουν για πρώτη φορά στις εξετάσεις Matura ή έχουν λάβει μέρος στις εξετάσεις Matura του τύπου του 2023 το 2023.

Το 2024, οι απόφοιτοι υποχρεούνται σε:

δύο προφορικές δοκιμασίες, δηλ.

- Εξέταση πολωνικής γλώσσας (χωρίς προσδιορισμό του επιπέδου)
- εξέταση σε σύγχρονη ξένη γλώσσα (χωρίς προσδιορισμό επιπέδου)

και τέσσερις γραπτές δοκιμασίες, δηλ.

- Στην Πολωνική γλώσσα (στο βασικό επίπεδο)

- Στα Μαθηματικά (στο βασικό επίπεδο)
- Σε μια σύγχρονη ξένη γλώσσα (σε βασικό επίπεδο)
- Σε ένα επιλεγμένο πρόσθετο μάθημα (σε προχωρημένο επίπεδο), όπου ένας απόφοιτος δίγλωσσου σχολείου ή τάξης υποχρεούται να δώσει εξετάσεις σε μια σύγχρονη ξένη γλώσσα σε δίγλωσσο επίπεδο.

Οι απόφοιτοι σχολείων ή τάξεων με γλώσσα διδασκαλίας εθνικής μειονότητας υποχρεούνται επίσης να υποβληθούν σε εξετάσεις στη γλώσσα της μειονότητας αυτής στο προφορικό μέρος (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο) και στο γραπτό μέρος (στο βασικό επίπεδο).

Το 2024, εκτός από μία υποχρεωτική εξέταση σε ένα επιπλέον μάθημα σε προχωρημένο επίπεδο, οι απόφοιτοι μπορούν να δώσουν εξετάσεις σε όχι περισσότερα από 5 επιπλέον μαθήματα και οι απόφοιτοι ενός δίγλωσσου σχολείου ή τάξης υποχρεούνται να δώσουν εξετάσεις σε μια σύγχρονη ξένη γλώσσα στο δίγλωσσο επίπεδο. Μπορείτε να επιλέξετε από τα στοιχεία που αναφέρονται παρακάτω.

Στο γραπτό μέρος:

- Βιολογία (προχωρημένο επίπεδο)
- Χημεία (προχωρημένο επίπεδο)
- Φιλοσοφία (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Φυσική (προχωρημένο επίπεδο)
- Γεωγραφία (προχωρημένο επίπεδο)
- Ιστορία (για προχωρημένους)
- Ιστορία της Μουσικής (προχωρημένο επίπεδο)
- Ιστορία της Τέχνης (προχωρημένο επίπεδο)
- Πληροφορική (προχωρημένο επίπεδο)
- Αγγλικά (προχωρημένο επίπεδο Ή δίγλωσσο)
- Γαλλικά (προχωρημένο επίπεδο Ή δίγλωσσο επίπεδο)
- Ισπανικά (προχωρημένο επίπεδο Ή δίγλωσσο)
- Γερμανικά (σε προχωρημένο επίπεδο Ή σε δίγλωσσο επίπεδο)
- Ρωσική γλώσσα (στο προχωρημένο επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Ιταλικά (προχωρημένο επίπεδο Ή δίγλωσσο)
- Λατινικός και Αρχαίος Πολιτισμός (προχωρημένο επίπεδο)
- Λευκορωσικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Τσεχικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Εβραϊκά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Λιθουανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Γερμανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Ουκρανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Η γλώσσα Lemko ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Kashubian ως περιφερειακή γλώσσα (σε προχωρημένο επίπεδο)
- Πολωνικά (προχωρημένο επίπεδο)
- Μαθηματικά (προχωρημένο επίπεδο)
- Κοινωνικές Σπουδές (προχωρημένο επίπεδο)

Στο προφορικό μέρος:

- Αγγλικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Γαλλικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Ισπανικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Γερμανικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)

- Ρωσικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Ιταλικά (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο Ή στο δίγλωσσο επίπεδο)
- Λευκορωσικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)
- Τσεχικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς προσδιορισμό επιπέδου)
- Εβραϊκά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)
- Λιθουανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)
- Γερμανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς προσδιορισμό επιπέδου)
- Ουκρανικά ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)
- Η γλώσσα Lemko ως γλώσσα εθνικής μειονότητας (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)
- Kashubian ως περιφερειακή γλώσσα (χωρίς να προσδιορίζεται το επίπεδο)

Ανάλογα με τις επιλογές που γίνονται στο υποχρεωτικό μέρος της εξέτασης, η επιλογή πρόσθετων μαθημάτων (γραπτών ή/και προφορικών) μπορεί να είναι περιορισμένη. Όλοι οι κανόνες περιγράφονται λεπτομερώς εδώ (ενότητες Δ και Ε, σελ. 7-11).

[Πανεπιστήμια στην Πολωνία]

Με ιστορία που χρονολογείται για πάνω από χίλια χρόνια, η πολιτιστική κληρονομιά της Πολωνίας είναι απίστευτα πλούσια. Αυτό περιλαμβάνει τις μακροχρόνιες παραδόσεις της στον τομέα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, με το πρώτο πανεπιστήμιο στην Πολωνία που ιδρύθηκε τον 14ο αιώνα.

Υπάρχουν περισσότερα από 500 πανεπιστήμια στην Πολωνία, τα περισσότερα από τα οποία ανήκουν στον ιδιωτικό τομέα. Η χώρα υπερηφανεύεται ότι έχει παράγει πολλούς αξιόλογους πανεπιστημιακούς αποφοίτους, συμπεριλαμβανομένης της πρώτης γυναίκας που κέρδισε βραβείο Νόμπελ, Marie Curie, και του διάσημου αστρονόμου Nicolaus Copernicus.

14 πανεπιστήμια στην Πολωνία περιλαμβάνονται στην QS World University Rankings® 2019, ενώ 23 κατατάσσονται στα κορυφαία 300 στην QS EECA University Rankings 2019 - μια ειδική κατάταξη των κορυφαίων πανεπιστημίων στην Αναδυόμενη Ευρώπη και την Κεντρική Ασία. Εδώ είναι μερικά από τα πανεπιστήμια με την υψηλότερη κατάταξη στην Πολωνία:

Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας

Βρίσκεται στην πολωνική πρωτεύουσα, το κρατικά χρηματοδοτούμενο Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας κατατάσσεται σήμερα έκτο στην κατάταξη EECA. Ιδρύθηκε το 1816, είναι το μεγαλύτερο πανεπιστήμιο της Πολωνίας, με 54.800 φοιτητές εγγεγραμμένους στα 21 τμήματά του. Η μακρά ιστορία του Πανεπιστημίου της Βαρσοβίας είναι επίσης γεμάτη με ενδιαφέροντα γεγονότα και θρύλους. Κατά τη διάρκεια του Β 'Παγκοσμίου Πολέμου, για παράδειγμα, η πανεπιστημιούπολη μετατράπηκε σε στρατιωτικό στρατώνα από Γερμανούς στρατιώτες, έτσι οι ακαδημαϊκοί ίδρυσαν το λεγόμενο «Μυστικό Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας» και συνέχισαν να εκπαιδεύουν φοιτητές σε διάφορες κρυφές τοποθεσίες.

Πανεπιστήμιο Jagiellonian

Το παλαιότερο πανεπιστήμιο της χώρας και ένα από τα παλαιότερα στην Ευρώπη, το Jagiellonian University είναι ένα άλλο από τα πιο διάσημα πανεπιστήμια στην Πολωνία, κατατάσσεται από κοινού έβδομο στην κατάταξη EECA. Ιδρύθηκε το 1364 και έχει μακρά παράδοση στην εκπαίδευση των μελλοντικών ηγετών της χώρας. Μεταξύ των πολυάριθμων αξιοσημείωτων αποφοίτων του πανεπιστημίου είναι ο John III Sobieski (βασιλιάς της Πολωνίας μέχρι το 1696), ο Nicolaus Copernicus (φημισμένος για τη διαμόρφωση ενός μοντέλου του σύμπαντος με τον ήλιο στο κέντρο), ο Πάπας Ιωάννης Παύλος II και δύο νικητές του βραβείου Νόμπελ, Ivo Andrić και Wisława Szymborska. Σήμερα, το Πανεπιστήμιο Jagiellonian διδάσκει πάνω από 43.400 φοιτητές στην πανεπιστημιούπολη του στην Κρακοβία, τη δεύτερη μεγαλύτερη πόλη της Πολωνίας.

Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας

Το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας εμφανίζεται επίσης στην κατάταξη του Πανεπιστημίου QS EECA, στην οποία κατατάσσεται στην 15η θέση μεταξύ πανεπιστημίων στην Αναδυόμενη Ευρώπη και την Κεντρική Ασία. Διεκδικεί μια θέση μεταξύ των κορυφαίων τεχνολογικών ιδρυμάτων στην Ευρώπη και είναι ένας από τους μεγαλύτερους παρόχους τεχνικής εκπαίδευσης της περιοχής. Βρίσκεται στην πολωνική πρωτεύουσα, το πανεπιστήμιο έχει περίπου 30.982 φοιτητές και 19 σχολές, οι οποίες καλύπτουν όλους τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Ιδρύθηκε το 1899, το πανεπιστήμιο ήταν ένα από τα πρώτα πανεπιστήμια στην Πολωνία για να διδάξει μηχανική. Τα τελευταία χρόνια, οι απόφοιτοί του έχουν γίνει γνωστοί για το ότι αποτελούν ένα εντυπωσιακά υψηλό ποσοστό πολωνών διευθυντών και στελεχών.

Πανεπιστήμιο Επιστήμης και Τεχνολογίας του Βρότσλαβ (WRUST)

Το Πανεπιστήμιο Επιστήμης και Τεχνολογίας του Βρότσλαβ (WRUST) κατατάσσεται επίσης στα κορυφαία 50 ιδρύματα στην Πολωνία στην κατάταξη EECA, τοποθετώντας στη θέση 44. Με αποστολή την καλλιέργεια και ανάπτυξη φιλόδοξων ακαδημαϊκών και επαγγελματικών φιλοδοξιών των φοιτητών στις επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις, έχει διαδραματίσει κεντρικό ρόλο στην τεχνική εκπαίδευση από την ίδρυσή της το 1945. Σήμερα, φιλοξενεί πάνω από 28.300 φοιτητές στις 16 σχολές του στο Βρότσλαβ, με τις κύριες εγκαταστάσεις του να συγκεντρώνονται κοντά στην Plac Grunwaldzki, παράλληλα με τον ποταμό Oder.

Πανεπιστήμιο του Βρότσλαβ

Ένα άλλο ιστορικό πανεπιστήμιο - που ιδρύθηκε το 1702 από τον Leopold I, αυτοκράτορα της Αγίας Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας της δυναστείας των Αψβούργων - το Πανεπιστήμιο του Βρότσλαβ κατατάσσεται 49ο στην κατάταξη της EECA. Είναι το μεγαλύτερο πανεπιστήμιο στην περιοχή της Κάτω Σιλεσίας, διδάσκοντας σήμερα πάνω από 26.000 φοιτητές και περίπου 1.300 διδακτορικούς φοιτητές σε 10 σχολές. Ο κύριος στόχος του πανεπιστημίου είναι η επιστημονική έρευνα και οι απόφοιτοί του περιλαμβάνουν εννέα νικητές του βραβείου Νόμπελ.

[Άλλες σύντομες πληροφορίες]

- Η Πολωνία έχει ένα τηλεοπτικό κανάλι αφιερωμένο στον Πάπα.
- Περισσότεροι νικητές του διαγωνισμού "World's Strongest Man" από οποιαδήποτε άλλη τοποθεσία
- 17 νικητές του βραβείου Νόμπελ
- 9.300 λίμνες, 23 εθνικά πάρκα και μία έρημος
- Το 90% των Πολωνών έχουν ολοκληρώσει τουλάχιστον τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, το υψηλότερο ποσοστό στην ΕΕ, μαζί με τους Τσέχους, τους Σλοβάκους και τους Σλοβένους.
- Ο γεννημένος στην Πολωνία αστρονόμος Νικόλαος Κοπέρνικος ήταν ο πρώτος άνθρωπος που πρότεινε ότι η Γη δεν ήταν στην πραγματικότητα το κέντρο του σύμπαντος.
- Το 70% των ναζιστικών στρατοπέδων εξόντωσης κατά τη διάρκεια του Β 'Παγκοσμίου Πολέμου βρίσκονταν στην Πολωνία, συμπεριλαμβανομένων των τριών πιο διαβόητων, του Άουσβιτς, της Τρεμπλίνκα και του Μπέλζεκ.

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

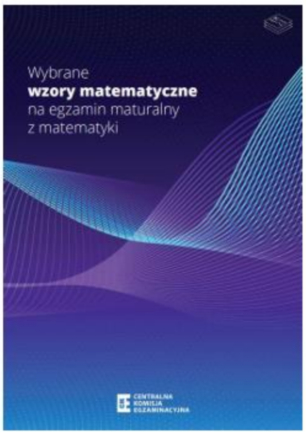
Εξετάσεις Matura Φόρμουλα 2023 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Βασικό επίπεδο

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 8 Μαΐου 2023 ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 9:00 π.μ. ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 180 λεπτά

ΑΡΙΘΜΟΣ ΒΑΘΜΩΝ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΛΗΦΘΟΥΝ: 46

Οδηγίες για τον εξεταζόμενο

1. Βεβαιωθείτε ότι το γραπτό περιέχει 31 ασκήσεις (1-31). Αναφέρετε τυχόν αποτυχία στον πρόεδρο της ομάδας παρακολούθησης εξετάσεων.
2. Στην πρώτη σελίδα του φύλλου εργασίας και στο φύλλο απαντήσεων, εισαγάγετε τον αριθμό PESEL και κολλήστε ένα αυτοκόλλητο με τον κωδικό.
3. Το σύμβολο στην κεφαλίδα εργασίας σημαίνει ότι πρέπει να μεταφέρετε τη λύση στο φύλλο απαντήσεων.
4. Σημειώστε τις απαντήσεις στις κλειστές εργασίες στο φύλλο απαντήσεων στο τμήμα της κάρτας που προορίζεται για τον εξεταζόμενο. Ζωγραφίστε πάνω από τα χωρία που προορίζονται για το σκοπό αυτό. Κυκλώστε τη λάθος επιλογή και επιλέξτε τη σωστή.
5. Θυμηθείτε ότι η παράλειψη επιχειρημάτων ή σημαντικών υπολογισμών στη λύση ενός ανοιχτού προβλήματος μπορεί να οδηγήσει στο γεγονός ότι δεν θα λάβετε τον πλήρη αριθμό πόντων για αυτήν τη λύση.
6. Γράψτε τις λύσεις στα προβλήματα και τις απαντήσεις στο χώρο που παρέχεται για αυτό.
7. Γράψτε ευανάγνωστα και χρησιμοποιήστε μόνο στυλό με μαύρο μελάνι.
8. Μην χρησιμοποιείτε διορθωτή και διαγράψτε σαφώς τις λανθασμένες σημειώσεις.
9. Μην συμπληρώνετε τους πίνακες βαθμολόγησης που προορίζονται για τον εξεταστή. Οι πίνακες τοποθετούνται στο περιθώριο δίπλα στις αντίστοιχες εργασίες.
10. Επισημαίνεται ότι οι σημειώσεις στο πρόχειρο δεν θα αξιολογηθούν.
11. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επιλεγμένους μαθηματικούς τύπους, διαβήτη και χάρακα και απλή αριθμομηχανή. Βεβαιωθείτε ότι έχετε λάβει ένα φυλλάδιο (34 σελίδων!) με εξώφυλλο όπως αυτό που φαίνεται παρακάτω.



https://www.oke.waw.pl/files/oke_waw_3498wybrane_wzory_matematyczne_EM2023.pdf.pdf

Εργασία 1 (0-1)

Η ένωση των διαστημάτων σημειώνεται στη γραμμή αριθμών.

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Το σύνολο που σημειώνεται στον άξονα είναι το σύνολο όλων των λύσεων για την ανισότητα

A. $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3,5}| \geq \mathbf{1,5}$ B. $|\boldsymbol{x}-\mathbf{1,5}| \geq \mathbf{3,5}$ C. $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3,5}| \leq \mathbf{1,5}$ D. $|\boldsymbol{x}-\mathbf{1,5}| \leq \mathbf{3,5}$

Λύση

Σωστή απάντηση η B, αφού $|\boldsymbol{x}-\mathbf{1,5}| \geq \mathbf{3,5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}-\mathbf{1,5} \leq -\mathbf{3,5} \vee \boldsymbol{x}-\mathbf{1,5} \geq \mathbf{3,5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1,5}-\mathbf{3,5} \vee \boldsymbol{x} \geq \mathbf{1,5}+\mathbf{3,5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \leq -\mathbf{2} \vee \boldsymbol{x} \geq \mathbf{5}$

Εργασία 2 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Ο αριθμός $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$ είναι ίσος με

A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

Λύση

Έχω $\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-\frac{27}{16} \cdot 2} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$. Άρα A.

Σημείωση: Στο ελληνικό σχολείο (και σε άλλων χωρών) δεν επιτρέπεται το υπόρριζο να είναι αρνητικό.

Εργασία 3 (0–2)

Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, ο αριθμός $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2-\mathbf{1}$ διαιρείται με το $\mathbf{8}$.

Λύση

Έχω $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2-\mathbf{1} = (\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2-\mathbf{1}^2 = (\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}+\mathbf{1})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}-\mathbf{1}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{2})(\mathbf{2}\boldsymbol{n}) = \mathbf{4}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\boldsymbol{n})$. Αφού κάποιος από τους $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ και $(\boldsymbol{n})$ είναι άρτιος, έχω $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2-\mathbf{1} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{k} = \mathbf{8}\boldsymbol{k}$, για κάποιον $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$. Άρα ο αριθμός $(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^2-\mathbf{1}$ διαιρείται με το $\mathbf{8}$.

Εργασία 4 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Ο αριθμός $\mathbf{log_9 27} + \mathbf{log_9 3}$ είναι ίσος με

A. $\mathbf{81}$ B. $\mathbf{9}$ C. $\mathbf{4}$ D. $\mathbf{2}$

Λύση

Έχω $\mathbf{log_9 27} + \mathbf{log_9 3} = \mathbf{log_9 27} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{log_9 81} = \mathbf{log_9 9^2} = \mathbf{2}$. Άρα D.

Εργασία 5 (0–1)

Συμπληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{a}$, η έκφραση $(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{3})^2-(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3})^2$ είναι ίση με

A. $-\mathbf{24}\boldsymbol{a}$ B. $\mathbf{0}$ C. $\mathbf{18}$ D. $\mathbf{16}\boldsymbol{a}^2-\mathbf{24}\boldsymbol{a}$

Έχω $(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{3})^2-(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3})^2 = \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}^2-\mathbf{12}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{9}-(\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}^2+\mathbf{12}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{9}) = \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}^2-\mathbf{12}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{9}-\mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}^2-\mathbf{12}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{9} = -\mathbf{24}\boldsymbol{\alpha}$. Άρα A

Εργασία 6 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Το σύνολο όλων των λύσεων για την ανισότητα $-2(x+3) \leq \frac{2-x}{3}$ είναι το διάστημα

A. $(-\infty, -4]$ B. $(-\infty, 4]$ C. $[-4, +\infty)$ D. $[4, \infty)$

Λύση

$-2(x+3) \leq \frac{2-x}{3} \Leftrightarrow -6(x+3) \leq 2-x \Leftrightarrow -6x-18 \leq 2-x \Leftrightarrow -20 \leq 5x \Leftrightarrow -4 \leq x \Leftrightarrow x \in [-4, +\infty)$. Άρα C.

Εργασία 7 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Μια λύση στην εξίσωση $\sqrt{3}(x^2-2)(x+3)=0$ είναι ο αριθμός

A. 3 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

Λύση

Έχω $\sqrt{3}(x^2-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x+3)=0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \vee x+3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \vee x=-3$

Άρα D.

Εργασία 8 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Η εξίσωση $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2}=0$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

A. δεν έχει λύση. B. έχει ακριβώς μία λύση: -1. C. έχει ακριβώς μία λύση: 1. D. έχει ακριβώς δύο λύσεις: -1 και 1.

Λύση

Περιορισμοί $(x-1)(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Έχω τότε ότι $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-1)(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, απορρίπτονται. Άρα A.

Εργασία 9 (0–3)

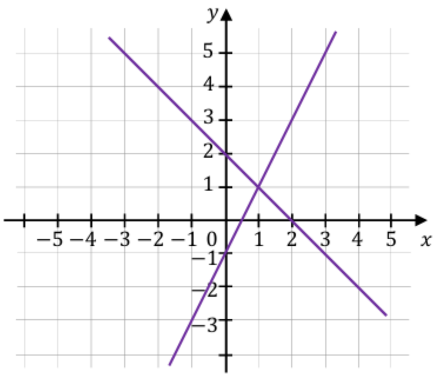
Λύστε την εξίσωση $3x^3-2x^2-12x+8=0$ Καταγράψτε τον υπολογισμό

Λύση

$$3x^3-2x^2-12x+8=0 \Leftrightarrow x^2(3x-2)-4(3x-2)=0 \Leftrightarrow (3x-2)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{2}{3} \vee x=\pm 2}$$

Εργασία 10 (0–1)

Το σχήμα δείχνει τη γεωμετρική ερμηνεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) ενός από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων A–D. Συμπληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.



Το σύστημα εξισώσεων των οποίων η γεωμετρική ερμηνεία φαίνεται στο σχήμα είναι

A. $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=-2x+1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-2x-1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y=x-2 \\ y=2x+1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=2x-1 \end{cases}$

Λύση

Οι εξισώσεις των ευθειών είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και τέμνουν ως γνωστόν τον άξονα των y στο σημείο $(0,\beta)$. Από το σχήμα προκύπτει ότι τα σημεία που τέμνουν οι ευθείες αυτές τον άξονα των y στα σημεία (0,2) και (0,-1). Άρα έχω ότι η μια ευθεία είναι της μορφής $y=\alpha x+2$ και η άλλη της μορφής $y=\alpha x-1$. Η πρώτη ευθεία περνά από το σημείο (2,0), άρα $0=\alpha\cdot 2+2 \Leftrightarrow \alpha=-1$. Άρα η εξίσωσή της πρώτης ευθείας είναι $\boldsymbol{y=-x+2}$. Η δεύτερη ευθεία περνά από το σημείο $\left(\frac{1}{2},\boldsymbol{0}\right)$, άρα $\boldsymbol{0=\alpha\cdot\frac{1}{2}-1\Leftrightarrow\alpha=2}$. Άρα η εξίσωσή της είναι η $\boldsymbol{y=2x-1}$. Άρα D.

Εργασία 11 (0–2)

Δίνεται ένα ορθογώνιο με πλευρές μήκους $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$, όπου $\boldsymbol{a>b}$. Η περίμετρος αυτού του ορθογωνίου είναι ίση με $\boldsymbol{30}$. Η μία πλευρά του ορθογωνίου είναι κατά $\boldsymbol{5}$ μονάδες μικρότερη από την άλλη. Συμπληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τις σωστές δύο απαντήσεις από τα γράμματα A έως F και πληκτρολογήστε αυτά τα γράμματα στα διακεκομμένα διαστήματα. Οι σχέσεις μεταξύ των μηκών των πλευρών αυτού του ορθογωνίου γράφονται σε συστήματα εξισώσεων που σημειώνονται με γράμματα: ……… και……….

A. $\begin{cases}\boldsymbol{2ab=30}\\\boldsymbol{a-b=5}\end{cases}$ B. $\begin{cases}\boldsymbol{2a+b=30}\\\boldsymbol{a=5b}\end{cases}$ C. $\begin{cases}\boldsymbol{2(a+b)=30}\\\boldsymbol{b=a-5}\end{cases}$

D. $\begin{cases}\boldsymbol{2a+2b=30}\\\boldsymbol{b=5a}\end{cases}$ E. $\begin{cases}\boldsymbol{2a+2b=30}\\\boldsymbol{a-b=5}\end{cases}$ F. $\begin{cases}\boldsymbol{a+b=30}\\\boldsymbol{a=b+5}\end{cases}$

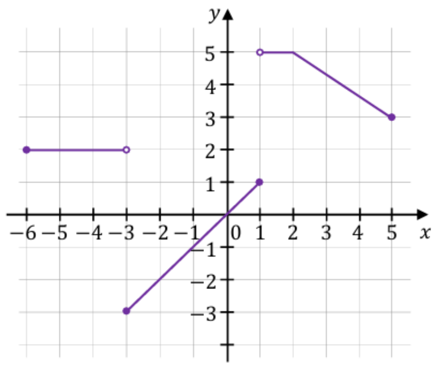
Λύση

Η περίμετρος αυτού του ορθογωνίου είναι ίση με $\boldsymbol{30}$. Άρα $\boldsymbol{2a+2b=30\Leftrightarrow 2(a+b)=30\Leftrightarrow 2a+2b=30}$

Η μία πλευρά του ορθογωνίου είναι $\boldsymbol{5}$ φορές μικρότερη από την άλλη και $\boldsymbol{a>b}$. Άρα $\boldsymbol{a=b+5\Leftrightarrow b=a-5}$. Άρα CE

Εργασία 12.

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, σχεδιάζεται μια γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{y=f(x)}$ (βλέπε σχήμα).



Εργασία 12.1. (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι το σύνολο

A. $[\boldsymbol{-6,5}]$ B. $(\boldsymbol{-6,5})$ C. $(\boldsymbol{-3,5}]$ D. $[\boldsymbol{-3,5}]$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης, άρα $[\boldsymbol{-6,5}]$. Άρα A.

Εργασία 12.2. (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ στο διάστημα $[\boldsymbol{-4,1}]$ είναι ίση με

A. 0 B. 1 C. 2 D. 5

Λύση

Στο διάστημα $[\boldsymbol{-4,-3})$ έχω ότι $\boldsymbol{f(x)=2}$, ενώ στο $[\boldsymbol{-3,1}]$ έχω $\boldsymbol{f(x)\ \leq 1<2}$. Άρα C

Εργασία 12.3. (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

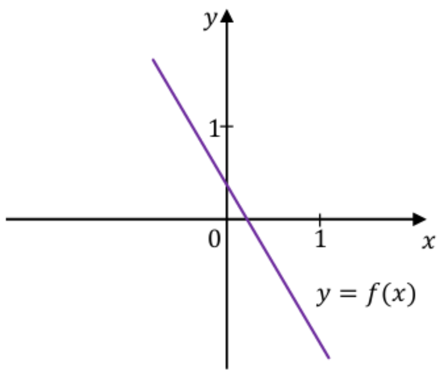
Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι φθίνουσα στο σύνολο

A. $[\boldsymbol{-6,-3})$ B. $[\boldsymbol{-3,1}]$ C. $(\boldsymbol{1,2}]$ D. $[\boldsymbol{2,5}]$

Προφανώς D.

Εργασία 13. (0–1)

Η γραμμική συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ δίνεται από το $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, όπου $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα τμήμα του γραφήματος της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.



Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Ο αριθμός $\boldsymbol{a}$ και ο αριθμός $\boldsymbol{b}$ στον τύπο της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ πληρούν τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

A. $\boldsymbol{a > 0}$ και $\boldsymbol{b > 0}$. B. $\boldsymbol{a > 0}$ και $\boldsymbol{b < 0}$. C. $\boldsymbol{a < 0}$ και $\boldsymbol{b > 0}$. D. $\boldsymbol{a < 0}$ και $\boldsymbol{b < 0}$.

Λύση

Η ευθεία είναι «κατηφορική», άρα η $\boldsymbol{f}$ είναι φθίνουσα, άρα $\boldsymbol{a < 0}$. Ακόμα η ευθεία τέμνει τον ημιάξονα των θετικών y στο σημείο $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$ στον άρα $\boldsymbol{b > 0}$. Άρα C.

Εργασία 14 (0–1)

Μία από τις ρίζες της τετραγωνικής συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι ο αριθμός $(\boldsymbol{-5})$. Η πρώτη συντεταγμένη της κορυφής της παραβολής, η οποία είναι το γράφημα της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$, είναι ίση με $\boldsymbol{3}$. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Η δεύτερη ρίζα της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι ο αριθμός

A. $\boldsymbol{11}$ B. $\boldsymbol{1}$ C. $(\boldsymbol{-1})$ D. $(\boldsymbol{-13})$

Λύση

Από τύπους του Vieta έχω $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$. Η τετμημένη της κορυφής της παραβολής είναι $\boldsymbol{-\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = 6}$. Άρα $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -5 + x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = 11}$. Άρα A.

Εργασία 15. (0–1)

Η ακολουθία $(\boldsymbol{a_n})$ δίνεται από $(\boldsymbol{a_n}) = \boldsymbol{2n \cdot (n + 1)}$ για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 1}$. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Ο όρος $(\boldsymbol{a_4})$ είναι ίσος με

A. $\boldsymbol{64}$ B. $\boldsymbol{40}$ C. $\boldsymbol{48}$ D. $\boldsymbol{80}$

Λύση

Έχω $(\boldsymbol{a_n}) = \boldsymbol{2 \cdot 4 \cdot (4 + 1) = 8 \cdot 5 = 40}$. Άρα B.

Εργασία 16 (0–1)

Η ακολουθία τριών όρων $(\boldsymbol{27, 9, a - 1})$ είναι γεωμετρική. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Ο αριθμός $\boldsymbol{a}$ είναι ίσος με

A. $\boldsymbol{3}$ B. $\boldsymbol{0}$ C. $\boldsymbol{4}$ D. $\boldsymbol{2}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{9^2 = 27 \cdot (a - 1) \Leftrightarrow 81 = 27 \cdot (a - 1) \Leftrightarrow 3 = a - 1 \Leftrightarrow a = 4}$. Άρα C.

Εργασία 17 (0–2)

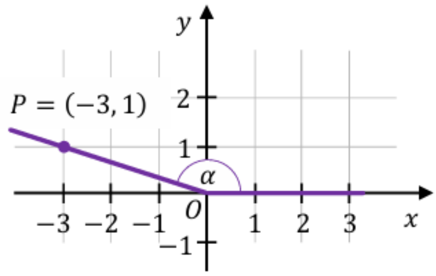
Ο κ. Stanisław αποπλήρωσε ένα δάνειο ύψους $\boldsymbol{8910\ PLN}$ σε δεκαοκτώ δόσεις. Κάθε επόμενη δόση ήταν χαμηλότερη από την προηγούμενη κατά $\boldsymbol{30\ PLN}$. Υπολογίστε το ποσό της πρώτης δόσης. Αποθηκεύστε τον υπολογισμό.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{a_n - a_{n-1} = \omega = -30, n = 18}$. Άρα πλήρωσε συνολικά $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\omega) \Leftrightarrow 8910 = 9(2a_1 - 17 \cdot 30) \Leftrightarrow 990 = 2a_1 - 510 \Leftrightarrow 1500 = 2a_1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 750\ PLN}}$

Εργασία 18 (0–1)

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, σημειώνεται μια γωνία $\boldsymbol{\alpha}$ με κορυφή στο $\boldsymbol{O = (0, 0)}$. Ένας από τους βραχίονες αυτής της γωνίας συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα $\boldsymbol{Ox}$ και ο άλλος διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{P = (-3, 1)}$(βλέπε σχήμα).



Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Η εφαπτομένη της γωνίας α είναι ίση με

A. $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}}$ **B.** $\boldsymbol{\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)}$ C.$\boldsymbol{\left(-\frac{3}{1}\right)}$ D. $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_p} = \frac{1}{-3}}$. Άρα D.

Εργασία 19 (0–1)

Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Για κάθε οξεία γωνία $\boldsymbol{\alpha}$, η έκφραση $\boldsymbol{sin^4\alpha + sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha}$ είναι ίση με

A. $\boldsymbol{sin^2\alpha}$ B. $\boldsymbol{sin^6\alpha \cdot cos^2\alpha}$ C. $\boldsymbol{sin^4\alpha + 1}$ D. $\boldsymbol{sin^2\alpha \cdot (sin\alpha + cos\alpha) \cdot (sin\alpha - cos\alpha)}$

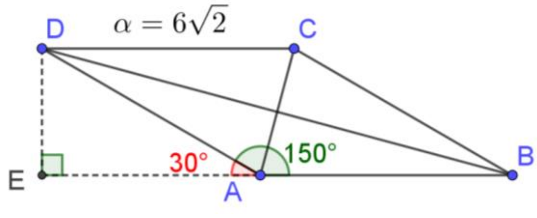
Λύση

Έχω $\boldsymbol{sin^4\alpha + sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha = sin^2\alpha \cdot (sin^2\alpha + cos^2\alpha) = sin^2\alpha}$. Άρα A

Εργασία 20 (0–1) Σε ένα ρόμβο με μήκος πλευράς $\boldsymbol{6\sqrt{2}}$, η αμβλεία γωνία έχει μέτρο $\boldsymbol{150°}$. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Το γινόμενο των διαγώνιων αυτού του ρόμβου είναι ίσο με

A. $\boldsymbol{24}$ B. $\boldsymbol{72}$ C. $\boldsymbol{36}$ D. $\boldsymbol{36\sqrt{2}}$



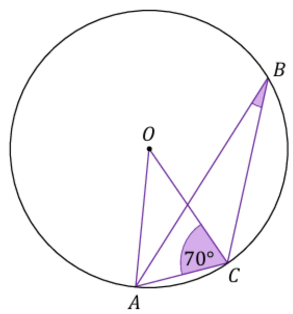
Λύση

Έχω $\boldsymbol{(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{2}}$.

Άρα $\boldsymbol{AC \cdot BD = 2(ABCD) = 4(ABD) = 4\frac{AB \cdot ED}{2} = 4\frac{AB \cdot AD/2}{2} = AB \cdot AD = 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 72}$. Άρα B

Εργασία 21 (0-1)

Τα σημεία $\boldsymbol{A, B, C}$ βρίσκονται σε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $\boldsymbol{O}$. Η γωνία $\boldsymbol{ACO}$ έχει μέτρο $\boldsymbol{70°}$ (βλ. εικόνα). Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται. Το μέτρο της οξείας γωνίας $\boldsymbol{ABC}$ είναι ίσο με



A. $\boldsymbol{10°}$ B. $\boldsymbol{20°}$ C. $\boldsymbol{35°}$ D. $\boldsymbol{40°}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{180° - 2O\hat{C}A}{2} = \frac{180° - 140°}{2} = 20°}$. Άρα B.

Εργασία 22 (0–2)

Τα ορθογώνια τρίγωνα T_1 και T_2 είναι όμοια. Οι κάθετες πλευρές του τριγώνου T_1 έχουν μήκη $\mathbf{5}$ και $\mathbf{12}$. Η υποτείνουσα του τριγώνου T_2 έχει μήκος $\mathbf{26}$. Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου T_2. Αποθηκεύστε τον υπολογισμό.

Λύση

Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο T_1 προκύπτει ότι η υποτείνουσα είναι $\sqrt{5^2+12^2}$ =13. Άρα ο λόγος ομοιότητας των δυο τριγώνων είναι $\lambda=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{E_1}{E_2}=\lambda^2\Rightarrow\frac{5\cdot 12/2}{E_2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{30}{E_2}=\frac{1}{4}\Rightarrow E_2=\boxed{120}$

Εργασία 23 (0–1)

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y) έχουμε τις ευθείες k και l με τις εξισώσεις k: $y=\frac{2}{3}x$, l: $y=-\frac{3}{2}x+13$ Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε είτε Α είτε Β και 1η, 2η ή 3η απάντηση.

Οι γραμμές k και l

Α.	είναι κάθετες	και τέμνονται στο σημείο P στις συντεταγμένες	1. $(-6,-4)$
Β.	δεν είναι κάθετες		2. $(6,4)$
			3. $(-6,4)$

Λύση

Έχω $\lambda_k\cdot\lambda_l=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$, άρα οι ευθείες k και l είναι κάθετες. Για το σημείο τομής τους λύνω το σύστημα $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ y=-\frac{3}{2}x+13 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ \frac{2}{3}x=-\frac{3}{2}x+13 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ 4x=-9x+13\cdot 6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ 13x=13\cdot 6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{2}{3}x \\ x=6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}$.

Άρα το σημείο τομής τους είναι το $(6,4)$. Άρα Α2.

Εργασία 24 (0–1)

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y), η γραμμή k δίνεται με την εξίσωση $y=-\frac{1}{3}x+2$ Συμπληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

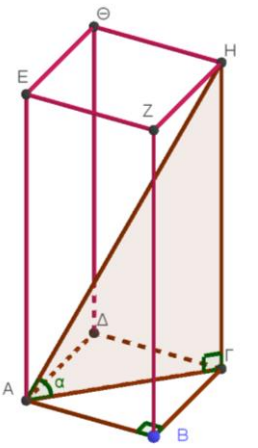
Μια γραμμή με την εξίσωση $y=ax+b$ είναι παράλληλη με τη γραμμή k και διέρχεται από το σημείο $P=(3,5)$ όταν

A. $a=3$ και $b=4$. B. $a=-\frac{1}{3}$ και $b=4$. C. $\alpha=3$ και $b=-4$. D. $a=-\frac{1}{3}$ και $b=6$.

Λύση

Η δεύτερη γραμμή πρέπει να έχει την ίδια κλίση άρα $a=-\frac{1}{3}$. Άρα η γραμμή αυτή έχει εξίσωση της μορφής $y=-\frac{1}{3}x+b\xRightarrow{P=(3,5)}5=-\frac{1}{3}\cdot 3+b\Rightarrow b=6$. Άρα D

Εργασία 25 (0–1)



Δίνεται ένα ορθό τετραγωνικό πρίσμα στο οποίο η πλευρά της βάσης έχει μήκος $\mathbf{15}$. Η διαγώνιος του πρίσματος έχει κλίση προς το επίπεδο βάσης υπό γωνία α τέτοια ώστε $cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Το διαγώνιο μήκος αυτού του πρίσματος είναι ίσο με

A. $15\sqrt{2}$ B. $\mathbf{45}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $\mathbf{10}$

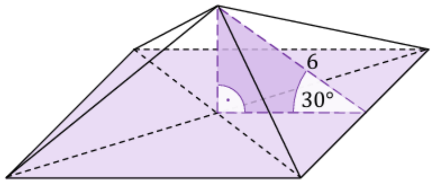
Λύση

Αν AH η διαγώνιος του πρίσματος, τότε έχω

$cos\alpha=\frac{A\Gamma}{AH}\Rightarrow AH=\frac{A\Gamma}{cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}AB}{cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot 15}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=45$. Άρα Β.

Εργασία 26 (0–4)

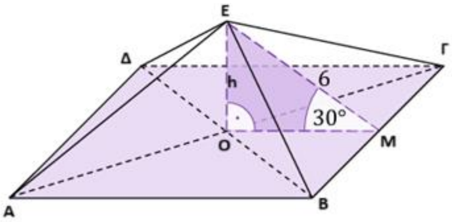
Δίνεται μια τετραγωνική πυραμίδα. Το ύψος του πλευρικού τοιχώματος αυτής της πυραμίδας έχει κλίση



προς το επίπεδο βάσης υπό γωνία $\mathbf{30°}$ και έχει μήκος $\mathbf{6}$ (βλ. εικόνα).

Υπολογίστε τον όγκο και τη συνολική επιφάνεια αυτής της πυραμίδας. Αποθηκεύστε τον υπολογισμό.

Λύση

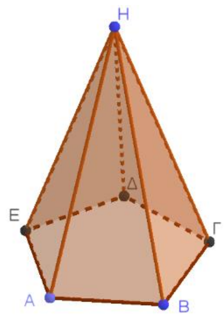


Έχω $\boldsymbol{AB = 2 \cdot OM = 2 \cdot 6cos30° = 6\sqrt{3}, h = 6sin30° = 3}$

Άρα, ο όγκος της πυραμίδας είναι: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}E_B \cdot h = \frac{1}{3}AB^2 \cdot h = \frac{1}{3}\left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3 = \boxed{108}}$

Η συνολική επιφάνεια της πυραμίδας είναι $\boldsymbol{E_{ολ} = 4 \cdot (BEΓ) + E_B = 4 \cdot \left(\frac{BΓ \cdot EM}{2}\right) + AB^2 = 2AB \cdot EM + AB^2 =}$ $\boldsymbol{2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = \boxed{72\sqrt{3} + 108}}$

Εργασία 27 (0–1)



Σε κάποια πυραμίδα, ο λόγος όλων των κορυφών $\boldsymbol{W}$ προς όλων των ακμών Κ είναι $\boldsymbol{\frac{W}{K} = \frac{3}{5}}$. Ολοκληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται. Η βάση αυτής της πυραμίδας είναι

A. τετράγωνο B. κανονικό πεντάγωνο.

C. κανονικό εξάγωνο. D. κανονικό επτάγωνο.

Λύση

Αν $\boldsymbol{W}$ είναι το πλήθος των κορυφών της πυραμίδας, τότε βάση είναι πολύγωνο με $\boldsymbol{W-1}$ κορυφές και πλευρές, άρα το πλήθος των ακμών της πυραμίδας αποτελείται από τις $\boldsymbol{W-1}$ (ακμές της βάσης) και τις $\boldsymbol{W-1}$ ακμές που συνδέουν την κορυφή $\boldsymbol{H}$ της πυραμίδας με τις κορυφές της βάσης. Άρα έχω $\boldsymbol{\frac{W}{K} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{W}{2W-2} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5W = 6W - 6 \Rightarrow W = 6}$. Άρα η βάση της πυραμίδας είναι πεντάγωνο, άρα B.

Εργασία 28 (0–1)

Συμπληρώστε την πρόταση. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση από αυτές που παρέχονται.

Όλοι οι πενταψήφιοι φυσικοί αριθμοί στους οποίους εμφανίζονται μόνο τα ψηφία 0, 5, 7 σε δεκαδική σημειογραφία (π.χ. 57075, 55555) είναι

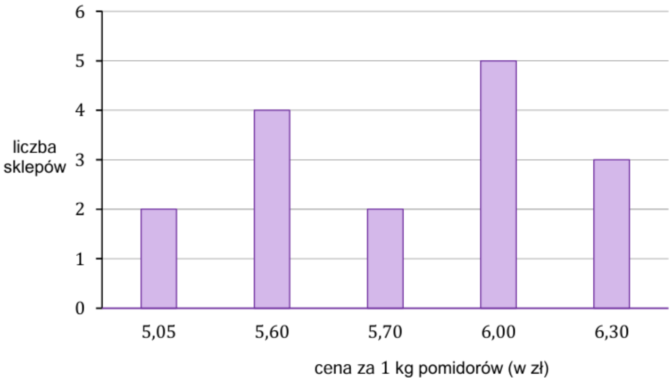
A. $\boldsymbol{5^3}$ B. $\boldsymbol{2 \cdot 4^3}$ C. $\boldsymbol{2 \cdot 3^4}$ D. $\boldsymbol{3^5}$

Λύση

Για το πρώτο ψηφίο (των δεκαχίλιαρων) έχω δύο επιλογές το 5 ή το 7. Για τα υπόλοιπα 4 ψηφία του πενταψήφιου αριθμού έχω από τρεις επιλογές. Από την πολλαπλασιαστική αρ΄χη της συνδυαστικής έχω $\boldsymbol{2 \cdot 3^4}$ συνδυασμούς, άρα C.

Εργασία 29 (0-2)

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τις τιμές των ντοματών σε δεκαέξι επιλεγμένα καταστήματα.



Συμπληρώστε τον πίνακα. Πληκτρολογήστε τη σωστή απάντηση σε κάθε κενό κελί του πίνακα, από τα γράμματα A έως E.

29.1.	Η διάμεση τιμή ενός κιλού ντομάτας σε αυτά τα επιλεγμένα καταστήματα είναι ίση με	
29.2.	Η μέση τιμή ενός κιλού ντομάτας σε αυτά τα επιλεγμένα καταστήματα είναι ίση με	

A. $\mathbf{5.80}$ $\boldsymbol{z}$ł B. $\mathbf{5.73}$ $\boldsymbol{z}$ł C. $\mathbf{5.85}$ $\boldsymbol{z}$ł D. $\mathbf{6.00}$ $\boldsymbol{z}$ł E. $\mathbf{5.70}$ $\boldsymbol{z}$ł

Λύση

Έχω για την διάμεση τιμή $\boldsymbol{\delta} = \frac{x_8+x_9}{2} = \frac{5{,}7+6}{2} = \mathbf{5{,}85}\boldsymbol{z}$ł ενώ

για τον μέσο όρο ότι $\boldsymbol{\mu} = \frac{2\cdot 5{,}05+4\cdot 5{,}60+2\cdot 5{,}70+5\cdot 6{,}00+3\cdot 6{,}30}{16} = \frac{10{,}10+22{,}40+11{,}40+30{,}00+18{,}90}{16} = \frac{92{,}80}{16} = \mathbf{5{,}80}\boldsymbol{z}$ł

άρα 29.1. C και 29.2. A

Εργασία 30 (0–2)

Από ένα σύνολο οκτώ αριθμών $\mathbf{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}$ επιλέγουμε τυχαία και επιστρέφουμε έναν αριθμό δύο φορές με τη σειρά. Υπολογίστε την πιθανότητα του συμβάντος A όπου το γινόμενο των επιλεγμένων αριθμών να διαιρείται με το $\mathbf{15}$. Αποθηκεύστε τον υπολογισμό.

Λύση

Για να διαιρείται με το $\mathbf{15}$ σημαίνει ότι το $\mathbf{5}$ επιλέχθηκε είτε την 1η φορά ή την δεύτερη φορά, κι όχι και τις δυο φορές (αφού τότε $\mathbf{5 \cdot 5 = 25}$ που δεν διαιρείται με το $\mathbf{15}$). Αν την μια φορά επιλέχθηκε το $\mathbf{5}$, τότε την άλλη φορά, αρκεί να επιλεχθεί κάποιο πολλαπλάσιο του $\mathbf{3}$, δηλαδή κάποιο από τα $\mathbf{3, 6, 9}$. Άρα η συνολική πιθανότητα του A είναι $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} = \mathbf{2} \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} = \boxed{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}}$

Εργασία 31.

Ο ιδιοκτήτης ενός φαρμακείου ανέλυσε δεδομένα σχετικά με τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται για $\mathbf{30}$ συνεχόμενες ημέρες. Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των πελατών $\boldsymbol{L}$ που εξυπηρετούνται την νιοστή ημέρα περιγράφεται από τη συνάρτηση $\boldsymbol{L(n) = -n^2 + 22n + 279}$, όπου $\boldsymbol{n}$ είναι ένας φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τις συνθήκες $\boldsymbol{n \geq 1}$ και $\boldsymbol{n \leq 30}$.

Εργασία 31.1 (0–1)

Αξιολογήστε την αλήθεια των ακόλουθων δηλώσεων. Επιλέξτε P εάν η πρόταση είναι αληθής ή F εάν είναι ψευδής.

Ο συνολικός αριθμός πελατών που εξυπηρετήθηκαν κατά τη διάρκεια όλων των ημερών ανάλυσης είναι ίσος με $\boldsymbol{L(30)}$.	P	F
Την τρίτη ημέρα της περιόδου ανάλυσης, εξυπηρετήθηκαν $\mathbf{336}$ πελάτες.	P	F

Λύση

Ο αριθμός $\boldsymbol{L(30)}$ δηλώνει τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετήθηκαν μόνον την 30η μέρα.
Την τρίτη μέρα εξυπηρετήθηκαν $\boldsymbol{L(3) = -3^2 + 22 \cdot 3 + 279 = -9 + 66 + 279 = 336}$ πελάτες.
Άρα FP

Εργασία 31.2. (0-2)
Ποια ημέρα της περιόδου ανάλυσης εξυπηρετούσε το φαρμακείο τον μεγαλύτερο αριθμό πελατών; Υπολογίστε τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται εκείνη την ημέρα. Αποθηκεύστε τον υπολογισμό.
Λύση
Έχω $\boldsymbol{L(n) = -n^2 + 22n + 279 = -n^2 + 22n - 121 + 121 + 279 = -(n - 11)^2 + 400 \leq 400}$ με την ισότητα να ισχύει για $\boldsymbol{n = 11}$. Άρα την $\boxed{\boldsymbol{11\eta}}$ μέρα εξυπηρετήθηκε ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών ($\boxed{\boldsymbol{400}}$ πελάτες).

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Εξετάσεις Matura Formula 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Προχωρημένο Επίπεδο

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: May 12, 2023 ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 9:00 π.μ. ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 180 λεπτά

ΑΡΙΘΜΟΣ ΒΑΘΜΩΝ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΑΠΟΚΤΗΣΕΤΕ: 50

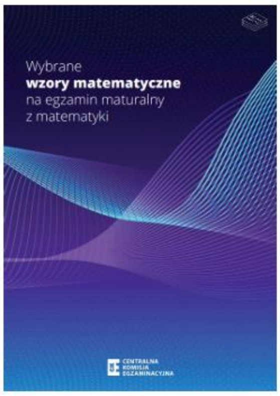
Πριν ξεκινήσετε να εργάζεστε με το γραπτό

1. Βεβαιωθείτε ότι ο δάσκαλός σας σας έχει δώσει το σωστό γραπτό, δηλαδή ένα γραπτό στη σωστή μορφή, στο σωστό θέμα στο σωστό επίπεδο.
2. Εάν σας έχει δοθεί λάθος φύλλο εργασίας – αναφέρετέ το αμέσως στον δάσκαλο.

Ανατρέξτε στις οδηγίες στη σελίδα 2.

Οδηγίες για τον εξεταζόμενο

1. Βεβαιωθείτε ότι το γραπτό περιέχει 27 σελίδες (ασκήσεις 1-13). Αναφέρετε τυχόν αποτυχία στον πρόεδρο της ομάδας παρακολούθησης εξετάσεων.
2. Στην πρώτη σελίδα του φύλλου εργασίας και στο φύλλο απαντήσεων, εισαγάγετε τον αριθμό PESEL και κολλήστε ένα αυτοκόλλητο με τον κωδικό.
3. Θυμηθείτε ότι η παράλειψη επιχειρημάτων ή σημαντικών υπολογισμών για την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα να μην λάβετε τον πλήρη αριθμό πόντων για αυτήν τη λύση.
4. Γράψτε τις λύσεις στα προβλήματα και τις απαντήσεις στο χώρο που παρέχεται.
5. Γράψτε ευανάγνωστα και χρησιμοποιήστε μόνο στυλό με μαύρο μελάνι.
6. Μην χρησιμοποιείτε διορθωτή και διαγράψτε σαφώς τις λανθασμένες σημειώσεις.
7. Μην εισάγετε χαρακτήρες στους πίνακες που προορίζονται για τον εξεταστή. Οι πίνακες τοποθετούνται στο περιθώριο δίπλα σε κάθε εργασία.
8. Επισημαίνεται ότι οι σημειώσεις στο πρόχειρο δεν θα αξιολογηθούν.
9. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε επιλεγμένους μαθηματικούς τύπους, διαβήτη και χάρακα και απλή αριθμομηχανή. Βεβαιωθείτε ότι έχετε λάβει ένα φυλλάδιο (34 σελίδων!) με εξώφυλλο όπως αυτό που φαίνεται παρακάτω.



https://www.oke.waw.pl/files/oke_waw_3498wybrane_wzory_matematyczne_EM2023.pdf.pdf

Εργασία 1 (0-2)

Στο αρχικό σημείο ($t = 0$), η μάζα της ουσίας είναι ίση με 4 γραμμάρια. Ως αποτέλεσμα της αποσύνθεσης των μορίων αυτής της ουσίας, η μάζα της μειώνεται. Μετά από κάθε επόμενη ημέρα, το 19% της μάζας χάνεται στο τέλος της προηγούμενης ημέρας. Για κάθε ακέραιο $t \geq 0$, η συνάρτηση $m(t)$ προσδιορίζει τη μάζα της ουσίας σε γραμμάρια μετά από t ολόκληρες ημέρες (ο χρόνος υπολογίζεται από την αρχική στιγμή). Προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $m(t)$. Υπολογίστε μετά από πόσες πλήρεις ημέρες το βάρος αυτής της ουσίας θα είναι μικρότερο από $1,5$ γραμμάρια για πρώτη φορά. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Αφού κάθε μέρα χάνεται το 19% της τρέχουσας μάζας, απομένει το $81\% = 0,81$ αυτής. Άρα έχω $\boxed{m(t) = 4 \cdot 0,81^t}$. Θέλω $m(t) < 1,5 \Leftrightarrow 4 \cdot 0,81^t < 1,5 \Leftrightarrow 0,81^t < 0,375 \Leftrightarrow -0,21t < -0,98 \Leftrightarrow t > 4,654$. Άρα μετά από $\boxed{5}$ πλήρεις μέρες το βάρος αυτής της ουσίας θα είναι μικρότερο από $1,5$ γραμμάρια για πρώτη φορά. Πράγματι $m(4) = 4 \cdot 0,81^4 \approx 1,72 > 1,5$ και $m(5) = 4 \cdot 0,81^5 \approx 1,39 < 1,5$

Εργασία 2 (0–3)

Ο Τόμεκ και ο Ρόμεκ αποφάσισαν να παίξουν πέντε παιχνίδια σκάκι μεταξύ τους. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Τόμεκ ένα μόνο παιχνίδι είναι $\frac{1}{4}$. Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσει ο Τόμεκ τουλάχιστον τέσσερα από τα πέντε παιχνίδια. Δώστε το αποτέλεσμα με τη μορφή ενός ανάγωγου κλάσματος. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Ζητάμε τον υπολογισμό της πιθανότητας επίτευξης τουλάχιστον τεσσάρων επιτυχιών σε πέντε δοκιμές Bernoulli με $p = \frac{1}{4}, q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Άρα $P = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{1024} = \boxed{\frac{1}{64}}$

Εργασία 3 (0–3)

Η συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Το σημείο $P = (x_0, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Υπολογίστε x_0 και προσδιορίστε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο P. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Έχω $3 = f(x_0) \Leftrightarrow 3 = \frac{3{x_0}^2-2x_0}{{x_0}^2+2x_0+8} \Leftrightarrow 3{x_0}^2 + 6x_0 + 24 = 3{x_0}^2 - 2x_0 \Leftrightarrow 6x_0 + 24 = -2x_0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = -3}$

Έχω $f'(x) = \frac{(6x-2)\cdot(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2} = \frac{6x^3+12x^2+48x-2x^2-4x-16-6x^3-6x^2+4x^2+4x}{(x^2+2x+8)^2} = \frac{8x^2+48x-16}{(x^2+2x+8)^2}$ με

$f'(-3) = \frac{8(-3)^2+48(-3)-16}{((-3)^2+2(-3)+8)^2} = \frac{72-144-16}{(9-6+8)^2} = \frac{-88}{(11)^2} = \frac{-8}{11}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $P = (-3, 3)$ είναι η ευθεία $y - f(-3) = f'(-3)\big(x - (-3)\big) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{-8}{11}(x + 3) \Leftrightarrow y - 3 = \frac{-8}{11}x - \frac{24}{11} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}}$

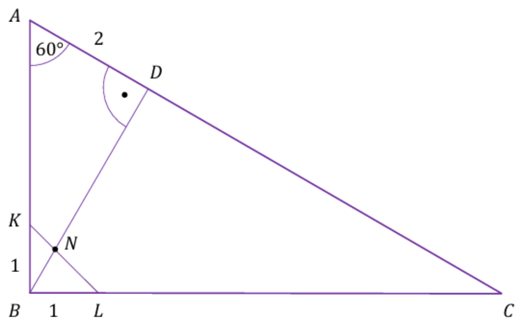
Εργασία 4 (0–3)

Οι πραγματικοί αριθμοί x και y ικανοποιούν την εξίσωση $x + y = 4$ και την ανισότητα $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ ταυτόχρονα. Αποδείξτε ότι $x = 2$ και $y = 2$.

Λύση

Έχω $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3 \Leftrightarrow x^2(x - y) \leq y^2(x - y) \Leftrightarrow x^2(x - y) - y^2(x - y) \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y^2) \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow 4(x - y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \overset{x+y=4}{\Longleftrightarrow} \boxed{x = y = 2}$, όπως θέλαμε.

Εργασία 5 (0–3)



Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ στο οποίο $|\measuredangle \boldsymbol{ABC}| = \mathbf{90°}$ και $|\measuredangle \boldsymbol{CAB}| = \mathbf{60°}$. Τα σημεία $\boldsymbol{K}$ και $\boldsymbol{L}$ βρίσκονται στις πλευρές των $\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{BC}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε $|\boldsymbol{BK}| = |\boldsymbol{BL}| = \mathbf{1}$ (βλ. εικόνα). Το τμήμα $\boldsymbol{KL}$ τέμνει το ύψος $\boldsymbol{BD}$ αυτού του τριγώνου στο σημείο $\boldsymbol{N}$ και $|\boldsymbol{AD}| = \mathbf{2}$.

Δείξτε ότι $|\boldsymbol{ND}| = \sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}$.

Λύση

Υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης, γεωμετρικοί και με χρήσης αναλυτικής γεωμετρίας.

Στο τρίγωνο $\boldsymbol{DAB}$ με γωνίες $\mathbf{90°, 60°, 30°}$ έχουμε: $\boldsymbol{AD} = \mathbf{2}, \boldsymbol{AB} = \mathbf{4}, \boldsymbol{BD} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$.

Στο τρίγωνο $\boldsymbol{KBN}$, το μέτρο της γωνίας $\boldsymbol{K\hat{B}N}$ είναι ίσο με 30°. Στο τρίγωνο $\boldsymbol{BLN}$, το μέτρο της γωνίας $\boldsymbol{N\hat{B}L}$ είναι ίσο με 60°. Δεδομένου ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{KBL}$ (ίσο με $\frac{1}{2}$) είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $\boldsymbol{BLN}$ και $\boldsymbol{KBN}$, έχουμε ότι: $\frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{BL} \cdot \boldsymbol{BN} \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{BN} \cdot \boldsymbol{BK} \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \xRightarrow{|BK|=|BL|=1} \boldsymbol{BN} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{BN} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{BN} \cdot \left(\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}\right) = \mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{BN} = \sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}$

Άρα $\boldsymbol{ND} = \boldsymbol{BD} - \boldsymbol{BN} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} - \left(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}\right) = \sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}$, όπως θέλαμε.

Εργασία 6 (0–3)

Λύστε την εξίσωση $\mathbf{4}\boldsymbol{sin}(\mathbf{4}\boldsymbol{x})\boldsymbol{cos}(\mathbf{6}\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{sin}(\mathbf{10}\boldsymbol{x}) + \mathbf{1}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

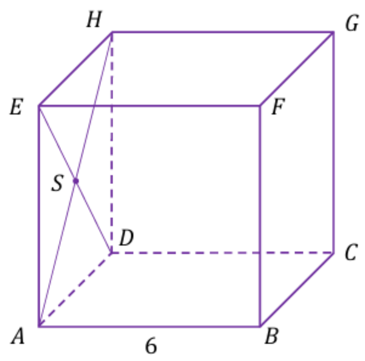
Έχω $\mathbf{4}\boldsymbol{sin}(\mathbf{4}\boldsymbol{x})\boldsymbol{cos}(\mathbf{6}\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{sin}(\mathbf{10}\boldsymbol{x}) + \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{2}(\boldsymbol{sin}(\mathbf{10}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})) = \mathbf{2}\,\boldsymbol{sin}(\mathbf{10}\boldsymbol{x}) + \mathbf{1}$

$$\Leftrightarrow -\mathbf{2}\sin(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \sin(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \sin(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \sin\left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\right)$$

Άρα $\mathbf{2}\boldsymbol{x} = -\frac{\pi}{6} + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} \vee \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\pi}{12} + \boldsymbol{k\pi} \vee \boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) + \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z} \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} + \boldsymbol{k\pi} \ \vee \ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{7}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} + \boldsymbol{k\pi}, \qquad \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}}$$

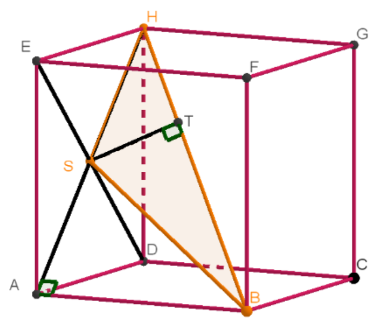
Εργασία 7 (0–4)



Δίνεται ένας κύβος $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ με ακμή μήκους $\mathbf{6}$. Το σημείο $\boldsymbol{S}$ είναι η τομή των διαγωνίων $\boldsymbol{AH}$ και $\boldsymbol{DE}$ του πλευρικού τοιχώματος $\boldsymbol{ADHE}$ (βλ. εικόνα). Υπολογίστε το ύψος του τριγώνου $\boldsymbol{SBH}$ με κορυφή το σημείο $\boldsymbol{S}$ προς την πλευρά $\boldsymbol{BH}$ αυτού του τριγώνου. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Έχω ότι $\boldsymbol{BH} = \sqrt{\boldsymbol{DH}^2 + \boldsymbol{DB}^2} = \sqrt{\boldsymbol{DH}^2 + \boldsymbol{DA}^2 + \boldsymbol{AB}^2} = \sqrt{\mathbf{3}\boldsymbol{AB}^2} = \sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{SH} = \frac{\boldsymbol{AH}}{2} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{DH}^2 + \boldsymbol{DA}^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{AB}$



Ζητάμε το ύψος $\boldsymbol{ST}$ του τριγώνου $\boldsymbol{SBH}$. Έχω $(\boldsymbol{SBH}) = \frac{\boldsymbol{ST} \cdot \boldsymbol{BH}}{2}$

Ισχύει ακόμα ότι το ύψος του τριγώνου $\boldsymbol{SBH}$ από την κορυφή $\boldsymbol{B}$ είναι η πλευρά $\boldsymbol{BA}$. Άρα $(\boldsymbol{SBH}) = \frac{\boldsymbol{SH} \cdot \boldsymbol{BA}}{2}$

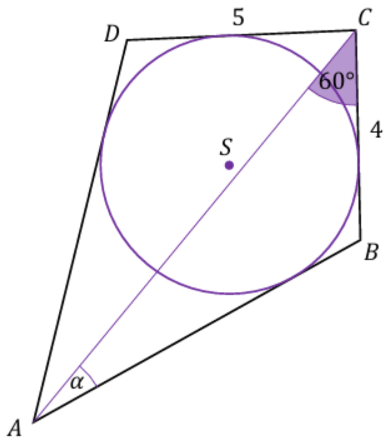
Συνεπώς $\boldsymbol{ST} \cdot \boldsymbol{BH} = \boldsymbol{SH} \cdot \boldsymbol{BA} \Rightarrow \boldsymbol{ST} \cdot \sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{BA} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{ST} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}} \cdot \boldsymbol{BA} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}} \cdot \mathbf{6} = \boxed{\sqrt{\mathbf{6}}}$$

Εργασία 8 (0–4)

Το τετράπλευρο $\boldsymbol{ABCD}$, στο οποίο $|\boldsymbol{BC}| = \mathbf{4}$ και $|\boldsymbol{CD}| = \mathbf{5}$, περιγράφει κύκλο. Η διαγώνιος $\boldsymbol{AC}$ αυτού του τετράπλευρου σχηματίζει γωνία $\mathbf{60°}$ με την πλευρά $\boldsymbol{BC}$ και οξεία γωνία με την πλευρά $\boldsymbol{AB}$, το ημίτονο της οποίας είναι ίσο με $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. Υπολογίστε την περίμετρο του τετράπλευρου $\boldsymbol{ABCD}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση



Έχουμε το διπλανό σχήμα.

Ένας κύκλος μπορεί να εγγραφεί σε κυρτό τετράπλευρο εάν και μόνο εάν τα αθροίσματα των μηκών των αντίθετων πλευρών του είναι ίσα. Άρα $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{DA}$. Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABC έχω $\frac{\boldsymbol{AB}}{\sin 60°} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\sin \boldsymbol{\alpha}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = \mathbf{8}\sqrt{\mathbf{3}}$. Άρα η περίμετρος το τετράπλευρου είναι

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{DA} = \mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD}) = \boxed{\mathbf{16}\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{10}}$$

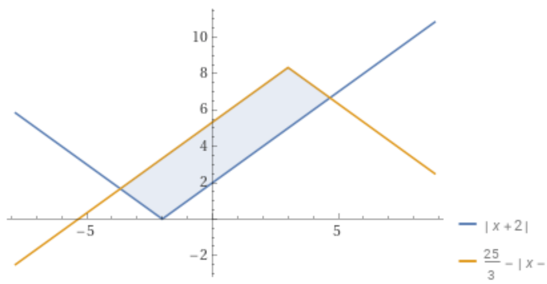
Εργασία 9 (0–4)

Λύστε την ανισότητα $\sqrt{\boldsymbol{x^2} + \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}} < \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}} - \sqrt{\boldsymbol{x^2} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{9}}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό. Συμβουλή: Εκμεταλλευτείτε το γεγονός ότι $\sqrt{\boldsymbol{\alpha^2}} = |\boldsymbol{a}|$ για κάθε πραγματικό αριθμό.

Λύση

Έχω $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2} \Leftrightarrow |x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$

Α′ τρόπος



Σχεδιάζω κατά τα γνωστά τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x+2|$ και $g(x) = \frac{25}{3} - |x-3|$. Στο αριστερό σημείο τομής των δυο γραφικών παραστάσεων έχω $f(x) = g(x) \xRightarrow{x<-2,x<3} -x - 2 = \frac{25}{3} - (-x+3) \Rightarrow -x - 2 = \frac{25}{3} + x - 3 \Rightarrow -2x = \frac{22}{3} \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$, ενώ για το δεξί σημείο τομής έχω $f(x) = g(x) \xRightarrow{x>-2,x>3} x + 2 = \frac{25}{3} - (x-3) \Rightarrow x + 2 = \frac{25}{3} - x + 3 \Rightarrow 2x = \frac{28}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$. Άρα $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3| \Leftrightarrow f(x) < g(x) \Leftrightarrow$ $\boxed{x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)}$

Β′ τρόπος

Έχω $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$, άρα

$$x + 2 < \frac{25}{3} - |x-3| \vee x + 2 > \left(\frac{25}{3} - |x-3|\right)$$

$$|x-3| < \frac{19}{3} - x \vee |x-3| < x + \frac{31}{3}$$

$$x - 3 < \frac{19}{3} - x \ \vee \ x - 3 > -\left(\frac{19}{3} - x\right) \ \vee \ x - 3 < x + \frac{31}{3} \ \vee \ x - 3 > -\left(x + \frac{31}{3}\right)$$

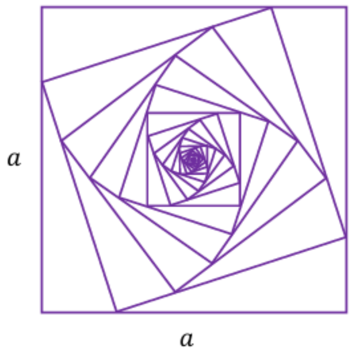
$$2x < \frac{28}{3} \vee -3 > -\frac{19}{3} \vee -3 < \frac{31}{3} \ \vee \ 2x > -\frac{22}{3}$$

$$x < \frac{14}{3} \vee x \in \mathbb{R} \vee x \in \mathbb{R} \vee x > -\frac{11}{3}$$

$$-\frac{11}{3} < x < \frac{14}{3}$$

Εργασία 10 (0–4)

Ορίστε τα τετράγωνα $\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \boldsymbol{K_3}, \ldots$ ως εξής:



• $\boldsymbol{K_1}$ είναι ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους $\boldsymbol{a}$

• $\boldsymbol{K_2}$ είναι ένα τετράγωνο του οποίου κάθε κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου $\boldsymbol{K_1}$ και διαιρεί αυτή την πλευρά σε αναλογία $\boldsymbol{1:3}$

• $\boldsymbol{K_3}$ είναι ένα τετράγωνο του οποίου κάθε κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου $\boldsymbol{K_2}$ και διαιρεί αυτή την πλευρά σε αναλογία $\boldsymbol{1:3}$ και γενικά, για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 2}$,

• $\boldsymbol{K_n}$ είναι ένα τετράγωνο, του οποίου κάθε κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου $\boldsymbol{K_{n-1}}$ και διαιρεί αυτή την πλευρά σε αναλογία $\boldsymbol{1:3}$. Οι περιφέρειες όλων των τετραγώνων που καθορίστηκαν παραπάνω σχηματίζουν μια άπειρη γεωμετρική ακολουθία. Το σχήμα δείχνει τα τετράγωνα που δημιουργήθηκαν όπως περιγράφεται παραπάνω. Υπολογίστε το άθροισμα όλων των όρων αυτής της άπειρης ακολουθίας. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Έστω $\boldsymbol{a_i}$ το μήκος της πλευράς του τετραγώνου $\boldsymbol{K_i}$, και με $\boldsymbol{\Pi_i}$ - την περίμετρο του τετραγώνου $\boldsymbol{K_i}$ (για $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots}$). Έστω $\boldsymbol{\Pi}$ το άθροισμα των περιμέτρων όλων των $\boldsymbol{K_i}$ τετραγώνων. Έχω : $\boldsymbol{a_1 = \alpha}$, $\boldsymbol{a_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a_1\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a_1}$ ομοίως $\boldsymbol{a_n = \frac{\sqrt{10}}{4}a_{n-1}}$. Άρα $\boldsymbol{\Pi_1 = 4\alpha}$, $\boldsymbol{\Pi_n = 4a_n = 4\frac{\sqrt{10}}{4}a_{n-1} = 4\Pi_{n-1}}$, δηλαδή είναι όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\boldsymbol{\lambda = \frac{\sqrt{10}}{4}}$, των οποίων το άθροισμα είναι

$$\boldsymbol{\Pi = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4 - \sqrt{10}} = \frac{16a}{4 - \sqrt{10}} \frac{4 + \sqrt{10}}{4 + \sqrt{10}} = \frac{16\alpha \cdot (4 + \sqrt{10})}{16 - 10} = \boxed{\frac{8 \cdot (4 + \sqrt{10})}{3}\alpha \cong 19{,}099\alpha}}$$

Εργασία 11 (0–5)

Προσδιορίστε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{m \neq 2}$ για τις οποίες η εξίσωση $\boldsymbol{x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0}$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις $\boldsymbol{x_1, x_2}$ ικανοποιώντας τη συνθήκη $\boldsymbol{x_1^3 + x_2^3 > 28}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Για να έχω δυο διαφορετικές ρίζες πρέπει $\boldsymbol{\Delta > 0 \Leftrightarrow 4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) > 0 \Leftrightarrow 4 + \left(\frac{m-3}{m-2}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{5m-11}{m-2} > 0 \Leftrightarrow (5m - 11) \cdot (m - 2) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)}$ (**1**).

Από τους τύπους του Vieta έχω $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -4}$ και $\boldsymbol{x_1 x_2 = -\frac{m-3}{m-2}}$.

Άρα $\boldsymbol{x_1^3 + x_2^3 > 28 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) > 28 \Leftrightarrow -64 - 3 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \cdot (-4) > 28 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m-2} < -3 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m-2} + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{4m-9}{m-2} < 0 \Leftrightarrow (4m - 9)(m - 2) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)}$ (2).

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν για $\boxed{\boldsymbol{m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)}}$

Εργασία 12.

Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x}$ για κάθε θετικό αριθμό $\boldsymbol{x}$.

Εργασία 12.1. (0–2) Δείξτε ότι για κάθε θετικό αριθμό $\boldsymbol{x}$, η έκφραση $\boldsymbol{81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x}$ μπορεί να μετατραπεί ισοδύναμα σε $\boldsymbol{x^4 + x^2 - 6x}$.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{81^{\log_3 x} = x^{\log_3 81} = x^4}$ και $\boldsymbol{\frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} = \frac{\log_2 27 \cdot \log_3 2}{3} = \frac{3\log_2 3 \cdot \log_3 2}{3} = \log_2 3 \cdot \log_3 2 = \frac{log3}{log2}\frac{log2}{log3} = 1}$

Άρα $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 - 6x}$

Εργασία 12.2. (0–4) Υπολογίστε τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ που καθορίζεται για κάθε θετικό αριθμό $\boldsymbol{x}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό. Συμβουλή: υποθέστε ότι ο τύπος της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 - 6x}$.

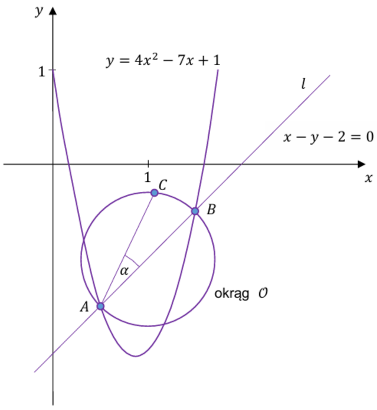
Λύση

Έχω $\boldsymbol{f'(x) = 4x^3 + 2x - 6}$ και $\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x - 6 = 0}$ με προφανή ρίζα το $\boldsymbol{x = 1}$. Από σχήμα Horner έχω $\boldsymbol{4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2 + 4x + 6)}$ με μοναδική ρίζα το $\boldsymbol{x = 1}$ αφού για το τριώνυμο $\boldsymbol{4x^2 + 4x + 6 > 0}$ για $\boldsymbol{x > 0}$.

Άρα $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ για $\boldsymbol{x \in (1, +\infty)}$ και $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ για $\boldsymbol{x \in (0, 1)}$.

Άρα, η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $\boldsymbol{(0,1)}$ και αύξουσα στο διάστημα $\boldsymbol{[1, +\infty)}$. Ως εκ τούτου, για $\boldsymbol{x = 1}$, η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο την τιμή $\boldsymbol{f(1) = 1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 = \boxed{-4}}$

Εργασία 13 (0–6)



Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, η γραμμή $\boldsymbol{l}$ με την εξίσωση $\boldsymbol{x - y - 2 = 0}$ τέμνει την παραβολή με την εξίσωση $\boldsymbol{y = 4x^2 - 7x + 1}$ στα σημεία $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Το τμήμα $\boldsymbol{AB}$ είναι η διάμετρος του κύκλου $\boldsymbol{O}$. Το σημείο $\boldsymbol{C}$ βρίσκεται στον κύκλο $\boldsymbol{O}$ πάνω από τη γραμμή $\boldsymbol{l}$, και η γωνία $\boldsymbol{BAC}$ είναι οξεία και έχει ένα μέτρο $\boldsymbol{\alpha}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{3}$ (βλέπε σχήμα). Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου $\boldsymbol{C}$. Καταγράψτε τον υπολογισμό.

Λύση

Τα σημεία Α και Β προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2} \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \vee$ $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Άρα $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ και $\boldsymbol{B}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο Κ της διαμέτρου ΑΒ, άρα $\boldsymbol{K(1, -1)}$, και η ακτίνα του κύκλου είναι

$$R = KB = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $\boldsymbol{(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}}$

Για την κλίση της AC έχω $\boldsymbol{\lambda_{AC} = tg(a + 45°)}$, αφού $\boldsymbol{\lambda_{AB} = 1 = tg45°}$. Άρα $\boldsymbol{\lambda_{AC} = \frac{tg(a) + tg45°}{1 - tg(a)tg45°} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3}} = 2}$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α με κλίση 2 είναι η

$\boldsymbol{AC: y - \left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2x - \frac{5}{2}}$.

Το σημείο C είναι το σημείο τομής της ευθείας AC και του κύκλου και οι συντεταγμένες του προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(2x - \frac{5}{2} + 1\right)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 8x + \frac{11}{4} = 0 \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{11}{10} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{11}{10}, \ \ y = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

Η πρώτη λύση του συστήματος είναι το σημείο Α, άρα η δεύτερη λύση του συστήματος είναι το σημείο C, άρα $\boxed{\boldsymbol{C\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)}}$

[Πηγές]

Πολωνία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ-ΠΟΛΩΝΙΑΣ-2η-ΡΟΗ.pdf (sch.gr)

https://archeia.moec.gov.cy/mc/610/spoudes_polonia.pdf

https://www.topuniversities.com/where-to-study/europe/poland/guide

Σχολεία στην Πολωνία: πώς να κανονίσετε ένα παιδί και πώς να σπουδάσετε σε ένα πολωνικό σχολείο (poradnuk.com.ua)