

## [Η Κροατία]

Η Κροατία (κροατικά: Hrvatska, προφέρεται: Χρβάτσκα), της οποίας η επίσημη ονομασία είναι Δημοκρατία της Κροατίας (κροατικά: Republika Hrvatska, Ρεπούμπλικα Χρβάτσκα), είναι χώρα στη νοτιοανατολική Ευρώπη, και συνορεύει στα βόρεια με την Ουγγαρία και τη Σλοβενία, στα ανατολικά με τη Σερβία και τη Βοσνία-Ερζεγοβίνη, ενώ στη νότια άκρη της με το Μαυροβούνιο. Στο δυτικό της τμήμα βρέχεται από την Αδριατική θάλασσα η οποία αποτελεί έτσι τα φυσικά της σύνορα.

Η πρωτεύουσά της και έδρα της κυβέρνησης είναι με ένα περίπου εκατομμύριο κατοίκους το Ζάγκρεμπ, το οποίο είναι σημαντικός συγκοινωνιακός κόμβος και το οικονομικό όπως και το ακαδημαϊκό κέντρο της. Άλλες σημαντικές πόλεις της Κροατίας είναι η Ριέκα, η Πούλα, το Σπλιτ και το Ντουμπρόβνικ.

Ο πληθυσμός της Κροατίας εκτιμάται για το 2022 σε 3.855.641 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2022. Έχει σταθεροποιηθεί την τελευταία δεκαετία. Οι κάτοικοι της χώρας είναι κατά πλειοψηφία Κροάτες και υπάρχουν και μειονότητες Σέρβων, Βόσνιων Μουσουλμάνων, Ούγγρων και Ιταλών. Η επικρατούσα θρησκεία είναι η Ρωμαιοκαθολική. Το προσδόκιμο ζωής στο σύνολο του πληθυσμού, σύμφωνα με εκτιμήσεις του 2019 του Παγκόσμιου Οργανισμού Υγείας ήταν 78,6 χρόνια (75,5 χρόνια οι άνδρες και 81,6 οι γυναίκες).

Στην οικονομία της Κροατίας επικρατεί ο τομέας των υπηρεσιών, ακολουθούμενος από τον βιομηχανικό τομέα και τη γεωργία. Σημαντική πηγή εισοδήματος, κυρίως το καλοκαίρι, είναι ο τουρισμός, με την Κροατία να είναι ο 18ος δημοφιλέστερος τουριστικός προορισμός στον κόσμο. Το κράτος ελέγχει μέρος της οικονομίας με σημαντικές δημόσιες δαπάνες. Η Ευρωπαϊκή ένωση είναι ο σημαντικότερος εμπορικός εταίρος της Κροατίας. Από το 2000 η Κροατική κυβέρνηση έχει επενδύσει στις υποδομές, στους δρόμους και τις εγκαταστάσεις μεταφοράς κατά μήκος των Πανευρωπαϊκών διαδρόμων. Εσωτερικές πηγές παρέχουν σημαντικό μέρος της ενέργειας της Κροατίας και το υπόλοιπο εισάγεται. Η Κροατία παρέχει καθολικό σύστημα υγείας και δωρεάν πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ενώ υποστηρίζει τον πολιτισμό μέσω πολλών δημόσιων ιδρυμάτων και εταιρικών επενδύσεων στα μέσα ενημέρωσης και τις εκδόσεις. Η χώρα περφηανεύεται για την πολιτιστική, καλλιτεχνική και επιστημονική συνεισφορά της στον κόσμο καθώς και για την κουζίνα, τα κρασιά και τα αθλητικά της επιτεύγματα.

Η Κροατία είναι μεταξύ άλλων μέλος της Ευρωπαϊκής Ένωσης (2013), του NATO (2009), του Παγκόσμιου Οργανισμού Εμπορίου και στη Συνθήκη Ελεύθερου Εμπορίου της Κεντρικής Ευρώπης (CEFTA). Η Κροατία έως το τέλος του 2009 κατείχε το αξίωμα της μη μόνιμης χώρας-μέλους στο Συμβούλιο Ασφαλείας του Οργανισμού Ηνωμένων Εθνών. Στη χώρα, θεμελιώθηκε τον Μάιο του 2009 η μεγαλύτερη μονάδα παραγωγής βιοαερίου στην Ευρώπη. Από την 1η Ιανουαρίου του 2023 είναι μέλος της Ευρωζώνης και της Ζώνης Σένγκεν.

## [Η εκπαίδευση στην Κροατία]

Οι πολίτες της Κροατίας απολαμβάνουν μία δωρεάν δημόσια εκπαίδευση σε πρωτοβάθμιο και δευτεροβάθμιο επίπεδο και, εν μέρει, δωρεάν πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Υπάρχουν πάνω από 800 δημοτικά σχολεία και πάνω από 400 σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στη χώρα. Η τριτοβάθμια εκπαίδευση, επίσης, χρηματοδοτείται από το κράτος και είναι, ως επί το πλείστον, δωρεάν για τους φοιτητές που εγγράφονται σε αυτήν με τα καλύτερα αποτελέσματα κατατακτήριων εξετάσεων. Υπάρχουν τριάντα δύο διαφορετικές πολυτεχνικές σχολές, καθώς και επτά πανεπιστήμια σε επτά μεγάλες πόλεις: Ζάγκρεμπ, Σπλιτ, Ριέκα, Όσιγιεκ, Ζαντάρ, Ντουμπρόβνικ και Πούλα. Κάθε ένα από τα

πανεπιστήμια της Κροατίας αποτελείται από πολλές ανεξάρτητες σχολές (fakultet), οι οποίες εστιάζουν σε ειδικούς τομείς κατάρτισης, όπως φυσικές επιστήμες, φιλοσοφία, δίκαιο, μηχανική, οικονομικά, αρχιτεκτονική, ιατρική κλπ. Υπάρχει, επίσης, μια σειρά από άλλα εκπαιδευτικά και επιστημονικά ιδρύματα, όπως τα ινστιτούτα (με πιο σημαντικό το «Ινστιτούτο Ρότζερ Μπόσκοβιτς») ή η Κροατική Ακαδημία Επιστημών και Τεχνών, μια κοινότητα προώθησης της γλώσσας, του πολιτισμού και της επιστήμης που λειτουργεί από το 1866. Η Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ίδρυση πολλών εκπαιδευτικών εγκαταστάσεων στην Κροατία και συνεχίζει να διατηρεί πολλές ιερατικές σχολές θεολογική στη χώρα, καθώς και το Ποντιφικό Κροατικό Κολέγιο του Αγίου Ιερωνύμου για τους Κροάτες φοιτητές στη Ρώμη.

Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Κροατία ξεκινά με τα νηπιαγωγεία. Τα παιδιά ξεκινούν την υποχρεωτική οκτάχρονη πρωτοβάθμια εκπαίδευση από την ηλικία των 6 ή 7 ετών. Μετά την ολοκλήρωση του δημοτικού σχολείου, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν την εκπαίδευσή τους, με βάση τις τάξεις του δημοτικού σχολείου, σε τετραετή μη υποχρεωτικά σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που χωρίζονται από το πρόγραμμα σπουδών σε γυμνάσια, επαγγελματικά (τεχνικά, βιομηχανικά, εμπορικά) και καλλιτεχνικά (μουσική, χορός, εικαστικά) σχολεία. Από το 2010, η εγγραφή σε ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα καθορίζεται από τις βαθμολογίες ενός μαθητή στις εξετάσεις εξόδου από το γυμνάσιο Matura. Τα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης προσφέρουν τόσο πανεπιστημιακές όσο και επαγγελματικές σπουδές. Τα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης χωρίζονται σε πολυτεχνεία, κολέγια, σχολές και ακαδημίες τέχνης. Από το 2005, όλα τα προγράμματα σπουδών ευθυγραμμίζονται με τις απαιτήσεις της διαδικασίας της Μπολόνια. Τα πενταετή πανεπιστημιακά προγράμματα επιτρέπουν στους φοιτητές να εργάζονται στην επιστήμη, την εκπαίδευση, τις επιχειρήσεις, τον δημόσιο τομέα κ.λπ., και μπορούν να είναι σε προπτυχιακό (BA), μεταπτυχιακό (MA) ή μεταπτυχιακό (PhD) επίπεδο. Οι επαγγελματικές σπουδές διαρκούν δύο έως τρία χρόνια και προσφέρονται σε πολυτεχνεία και κολέγια. Με την ολοκλήρωση, οι απόφοιτοι παίρνουν τον τίτλο του επαγγελματία πτυχίου (bacc).

Τα δημόσια σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και τα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, είναι δωρεάν. Οι φοιτητές πληρώνουν μόνο για σχολικά βιβλία, βασικό εξοπλισμό, φαγητό καφετέριας, φοιτητικές εστίες και άλλες ανάγκες, αν και το κράτος δίνει επίσης χιλιάδες υποτροφίες κάθε χρόνο. Επιπλέον, το κράτος πληρώνει ασφάλιση υγείας για τους φοιτητές. Υπάρχουν πολύ λίγα ιδιωτικά σχολεία στη χώρα.

Η εκπαίδευση στην Κροατία έχει μακρά ιστορία, με το πρώτο πανεπιστήμιο να είναι το Πανεπιστήμιο του Ζαντάρ, που ιδρύθηκε το 1396. Το μεγαλύτερο και παλαιότερο συνεχώς λειτουργικό κροατικό πανεπιστήμιο είναι το Πανεπιστήμιο του Ζάγκρεμπ, που ιδρύθηκε το 1669. Σήμερα, υπάρχουν 940 σχολεία πρωτοβάθμιας και 390 δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και 90 δημόσια και 32 ιδιωτικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κροατία.

### **[Εκπαιδευτικό σύστημα]**

Η πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ουσιαστικά δωρεάν, επειδή χρηματοδοτείται κυρίως από το Υπουργείο Παιδείας της κροατικής κυβέρνησης. Η τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι επίσης ως επί το πλείστον δωρεάν, επειδή η κυβέρνηση χρηματοδοτεί όλα τα δημόσια πανεπιστήμια και τους επιτρέπει να καθορίζουν ποσοστάσεις για δωρεάν εγγραφή, με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα των μαθητών (συνήθως βαθμούς γυμνασίου και τις βαθμολογίες τους σε ένα σύνολο εξετάσεων κατά την εγγραφή).

Ωστόσο, λόγω των χαμηλών μισθών που αμείβονται οι εκπαιδευτικοί, υπάρχουν ελλείψεις εκπαιδευτικών σε ολόκληρη την Κροατία. Αυτή η έλλειψη εκπαιδευτικών έχει γίνει ένα συνεχιζόμενο πρόβλημα λόγω του αριθμού των εκπαιδευτικών προγραμμάτων στην Κροατία.

### [Τα δημοτικά σχολεία χωρίζονται σε δύο στάδια:]

- 1η έως 4η τάξη, διδάσκεται από έναν δάσκαλο ανά τάξη που διδάσκει κάθε μάθημα με εξαίρεση τις ξένες γλώσσες και τη θρησκεία, με μαθήματα όπως κροατικά, μαθηματικά, εικαστικές τέχνες (likovna kultura), φύση και κοινωνία (priroda i društvo), φυσική αγωγή, μουσική εκπαίδευση και τουλάχιστον μία ξένη γλώσσα (συνήθως αγγλικά, συνήθως στην 1η τάξη και υποχρεωτική στην 4η τάξη). Η θρησκευτική εκπαίδευση είναι ένα μάθημα επιλογής και οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν μεταξύ καθολικών, ορθόδοξων και ισλαμικών θρησκευτικών τάξεων. Οι μαθητές μένουν σε μία τάξη για τα 4 χρόνια.
- 5η έως 8η τάξη, όπου διαφορετικοί εκπαιδευτικοί διδάσκουν διαφορετικά μαθήματα, με πρόσθετα μαθήματα όπως ιστορία, γεωγραφία, βιολογία, χημεία, φυσική, επαγγελματική εκπαίδευση, πληροφορική και εκτός από τα αγγλικά, συχνά μια δεύτερη γλώσσα (συνήθως γερμανικά, γαλλικά ή ιταλικά). Οι μαθητές δεν έχουν πλέον μία τάξη, αλλά μετακινούνται γύρω από το σχολείο για να φτάσουν στις τάξεις τους.

Από τότε που το δημοτικό σχολείο έγινε υποχρεωτικό (κατά τη διάρκεια της Γιουγκοσλαβίας), το ποσοστό αλφαριθμητισμού στην Κροατία βρίσκεται στο σημαντικό επίπεδο του 98,1%. Η πλειοψηφία των παιδιών καταφέρνει να ολοκληρώσει το δημοτικό σχολείο.

Η πλειοψηφία των σχολείων διδάσκουν αγγλικά, γερμανικά ή ιταλικά ήδη από την πρώτη τάξη. Η πλειοψηφία των σχολείων προσφέρουν μια δεύτερη γλώσσα ξεκινώντας από την 4η τάξη. Οι πιο δημοφιλείς ξένες γλώσσες είναι τα αγγλικά, τα γερμανικά και τα ιταλικά, ακολουθούμενα από τα ισπανικά, τα γαλλικά και τα ρωσικά.

Τα άτομα που έχουν ολοκληρώσει μόνο την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ταξινομούνται ως "ανεπίδοτοι εργαζόμενοι" (κροατικά: nekvalificirani radnik ή NKV) από τα γραφεία απασχόλησης. Το 2,8% των Κροατών δεν πήγε ποτέ στο δημοτικό σχολείο, το 15,7% δεν το ολοκλήρωσε ποτέ και το 21,7% έχει ολοκληρώσει μόνο την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Το 47% των Κροατών έχει ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και το 7,9% έχει πανεπιστημιακό πτυχίο.

Υπάρχουν σήμερα 940 δημοτικά σχολεία στην Κροατία. Τα δημόσια δημοτικά σχολεία υπάγονται στη δικαιοδοσία της τοπικής αυτοδιοίκησης, των πόλεων και των δήμων.

### [Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι επί του παρόντος προαιρετική, αν και τα περισσότερα πολιτικά κόμματα υποστηρίζουν τη θέση ότι θα πρέπει επίσης να καταστεί υποχρεωτική.

Τα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Κροατία υποδιαιρούνται σε:

- Γυμνάσια με τέσσερις διαθέσιμες εκπαιδευτικές διαδρομές. prirodoslovno-matematička gimnazija (με ειδίκευση στα μαθηματικά, την πληροφορική και την επιστήμη), jezična gimnazija (με έμφαση στις ξένες γλώσσες και με λιγότερη επιστήμη), klasična gimnazija (με πρόγραμμα σπουδών επικεντρωμένο στους κλασικούς, δηλαδή τα λατινικά και τα αρχαία ελληνικά) και opća gimnazija (η οποία καλύπτει μια γενική εκπαίδευση και δεν είναι τόσο ειδική). Ως σχολείο γενικής

εκπαίδευσης, το γυμνάσιο είναι μια μετάβαση στην επαγγελματική κατάρτιση σε κολέγια, πανεπιστήμια και σχολές, δηλαδή δεν πληροί τις προϋποθέσεις για μαθητές για ένα συγκεκριμένο επάγγελμα, αλλά επικεντρώνεται κυρίως στην περαιτέρω εκπαίδευση. Τα μαθήματα που διδάσκονται περιλαμβάνουν: Κροατικά, Μαθηματικά, Αγγλικά, 2η Ξένη Γλώσσα (επιλογής), 3η Ξένη Γλώσσα (επιλογή μόνο σε ξενόγλωσσα κεντρικά σχολεία), Λατινικά, Ιστορία της Τέχνης, Μουσική Εκτίμηση, Ιστορία, Γεωγραφία, Βιολογία, Χημεία, Φυσική, Κοινωνιολογία, Ψυχολογία, Πληροφορική, Πολιτική και Οικονομία, Φιλοσοφία, Λογική, Φυσική Αγωγή και ένα μάθημα επιλογής. Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν είτε Θρησκευτικές Σπουδές είτε Ηθική ως μάθημα επιλογής. Η εκπαίδευση στα γυμνάσια διαρκεί τέσσερα χρόνια. Τα γυμνάσια είναι πιο δύσκολο να μπουν από τις επαγγελματικές ή καλλιτεχνικές σχολές και είναι γενικά πιο δύσκολο να ολοκληρωθούν.

- Επαγγελματικές σχολές που διδάσκουν σε έναν μαθητή μια συγκεκριμένη τέχνη, όπως μαγειρική ή ξυλουργική, και διαρκούν είτε τρία έως πέντε χρόνια. Οι σχολές οικονομικών και μηχανικών εμπίπτουν επίσης σε αυτήν την κατηγορία. Το ιατρικό λύκειο είναι το μόνο που διαρκεί πέντε χρόνια από το σχολικό έτος 2010/11.
- Σχολές τέχνης που επικεντρώνονται στις εικαστικές τέχνες, τη μουσική και παρόμοια. Χρειάζονται τέσσερα χρόνια.

Τα γυμνάσια, οι οικονομικές σχολές και οι σχολές μηχανικών διαρκούν τέσσερα χρόνια. Υπάρχουν επίσης ορισμένες επαγγελματικές σχολές που διαρκούν μόνο τρία χρόνια.

Τα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης παρέχουν στους μαθητές μαθήματα πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης που απαιτούνται για το απαραίτητο εργασιακό περιβάλλον στην Κροατία. Τα άτομα που ολοκλήρωσαν τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ταξινομούνται ως «μεσαίας εμπειρογνωμοσύνης» (*srednja stručna sprema* ή SSS).

Οι απόφοιτοι επαγγελματικών σχολών διάρκειας 4 ετών επιτρέπεται να συμμετάσχουν στις εθνικές εξετάσεις αποφοίτησης (*državna matura*) και να φοιτήσουν στο πανεπιστήμιο. Οι απόφοιτοι επαγγελματικών σχολών διάρκειας 3 ετών μπορούν να φοιτήσουν σε τεχνικά επαγγελματικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ωστόσο και οι δύο ομάδες μαθητών μπορούν επίσης να εργαστούν μετά την ολοκλήρωση της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όπως και οι απόφοιτοι καλλιτεχνικών σχολών, ενώ οι απόφοιτοι γυμνασίου πρέπει να πάνε στο πανεπιστήμιο.

Η διαδικασία εισόδου σε γυμνάσιο στην Κροατία είναι μάλλον δύσκολη. Ένας μαθητής επιλέγει 5 σχολεία στα οποία θέλει να πάει (οι μαθητές που ενδιαφέρονται για επαγγελματικές σχολές μπορούν να επιλέξουν δύο προγράμματα μέσα σε ένα σχολείο) και στη συνέχεια να τα απαρτιμήσουν. Το πρώτο σχολείο στη λίστα είναι το σχολείο στο οποίο ο μαθητής θέλει να πάει περισσότερο. Στην Κροατία, ο μέγιστος αριθμός πόντων κατά την εγγραφή είναι 80. Οι βαθμοί συγκεντρώνονται από τις τάξεις του δημοτικού σχολείου (εκτός από την πρώτη έως την τέταρτη τάξη) και τυχόν επιπλέον κριτήρια όπως διαγωνισμοί, ασθένειες και παρόμοια. Το όριο πόντων είναι ένας ορισμένος αριθμός βαθμών κάτω από τον οποίο ένας μαθητής δεν μπορεί να εγγραφεί στο σχολείο. Για παράδειγμα, εάν ένα συγκεκριμένο σχολείο έχει το όριο πόντων 65, κανείς με 64 ή λιγότερους πόντους δεν μπορεί να εγγραφεί. Τα σχολεία έχουν συνήθως ποσοστάσεις για το πόσοι μαθητές μπορούν να εγγραφούν στο συγκεκριμένο έτος.

Σήμερα υπάρχουν περίπου 90 γυμνάσια και 300 επαγγελματικές σχολές στην Κροατία. Τα δημόσια σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης υπάγονται στη δικαιοδοσία της περιφερειακής κυβέρνησης, των κομητειών.

### [Τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Οι φοιτητές μπορούν να εγγραφούν σε δύο βασικά είδη τριτοβάθμιας εκπαίδευσης:

- πολυτεχνικές σχολές (veleučilište), ανώτατη εκπαίδευση
- πανεπιστήμια (sveučilište), ανώτατη εκπαίδευση

Η διάκριση μεταξύ των προγραμμάτων που διδάσκονται στα πανεπιστήμια και τα πολυτεχνεία ήταν η διάρκεια των σπουδών και η τελική κατάταξη των φοιτητών - αλλά αυτή η γραμμή θολώνει από την εφαρμογή της διαδικασίας της Μπολόνια. Προηγουμένως, το veleučilište ταίριαζε περίπου με τη γερμανική έννοια του Fachhochschule.

Τα άτομα που είχαν προηγουμένως ολοκληρώσει ένα veleučilište ταξινομήθηκαν ως έχοντες «υψηλότερη εμπειρογνωμοσύνη» (viša stručna sprema ή VŠS). Τα άτομα που είχαν προηγουμένως ολοκληρώσει ένα sveučilište ταξινομήθηκαν ως άτομα με «υψηλή εμπειρία» (visoka stručna sprema ή VSS). Ήταν επίσης δυνατή η εγγραφή σε μεταπτυχιακές σπουδές και η απόκτηση των διακρίσεων του magistar και επίσης του doktor znanosti (PhD). Οι αλλαγές του 2003 στη νομοθεσία για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, οι οποίες εισήγαγαν τη διαδικασία της Μπολόνια στην Κροατία, κατάργησαν τους όρους «ανώτερη» και «υψηλή» εμπειρογνωμοσύνη.

Μετά τη διαδικασία της Μπολόνια, τα επίπεδα εμπειρογνωμοσύνης είναι:

- Bachelor of Science και Bachelor of Arts (prvostupnik)
- Master of Science και Master of Arts (magistar)
- Master of Education (Magistar edukacije)
- Διδάκτωρ Επιστημών και Διδάκτωρ Τεχνών (doktor))

Όλα τα μεγαλύτερα πανεπιστήμια στην Κροατία αποτελούνται από ανεξάρτητες "σχολές" (κροατικό fakultet, που σημαίνει κολέγιο ή τμήμα). Κάθε ανεξάρτητο κολέγιο ή τμήμα διατηρεί τη δική του διοίκηση, επαγγελματικό προσωπικό (επίσης γνωστό ως "σχολή") και πανεπιστημιούπολη. Τα κολέγια επικεντρώνονται σε συγκεκριμένους τομείς μάθησης: Φυσικές Επιστήμες, Φιλοσοφία, Δίκαιο, Μηχανική, Οικονομία, Αρχιτεκτονική, Ιατρική και ούτω καθεξής. Αν και τα κολέγια ή τα τμήματα ενός πανεπιστημίου βρίσκονται συνήθως στην ίδια πόλη με τη διοίκηση του πανεπιστημίου, μερικές φορές δεν είναι. Για παράδειγμα, η Σχολή Μεταλλουργίας του Πανεπιστημίου του Ζάγκρεμπ βρίσκεται στην πόλη Sisak. Τα πανεπιστήμια του Ντουμπρόβνικ, του Βορρά (Κορπίνικα, Varaždin), της Πούλα, του Slavonski Brod και του Zadar δεν έχουν ανεξάρτητα κολέγια.

### [Εκπαιδευτικά Ιδρύματα]

Κατάταξη πανεπιστημίων στην Κροατία 2024

1. Πανεπιστήμιο του Ζάγκρεμπ
2. Πανεπιστήμιο του Σπλιτ
3. Πανεπιστήμιο της Ριέκα
4. J.J. Strossmayer Πανεπιστήμιο του Όσιγιεκ
5. Catholic University of Croatia
6. University of Pula
7. Πανεπιστήμιο του Ζαντάρ
8. Πανεπιστήμιο του Ντουμπρόβνικ
9. Άλγεβρα MBA, Άλγεβρα

## **[Κροατικές κρατικές εξετάσεις Matura]**

Οι κρατικές εξετάσεις Matura στην Κροατία είναι απολυτήριες εξετάσεις δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η εξέταση οργανώνεται από το Εθνικό Κέντρο Εξωτερικής Αξιολόγησης της Εκπαίδευσης. Οι μαθητές που έχουν ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευσή τους από γυμνάσια, επαγγελματικά ή καλλιτεχνικά γυμνάσια υποχρεούνται να συμμετάσχουν στις κρατικές εξετάσεις Matura.

Οι υποχρεωτικές εξετάσεις μπορούν να διεξαχθούν σε δύο επίπεδα:

- Υψηλότερο/Εκτεταμένο επίπεδο (A)
- Βασικό επίπεδο (B)

Οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν μεταξύ του βασικού και του εκτεταμένου επιπέδου της εξέτασης. Όλες οι άλλες κρατικές εξετάσεις Matura λαμβάνονται σε ένα επίπεδο.

Απαιτήσεις εισαγωγής στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Οι φοιτητές που επιθυμούν να πάνε για ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κροατία πρέπει να περάσουν τις εξετάσεις Matura - 3 υποχρεωτικές εξετάσεις και 1 προαιρετική εξέταση. Κάθε κροατικό ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης ορίζει τη δική του απαίτηση βαθμολογίας στις κρατικές εξετάσεις Matura.

Ημερομηνίες και προθεσμίες

Οι κρατικές εξετάσεις Matura διεξάγονται σε δύο περιόδους:

Θερινή περίοδος

Φθινοπωρινή περίοδος

Για τις ακριβείς ημερομηνίες και προθεσμίες των εξετάσεων State Matura, επισκεφθείτε την επίσημη ιστοσελίδα του Εθνικού Κέντρου Εξωτερικής Αξιολόγησης της Εκπαίδευσης ([www.ncvvo.hr](http://www.ncvvo.hr)).

Δομή

Οι κρατικές εξετάσεις Matura της Κροατίας περιλαμβάνουν υποχρεωτικές και προαιρετικές κρατικές εξετάσεις.

### **Υποχρεωτικά Μαθήματα**

Οι κρατικές εξετάσεις Matura αποτελούνται από τρία υποχρεωτικά μαθήματα:

1. Μαθηματικά
2. Κροατική γλώσσα
3. Μια ξένη γλώσσα

### **Κροατική γλώσσα**

Η εξέταση κροατικής γλώσσας αποτελείται από δύο ενότητες: Γραπτή εξέταση λογοτεχνίας και ένα δοκίμιο. Διάρκεια: 80 λεπτά

Είδος ερώτησης: Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και αντιστοίχισης

1. Γραπτή εξέταση λογοτεχνίας: Οι μαθητές μπορούν να εμφανιστούν για το βασικό επίπεδο ή για τη γραπτή εξέταση λογοτεχνίας εκτεταμένου επιπέδου. Αυτή η εξέταση πραγματοποιείται τον Μάιο. Η εξέταση αλλάζει κάθε χρόνο, αλλά ο κατάλογος των έργων παραμένει ο ίδιος:  
Για το βασικό επίπεδο: Η Αντιγόνη του Σοφοκλή, ο Ξένος του Καμύ, ο Posljednji Stipančić του Novak, το Κουκλόσπιτο του Ίψεν, η Lirika του Cesarić, η Pjesme του Matos, η Dubravka του Gundulić και οι Glembays του Krleža.

Για το εκτεταμένο επίπεδο: Οι θλίψεις του νεαρού Βέρθερου του Γκαίτε, ο ξένος του Καμύ, οι Γκλέμπεϊ του Κρλέζα, το έγκλημα και η τιμωρία του Ντοστογιέφσκι, η Μεταμόρφωση του Κάφκα, ο Ρούκε του Μαρίνκοβιτς, ο Ντάντο Μαρόγιε του Ντροζιτς, η επιστροφή του Φίλιπ Λατίνοβιτς, η Αντιγόνη του Σοφοκλή! Preobrazenja του Simić, Madame Bovary του Flaubert, The Black Cat του Poe, Bijeg του Nehajev, Kratki izlet του Soljan και The Catcher in the Rye του Salinger.

2. Ένα δοκίμιο: Οι μαθητές υποχρεούνται να γράψουν ένα δοκίμιο 400 έως 600 λέξεων. Διάρκεια: 160 λεπτά

### **Ξένη γλώσσα**

Μπορεί να είναι γαλλικά, αγγλικά, ισπανικά, γερμανικά ή ιταλικά. Οι μαθητές κλασικού λυκείου μπορούν να επιλέξουν Αρχαία Ελληνικά ή Λατινικά.

### **Προαιρετικές Εξετάσεις Μαθημάτων**

Η εξέταση Matura έχει τα ακόλουθα προαιρετικά μαθήματα:

Εικαστικές τέχνες, κοινωνιολογία, γεωγραφία, ηθική, βιολογία, πολιτική, μουσική, φυσική, λογική, φιλοσοφία, χημεία, θρησκευτικές σπουδές, πληροφορική, ψυχολογία και ιστορία.

Οι μαθητές μπορούν να υποβάλουν αίτηση για έξι προαιρετικές εξετάσεις εντός μίας περιόδου υποβολής αιτήσεων. Όλες οι προαιρετικές εξετάσεις κατά τη στιγμή της αξιολόγησης αξιολογούνται ισότιμα, ανεξάρτητα από το επίπεδό τους.



Διαβάστε προσεκτικά όλες τις οδηγίες και ακολουθήστε τις. Μην γυρίζετε σελίδα και μην επιλύετε εργασίες μέχρι να εγκριθούν από τον υπεύθυνο της αίθουσας εξετάσεων. Η εξέταση διαρκεί 180 λεπτά. Μπροστά από κάθε ομάδα εργασιών υπάρχει μια οδηγία για την επίλυσή τους. Διαβάστε την προσεκτικά. Γράψτε ευανάγνωστα. Οι δυσανάγνωστες απαντήσεις θα βαθμολογούνται με μηδέν (0) βαθμούς. Η σελίδα 2 αυτού του φυλλαδίου εξετάσεων δείχνει τον τρόπο βαθμολόγησης των απαντήσεων και τους τρόπους διόρθωσης των λαθών. Κατά τη διόρθωση σφαλμάτων, είναι απαραίτητο να τοποθετήσετε ένα *paraff* (αποκλειστικά μια συντομευμένη υπογραφή και όχι ένα πλήρες όνομα και επώνυμο). Κατά τον υπολογισμό, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το συνημμένο τυπολόγιο και το φύλλο εννοιών που δεν θα βαθμολογηθεί. Χρησιμοποιήστε μόνο ένα στυλό διαρκείας σε μπλε ή μαύρο χρώμα. Μόλις επιλύσετε τις εργασίες, ελέγξτε τις απαντήσεις. Σας ευχόμαστε καλή επιτυχία! Αυτό το φυλλάδιο εξετάσεων είναι 28 σελίδες, εκ των οποίων 1 είναι κενή.

### Μαθηματικά

#### I. Εργασίες πολλαπλής επιλογής.

Στις εργασίες 1 έως 24, από τις πολλαπλές απαντήσεις που προσφέρονται, μόνο μία είναι σωστή. Πρέπει να σημειώσετε τις σωστές απαντήσεις με ένα Χ στο φύλλο απαντήσεων. Η σωστή απάντηση δίνει ένα βαθμό.

1. Με τι είναι ίσο με  $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$ ;

- A.  $-5^{\frac{4}{3}}$       B.  $-5^{\frac{3}{4}}$       C.  $5^{-\frac{4}{3}}$       D.  $5^{-\frac{3}{4}}$

Λύση

$$\text{Έχω } \frac{1}{\sqrt[4]{125}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = 5^{-\frac{3}{4}}. \text{ Άρα D}$$

2. Ποια είναι η ισοδύναμη έκφραση του  $(1 - 2y)^2$  για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $y$ ;

- A.  $1 + 4y^2$       B.  $1 - 4y^2$       C.  $(2y - 1)^2$       D.  $(2y + 1)^2$

Λύση

$$\text{Έχω } (1 - 2y)^2 = [(-1)(1 - 2y)]^2 = (-1 + 2y)^2. \text{ Άρα C}$$

3. Η τιμή των εισιτηρίων κινηματογράφου αυξήθηκε κατά 25%. Με ποιο ποσοστό χρειάζεται να μειωθεί η αυξημένη τιμή του εισιτηρίου ώστε η τελική αύξηση να είναι 15% σε σχέση με την τιμή εκκίνησης;

- A. 6,25 %      B. 8 %      C. 8,7 %      D. 10 %

Λύση

Έστω  $x\%$  η ζητούμενη μείωση και  $T$  η τιμή εκκίνησης.

$$\text{Τότε έχω } (1 - x)(1 + 0,25)T = (1 + 0,15)T \Rightarrow 1 - x = \frac{115}{125} \Rightarrow x = 1 - \frac{115}{125} = \frac{10}{125} = 0,08 = 8\%. \text{ Άρα B}$$

4. Ποια είναι η πιθανότητα ότι όταν ρίχνετε τα ζάρια στις πλευρές των οποίων υπάρχουν αριθμοί από ένα έως έξι, να πέσει ένας περιττός αριθμός ή ένας αριθμός μικρότερος από τέσσερα;

- A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{5}{6}$

Λύση

Έχω ευνοϊκές περιπτώσεις τις  $x$  περιττός  $\vee x < 4 = x \in \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$ . Άρα 4 ευνοϊκές από τις συνολικά 6 περιπτώσεις. Άρα  $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . Άρα C



5. Ποια από τις παραπάνω εξισώσεις έχει ως μία λύση την  $\frac{3-\sqrt{9-4c}}{2}$  ?  
 A.  $x^2 - 3x - c = 0$     B.  $x^2 - 3x + c = 0$     C.  $x^2 + 3x - c = 0$     D.  $x^2 + 3x + c = 0$

Λύση

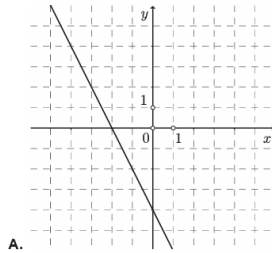
$$\text{Η Β αφού } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4c}}{2}$$

6. Πόσο είναι η διακρίνουσα της τετραγωνικής εξίσωσης  $(x + 6)^2 = 0$ .  
 A. -24    B. -6    C. 0    D. 36

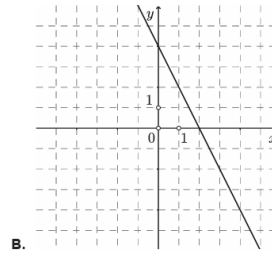
Λύση

Η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή (την  $x = -6$ ). Άρα  $\Delta=0$ . Άρα C.

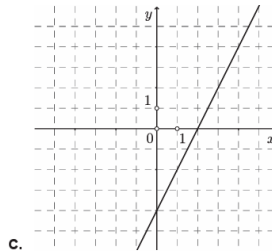
7. Στην οποία το σχήμα δείχνει ένα γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = -2x + 4$ .



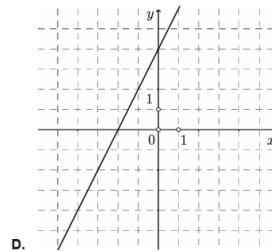
A.



B.



C.



D.

Λύση

Η συνάρτηση  $f(x) = -2x + 4$  είναι φθίνουσα, άρα η C και D απορρίπτονται. Επιπλέον  $f(2) = 0$ , άρα το γράφημά της περνά από το σημείο (2,0). Άρα B

8. Η ετήσια παραγωγή μελιού το 2017 ήταν 50 κιλά και το 2022 ήταν 150 κιλά. Η ετήσια παραγωγή μελιού αυξάνεται κατά το ίδιο ποσό κάθε χρόνο. Ποιος τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ετήσιας παραγωγής μελιού όπου  $t$  είναι ο αριθμός των ετών μετά το 2017?  
 A.  $m(t) = 3t + 50$     B.  $m(t) = 3t + 150$     C.  $m(t) = 20t + 50$     D.  $m(t) = 20t + 150$

Λύση

Κάθε χρόνο αυξάνεται γραμμικά η παραγωγή κατά  $\frac{150-50}{2022-2017} = 20$ . Άρα  $m(t) = 20t + \beta$ .

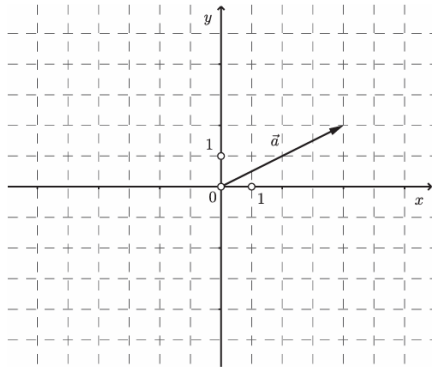
Έχω  $m(0) = 50 \Rightarrow \beta = 50$ . Άρα C.

9. Ποιο είναι το σύνολο όλων των σημείων  $T(x, a)$  για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  εάν το  $a$  είναι σταθερά;  
 A. σημείο στον τετμημένο άξονα    B. σημείο στον τεταγμένο άξονα  
 C. ευθεία  $x = a$     D. Ευθεία  $y = a$

Λύση

Στο ζητούμενο σύνολο όλα τα σημεία έχουν την ίδια τεταγμένη  $y = a$ . Άρα D

10. Η εικόνα δείχνει ένα διάνυσμα  $\vec{a}$



Ποιες είναι οι συντεταγμένες τελικού σημείου του διανύσματος  $\frac{3}{2}\vec{a}$  συστήματος συντεταγμένων;

- A. (1, 2)                      B. (2, 1)                      C. (3, 6)                      D. (6, 3)

Λύση

Έχω από την εικόνα ότι  $\vec{a} = (4, 2) \Rightarrow \frac{3}{2}\vec{a} = \frac{3}{2}(4, 2) = (6, 3)$ . Άρα D

11. Ποιο σημείο είναι το κέντρο του κύκλου που δίνεται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ ;  
A. S(-1, -3)    B. S(-1, 3)    C. S(1, -3)    D. S(1, 3)

Λύση

Έχω  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 6y + 9 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$ . Άρα έχω κύκλο με κέντρο το σημείο S(1, -3). Άρα C

12. Σε ποιο σημείο τέμνονται οι διχοτόμοι των πλευρών κάθε τριγώνου;  
A. στο κέντρο βάρους    B. στο ορθόκεντρο  
C. στο κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  
D. στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο

Λύση

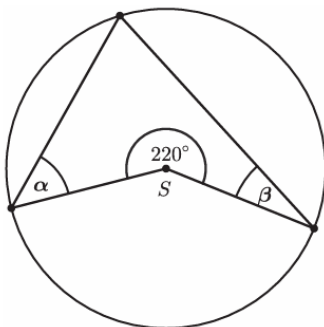
Στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο (έγκεντρο), άρα D.

13. Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι  $80 \text{ cm}^2$ . Πόσο είναι το εμβαδόν ενός όμοιου τριγώνου εάν ο συντελεστής ομοιότητας είναι  $k = 2$ ;  
A.  $10 \text{ cm}^2$  B.  $20 \text{ cm}^2$  C.  $40 \text{ cm}^2$  D.  $60 \text{ cm}^2$

Λύση

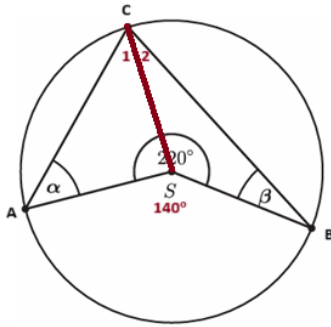
Έχω  $\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = k^2 = 4$ . Αν  $(ABC) = 80 \text{ cm}^2 \Rightarrow (A'B'C') = \frac{80}{4} = 20 \text{ cm}^2$ . Άρα B

14. Ποιο είναι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών  $\alpha$  και  $\beta$  στο σκίτσο;



- A.  $50^\circ$  B.  $70^\circ$  C.  $90^\circ$  D.  $110^\circ$

Λύση



Έχω  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ - \widehat{ASC} - \widehat{ACS} + 180^\circ - \widehat{BSC} - \widehat{BCS} = 360^\circ - \widehat{ASC} - \widehat{BSC} - \widehat{ACS} - \widehat{BCS} = 360^\circ - \widehat{ASB} - \widehat{C} = 360^\circ - 220^\circ - \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$ . Άρα Β

15. Τα μήκη είναι των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 11 cm και 17 cm. Πόσο είναι το μέτρο της μικρότερης γωνίας αυτού του τριγώνου;  
 Α.  $28^\circ 32' 51''$  Β.  $32^\circ 54' 19''$  Γ.  $40^\circ 19' 13''$  Δ.  $49^\circ 40' 47''$

Λύση

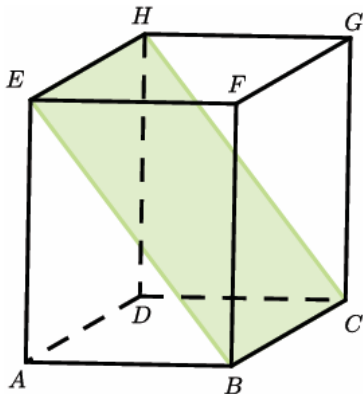
Έχω  $\tan x = \frac{11}{17} \Rightarrow x = 32,9052^\circ$ . Άρα Β

16. Σε τρίγωνο η απέναντι πλευρά από τη γωνία μέτρησης  $72^\circ$  έχει μήκος 10,3 cm. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς απέναντι από τη γωνία μέτρου  $58^\circ$  σε αυτό το τρίγωνο;  
 Α. 9,18 cm Β. 9,3 cm Γ. 11,4 cm Δ. 11,55 cm

Λύση

Από το νόμο των ημιτόνων έχω:  $\frac{10,3}{\sin 72^\circ} = \frac{x}{\sin 58^\circ} \Leftrightarrow \frac{10,3}{0,951} = \frac{x}{0,848} \Leftrightarrow x = \frac{10,3}{0,951} \cdot 0,848 = 9,184 \text{ cm}$ . Άρα Α

17. Στο σκίτσο, επισημαίνεται το επίπεδο BCH στον κύβο ABCDEFGH.



Ποια από τις παραπάνω γραμμές είναι παράλληλη με αυτό το επίπεδο; Α. FA Β. FB Γ. FE Δ. FG

Λύση

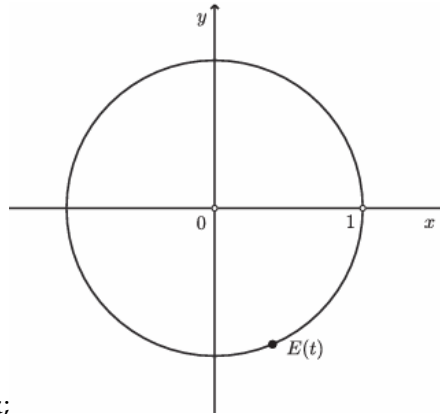
Η FA τέμνει το επίπεδο BCH στο κέντρο του τετραγώνου ABFE, η FB και FE τέμνουν του επίπεδο BCH στα σημεία Β και Ε, αντίστοιχα. Συνεπώς οι Α,Β,Γ απορρίπτονται. Άρα Δ.

18. Ποια είναι η ακτίνα της σφαίρας που λαμβάνεται με τήξη μεταλλικού κύβου μήκους 5 cm;  
 Α. 2,4 εκ. Β. 2,7 εκ. Γ. 3,1 εκ. Δ. 3,8 εκ.

Λύση

Ο όγκος του κύβου  $V$  δίνεται από την εξίσωση:  $V = a^3$ , όπου  $a$  είναι το μήκος της πλευράς της κύβου. Άρα  $V_{\text{κύβου}} = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$ . Ο όγκος της σφαίρας δίνεται από την εξίσωση:  $V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα της σφαίρας. Αφού ο όγκος του κύβου θα είναι ίσος με τον όγκο της σφαίρας λόγω του λιώσιμου, έχουμε:  $125 = \frac{4}{3} \pi r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125 \times 3}{4\pi}} = 3,101 \text{ cm}$ . Άρα Γ

19. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει για τον πραγματικό αριθμό  $t$  με τον οποίο συνδέεται



το σημείο  $E(t)$  στην εικόνα;

A.  $\sin t < \cos t \wedge \operatorname{tg} t < 0$

B.  $\sin t < \cos t \wedge \operatorname{tg} t > 0$

C.  $\sin t > \cos t \wedge \operatorname{tg} t < 0$

D.  $\sin t > \cos t \wedge \operatorname{tg} t > 0$

Λύση

Για το σημείο E έχω

$$x_E > 0 \wedge y_E < 0 \xrightarrow{x_E = \cos t, y_E = \sin t} \cos t > 0 \wedge \sin t < 0 \Rightarrow \sin t < 0 < \cos t \xrightarrow{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}} \operatorname{tg} t < 0. \text{ Άρα A}$$

20. Τι είναι το  $i^{4k-5}$  για όλους τους φυσικούς αριθμούς  $k$ ;

A.  $-i$  B.  $i$  C.  $-1$  D.  $1$

Λύση

$$\text{Έχω } i^{4k-5} = i^{4k} i^{-5} = i^{-5} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i. \text{ Άρα A}$$

21. Ποια από τις παραπάνω ακολουθίες δεν είναι αριθμητική πρόοδος;

A.  $-5, -2, 1, 4$  B.  $-3, -2, -1, 0$  C.  $1, -1, 1, -1$  D.  $3, 1, -1, -3$

Λύση

Για τις A, B και D η διαφορά των διαδοχικών όρων είναι σταθερή και ίση με 3, 1 και -2 αντίστοιχα.

Στην C η διαφορά των διαδοχικών όρων δεν είναι σταθερή (άλλοτε 2 και άλλοτε -2). Άρα C

22. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει πεδίο ορισμού το  $[3, +\infty)$ ;

A.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  B.  $f(x) = \sqrt{x-3}$  C.  $f(x) = \log(x-3)$  D.  $f(x) = |x-3|$

Λύση

Για την A έχω  $D_f = \mathbb{R} - 3$ , για την B έχω  $D_f = [3, +\infty)$ , για την C έχω  $D_f = (3, +\infty)$ , για την D έχω  $D_f = \mathbb{R}$ . Άρα C

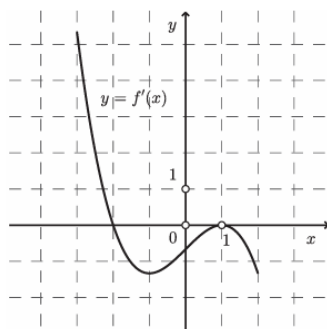
23. Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x \sin x$ ;

A.  $f'(x) = \cos x$  B.  $f'(x) = x \cos x$  C.  $f'(x) = 1 + \cos x$  D.  $f'(x) = \sin x + x \cos x$

Λύση

$$\text{Έχω } f'(x) = (x \sin x)' = (x)' \sin x + x (\sin x)' = \sin x + x \cos x. \text{ Άρα D.}$$

24. Το σχήμα δείχνει το γράφημα της παραγώγου της συνάρτησης  $f$ . Σε ποιο διάστημα η  $f$  αυξάνεται;



A.  $(-3, -2)$  B.  $(-2, -1)$  C.  $(-1, 1)$  D.  $(1, 2)$

Λύση

Η f είναι αύξουσα στο διάστημα όπου η  $f' > 0$ . Άρα A

## II. Εργασίες σύντομης απάντησης

Στις εργασίες από 25 έως 37, εισαγάγετε τις απαντήσεις στην προβλεπόμενη θέση στο φυλλάδιο εξετάσεων. Γράψτε ευανάγνωστα. Οι δυσανάγνωστες απαντήσεις θα βαθμολογούνται με μηδέν (0) βαθμούς. Η σωστή απάντηση είναι ένας βαθμός.

25. Λύστε την ανισότητα  $\frac{8x-6}{5} + 3(2x+1) \geq -2$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \frac{8x-6}{5} + 3(2x+1) \geq -2 &\Leftrightarrow 8x - 6 + 15(2x+1) \geq -10 \Leftrightarrow 8x - 6 + 30x + 15 \geq -10 \Leftrightarrow 38x \geq \\ -10 - 15 + 6 &\Leftrightarrow 38x \geq -19 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)} \end{aligned}$$

26. Εξορθολογισμός του παρονομαστή του κλάσματος  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  για όλα τα x για τα οποία ορίζεται.

Λύση

$$\text{Έχω για } x < 1 \text{ ότι } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$$

27. Η μία πλευρά του παραλληλογράμμου έχει μήκος 17 cm και οι διαγώνιοι έχουν μήκος 20 cm και 28 cm. Πόσο είναι το μέτρο της γωνίας μεταξύ των διαγωνίων αυτού του παραλληλογράμμου;

Λύση

Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Από τον νόμο των συνημιτόνων σε ένα από τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά του παραλληλογράμμου ( $l = 17\text{cm}$ ) και τις μισές διαγώνιους ( $d_1 = 10\text{cm}$  και  $d_2 = 14\text{cm}$ ), έχουμε:  $l^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos(\theta)$

$$\text{Άρα } 17^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{10^2 + 14^2 - 17^2}{2 \cdot 10 \cdot 14} \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{100 + 196 - 289}{280} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{7}{280} = 0,025 \Rightarrow \theta \approx \arccos(0,025) = \boxed{88,57^\circ}$$

28. Προσδιορίστε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού  $z = -4$ .

Λύση

$$\text{Έχω } z = -4 = 4 \cdot (-1) = \boxed{4 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)}$$

29. Εκτελέστε τις υποδεικνύμενες αλγεβρικές πράξεις και απλοποιήστε τις εκφράσεις μέχρι το τέλος για όλα τα a και b για τα οποία ορίζονται.

29.1.  $(4 - 2a + a^2)(a + 2)$

Λύση

$$\text{Έχω } (4 - 2a + a^2)(a + 2) = (a^2 - 2a + 2^2)(a + 2) = a^3 + 2^3 = \boxed{a^3 + 8}$$

29.2  $\frac{b^2-3b}{2} : \frac{b-3}{b}$

Λύση

$$\text{Έχω } \frac{b^2-3b}{2} : \frac{b-3}{b} = \frac{b^2-3b}{2} \cdot \frac{b}{b-3} = \frac{b(b-3)}{2} \cdot \frac{b}{b-3} = \boxed{\frac{b^2}{2}}$$

30. Επίλυση εργασιών.

30.1. Γράψτε την έκφραση  $\left(\frac{y^0 \cdot y^4}{y^{-5}}\right)^2$  με τη μορφή δύναμης με βάση y.

Λύση

$$\text{Έχω } \left(\frac{y^0 \cdot y^4}{y^{-5}}\right)^2 = \left(\frac{y^4}{y^{-5}}\right)^2 = \frac{y^8}{y^{-10}} = \boxed{y^{18}}$$

30.2. Καθορίστε το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος των δυνάμεων  $3^{20}, 3^{21}$ .

Λύση

$$\text{Έχω } 3^{20} + 3^{21} = (3^4)^5 + 3 \cdot (3^4)^5 = 81^5 + 3 \cdot 81^5 \equiv 1^5 + 3 \cdot 1^5 \pmod{10} \equiv 4 \pmod{10}.$$

Άρα το τελευταίο ψηφίο του αθροίσματος των δυνάμεων  $3^{20}, 3^{21}$  είναι το **4**.

31. Ο κατασκευαστής μείωσε την ποσότητα μπισκότων σε μία συσκευασία από 1000 g σε 850 g.

31.1. Πόσο τοις εκατό μειώνεται η ποσότητα μπισκότων σε μία συσκευασία;

Λύση

$$\text{Έχω μείωση } \frac{1000 - 850}{1000} \cdot 100\% = \boxed{15\%}$$

31.2. Εάν η τιμή ενός πακέτου μπισκότων παρέμεινε η ίδια και είναι 2,45 ευρώ, πόσο έχει αλλάξει η τιμή ενός κιλού μπισκότων;

Λύση

$$\text{Η νέα τιμή ενός κιλού μπισκότων είναι } 2,45 \cdot \frac{1000}{850} = 2,88\text{€}.$$

$$\text{Άρα αυξήθηκε κατά } 2,88 - 2,45 = \boxed{0,43\text{€}}$$

32. Ο πίνακας παραθέτει στοιχεία για την παραγωγή αργού πετρελαίου σε χιλιάδες τόνους σε διάστημα ενός έτους.

μήνες	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
παραγωγής σε χιλιάδες τόνους	55	54	56	57	59	57	59	58	54	57	55	57

32.1. Ποια ήταν η μέση μηνιαία παραγωγή αργού πετρελαίου εκείνο το έτος;

Λύση

$$\text{Έχω } \mu = \frac{\sum_{k=1}^{12} x_k}{12} = \frac{55+54+56+57+59+57+59+58+54+57+55+57}{12} =$$

$$\frac{56 - 1 + 56 - 2 + 56 + 56 + 1 + 56 + 3 + 56 + 1 + 56 + 3 + 56 + 2 + 56 - 2 + 56 + 1 + 56 - 1 + 56 + 1}{12} = \frac{12 \cdot 56 - 1 - 2 + 1 + 3 + 1 + 3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1}{12} = \frac{12 \cdot 56 + 6}{12} = \boxed{56,5}$$

32.2. Προσδιορίστε τη διάμεσο των δεδομένων του πίνακα.

Λύση

Ταξινομούμε τον πίνακα κατά αύξουσα σειρά

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
54	54	55	55	56	57	57	57	57	58	59	59

$$\text{Άρα } \delta = \frac{x_6 + x_7}{2} = \boxed{57}$$

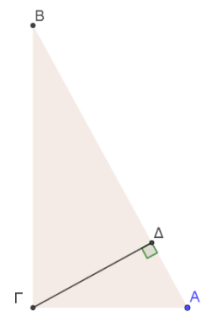
33. Επίλυση εργασιών.

33.1. Το ίχνος του ύψους από την ορθή γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει την υποτείνουσα σε τμήματα μήκους **27 cm** και **48 cm**. Πόση είναι η περίμετρος αυτού του τριγώνου;

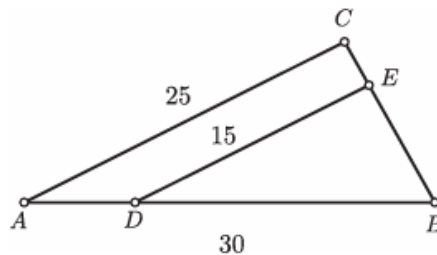
Λύση

$$\text{Έστω } AD = 27 \text{ cm} \text{ και } DB = 48 \text{ cm}. \text{ Έχω } AB = AD + DB = 75 \text{ cm}. \text{ Τότε } AG^2 = AD \cdot AB = 27 \cdot 75 = 45^2 \Rightarrow AG = 45 \text{ cm} \text{ και } BG^2 = BD \cdot AB = 48 \cdot 75 = 60^2 \Rightarrow AG = 60 \text{ cm}$$

$$\text{Άρα η περίμετρος του τριγώνου είναι } 75 + 45 + 60 = \boxed{180 \text{ cm}}$$



- 33.2. Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $ABC$  που φαίνεται στο σκίτσο είναι  $AB = 30 \text{ cm}$  και  $AC = 25 \text{ cm}$ . Στις πλευρές  $AB$  και  $BC$  υπάρχουν σημεία  $D$  και  $E$  έτσι ώστε  $DE = 15 \text{ cm}$  και  $DE \parallel AC$ . Προσδιορίστε το μήκος  $AD$ .



Λύση

Από θεώρημα Θαλή έχω

$$\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{ED}{AC} = \frac{BA - DA}{BA} \Rightarrow \frac{15}{25} = \frac{30 - DA}{30} \Rightarrow DA = \boxed{12 \text{ cm}}$$

34. Μια μπάλα ποδοσφαίρου που εκτοξεύεται από το έδαφος κινείται κατά μήκος της τροχιάς που περιγράφεται από τη συνάρτηση  $h(x) = -0.15(x - 8)^2 + 9.6$ , όπου  $x$  είναι η απόσταση της μπάλας από το σημείο βολής και  $h$  είναι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα σε μέτρα.

34.1. Πόσο ψηλά φτάνει η μπάλα;

Λύση

Η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος για  $x=8$ , οπότε  $h(8) = \boxed{9,6 \text{ m}}$

34.2. Σε ποια απόσταση πέφτει η μπάλα στο έδαφος;

Λύση

Αρκεί να λύσω την εξίσωση  $h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,15(x - 8)^2 + 9,6 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 8)^2 = \frac{9,6}{0,15} = 64 \Leftrightarrow x - 8 = \pm 8 \Leftrightarrow x = 8 \pm 8 \xrightarrow{x > 0} x = \boxed{16 \text{ m}}$$

35. Η συνάρτηση είναι  $f(x) = 7^x - 1$

35.1. Προσδιορίστε την εικόνα της συνάρτησης  $f$ .

Λύση

Έχω για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ότι  $7^x > 0 \Rightarrow 7^x - 1 > -1 \Rightarrow f(x) > -1$ .

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  $(-1, \infty)$ .

35.2. Προσδιορίστε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της συνάρτησης  $f$ .

Λύση

Έχω για  $y \in (-1, \infty)$  ότι  $y = 7^x - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 7^x \Leftrightarrow x = \log_7(y + 1)$ .

Άρα  $\boxed{f^{-1}(x) = \log_7(x + 1), x \in (-1, \infty)}$

36. Κάποιος μαθητής σημείωσε  $b$  βαθμούς στην εξέταση γνώσεων. Εάν η ίδια εξέταση επαναληφθεί μετά από  $t$  μήνες, η βαθμολογία του μαθητή στην επαναλαμβανόμενη εξέταση μπορεί να εκτιμηθεί από τη συνάρτηση  $B(t) = 4 \log_{0.25}(t + 1) + b$ , όπου  $0 \leq t \leq 24$

36.1. Πόσους βαθμούς σημείωσε ο Marco στο τεστ την πρώτη φορά αν σημείωσε 50 βαθμούς στην επαναλαμβανόμενη εξέταση μετά από 15 μήνες;

Λύση

Έχω  $B(15) = 50 \Rightarrow 4 \log_{0.25}(16) + b = 50 \Rightarrow 4 \frac{\log_4(16)}{\log_4(0.25)} + b = 50 \Rightarrow$

$$4 \cdot \frac{\log_4(4^2)}{\log_4(4^{-1})} + b = 50 \Rightarrow 4 \cdot \frac{2}{-1} + b = 50 \Rightarrow -8 + b = 50 \Rightarrow b = \boxed{58}$$

36.2. Εάν η Ana σημείωσε 60 πόντους την πρώτη φορά στο τεστ γνώσεων, μετά από πόσους μήνες θα συγκεντρώσει 54 βαθμούς στην επαναλαμβανόμενη εξέταση;

Λύση

Έχω  $B(t) = 54 \Rightarrow 4 \log_{0.25}(t + 1) + 60 = 54 \Rightarrow \log_{0.25}(t + 1) = -\frac{3}{2} \Rightarrow$

$$t + 1 = 0.25^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow t + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow t + 1 = 8 \Rightarrow t = \boxed{7} \text{ μήνες.}$$

37. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 15x^2$ .

37.1. Καθορίστε το  $x$  για το οποίο η συνάρτηση  $f$  λαμβάνει το τοπικό ελάχιστο.

Λύση

Έχω  $f'(x) = 6x^2 - 30x = 6x(x - 5)$ , με πίνακα μεταβολών

$x$	$-\infty$	$0$	$5$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$-\infty$	$f(0) = 0$	$f(5) = -125$	$+\infty$	

Άρα για  $x = 5$  η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή  $f(5) = -125$

37.2. Προσδιορίστε την κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x = -1$ .

Λύση

Έχω  $f'(-1) = 6 + 30 = \boxed{36}$

### III. Θέματα εκτεταμένης απάντησης

Στις ερωτήσεις 38, 39 και 40, γράψτε τη διαδικασία επίλυσης και την απάντηση στην προβλεπόμενη θέση στο φυλλάδιο εξετάσεων. Δείξτε όλη την εργασία σας (σκέψα, διαδικασία, υπολογισμοί). Εάν λύσετε μέρος της εργασίας απ' έξω, εξηγήστε και γράψτε πώς το κάνατε. Η σωστή απάντηση δίνει δύο, τρία ή τέσσερα σημεία.

38. Επίλυση εργασιών.

38.1. Πόσο είναι το μήκος του ύψους από την κορυφή Α στο τρίγωνο ABC εάν το  $A(7, 1)$ ,  $B(-1, 8)$  και  $C(3, -4)$ .

Λύση

Η ευθεία BC δίνεται από τον τύπο  $\varepsilon: \frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y-y_C}{x-x_C} \Leftrightarrow \frac{y-8}{x-(-1)} = \frac{y+4}{x-3} \Leftrightarrow yx - 8x - 3y + 24 = yx + 4x + y + 4 \Leftrightarrow 12x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$ .

Έχω  $v_A = d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 7 + 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{10}} = \frac{17\sqrt{10}}{10}$

38.2. Έστω τα διανύσματα  $\vec{a} = -8\vec{i} + 15\vec{j}$  και  $\vec{v} = k\vec{i} + (k-2)\vec{j}$ . Προσδιορίστε τον πραγματικό αριθμό  $k$  έτσι ώστε  $\vec{a}(\vec{a} + \vec{v}) = 350$ .

Λύση

Έχω  $\vec{a}(\vec{a} + \vec{v}) = 350 \Leftrightarrow (-8\vec{i} + 15\vec{j})(-8\vec{i} + 15\vec{j} + k\vec{i} + (k-2)\vec{j}) = 350 \Leftrightarrow$

$$(-8\vec{i} + 15\vec{j})((k-8)\vec{i} + (k+13)\vec{j}) = 350 \Leftrightarrow -8(k-8) + 15(k+13) = 350$$

$$\Leftrightarrow -8k + 64 + 15k + 195 = 350 \Leftrightarrow 7k = 91 \Leftrightarrow \boxed{k = 13}$$

39. Επίλυση εργασιών.

39.1. Τρεις διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου είναι επίσης το πρώτο, το δέκατο ένατο και το τριακοστό πρώτο μέλος μιας φθίνουσας αριθμητικής προόδου. Εάν το πρώτο μέλος της αριθμητικής προόδου είναι ο 24, καθορίστε το δέκατο μέλος αυτής της ακολουθίας.

Λύση

Έστω  $\alpha_1, \alpha_{19}, \alpha_{31}$  τα τρία μέλη της φθίνουσας αριθμητικής προόδου με διαφορά  $\omega$ . Έχω  $\alpha_1 = 24$  και  $\alpha_{19}^2 = \alpha_1 \alpha_{31} \Leftrightarrow (\alpha_1 + 18\omega)^2 = \alpha_1(\alpha_1 + 30\omega) \Leftrightarrow \alpha_1^2 + 2\alpha_1 18\omega + (18\omega)^2 = \alpha_1^2 + 30\alpha_1\omega \Leftrightarrow$

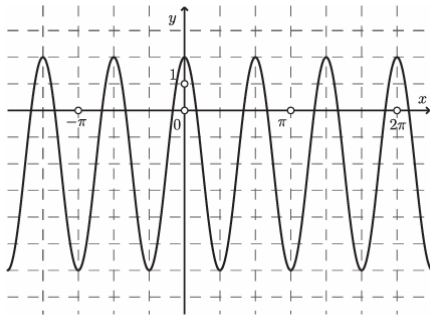
$$36\alpha_1\omega + 324\omega^2 = 30\alpha_1\omega \Leftrightarrow 36\alpha_1 + 324\omega = 30\alpha_1 \Leftrightarrow 324\omega = -6\alpha_1 \Leftrightarrow 324\omega = -144 \Leftrightarrow$$

$$\omega = -\frac{144}{324} = -\frac{4}{9}$$



Άρα  $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 24 + 9\left(-\frac{4}{9}\right) = 24 - 4 = \boxed{20}$

39.2. Το σχήμα δείχνει μια γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = A \cos(Bx) + D$ .



Καθορίστε όλες τις ρίζες της συνάρτησης  $f$ .

Λύση

Όπως φαίνεται στην εικόνα, η γραφική παράσταση της  $f$  επαναλαμβάνεται 3 φορές στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , άρα  $B = 3$ . Ακόμα βλέπω ότι  $f(0) = 2 \Rightarrow A \cos(0) + D = 2 \Rightarrow A + D = 2$ . Παρατηρώ ακόμη ότι  $f(\pi) = -6 \Rightarrow A \cos(3\pi) + D = -6 \Rightarrow -A + D = -6$ . Από το σύστημα των δυο εξισώσεων προκύπτει ότι  $A = 4, D = -2$ . Άρα  $f(x) = 4 \cos(3x) - 2$ .

Για τις ρίζες της συνάρτησης αρκεί να λύσω την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = \frac{2}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

40. Η βάση μιας πυραμίδας είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση μήκους 10 cm. Η διάμεσος από τη μια κορυφή της βάσης αυτού του τριγώνου είναι 12 cm. Όλες οι πλευρές της πυραμίδας με το επίπεδο της βάσης σχηματίζουν γωνία  $62^\circ$ . Πόσος είναι ο όγκος αυτής της πυραμίδας;

Λύση

Αφού η διάμεσος από το ένα άκρο της βάσης, έστω B, του ισοσκελούς τριγώνου είναι 12 cm, η απόσταση του άκρου αυτού από το βαρύκεντρο  $\Theta$  είναι τα  $\frac{2}{3}$  της διαμέσου, άρα  $B\Theta = 8$  cm.

Η διάμεσος από την κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος του τριγώνου, άρα  $\Theta M = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} v_A$ . Ακόμα έχω  $BM = \frac{1}{2} BC = 5$  cm.

Από Πυθαγόρειο τρίγωνο στο  $B\Theta M$  έχω :  $\Theta M = \sqrt{B\Theta^2 - BM^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$ . Άρα  $v_A = 3\Theta M = 3\sqrt{39}$ .

Άρα  $(ABC) = \frac{1}{2} \alpha \cdot v_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3\sqrt{39} = 15\sqrt{39} \text{ cm}^2$ .

Από Πυθαγόρειο τρίγωνο στο  $BAM$  έχω :

$$b = AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{9 \cdot 39 + 5^2} = \sqrt{351 + 25} = \sqrt{376}$$

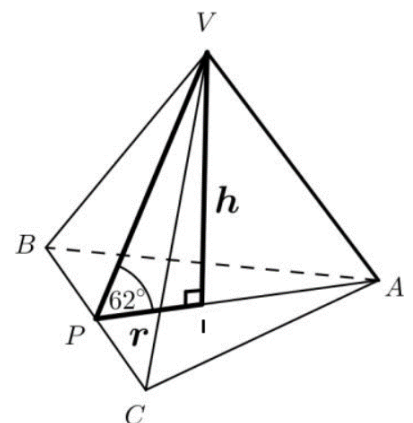
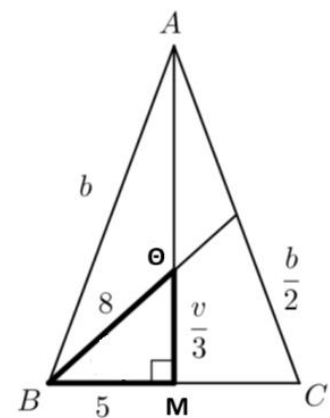
Η προβολή V της κορυφής της πυραμίδας θα είναι το έγκεντρο I της τριγωνικής βάσης. Ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο  $ABC$  έχει κέντρο το έγκεντρο του τριγώνου και ακτίνα r που δίνεται από τη σχέση  $r = \frac{(ABC)}{\tau}$  όπου  $\tau$  η ημιπερίμετρος του  $ABC$ .

Άρα έχω  $r = \frac{15\sqrt{39}}{\frac{10+2\sqrt{376}}{2}} = 3,84 \text{ cm}$

Για το ύψος της πυραμίδας έχω από το ορθογώνιο τρίγωνο  $VIP$  ότι  $\varepsilon\phi 62^\circ = \frac{VI}{PI} \Rightarrow \varepsilon\phi 62^\circ = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \cdot \varepsilon\phi 62^\circ = 7,22 \text{ cm}$

Άρα ο όγκος της πυραμίδας είναι

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15\sqrt{39} \cdot 7,22 = 5\sqrt{39} \cdot 7,22 = \boxed{225,54 \text{ cm}^3}$$



## **[Πηγές]**

[Κροατία - Βικιπαίδεια \(wikipedia.org\)](https://el.wikipedia.org)

<https://www.ncvvo.hr/probni-ispiti-u-sk-god-2022-2023/>

<https://www.ncvvo.hr/probni-ispiti-drzavne-mature-u-sk-god-2021-2022/>

<https://www.croatiaeducation.info/tests/croatian-state-matura-exams.html>

<https://www.ncvvo.hr/drzavna-matura-2022-2023-drugi-rok/>