[Η Ισπανία]
Η Ισπανία (ισπανικά: España), επίσημα το Βασίλειο της Ισπανίας (ισπανικά: Reino de España), είναι κράτος της νότιας Ευρώπης που καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της Ιβηρικής χερσονήσου. Έχει έκταση 504.645 τ.χλμ. και συνολικό πληθυσμό 48.592.909 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για τον Ιανουάριο του 2024. Πρωτεύουσα και μεγαλύτερη πόλη της Ισπανίας, είναι η Μαδρίτη.
Πολιτισμικά η Ισπανία χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη διάφορων πολιτισμικών παραδόσεων που προέκυψαν λόγω της διαφορετικής ιστορικής εξέλιξης των εδαφών της. Η Ισπανία είναι κατεξοχήν πολύγλωσσο κράτος, που περιλαμβάνει τέσσερις ευρέως διαδεδομένες και κανονικοποιημένες γλώσσες (τα ισπανικά, τα καταλανικά, τα βασκικά και τα γαλικιανά) και τρεις λοιπές μειοψηφικές γλώσσες (τα αραγωνικά, τα αρανικά και τα λεονικά). Οι λογοτεχνικές παραδόσεις των τεσσάρων κυρίαρχων γλωσσών συνθέτουν μια πλούσια λογοτεχνική κληρονομιά που εκτείνεται από τον μεσαίωνα μέχρι τις μέρες μας.
Όσον αφορά τις λοιπές πολιτισμικές εκφράσεις, η Ισπανία διαθέτει μια απέραντη κληρονομιά που περιλαμβάνει σπουδαία μνημεία και έργα τέχνης. Ως χώρα έχει 44 Μνημεία Παγκόσμιας Κληρονομιάς. Από αρχιτεκτονικής άποψης ξεχωρίζουν τα μνημεία του αραβικού παρελθόντος όπως η Αλάμπρα ενώ τα μουσεία της φιλοξενούν έργα των σημαντικότερων ζωγράφων του ισπανικού Μπαρόκ όπως τον Ντιέγο Βελάθκεθ και τον Δομήνικο Θεοτοκόπουλο. Η φολκλορική της παράδοση παρουσιάζει χορούς όπως το φλαμένκο, τη σαρδάνα και τη χότα και κοινωνικές πρακτικές και γιορτές όπως τους castellers, τις falles ή τις γιορτές στην Ανδαλουσία. Ως αποτέλεσμα είναι μία από τις χώρες που δέχεται τον μεγαλύτερο αριθμό τουριστών αλλά και φοιτητών του προγράμματος ανταλλαγής «Εράσμους».

[Η εκπαίδευση στην Ισπανία]
Η εκπαίδευση στην Ισπανία είναι υποχρεωτική και δωρεάν για όλα τα παιδιά ηλικίας μεταξύ 6 και 16 ετών και υποστηρίζεται από την εθνική κυβέρνηση μαζί με τις κυβερνήσεις καθεμιάς από τις 17 αυτόνομες κοινότητες της χώρας.
Στην Ισπανία, η πρωτοβάθμια και η δευτεροβάθμια εκπαίδευση θεωρούνται βασική (υποχρεωτική) εκπαίδευση. Αυτά είναι το Primaria (6-12 ετών), το οποίο είναι το ισπανικό ισοδύναμο του δημοτικού σχολείου και του πρώτου έτους του γυμνασίου, και το Secundaria (12-16 ετών), το οποίο θα ήταν ένα μείγμα των δύο τελευταίων ετών του γυμνασίου και των δύο πρώτων ετών του γυμνασίου στις Ηνωμένες Πολιτείες.
Από το 2020-21, η Ισπανία έχει 9,909,886 μαθητές. Η μεγαλύτερη ομάδα αντιστοιχεί στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, με 4.654.727 μαθητές, ακολουθούμενη από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με 2.730.036 και τους φοιτητές πανεπιστημίου με 1.633.358. Η μικρότερη ομάδα είναι εκείνοι στην επαγγελματική εκπαίδευση, με 887.710 μαθητές.
Το ισπανικό απολυτήριο ή Bachillerato αποτελείται από δύο προαιρετικά πρόσθετα τελευταία έτη στο γυμνάσιο (υποχρεωτική εκπαίδευση έως ότου οι μαθητές είναι 16 ετών), που απαιτούνται εάν ο μαθητής θέλει να παρακολουθήσει το Πανεπιστήμιο. Μόλις οι μαθητές τελειώσουν το Bachillerato, μπορούν να λάβουν τις εξετάσεις εισόδου στο πανεπιστήμιο, Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), που ονομάζεται ευρέως Selectividad. Το Selectividad αποτελείται από δύο μέρη: το "γενικό" τμήμα, το οποίο είναι υποχρεωτικό για όλους, και το "ειδικό" τμήμα, το οποίο αποτελείται από θέματα εστίασης με βάση τα ακαδημαϊκά ενδιαφέροντα των μαθητών και είναι θεωρητικά προαιρετικό.

[Σχολεία]
Τα σχολεία στην Ισπανία μπορούν να χωριστούν σε 3 κατηγορίες:
- Δημόσια σχολεία (colegios públicos)
- Ιδιωτικά σχολεία χρηματοδοτούμενα από το κράτος (colegios concertados)
- Αμιγώς ιδιωτικά σχολεία (colegios privados)

Σύμφωνα με συνοπτικά στοιχεία για το έτος 2008-2009από το υπουργείο, τα δημόσια σχολεία εκπαίδευσαν το 67,4%, τα ιδιωτικά αλλά κρατικά χρηματοδοτούμενα σχολεία το 26,0% και τα αμιγώς ιδιωτικά σχολεία το 6,6% των μαθητών το προηγούμενο έτος. Υπάρχουν ιδιωτικά σχολεία για όλο το φάσμα της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Σε αυτά, οι γονείς πρέπει να πληρώνουν ένα

μηνιαίο/τριμηνιαίο/ετήσιο τέλος. Τα περισσότερα από αυτά τα σχολεία διοικούνται από θρησκευτικά τάγματα και περιλαμβάνουν επίσης σχολεία ενός φύλου.
Όλη η μη πανεπιστημιακή κρατική εκπαίδευση είναι δωρεάν στην Ισπανία, αλλά οι γονείς πρέπει να αγοράσουν (ή να συνεισφέρουν σε) τα βιβλία και τα υλικά των παιδιών τους. (Επιδοτήσεις, δάνεια ή πωλήσεις μεταχειρισμένων βιβλίων προσφέρονται από τις αυτόνομες περιφέρειες της Ισπανίας (Comunidades), σε ορισμένα σχολεία και από ορισμένα τοπικά συμβούλια.) Αυτό, κατ' όνομα τουλάχιστον, ισχύει και για τα colegios concertados. Πολλά σχολεία είναι κοντσερτάδο, χρηματοδοτούμενα από το κράτος μέχρι το τέλος της Πρωτοβάθμιας αλλά καθαρά ιδιωτικά για τα χρόνια του γυμνασίου. Αυτή η μείωση του ποσοστού των μαθητών στην educación concertada συνοδεύεται από αυξήσεις περίπου ίσου μεγέθους στο ποσοστό τόσο της κρατικής όσο και της αμιγώς ιδιωτικής εκπαίδευσης για το ESO και το Bachillerato.
Τα σχολεία παρέχουν μια λίστα με το τι απαιτείται στην αρχή κάθε σχολικού έτους και η οποία θα περιλαμβάνει υλικό τέχνης και χειροτεχνίας, καθώς και βιβλία κειμένου και ασκήσεων. Από το 2009, ο αριθμός αυτός ήταν περίπου 300 £ και το 2011 ήταν κοντά στις 500 £. Από το 2011, το κόστος των βιβλίων ήταν κατά μέσο όρο 170 ευρώ για παιδιά προσχολικής ηλικίας και 300 ευρώ για μαθητές δημοτικού σχολείου. Σε ορισμένες περιοχές, η αυτόνομη κυβέρνηση δίνει μάρκες για να τις ανταλλάξει σε βιβλιοπωλεία δωρεάν. Αυτό προσαρμόστηκε το 2006 σε περιφέρειες όπως η Ανδαλουσία, όπου οι μαθητές ηλικίας από 3 έως 10 ετών θα λάβουν τα βιβλία δωρεάν, και τα επόμενα χρόνια αναμένεται για όλα τα υποχρεωτικά έτη. Η σχολική στολή δεν φοριέται συνήθως στα δημόσια σχολεία, αλλά συνήθως φοριέται στα ιδιωτικά σχολεία.
Υπάρχει μια σε μεγάλο βαθμό ομοιόμορφη διαδικασία εισαγωγής για κρατικά χρηματοδοτούμενα σχολεία, τόσο colegios públicos όσο και colegios concertados. Οι κύριες διαδικασίες εισδοχής για τους μαθητές που επιθυμούν να εγγραφούν σε σχολείο το φθινόπωρο πραγματοποιούνται την άνοιξη του εν λόγω έτους.
Οι γονείς μπορούν να επιλέξουν το σχολείο στο οποίο επιθυμούν να στείλουν το παιδί τους. Δεν είναι ασυνήθιστο να υπάρχουν ανεπαρκείς θέσεις σε ένα δημοφιλές σχολείο για όλα τα παιδιά για τα οποία ζητούνται θέσεις. Στις περιπτώσεις αυτές, οι θέσεις κατανέμονται σύμφωνα με μάλλον αυστηρά καθορισμένα κριτήρια εισδοχής, όπως ορίζονται στο παράρτημα IX της απόφασης για τη θέσπιση της διαδικασίας.

[Το σύστημα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης της Ισπανίας]
Το ισπανικό εκπαιδευτικό σύστημα υποστηρίζεται από την εθνική κυβέρνηση και τις επιμέρους κυβερνήσεις καθεμιάς από τις 19 αυτόνομες περιοχές της Ισπανίας.
Το σύστημα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης της Ισπανίας αποτελείται από 87 πανεπιστήμια (50 δημόσια και 37 ιδιωτικά), 480 ερευνητικά κέντρα και 67 επιστημονικά και τεχνολογικά πάρκα. Ως κράτος μέλος του Ευρωπαϊκού Χώρου Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (EHEA), όλα τα επίσημα πτυχία που απονέμονται από ισπανικά πανεπιστήμια αναγνωρίζονται για ακαδημαϊκούς και επαγγελματικούς σκοπούς σε 53 χώρες παγκοσμίως, 45 από τις οποίες είναι ευρωπαϊκές.

[Εκπαιδευτικά Ιδρύματα]
Από τα 87 πανεπιστήμια τα 31 περιλαμβάνονται στα 1200 κορυφαία πανεπιστήμια στον κόσμο σύμφωνα με την QS World University Rankings 2023 (12 στα 500 κορυφαία στον κόσμο, 12 στα 501-1000 καλύτερα πανεπιστήμια και 7 στα 1001-1200). Στην Ισπανία βρίσκεται και ένα από τα παλαιότερα πανεπιστήμια στον κόσμο, το Universidad de Salamanca, το οποίο χρονολογείται από το 1218.
Παρακάτω η λίστα με τα κορυφαία ισπανικά πανεπιστήμια:

- Universitat Autònoma de Barcelona (Βαρκελώνη)
- Universitat de Barcelona (Βαρκελώνη)
- Universidad Autónoma de Madrid (Μαδρίτη)
- Complutense University of Madrid (Μαδρίτη)
- Universitat Pompeu Fabra (Βαρκελώνη)
- University of Navarra (Παμπλόνα)
- Universidad Carlos III de Madrid (UC3M) (Μαδρίτη)

- Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech (UPC) (Βαρκελώνη)
- IE University (Σεγόβια)
- Universitat Politecnica de Valencia (Βαλένθια)
- Universidad Politécnica de Madrid (UPM) (Μαδρίτη)
- University of Granada (Γρανάδα)
- Universidad de Alcalá (Αλκαλά ντε Ενάρες)
- Universidad de Zaragoza (Σαραγόσα)
- Universidad de Sevilla (Σεβίλλη)
- Universitat de Valencia (Βαλένθια)
- Universidad Pontificia Comillas (Μαδρίτη)
- University of Salamanca (Σαλαμάνκα)
- Universitat Ramon Llull (Βαρκελώνη)

Πέραν των πανεπιστημιακών ιδρυμάτων, στην Ισπανία υπάρχουν επίσης, Πολυτεχνικές Σχολές, Σχολές Διοίκησης Επιχειρήσεων (Business Schools), Τεχνών και Κολλέγια. Όσον αφορά τα Business Schools, οι καλύτερες σχολές είναι IESE Business School, IE Business School, Esade Business School και Eada Business School Barcelona, σύμφωνα με τους Financial Times.

[Η εξέταση επιλογής (SELECTIVIDAD)]

Η εξέταση επιλογής (SELECTIVIDAD) είναι μια γραπτή δοκιμασία που δίνουν μαθητές που επιθυμούν να έχουν πρόσβαση σε πανεπιστημιακούς κύκλους ή κύκλους σπουδών ή κατάρτισης σε δημόσια και ιδιωτικά πανεπιστήμια στην Ισπανία. Αυτή η εξέταση αποτελεί μέρος του Baccalaureate Assessment for University Access (EBAU) (η οποία παίρνει άλλα ονόματα ανάλογα με την αυτόνομη κοινότητα) στην οποία, εκτός από την SELECTIVIDAD, υπολογίζονται τα δύο έτη απολυτηρίου. Επιπλέον, οι μαθητές CFGS (κύκλοι κατάρτισης υψηλότερου επιπέδου) μπορούν να λάβουν τη συγκεκριμένη φάση αυτών των εξετάσεων προκειμένου να έχουν πρόσβαση σε πτυχία με περιορισμένες θέσεις.

Μέχρι τη μεταρρύθμισή της το 2010, η εξέταση αποτελούνταν από τουλάχιστον 20 γραπτές εξετάσεις. Από το ακαδημαϊκό έτος 2009/2010 και μετά, διαρθρώνεται σε δύο φάσεις, μια υποχρεωτική γενική φάση που αποτελείται από 4 ασκήσεις (5 στην περίπτωση των αυτόνομων κοινοτήτων όπου υπάρχουν συνεπίσημες γλώσσες) και μια ειδική εθελοντική φάση 4 ασκήσεων κατ' ανώτατο όριο (ή 3 στην περίπτωση ορισμένων κοινοτήτων), εκ των οποίων υπολογίζονται μόνο οι δύο που παρέχουν τον καλύτερο βαθμό εισαγωγής.

Οι εξετάσεις διεξάγονται στο πανεπιστήμιο στο οποίο υπάγεται το κέντρο σπουδών όπου μεταφέρθηκε το σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συνήθως για τρεις ημέρες στα μέσα Ιουνίου στη συνήθη κλήση και τον Σεπτέμβριο ή τον Ιούλιο σε ορισμένες κοινότητες στην έκτακτη πρόσκληση, την οποία ο φοιτητής μπορούσε να λάβει εάν δεν περάσει την πρώτη ή εάν ήθελε να αυξήσει τον βαθμό του. Για να αποκτήσει πρόσβαση στο πανεπιστήμιο, είναι απαραίτητο να περάσει την SELECTIVIDAD και, ανάλογα με τον βαθμό που αποκτήθηκε στο EBAU, ο φοιτητής μπορεί να επιλέξει το πανεπιστημιακό πτυχίο με όριο θέσεων που θέλει να λάβει σύμφωνα με το όριο (ελάχιστο βαθμό που χρησιμοποιείται ως όριο πρόσβασης σε ένα ορισμένο πτυχίο πριν καταληφθούν όλες οι προσφερόμενες θέσεις) που έχει καθοριστεί για κάθε πτυχίο και πανεπιστήμιο. Αυτό το όριο ποικίλλει από έτος σε έτος και από πανεπιστήμιο σε πανεπιστήμιο.

Το τεστ ονομάζεται EBAU (Baccalaureate Assessment for University Access) στις Αστούριες, τις Καναρίους Νήσους, την Κανταβρία, την Καστίλλη και Λεόν, την Εξτρεμαδούρα, τις Βαλεαρίδες Νήσους, τη Λα Ριόχα και τη Μούρθια. EvAU (University Access Assessment) στην Αραγονία, την Καστίλλη-Λα Μάντσα, τη Ναβάρα και τη Μαδρίτη· PEvAU (Baccalaureate Assessment Test for University Access and Admission) στην Ανδαλουσία· ABAU (de Avaliación de Bacharelato para o Acceso a Universidade) στη Γαλικία· και τα HAE (Αξιολόγηση Πανεπιστημιακής Πρόσβασης) στη Χώρα των Βάσκων. Προηγουμένως, ονομαζόταν PAU και PAEU (για εισαγωγικές εξετάσεις πανεπιστημιακών σπουδών).

Κατά το ακαδημαϊκό έτος 2009/2010, εισήχθη ένα νέο μοντέλο εισαγωγικών εξετάσεων στο πανεπιστήμιο, το οποίο αποτελείται από δύο μέρη.

Υποχρεωτική φάση
Ονομάζεται επίσης γενική φάση ή φάση πρόσβασης.
Αυτή είναι η φάση που πρέπει απαραίτητα να ακολουθήσετε εάν θέλετε να αποκτήσετε πρόσβαση στο πανεπιστήμιο και προέρχεστε από το Baccalaureate.
Στην υποχρεωτική φάση θα μπορείτε να λάβετε μέγιστη βαθμολογία 10 βαθμών.
Αποτελείται από 4 ή 5 δοκιμασίες, ανάλογα με την αυτόνομη κοινότητα, που αντιστοιχούν σε 3 ή 4 υποχρεωτικά μαθήματα και ένα βασικό μάθημα του 2ου έτους του Baccalaureate.

- Ισπανική Γλώσσα και Λογοτεχνία II. Συμπεριλάβετε ένα σχόλιο σε ένα επεξηγηματικό κείμενο. Αξιολογεί τις επικοινωνιακές δεξιότητες, τη γνώση της γλώσσας και των λογοτεχνικών κινημάτων.
- Ιστορία της Ισπανίας ή Ιστορία της Φιλοσοφίας. Θα πρέπει να επιλέξετε μεταξύ σχολιασμού ιστορικών γεγονότων στο πλαίσιό τους ή ερμηνείας κειμένων σύμφωνα με τις προσεγγίσεις των πιο σημαντικών φιλοσόφων.
- Πρώτη Ξένη Γλώσσα II. Μπορείτε να επιλέξετε μεταξύ Αγγλικών, Γαλλικών, Γερμανικών, Ιταλικών ή Πορτογαλικών (ανάλογα με την κοινότητά σας). Σκοπός της δοκιμασίας αυτής είναι η αξιολόγηση της προφορικής και γραπτής κατανόησης, καθώς και της προφορικής και γραπτής έκφρασης στη γλώσσα αυτή.
- Βασικό μάθημα απολυτηρίου (ανάλογα με την κοινότητα, αυτό που λαμβάνεται στο 2ο έτος ή να επιλεγεί ελεύθερα). Οι επιλογές είναι:
    - Μουσική Ανάλυση II
    - Παραστατικές Τέχνες II
    - Γενικές Επιστήμες
    - Καλλιτεχνικό Σχέδιο II
    - Λατινικά II
    - Μαθηματικά II
    - Μαθηματικά Εφαρμοσμένα στις Κοινωνικές Επιστήμες II
- Συνεπίσημη γλώσσα και λογοτεχνία (μόνο για τις αυτόνομες κοινότητες με άλλη επίσημη γλώσσα). Αξιολογεί τις γλωσσικές δεξιότητες και τις λογοτεχνικές γνώσεις της γλώσσας.

Εθελοντική φάση
Σας επιτρέπει να αυξήσετε το βαθμό εισαγωγής στο βαθμό σε 14 μονάδες για να έχετε περισσότερες πιθανότητες να γίνετε δεκτοί στο επιθυμητό μάθημα.
Πρόσωπα με προσόντα:

- Απολυτήριο (και ισοδύναμα προσόντα)
- Τεχνικός Ανώτερης Επαγγελματικής Κατάρτισης (FP)
- Ανώτερος Τεχνικός Πλαστικών Τεχνών και Σχεδιασμού (APyD)
- Ανώτερος Αθλητικός Τεχνικός

Αν και δεν είναι υποχρεωτικό να κάνετε την εθελοντική φάση, συνιστάται ιδιαίτερα. Δεδομένου ότι μπορείτε να προσθέσετε επιπλέον πόντους απαραίτητους για να πάρετε μια θέση σε αγώνες με μεγάλη ζήτηση για θέσεις.
Σε αυτή τη φάση μπορείτε να δώσετε εξετάσεις σε οποιοδήποτε από τα ακόλουθα μαθήματα Baccalaureate, μέχρι το πολύ 4 (εκτός από την Καταλονία, τις Βαλεαρίδες Νήσους και τη Ναβάρα, όπου επιτρέπονται το πολύ 3):

- Μουσική Ανάλυση II
- Παραστατικές Τέχνες II
- Βιολογία
- Γενικές Επιστήμες
- Χορωδία και Φωνητική Τεχνική II
- Καλλιτεχνικό Σχέδιο II
- Τεχνικό Σχέδιο II
- Τεχνικό Σχέδιο Εφαρμοσμένο στις Πλαστικές Τέχνες και το Σχέδιο II
- Σχέδιο

- Σχεδιασμός Επιχειρηματικού & Επιχειρηματικού Μοντέλου
- Φυσική
- Καλλιτεχνικές βασικές αρχές
- Γεωγραφία
- Γεωλογία και Περιβαλλοντικές Επιστήμες
- Ελληνικά II
- Ιστορία της Τέχνης
- Ιστορία της Ισπανίας
- Ιστορία της Φιλοσοφίας
- Ιστορία της Μουσικής και του Χορού
- Δραματική Λογοτεχνία
- Λατινικά II
- Μαθηματικά II
- Μαθηματικά Εφαρμοσμένα στις Κοινωνικές Επιστήμες II
- Πολιτιστικά και καλλιτεχνικά κινήματα
- Χημεία
- Δεύτερη Ξένη Γλώσσα (εκτός από αυτή που επιλέγεται στην υποχρεωτική φάση)
- Τεχνικές Γραφικής-Πλαστικής Έκφρασης
- Τεχνολογία & Μηχανική II

Πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη ότι υπάρχουν μαθήματα για τα οποία οι μαθητές δεν μπορούν πλέον να δώσουν εξετάσεις, ανάλογα με τους κανόνες της αυτόνομης κοινότητας στην οποία διεξάγονται οι εξετάσεις. Για παράδειγμα, στην κοινότητα Castilla y León, δεν επιτρέπεται πλέον η διεξαγωγή εξετάσεων στη Βιομηχανική Τεχνολογία II, την Ηλεκτρολογία ή τη Μηχανική.

Στη συγκεκριμένη φάση μπορείτε να επιλέξετε τα θέματα που σας ταιριάζουν καλύτερα. Επιλέξτε αυτά που έχουν το καλύτερο βάρος για τον υπολογισμό του βαθμού εισαγωγής σας, ανεξάρτητα από τον τύπο του απολυτηρίου που έχετε σπουδάσει. Μπορείτε επίσης να αποφασίσετε να συμμετάσχετε στις εξετάσεις σε βασικά μαθήματα στην εθελοντική φάση, εφόσον δεν τα έχετε επιλέξει στην υποχρεωτική φάση.

Το βασικό θέμα της μεθόδου που παίρνετε στην υποχρεωτική φάση μπορεί επίσης να μετρήσει στην εθελοντική φάση. Με άλλα λόγια, αυτό το τεστ μπορεί να αθροιστεί δύο φορές για τον υπολογισμό του βαθμού εισαγωγής. Κάθε αυτόνομη κοινότητα ενημερώνει για αυτή τη δυνατότητα στις οδηγίες που δημοσιεύει σχετικά με τη δοκιμή.

Η διάρκεια κάθε εξέτασης είναι μιάμιση ώρα.

Ορισμένες εξετάσεις θα απαιτήσουν τη χρήση υλικών όπως χάρακες, αριθμομηχανή ή λεξικό.

Χαρακτηρισμός του υποχρεωτικού σταδίου

Κάθε μία από τις ασκήσεις της γενικής φάσης βαθμολογείται μεταξύ 0 και 10 βαθμών με δύο δεκαδικά ψηφία και ο συνολικός βαθμός θα είναι ο αριθμητικός μέσος όρος όλων των ασκήσεων που εκφράζονται σε αριθμητική μορφή από 0 έως 10 μονάδες με τρία δεκαδικά ψηφία. Για να περάσετε, είναι απαραίτητο να αποκτήσετε βαθμό ίσο ή μεγαλύτερο από 5 ως αποτέλεσμα του σταθμισμένου μέσου όρου του 60% του μέσου βαθμού του απολυτηρίου και του 40% του βαθμού της γενικής φάσης, υπό την προϋπόθεση ότι έχει επιτευχθεί τουλάχιστον 4 σε αυτή τη γενική φάση. Μόλις εγκριθεί, η ισχύς αυτού του χαρακτηρισμού είναι αόριστη.

[Ύλη]

Οι ασκήσεις των πανεπιστημιακών εισαγωγικών εξετάσεων στα μαθηματικά II σε όλη την Ισπανία περιλαμβάνουν τις παρακάτω ενότητες:

- Άλγεβρα.
- Γεωμετρία στο χώρο.
- Ανάλυση.
- Πιθανότητες και στατιστική.

Οι ασκήσεις των πανεπιστημιακών εισαγωγικών εξετάσεων στα Εφαρμοσένα μαθηματικά για τις Κοινωνικές Επιστήμες II σε όλη την Ισπανία περιλαμβάνουν τις παρακάτω ενότητες:

- Αριθμοί και άλγεβρα.
- Ανάλυση.
- Στατιστική και πιθανότητες.

[Η αμφιλεγόμενη εξέταση Μαθηματικών II της Επιλεκτικότητας στην Ανδαλουσία]

Εφημερία El Mundo (Ο ΚΟΣΜΟΣ)

Πέμπτη, 15 Ιούνιος 2023 - 09:17 πμ

Δεν είναι η πρώτη φορά που υπάρχει διαμάχη με τις εξετάσεις Μαθηματικών των εισαγωγικών εξετάσεων του Πανεπιστημίου στην Ανδαλουσία. Αυτό το τεστ έχει ήδη τη φήμη ότι αποτελεί πραγματική πρόκληση για τους μαθητές λόγω της δυσκολίας του και αυτό το 2023 δεν ήταν λιγότερο, αφού σύμφωνα με πολλούς μάρτυρες στα κοινωνικά δίκτυα, πολλοί μαθητές έφυγαν από τις εξετάσεις κλαίγοντας.

Το τεστ είχε 8 ασκήσεις κατανεμημένες σε δύο μπλοκ των 4 προβλημάτων το καθένα. Σε αυτούς, οι πίνακες, τα διανύσματα, το σημείο P ή η εύρεση της αρχικής συνάρτησης F ήταν οι προκλήσεις που έπρεπε να ξεπεραστούν και πολλοί μαθητές θεώρησαν ότι ήταν πολύ «περίπλοκο» και ότι είναι «κρίμα» για όλα όσα έχουν εργαστεί κατά τη διάρκεια του μαθήματος.

"Έχουν συμπεριλάβει λειτουργίες που πραγματοποιούνται εν παρόδω στο δεύτερο έτος του Baccalaureate. Τα ολοκληρώματα που μας έχουν βάλει, για παράδειγμα, τα έχουμε δει μόνο μια μέρα στην τάξη!», παραπονέθηκε ένας μαθητής.

Άλλοι θεώρησαν το τεστ ως «εισαγωγικές εξετάσεις της NASA» ή ότι προέρχεται από «αεροδιαστημική μηχανική». Ένας άλλος φοιτητής έχει ευθέως αποφανθεί ότι «η εξέταση μαθηματικών της επιλεκτικότητας στην Ανδαλουσία έχει αφαιρέσει το όνειρο πολλών μαθητών».

Ordinary Mathematics II στην Ανδαλουσία, Θέουτα, Μελίλια και κέντρα στο Μαρόκο
Δοκιμασία αξιολόγησης απολυτηρίου για εξετάσεις πρόσβασης και εισαγωγής στα πανεπιστήμια.
Ακαδημαϊκό έτος 2022-2023
Μαθηματικά II

Οδηγίες:
α) Διάρκεια: 1 ώρα και 30 λεπτά
β) Η εξέταση αυτή αποτελείται από 8 ασκήσεις κατανεμημένες σε 2 ενότητες (Α και Β) των 4 ασκήσεων η κάθε μία.
γ) Κάθε άσκηση έχει μέγιστη τιμή 2,5 βαθμών.
δ) Θα απαντηθούν μόνο τέσσερις ασκήσεις, ανεξάρτητα από το μπλοκ στο οποίο ανήκουν. Σε περίπτωση απάντησης σε περισσότερες από τέσσερις ασκήσεις, μόνο οι τέσσερις που εμφανίζονται κατά σειρά στην πρώτη θέση θα διορθωθούν.
ε) Επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανών που δεν είναι προγραμματιζόμενες, με γραφικές παραστάσεις, ή ικανές να αποθηκεύουν ή να μεταδίδουν δεδομένα. Ωστόσο, όλες οι διαδικασίες που οδηγούν σε αποτελέσματα πρέπει να αιτιολογούνται επαρκώς.
στ) Στη μέγιστη βαθμολογία κάθε άσκησης, περιλαμβάνονται 0,25 βαθμοί για την αξιολόγηση της σωστής έκφρασης των διαδικασιών και μεθόδων που χρησιμοποιούνται.

ΜΠΛΟΚ Α
ΑΣΚΗΣΗ 1 (2,5 βαθμοί)
Εξετάστε τη συνεχή συνάρτηση $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}}$
α) [1,5 βαθμοί] Μελετήστε και βρείτε τα μέγιστα και ελάχιστα $\boldsymbol{f}$ (τετμημένες όπου λαμβάνονται και τιμές που επιτυγχάνονται).
β) [1 βαθμός] Υπολογίστε το όριο $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)}$
Λύση
α) Έχω $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{-(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{-e^x+e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}}$ με $\boldsymbol{f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -e^x + e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^x \Leftrightarrow -x \geq x \Leftrightarrow x \leq 0}$, ενώ $\boldsymbol{f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0}$. Άρα η συνεχής f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \boldsymbol{0}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\boldsymbol{0}, +\infty)$ και παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο για $\boldsymbol{x = 0}$ την τιμή $\boldsymbol{f(0) = \frac{1}{e^0+e^{-0}} = \frac{1}{2}}$. Ελάχιστα δεν έχει.
β) Έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty+0} = \frac{\infty}{\infty} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty-0} = \frac{\infty}{\infty} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2}{\infty-0} = \boxed{0}}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2.5 βαθμοί)
Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{-2, 2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x + 5}$.
α) [1,5 βαθμοί] Προσδιορίστε την τετμημένη των σημείων, εάν υπάρχουν, όπου η κλίση της εφαπτομένης ευθείας συμπίπτει με την κλίση της γραμμής που διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{A\left(-2, f(-2)\right)}$ και $\boldsymbol{B\left(2, f(2)\right)}$.
β) [1 βαθμός] Προσδιορίστε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας και την εξίσωση της κανονικής ευθείας με τη γραφική παράσταση $\boldsymbol{f}$ στο σημείο καμπής.
Λύση
α) Αρκεί να λύσω την εξίσωση $\boldsymbol{f'(x) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = \frac{9-1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 = 4 \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}}}$
β) Έχω $\boldsymbol{f''(x) = 6x}$ με $\boldsymbol{f''(x) = 0}$ για $\boldsymbol{x = 0}$ και το πρόσημο της $\boldsymbol{f''}$ να αλλάζει εκατέρωθεν του $\boldsymbol{0}$. Άρα στο $\boldsymbol{x = 0}$ η $\boldsymbol{f}$ παρουσιάζει σημείο καμπής. Για την εφαπτομένη στο σημείο καμπής λοιπόν έχουμε
$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} f(0) = 0^3 - 2\cdot 0 + 5 = 5 \\ f'^{(0)} = 3\cdot 0^2 - 2 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 5 = -2(x-0) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 5}}$$
ενώ για την κανονική έχουμε $\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} f(0) = 5 \\ f'(0) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 5 = -\frac{1}{-2}(x-0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + 5}}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2,5 βαθμοί)

Εξετάστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = x|x-1|}$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής και την εφαπτομένη ευθεία της στο σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{x\ =\ 0}$.

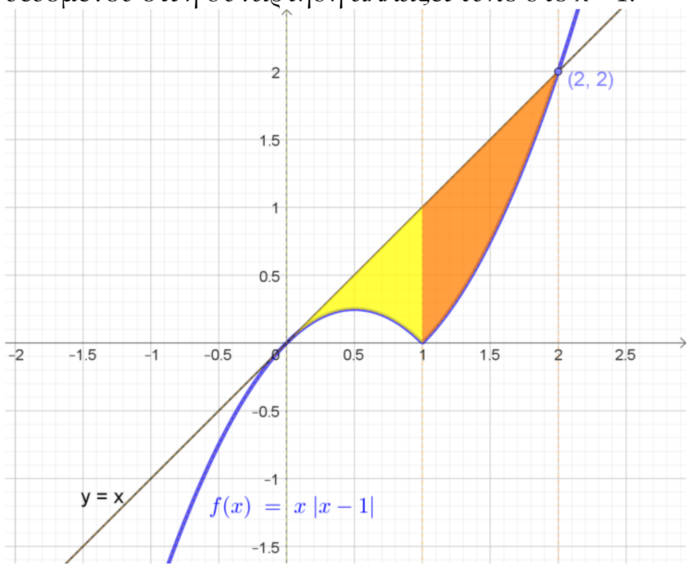
Λύση

Έχω $\boldsymbol{f(x) = x|x-1|} = \begin{cases} \boldsymbol{x(-x+1)} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{x(x-1)} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x > 1} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{-x^2+x} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{x^2-x} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x > 1} \end{cases}$

Το γράφημα της συνεχούς $\boldsymbol{f}$ στο διάστημα $(-\infty, \boldsymbol{1}]$ είναι τμήμα παραβολής με τα κοίλα προς τα κάτω και κορυφή για $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$, ενώ στο διάστημα $[\boldsymbol{1}, +\infty)$ είναι τμήμα παραβολής με τα κοίλα προς τα πάνω.

Έχω ακόμα $\boldsymbol{f'(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{-2x+1} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x \leq 1} \\ \boldsymbol{2x+1} & \boldsymbol{\alpha\nu\ x > 1} \end{cases}$ με $\boldsymbol{f'(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1}$, $\boldsymbol{f(0) = 0}$ και εφαπτομένη $\boldsymbol{y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x}$.

Επειδή η $\boldsymbol{f}$ είναι κοίλη στο $(-\infty, \boldsymbol{1}]$ η γραφική της παράσταση θα είναι από κάτω από την εφαπτομένη ευθεία $\boldsymbol{y = x}$. Στο διάστημα $[\boldsymbol{1}, +\infty)$ έχω $\boldsymbol{f(x) \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq x \Leftrightarrow x^2 \leq 2x \overset{x>1>0}{\Longleftrightarrow} x < 2}$ ενώ $\boldsymbol{f(x) > x \Leftrightarrow x > 2}$. Άρα το γράφημα και η εφαπτόμενη ευθεία είναι όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Το χωρίο του οποίου θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν εμφανίζεται σκιασμένο με δυο διαφορετικά χρώματα δεδομένου ότι η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο x = 1.



Έχουμε $\int_0^1 \boldsymbol{x - f(x)dx} = \int_0^1 \boldsymbol{x - (-x^2 + x)dx} = \int_0^1 \boldsymbol{x^2\ dx} = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$ και

$\int_1^2 \boldsymbol{x - f(x)dx} = \int_1^2 \boldsymbol{x - (x^2 - x)\ dx} = \int_1^2 \boldsymbol{-x^2 + 2x\ dx} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \left[-\frac{2^3}{3} + 2^2\right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 1^2\right] = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

Άρα $\boldsymbol{E} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\boldsymbol{1\ \tau.\mu.}}$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2,5 βαθμοί)

Εξετάστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{F(x)} = \int_0^x \boldsymbol{sin(t^2)dt}$. Υπολογίστε το $\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{sin(x^2)}$.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{F'(x) = sin(x^2)}$, άρα $\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{sin(x^2)} = \frac{0F(0)}{sin(0^2)} = \frac{0}{0} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F(x)+xF'(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)+x sin(x^2)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{F(0)+0 sin(0^2)}{2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0}{0} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)+sin(x^2)+x \cdot 2x \cdot \cos(x^2)}{2\cos(x^2)+2x \cdot 2x \cdot [-sin(x^2)]} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x^2)+sin(x^2)+2x^2 \cdot \cos(x^2)}{2\cos(x^2)-4x^2 \cdot sin(x^2)} = \frac{0+0+0}{2\cos(0)+0} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$

BLOCK B

ΑΣΚΗΣΗ 5 (2,5 βαθμοί)

Μια μάρκα οχημάτων πούλησε αυτοκίνητα σε τρία χρώματα αυτό το μήνα: λευκό, μαύρο και κόκκινο. Το 60% των λευκών αυτοκινήτων συν το 50% των μαύρων αυτοκινήτων αντιπροσωπεύουν το 30% των αυτοκινήτων που πωλούνται. Το 20% των λευκών αυτοκινήτων μαζί με το 60% των μαύρων αυτοκινήτων και το 60% των κόκκινων αυτοκινήτων αντιπροσωπεύουν το ήμισυ των αυτοκινήτων που πωλούνται. 100 περισσότερα μαύρα αυτοκίνητα έχουν πωληθεί από τα λευκά. Προσδιορίστε τον αριθμό των αυτοκινήτων κάθε χρώματος που πωλούνται.

Λύση

Έστω $\boldsymbol{x}$ ο αριθμός των λευκών αυτοκινήτων, $\boldsymbol{y}$ ο αριθμός των μαύρων αυτοκινήτων και $\boldsymbol{z}$ ο αριθμός των κόκκινων αυτοκινήτων. Ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που πωλούνται είναι $\boldsymbol{x+y+z}$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση θα έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} 0,6\cdot x+0,50\cdot y=0,30(x+y+z) \\ 0,20\cdot x+0,60\cdot y+0,60\cdot z=\dfrac{x+y+z}{2} \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5y=3(x+y+z) \\ 2x+6y+6z=5(x+y+z) \\ y=x+100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5y=3x+3y+3z \\ 2x+6y+6z=5x+5y+5z \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-3z=0 \\ -3x+y+z=0 \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2x+200-3z=0 \\ -3x+x+100+z=0 \\ y=x+100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+200-3z=0 \\ -2x+100+z=0 \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-100 \\ 5x+200-3(2x-100)=0 \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-100 \\ 5x+200-6x+300=0 \\ y=x+100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2x-100 \\ x=500 \\ y=x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z=900 \\ x=500 \\ y=600 \end{cases}}$$

Άρα έχουν πωληθεί 500 λευκά, 600 μαύρα και 900 κόκκινα αυτοκίνητα.

ΑΣΚΗΣΗ 6 (2,5 βαθμοί)

Εξετάστε τους πίνακες

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

α) [0,5 βαθμοί] Προσδιορίστε για ποιες τιμές του $\boldsymbol{m}$ έχετε το αντίστροφο του πίνακα Α;

β) [2 βαθμοί] Για όλα τα $\boldsymbol{m\neq -1}$ λύστε, αν είναι δυνατόν, την εξίσωση μήτρας $\boldsymbol{AX+X=B}$.

Λύση

α) Ένας πίνακας έχει αντίστροφο, όταν η ορίζουσα του είναι μη μηδενική. Έχω $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix}=0-m\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{vmatrix}+0=mm^2=m^3$, με $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ για $\boxed{m\neq 0}$

β) Έχω $\boldsymbol{AX+X=B}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A+I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. Έχω $\boldsymbol{A+I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$ με $|\boldsymbol{A+I}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}=1+0+m^3-0-0-0=m^3+1\neq 0$ για $\boldsymbol{m\neq -1}$. Άρα ο πίνακας $\boldsymbol{A+I}$ αντιστρέφεται συνεπώς $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A+I})^{-1}\boldsymbol{B}$

όπου $(\boldsymbol{A+I})^{-1}=\frac{Adj(A+I)^T}{|A+I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}{m^3+1}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$

Άρα $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A+I})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\boxed{X=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}}$

ΑΣΚΗΣΗ 7 (2,5 βαθμοί)

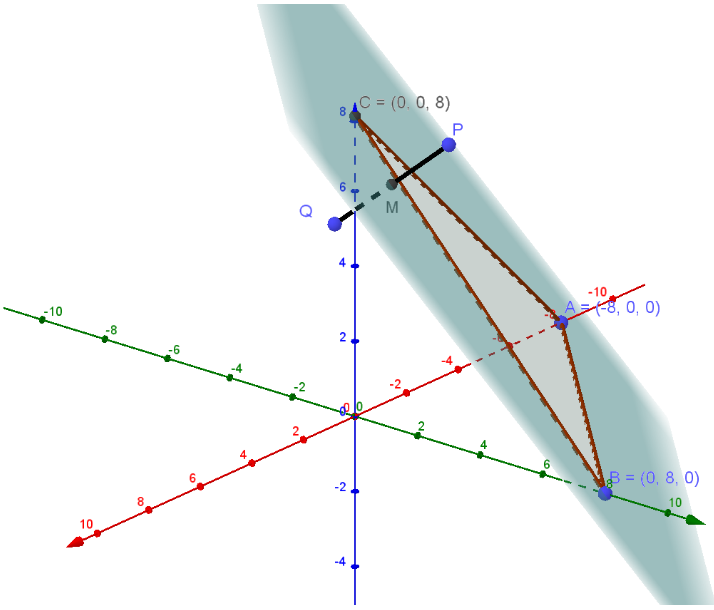
Το επίπεδο κάθετο στο τμήμα με άκρα $\boldsymbol{P(0,3,8)}$ και $\boldsymbol{Q(2,1,6)}$ που διέρχεται από το μέσο του τέμνει τους άξονες συντεταγμένων στα σημεία $\boldsymbol{A,B}$ και $\boldsymbol{C}$. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου του οποίου οι κορυφές είναι τα σημεία $\boldsymbol{A,B}$ και $\boldsymbol{C}$.

Λύση

Για το μέσο $\boldsymbol{M}$ του τμήματος $\boldsymbol{PQ}$ έχω

$$\boldsymbol{M = \frac{(0,3,8)+(2,1,6)}{2} = (1,2,7)}$$

Αν $\boldsymbol{\Sigma(x,y,z)}$ σημείο του κάθετου επιπέδου στο $\boldsymbol{PQ}$ στο $\boldsymbol{M}$, θα έχω $\boldsymbol{PQ \perp M\Sigma \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{M\Sigma} = 0 \Leftrightarrow (2,-2,-2)\cdot(x-1,y-2,z-7) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)-2(y-2)-2(z-7) = 0 \Leftrightarrow x-1-y+2-z+7=0 \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{x-y-z+8=0}}$



Για το σημείο τομής του επιπέδου με τον άξονα των x έχω $\boldsymbol{y=0, z=0 \Rightarrow x+8=0 \Rightarrow x=-8}$, Άρα $\boldsymbol{A(-8,0,0)}$

Για το σημείο τομής του επιπέδου με τον άξονα των y έχω $\boldsymbol{x=0, z=0 \Rightarrow y-8=0 \Rightarrow y=8}$, Άρα $\boldsymbol{B(0,8,0)}$

Για το σημείο τομής του επιπέδου με τον άξονα των z έχω $\boldsymbol{x=0, y=0 \Rightarrow -z+8=0 \Rightarrow z=8}$, Άρα $\boldsymbol{C(0,0,8)}$

Το εμβαδόν του τριγώνου ABC είναι το ήμισυ του μέτρου του εξωτερικού γινομένου $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}$

Έχω $\left.\begin{matrix}\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = (0,8,0)-(-8,0,0) = (8,8,0)} \\ \boldsymbol{\overrightarrow{AC} = (0,0,8)-(-8,0,0) = (8,0,8)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64i - 64k - 64j = (64,-64,-64)}$

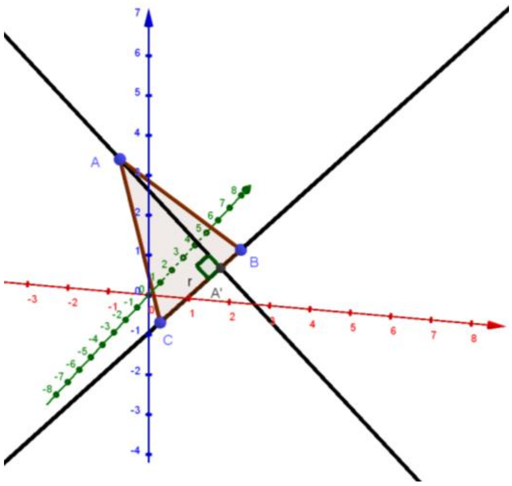
Άρα $\boldsymbol{E = \frac{\sqrt{64^2+(-64)^2+(-64)^2}}{2}} = \boxed{\boldsymbol{32\sqrt{3} \simeq 55.43\ \tau.\mu.}}$

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2,5 βαθμοί)

Έστω το σημείο $\boldsymbol{A(-1,1,3)}$ και η γραμμή $\boldsymbol{r}$ που καθορίζεται από τα σημεία $\boldsymbol{B(2,1,1)}$ και $\boldsymbol{C(0,1,-1)}$

α) [1,5 βαθμοί] Βρείτε την απόσταση από το σημείο $\boldsymbol{A}$ έως τη γραμμή $\boldsymbol{r}$.

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου του οποίου οι κορυφές είναι $\boldsymbol{A, B}$ και $\boldsymbol{C}$.



Λύση

α) Έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{CB} = (2,1,1)-(0,1,-1) = (2,0,2)}$ Άρα η διανυσματική εξίσωση της ευθείας $\boldsymbol{r}$ είναι: $\boldsymbol{(2,1,1)+t(2,0,2) = (2+2t,1,1+2t), t\in\mathbb{R}}$

Έστω $\boldsymbol{A'}$ η κάθετη προβολή του $\boldsymbol{A}$ στην ευθεία $\boldsymbol{r}$. Άρα το $\boldsymbol{A'}$ έχει συντεταγμένες της μορφής $\boldsymbol{(2+2t,1,1+2t)}$ για κάποιο $\boldsymbol{t\in\mathbb{R}}$.

Έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'} = (2+2t,1,1+2t)-(-1,1,3) = (3+2t,0,-2+2t)}$ και $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Longrightarrow (3+2t,0,-2+2t)\cdot}$

$$\boldsymbol{(2,0,2) = 0 \Rightarrow 6+4t-4+4t = 0 \Rightarrow 8t = -2 \Rightarrow t = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2+2\frac{-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ y_{A'} = 1 \\ z_{A'} = 1+2\frac{-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\!:\left(\frac{3}{2},1\frac{1}{2}\right)}$$

Η απόσταση του $\boldsymbol{A}$ από την ευθεία $\boldsymbol{r}$ είναι η απόσταση του $\boldsymbol{A}$ από το $\boldsymbol{A'}$. Έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)-(-1,1,3) = \left(\frac{5}{2},0,\frac{-5}{2}\right)}$ και συνεπώς $\boldsymbol{d(A,r) = d(A,A') = \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}} \simeq \boxed{\boldsymbol{3,54}}$ μονάδες μήκους

β) $\boldsymbol{E = \frac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \frac{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{AA'}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+0^2+2^2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}\cdot5\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\boldsymbol{5}}$τ.μ

Ordinary Mathematics II στη Μαδρίτη
Αξιολόγηση για την πρόσβαση σε Δημόσια πανεπιστήμια της κοινότητας της Μαδρίτης
Ακαδημαϊκό έτος 2022-2023
Θέμα: Μαθηματικά II

Αφού διαβάσετε προσεκτικά την εξέταση, δώστε μια αιτιολογημένη απάντηση σε οποιεσδήποτε τέσσερις ερωτήσεις για να επιλέξετε από τις οκτώ προτεινόμενες. Όλες οι απαντήσεις πρέπει να αιτιολογούνται δεόντως.
ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ: Κάθε ερώτηση θα βαθμολογηθεί με 2,5 μονάδες.
ΧΡΟΝΟΣ: 90 λεπτά.

Α.1. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.
Σε ένα εργοτάξιο, τρεις διαφορετικοί τύποι φορτηγών χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά των χωμάτων που σκάβονται για την κατασκευή των θεμελίων ενός κτιρίου: Α, Β και Γ. Τα φορτηγά τύπου Α έχουν χωρητικότητα 14 τόνων, τα φορτηγά τύπου Β χωρητικότητας 24 τόνων και τα φορτηγά τύπου Γ χωρητικότητας 28 τόνων. Ένα ακόμη φορτηγό τύπου Α θα έπρεπε να μεταφερθεί για να ταιριάζει με τον αριθμό των φορτηγών που απομένουν. Το 10% της χωρητικότητας όλων των φορτηγών τύπου Β αντιστοιχεί στο ένα έβδομο της μεγαλύτερης χωρητικότητας. Σήμερα, κάθε φορτηγό έχει κάνει ένα μόνο ταξίδι στη μέγιστη χωρητικότητά του και 302 τόνοι χώματος έχουν εξαχθεί από την περιοχή. Πόσο χώμα έχει μεταφερθεί σήμερα ανά τύπο φορτηγού;
Λύση
Έστω x ο αριθμός των φορτηγών τύπου Α, y ο αριθμός των φορτηγών τύπου Β και z ο αριθμός των φορτηγών τύπου C. "Τα φορτηγά τύπου Α έχουν χωρητικότητα 14 τόνων, τα φορτηγά τύπου Β έχουν χωρητικότητα 24 τόνων και τα φορτηγά τύπου C έχουν χωρητικότητα 28 τόνων. 302 τόνοι χώματος έχουν εξαχθεί από την περιοχή" → $\mathbf{14x+24y+28z=302}$ "Ένα ακόμη φορτηγό τύπου Α θα έπρεπε να μεταφερθεί για να ταιριάζει με τον αριθμό των φορτηγών που απομένουν" → $\mathbf{x+1=y+z}$. "Το 10% της χωρητικότητας όλων των φορτηγών τύπου Β είναι το ένα έβδομο της μέγιστης χωρητικότητας, δηλαδή του τύπου C" → $\mathbf{0,10\cdot 24y=\frac{1}{7}28z \Leftrightarrow z=0,6y}$. Άρα $\mathbf{x+1=y+z \Rightarrow x=-1+1,6y}$. Συνεπώς από την $\mathbf{14x+24y+28z=302}$ έχω $\mathbf{14(-1+1,6y)+24y+28\cdot 0,6y=302 \Leftrightarrow 22,4y+24y+16,8y=316 \Leftrightarrow 63,2y=316 \Leftrightarrow y=5}$ φορτηγά τύπου Β. Άρα $\mathbf{x=-1+8=7}$ φορτηγά τύπου Α και $\mathbf{z=0,6\cdot 5=8}$ φορτηγά τύπου C.
Άρα τα φορτηγά τύπου Α έχουν μεταφέρει $\mathbf{7\cdot 14=\boxed{98}}$ τόνους χώματος, τα τύπου Β μετέφεραν $\mathbf{5\cdot 24=\boxed{120}}$ τόνους και τα τύπου C μετέφεραν $\mathbf{3\cdot 28=\boxed{84}}$ τόνους χώματος.

Α.2. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.
Δεδομένης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, σας ζητείται:
α) (0,25 βαθμοί) Μελετήστε αν είναι περιττή ή άρτια.
β) (0,75 βαθμοί) Μελετήστε την παράγωγό της στο σημείο $x=1$.
γ) (1,5 βαθμοί) Μελετήστε τα σχετικά και απόλυτα ακρότατά της.
Λύση
α) Έχω $f(-x)=\sqrt[3]{((-x)^2-1)^2}=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.
β) Έχω $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1^2-1\right)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-0}{x-1}=$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)}}=\sqrt[3]{\frac{4}{(1-1)}}=\sqrt[3]{\frac{4}{0}}=\infty$
Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$
γ) Έχω $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=(x^2-1)^{2/3}$ και για $x\neq\pm 1$ έχω
$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{2/3-1}\cdot(2x)=\frac{4x}{3}(x^2-1)^{-1/3}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$
Με πίνακα προσήμων

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(-1)=0$	$\nearrow$	$f(0)=1$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

Άρα η συνάρτηση έχει ένα τοπικό μέγιστο στο $\boldsymbol{x = 0}$ την τιμή $\boldsymbol{f(0) = 1}$ και ολικό ελάχιστο στο $\boldsymbol{x = -1}$ και $\boldsymbol{x = 1}$ με τιμή $\boldsymbol{f(-1) = f(1) = 0}$.

A.3. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.
Έστω τα σημεία $\boldsymbol{A(1,-2,3), B(0,2,-1)}$ και $\boldsymbol{C(2,1,0)}$. Σας ζητείται:
α) (1,25 βαθμοί) Να ελέγξετε ότι σχηματίζουν ένα τρίγωνο $\boldsymbol{T}$ και να βρείτε μια εξίσωση του επιπέδου που τα περιέχει.
β) (0,75 βαθμοί) Υπολογίστε την τομή της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B με το επίπεδο $\boldsymbol{z = 1}$.
γ) (0,5 βαθμοί) Προσδιορίστε την περίμετρο του τριγώνου $\boldsymbol{T}$.
Λύση
α) Έχω $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB} = (0,2,-1)-(1,-2,3) = (-1,4,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,0)-(1,-2,3) = (1,3,-3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (0,-7,-7) \neq \vec{0}$ άρα δεν είναι συνευθειακά και σχηματίζουν τρίγωνο. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,-7,-7)$ είναι κάθετο στο ζητούμενο επίπεδο, $\boldsymbol{\pi}$, άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής $0x - 7y - 7z + D = 0 \xRightarrow{C(2,1,0)\epsilon\,\pi} 0 \cdot 2 - 7 \cdot 1 - 7 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 7$, άρα $\pi: 0x - 7y - 7z + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -y - z + 1 = 0}$
β) Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας AB είναι $(1,-2,3) + t \cdot (-1,4,-4) = (1-t,-2+4t,3-4t), t \in \mathbb{R}$
Στο σημείο που τέμνει η ευθεία AB το επίπεδο $\boldsymbol{z = 1}$ έχω $3 - 4t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{P\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)}$

γ) Έχω $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$
και $\overrightarrow{BC} = (2,1,0) - (0,2,-1) = (2,-1,1) \Longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
Άρα η περίμετρος του τριγώνου είναι $\boxed{\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \simeq 12,55}$ μονάδες μήκους.

A.4. Μέγιστη βαθμολογία: 2,5 βαθμοί.
Έχετε ένα συμβάν A πιθανότητας $\boldsymbol{P(A) = 0,3}$.
α) (0,75 βαθμοί) Ένα γεγονός B πιθανότητας $\boldsymbol{P(B) = 0,5}$ είναι ανεξάρτητο από το A. Υπολογίστε την πιθανότητα $\boldsymbol{P(A \cup B)}$.
β) (0,75 βαθμοί) Άλλο γεγονός C ικανοποιεί το $\boldsymbol{P(C|A) = 0,5}$ Υπολογίστε το $\boldsymbol{P(A \cap \bar{C})}$
γ) (1 βαθμός) Εάν έχετε ένα συμβάν D τέτοιο ώστε $\boldsymbol{P(\bar{A}|D) = 0,2}$ και $\boldsymbol{P(D|A) = 0,5}$, υπολογίστε $\boldsymbol{P(D)}$.
Λύση
α) Έχω $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,3 \cdot 0,5 = \boxed{0,65}$
β) Έχω $P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0,3 - P(C|A)P(A) = 0,3 - 0,5 \cdot 0,3 = \boxed{0,15}$
γ) Έχω $P(\bar{A}|D) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}|D)P(D) = 0,2P(D) \Rightarrow P(\bar{A} \cap D) = 0,2P(D) \Rightarrow P(D) - P(A \cap D) = 0,2P(D) \Rightarrow$
$P(D) - P(D|A)P(A) = 0,2P(D) \Rightarrow 0,8P(D) = P(D|A)P(A) \Rightarrow 0,8P(D) = 0,5 \cdot 0,3 \Rightarrow \boxed{P(D) = \frac{15}{80}}$

Β.1. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.

Δεδομένου του συστήματος $\begin{cases}(a+1)x+4y=0\\(a-1)y+z=3\\4x+2ay+z=3\end{cases}$

α) (1,25 βαθμοί) Διερευνήσετε το σύστημα με βάση την παράμετρο α.

β) (0,5 βαθμοί) Λύστε το για a = 3.

γ) (0,75 βαθμοί) Λύστε το για a = 5.

Λύση

α) Έχω $D=\begin{pmatrix}a+1 & 4 & 0\\0 & a-1 & 1\\4 & 2a & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |D|=\begin{vmatrix}a+1 & 4 & 0\\0 & a-1 & 1\\4 & 2a & 1\end{vmatrix}=(a+1)(a-1)+16-2a(a+1)=a^2-1+16-2a^2-2a=-a^2-2a+15$

και $|D|=0\Rightarrow -a^2-2a+15=0\Rightarrow a^2+2a-15=0\Rightarrow \alpha=-5\Psi\alpha=3$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν $a\neq-5$ και $a\neq 3$, τότε το σύστημα έχει μία λύση
2. Αν $a=-5$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases}-4x+4y\quad=0\\-6y+z=3\\4x-10y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\-6y+z=3\\-6y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\z=3+6y\end{cases}$ δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\boxed{(\lambda,\lambda,3+6\lambda),\lambda\in\mathbb{R}}$
3. Αν $a=3$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases}4x+4y=0\\2y+z=3\\4x+6y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\2y+z=3\\2y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\z=3-2y\end{cases}$ δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(-\lambda,\lambda,3-2\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$

β) όπως είδαμε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\boxed{(-\lambda,\lambda,3-2\lambda),\lambda\in\mathbb{R}}$

γ) Αν $a=5$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases}6x+4y=0\\4y+z=3\\4x+10y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=0\\z=3-4y\\4x+10y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}6x+4y=0\\z=3-4y\\4x+10y+3-4y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=0\\z=3-4y\\4x+6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=3-4y\\x=y=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}z=3\\x=y=0\end{cases}}$

Β.2. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.

Δεδομένης της πραγματικής συνάρτησης της πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται στο πεδίο ορισμού της ως $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2+x^2} & \alpha\nu\quad x\leq-1\\\frac{2x^2}{3-3x} & \alpha\nu\quad x>-1\end{cases}$

α) (0,75 βαθμοί) Μελετήστε τη συνέχεια της συνάρτησης στο R.

β) (1 βαθμός) Υπολογίστε το ακόλουθο όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)^{2x^2-1}$.

γ) (0,75 βαθμοί) Υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^{0}f(x)dx$

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $R-1$. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$ ως ρητή και στο $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ως ρητή.

Έχω $\left.\begin{aligned}f(-1)&=\frac{(-1)^2}{2+(-1)^2}=\frac{1}{3}\\ \lim_{x\to-1^-}f(x)&=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{2+x^2}=\frac{1}{3}\\ \lim_{x\to-1^+}f(x)&=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2\cdot(-1)^2}{3-3(-1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}$ άρα η f είναι συνεχής και στο $x=-1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $R-1$.

β) Έχω $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)^{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=1^\infty$

Αλλά $f(x)^{2x^2-1}=e^{\ln f(x)^{2x^2-1}}=e^{(2x^2-1)\ln f(x)}$.

Έχω τώρα ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\ln f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\ln\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)$ Θέτω $u=x^2$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)ln\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)=\lim\limits_{u\to\infty}(2u-1)ln\left(\frac{u}{2+u}\right)=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{ln\left(\frac{u}{2+u}\right)}{\frac{1}{(2u-1)}}=\frac{0}{0}\overset{DLH}{=}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{u}-\frac{1}{2+u}}{\frac{-2}{(2u-1)^2}}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\frac{2}{u(2+u)}}{\frac{-2}{(2u-1)^2}}=$ $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{2(2u-1)^2}{-2u(2+u)}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u^2\left(2-\frac{1}{u}\right)^2}{-u^2\left(\frac{2}{u}+1\right)}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{u}\right)^2}{-\left(\frac{2}{u}+1\right)}=-4$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)^{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{(2x^2-1)lnf(x)}=\boxed{e^{-4}}$

γ) $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}dx=-\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{x-1}dx=-\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1+1}{x-1}dx=-\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}x+1+\frac{1}{x-1}dx=-\frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}=-\frac{2}{3}\left(\left[\frac{0^2}{2}+0-\ln|0-1|\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}+(-1)-\ln|(-1)-1|\right]\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)=\boxed{\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}}$

B.3. Μέγιστος βαθμός: 2,5 βαθμοί.

Έστω η ευθεία $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$, το επίπεδο $\pi: x-z=2$ και το σημείο $A(1,1,1)$.

α) (0,75 βαθμοί) Μελετήστε τη σχετική θέση των r και π και υπολογίστε την τομή τους, εάν υπάρχει.

β) (0,75 βαθμοί) Υπολογίστε την κάθετη προβολή του σημείου A στο επίπεδο π.

γ) (1 βαθμός) Υπολογίστε το συμμετρικό σημείο του σημείου A σε σχέση με τη γραμμή r.

Λύση

α) Έχω $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$ άρα για τα σημεία της ευθείας ισχύουν οι εξισώσεις $y=t, \frac{x-1}{2}=t, \frac{z+1}{-2}=t, t\in\mathbb{R}$. Άρα τα σημεία της ευθείας r είναι της μορφής $P(x,y,z)=(2t+1,t,-2t-1), t\in\mathbb{R}$. Για το τυχόν σημείο τομής με το επίπεδο $\pi: x-z=2$ θα έχω $(2t+1)-(-2t-1)=2$ για κάποιο $t\in\mathbb{R}$. Άρα $4t+2=2\Rightarrow t=0\Rightarrow\boxed{P(1,0,-1)}$

β) Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο π είναι το $\vec{n}=(1,0,-1)$. Άρα η κάθετη ευθεία από το A στο επίπεδο π είναι η $\varepsilon:(1,1,1)+t(1,0,-1)=(1+t,1,1-t), t\in\mathbb{R}$. Αν $A'(1+t,1,1-t)$ η κάθετη προβολή του σημείου A στο επίπεδο $\pi: x-z=2$, τότε θα ισχύει $(1+t)-(1-t)=2\Rightarrow t=1$. Άρα $\boxed{A'(2,1,0)}$

γ) Όπως είδαμε στο ερώτημα α) τα σημεία της ευθείας r είναι της μορφής $P(x,y,z)=(2t+1,t,-2t-1)=(1,0,-1)+t(2,1,-2)=(1,0,-1)+t\vec{v}, t\in\mathbb{R}$ όπου $\vec{v}=(2,1,-2)$. Αν Μ είναι η κάθετη προβολή του σημείου Α στην ευθεία r, τότε θα έχω $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}=0$ με $\overrightarrow{AM}=(2t+1-1,t-1,-2t-1-1)=(2t,t-1,-2t-2)$. Άρα έχω $(2t,t-1,-2t-2)\cdot(2,1,-2)=0\Rightarrow 4t+t-1+4t+4=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$. Αν A'' το συμμετρικό σημείο του σημείου A σε σχέση με τη γραμμή r, τότε το Μ είναι μέσο του $A''A$ και επομένως $\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow A''-(1,1,1)=\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)\Rightarrow\boxed{A''=\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)}$

B.4. Μέγιστη βαθμολογία: 2,5 βαθμοί.

Το μήκος της σαρδέλας του Ειρηνικού (Sardinops sagax) μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο όρο 175 mm και τυπική απόκλιση 25,75 mm.

α) (1 βαθμός) Μια εταιρεία συσκευασίας για αυτή την ποικιλία σαρδέλας δέχεται μόνο ως σαρδέλες ποιότητας εκείνες με μήκος μεγαλύτερο από 16 cm. Ποιο ποσοστό των σαρδελών που αλιεύονται από ένα αλιευτικό σκάφος θα είναι της ποιότητας που αναμένεται από την εταιρεία συσκευασίας;

β) (0,5 βαθμοί) Βρείτε μήκος t < 175 mm τέτοιο ώστε μεταξύ t και 175 mm να αλιεύεται το 18% των σαρδελών.

γ) (1 βαθμός) Στην ανοικτή θάλασσα, οι σαρδέλες υποβάλλονται σε επεξεργασία σε παρτίδες των 10. Στη συνέχεια, οι σαρδέλες κάθε παρτίδας που είναι μικρότερες από 15 εκατοστά επιστρέφονται στη θάλασσα επειδή θεωρούνται μικρές. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον μία επιστρεφόμενη σαρδέλα σε μια παρτίδα των 10;

Λύση

Θεωρώ για το μήκος της σαρδέλας του Ειρηνικού την τυχαία μεταβλητή $X=N(175,25,75)$.

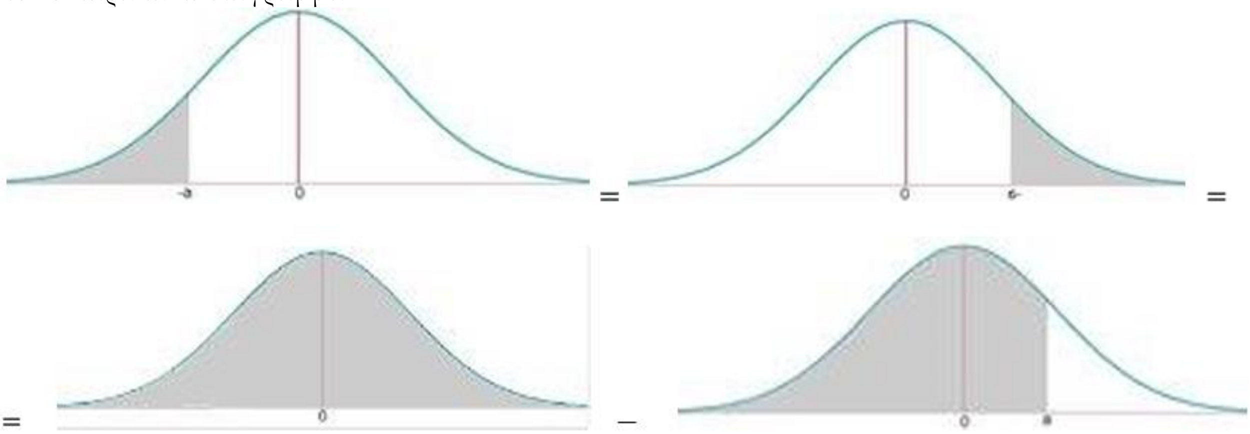
α) Ζητάμε την πιθανότητα $P(X>160)$.

Έχω $P(X>160)=P\left(\frac{X-175}{25{,}75}>\frac{160-175}{25{,}75}\right)=P(Z>0{,}58)=P(Z\le 0{,}58)=\boxed{0{,}719}$, όπως φαίνεται στον πίνακα.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	[illegible]	0,68
0,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7190	0,7

β) Πρέπει να βρούμε t έτσι ώστε $\boldsymbol{P(t \leq X \leq 175) = 0,18 \Rightarrow P\left(\frac{t-175}{25,75} \leq \frac{X-175}{25,75} \leq \frac{175-175}{25,75}\right) = 0,18 \Longrightarrow P\left(\frac{t-175}{25,75} \leq Z \leq 0\right) = 0,18 \Longrightarrow P(Z < 0) - P\left(Z < \frac{t-175}{25,75}\right) = 0.18 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-175}{25,75}\right) = 0,32}$

Από το παρακάτω διάγραμμα …



…προκύπτει ότι $\boldsymbol{P\left(Z \leq \frac{t-175}{25,75}\right) = P\left(Z \geq -\frac{t-175}{25,75}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25,75}\right)}$.

Άρα $\boldsymbol{1 - P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25,75}\right) = 0,32 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25,75}\right) = 0,68 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25,75}\right) = P(Z \leq 0,47)}$, όπως βλέπουμε στον πίνακα παρακάτω

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	0,
[illegible]	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	0,
0,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6808	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,

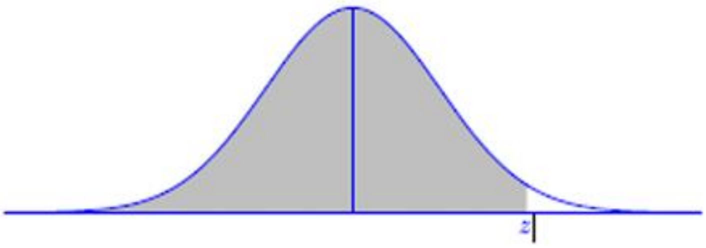
Άρα $\boldsymbol{-\frac{t-175}{25,75} = 0,47 \Longrightarrow 175 - t = 0,47 \cdot 25,75 \Longrightarrow t = 175 - 0,47 \cdot 25,75 \Longrightarrow \boxed{t = 162,9mm}}$

γ) Βρίσκω αρχικά την πιθανότητα $\boldsymbol{p = P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150-175}{25,75}\right) = P(Z < -0,97) = 1 - P(Z < 0,97) = 1 - 0,834 = 0,166}$ όπως προκύπτει από τον πίνακα παρακάτω

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]	0,7
[illegible]	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]	0,8
0,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8340	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]	0,8

Έστω η τυχαία μεταβλητή Y = Αριθμός σαρδελών μεγέθους μικρότερου από 150 mm σε παρτίδα των 10. Τότε η μεταβλητή ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $\mathbf{Y = B(10, 0, 166)}$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\boldsymbol{P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,166^0 \cdot 0,834^{10} = \boxed{0,8372}}$

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

PAU 2023

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Εφαρμοσμένα μαθηματικά στις κοινωνικές επιστήμες ΙΙ στην Καταλονία
Σειρά 1
Απαντήστε τέσσερις από τις ακόλουθες έξι ερωτήσεις. Στις απαντήσεις, εξηγήστε πάντα τι θέλετε να κάνετε και γιατί. Κάθε ερώτηση αξίζει 2,5 πόντους. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, αλλά δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιείτε αριθμομηχανές ή άλλες συσκευές που μπορούν να αποθηκεύσουν δεδομένα ή που μπορούν να μεταδώσουν ή να λάβουν πληροφορίες. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις κενές σελίδες (σελίδες 14 και 15) για να δημιουργήσετε περιγράμματα, προσχέδια κ.λπ., ή για να ολοκληρώσετε την απάντηση σε μια ερώτηση εάν χρειάζεστε περισσότερο χώρο. Στην τελευταία περίπτωση, πρέπει να το αναφέρετε σαφώς στο κάτω μέρος της σελίδας της σχετικής ερώτησης.

1. Η τιμή μιας πτήσης μεταξύ Βαρκελώνης και Ισλανδίας είναι €500. Μια αεροπορική εταιρεία έχει χωρητικότητα 300 επιβατών ημερησίως, αλλά υπάρχει μια συγκεκριμένη εποχή του χρόνου που πωλεί μόνο 180 εισιτήρια. Μετά από μελέτη αγοράς, η εταιρεία αντιλαμβάνεται ότι η σχέση μεταξύ της τιμής του εισιτηρίου και του αριθμού των επιβατών είναι γραμμική, οπότε για κάθε έκπτωση 5 ευρώ στην τιμή του εισιτηρίου παίρνει δύο επιπλέον επιβάτες.
α) Αν καλέσουμε x πόσες φορές εφαρμόζεται η έκπτωση, γράψτε τη συνάρτηση που δίνει τα ημερήσια έσοδα της εταιρείας από πωλήσεις εισιτηρίων με βάση το x. [1 βαθμός]
β) Σε ποια τιμή πρέπει να πουλήσετε κάθε εισιτήριο για να έχετε τα μέγιστα έσοδα; Τι έσοδα θα προκύψουν με αυτήν την τιμή; [1,5 βαθμοί]
Λύση
α) Για $\boldsymbol{x = 0}$, ο αριθμός των επιβατών είναι 180, για $\boldsymbol{x = 1}$, ο αριθμός των επιβατών είναι 180 + 2, για $\boldsymbol{x = 2}$, ο αριθμός των επιβατών είναι $\boldsymbol{180 + 2 \cdot 2}$, κ.ο.κ. Οπότε, για x εκπτώσεις των 5€ εκάστη, ο αριθμός των επιβατών είναι $\boldsymbol{180 + 2x}$ και η τιμή αντίστοιχα κάθε εισιτηρίου θα είναι $\boldsymbol{500 - 5x}$. Άρα τα έσοδα θα δίνονται από την συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x) = (180 + 2x)(500 - 5x) = 90000 - 10x^2 + 1000x - 900x = -10x^2 + 100x + 90000}$$

β) Έχω παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω. Άρα έχει ολικό μέγιστο για $\boldsymbol{x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{100}{-20} = 5}$.
Άρα τα μέγιστα έσοδα θα προκύψουν αν γίνουν $\boxed{5}$ φορές εκπτώσεις και θα είναι ίσα με

$$\boldsymbol{f(5) = -250 + 500 + 90000 = \boxed{90250€}}$$

2. Ένα αστικό κέντρο προσφέρει μαθήματα γαλλικών για αρχάριους, ενδιάμεσους και προχωρημένους. Οι εγγεγραμμένοι φοιτητές, εφόσον το επιθυμούν, έχουν εγγυημένη θέση για το επόμενο ακαδημαϊκό έτος. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, πριν από το τέλος του μαθήματος, γίνονται κρατήσεις για το επόμενο μάθημα. Από τους αρχάριους μαθητές, το 15% θέλει να επαναλάβει το ίδιο μάθημα, το 50% θέλει να παρακολουθήσει το ενδιάμεσο μάθημα και το 5% θέλει να πάει απευθείας στο μάθημα προχωρημένου επιπέδου. Όσον αφορά τους μαθητές ενδιάμεσου επιπέδου, το 10% θέλει να επαναλάβει το μάθημα και το 60% θέλει να παρακολουθήσει το μάθημα προχωρημένου επιπέδου. Τέλος, από τους προχωρημένους μαθητές, το 20% θέλει να επαναλάβει το μάθημα. Κανένας από τους μαθητές δεν ζητά να κλείσει θέση για ένα μάθημα χαμηλότερου επιπέδου και οι υπόλοιποι μαθητές δεν θέλουν να συνεχίσουν στο κέντρο το επόμενο έτος. Φέτος έχουν εγγραφεί 100 μαθητές στο επίπεδο αρχαρίων, 90 στο ενδιάμεσο επίπεδο και 60 στο προχωρημένο επίπεδο.
α) Υπολογίστε τον αριθμό των θέσεων που θα δεσμευτούν για κάθε επίπεδο για το επόμενο έτος χρησιμοποιώντας ένα γινόμενο πινάκων. [1,25 βαθμοί]
β) Το ίδιο δημοτικό κέντρο προσφέρει δύο προγράμματα γιόγκα, ένα το πρωί και ένα το απόγευμα. Για το επόμενο ακαδημαϊκό έτος, το 50% των μαθητών που κάνουν γιόγκα το πρωί θέλουν να συνεχίσουν με το ίδιο πρόγραμμα, ενώ το 30% θέλουν να μετακινηθούν στο απογευματινό πρόγραμμα. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν θα συνεχίσουν το πρωί. Όσο για τους μαθητές που κάνουν γιόγκα το απόγευμα, το 40%

θέλει να προχωρήσει στο πρωινό πρόγραμμα και το 60% θέλει να συνεχίσει να κάνει το απογευματινό πρόγραμμα. Εάν γνωρίζουμε ότι για το επόμενο ακαδημαϊκό έτος είναι απαραίτητο να κρατήσουμε 49 θέσεις για το πρωινό πρόγραμμα και 51 θέσεις για το απογευματινό πρόγραμμα, πόσοι μαθητές είναι εγγεγραμμένοι σε κάθε πρόγραμμα; [1,25 βαθμοί]

Λύση

α) Γράφουμε στις στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα 3 επί 3 τα ποσοστά των μαθητών που πρόκειται να εγγραφούν για κάθε επίπεδο.

	Από το επίπεδο «Αρχάριος»	Από το επίπεδο «Ενδιάμεσος»	Από το επίπεδο «Προχωρημένος»
Στο επίπεδο «Αρχάριος»	0,15	0	0
Στο επίπεδο «Ενδιάμεσος»	0,50	0,10	0
Στο επίπεδο «Προχωρημένος»	0,05	0,60	0,20

Σε έναν πίνακα στήλη βάζουμε τον αριθμό των εγγεγραμμένων μαθητών σε κάθε επίπεδο.

Αρχάριοι	100
Ενδιάμεσοι	90
Προχωρημένοι	60

Από το γινόμενο των δύο πινάκων, λαμβάνουμε τον αριθμό των μαθητών που θα εγγραφούν σε κάθε επίπεδο το επόμενο έτος.

Δηλαδή $\begin{pmatrix} \mathbf{0,15} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,50} & \mathbf{0,10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,05} & \mathbf{0,60} & \mathbf{0,20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{100} \\ \mathbf{90} \\ \mathbf{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,15 \cdot 100} \\ \mathbf{0,5 \cdot 100 + 0,1 \cdot 90} \\ \mathbf{0,05 \cdot 100 + 0,6 \cdot 90 + 0,2 \cdot 60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{59} \\ \mathbf{71} \end{pmatrix}$

Άρα ο αριθμός των θέσεων που θα κρατηθούν είναι 15 σε επίπεδο αρχαρίων, 59 σε ενδιάμεσο επίπεδο και 71 σε προχωρημένο επίπεδο.

β) Έστω $\boldsymbol{x}$ οι μαθητές που εγγράφονται το πρωί και $\boldsymbol{y}$ οι μαθητές που εγγράφονται το απόγευμα.

Έχουμε την ακόλουθη ισότητα $\begin{pmatrix} \mathbf{0,50} & \mathbf{0,40} \\ \mathbf{0,30} & \mathbf{0,60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{49} \\ \mathbf{51} \end{pmatrix}$ με

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,50} & \mathbf{0,40} \\ \mathbf{0,30} & \mathbf{0,60} \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{0,50} & \mathbf{0,40} \\ \mathbf{0,30} & \mathbf{0,60} \end{vmatrix} = \mathbf{0,30 - 0,12 = 0,18}$, $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{0,18} \begin{pmatrix} \mathbf{0,60} & \mathbf{-0,40} \\ \mathbf{-0,30} & \mathbf{0,50} \end{pmatrix}$.

Συνεπώς $\begin{pmatrix} \mathbf{0,50} & \mathbf{0,40} \\ \mathbf{0,30} & \mathbf{0,60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{49} \\ \mathbf{51} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{49} \\ \mathbf{51} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,18}} \begin{pmatrix} \mathbf{0,60} & \mathbf{-0,40} \\ \mathbf{-0,30} & \mathbf{0,50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{49} \\ \mathbf{51} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,18}} \begin{pmatrix} \mathbf{0,60 \cdot 49 - 0,40 \cdot 51} \\ \mathbf{-0,30 \cdot 49 + 0,50 \cdot 51} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0,18}} \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{10,8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{50} \\ \mathbf{60} \end{pmatrix}$$

Άρα 50 μαθητές είναι εγγεγραμμένοι το πρωί και 60 το απόγευμα.

3. Ο Robert έχει γράψει τρία τεστ σε ένα μάθημα. Λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμητικό μέσο όρο των βαθμών που έλαβε σε καθεμία από τις τρεις δοκιμασίες, έλαβε συνολική βαθμολογία 6. Ο Robert γνωρίζει ότι ο βαθμός του τρίτου τεστ ήταν ο ίδιος με τον αριθμητικό μέσο όρο των βαθμών των άλλων δύο τεστ.

(α) Με αυτές τις πληροφορίες, μπορείτε να γνωρίζετε κάποια από τις τρεις βαθμολογίες; Εάν ναι, ποια βαθμολογία και ποιος ήταν ο βαθμός που πήρε; [1,25 βαθμοί]

β) Ο δάσκαλος του λέει ότι αν λαμβάνονταν υπόψη μόνο οι βαθμοί των δύο τελευταίων τεστ, θα είχε λάβει κατά μέσο όρο 7. Τι βαθμό πήρε σε κάθε τεστ; [1,25 βαθμοί]

Λύση

α) Έστω $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ και $\boldsymbol{z}$ οι βαθμολογίες της πρώτης, δεύτερης και τρίτης δοκιμασίας αντίστοιχα. «Ο αριθμητικός μέσος όρος των βαθμών που έλαβε στις τρεις δοκιμασίες είναι 6», επομένως $\frac{x+y+z}{3} = \mathbf{6}$. «Ο βαθμός της τρίτης δοκιμασίας ήταν ο ίδιος με τον αριθμητικό μέσο όρο των βαθμών των άλλων δύο τεστ», επομένως $\boldsymbol{z} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{z}$. Αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση το $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ με το $\mathbf{2}\boldsymbol{z}$ έχουμε $\frac{2z+z}{3} = \mathbf{6} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{z} = \mathbf{6}}$

Μπορούμε να βρούμε μόνο την τρίτη βαθμολογία (6). Για τις άλλες δύο, ισχύει ότι $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{12}$.

β) "Αν λαμβάνονταν υπόψη μόνο οι βαθμοί των δύο τελευταίων τεστ, θα είχε λάβει κατά μέσο όρο 7", επομένως $\frac{y+6}{2}=7 \Rightarrow \boxed{y=8} \xRightarrow{x+y=12} \boxed{x=4}$

Οι βαθμοί των δοκιμασιών ήταν 4 στην πρώτη, 8 στη δεύτερη και 6 στην τρίτη.

4. Μια εταιρεία στη Μινόρκα θέλει να προσφέρει δύο τύπους δραστηριοτήτων: καταδύσεις από σκάφος και εκδρομές με βάρκα κατά μήκος της ακτής για κολύμπι σε όρμους. Η κατάδυση έχει τιμή 60 ευρώ ανά άτομο και κάθε σκάφος θα έχει 10 συμμετέχοντες και 5 εκπαιδευτές. Η εκδρομή στην ακτή κοστίζει 18 ευρώ το άτομο και κάθε σκάφος θα έχει 25 συμμετέχοντες και 2 εκπαιδευτές. Η εταιρεία διαθέτει 30 πανομοιότυπα σκάφη και 75 εκπαιδευτές που μπορούν να κάνουν εκδρομές καταδύσεων ή εκδρομές με σκάφος μέσα από τους όρμους αδιακρίτως. Η πρόθεσή σας είναι να κάνετε το μέγιστο εισόδημα υποθέτοντας ότι θα γεμίσετε όλα τα σκάφη.

(α) Προσδιορίστε τη συνάρτηση στόχου και τους περιορισμούς. Σχεδιάστε την εφικτή περιοχή. [1,25 βαθμοί]

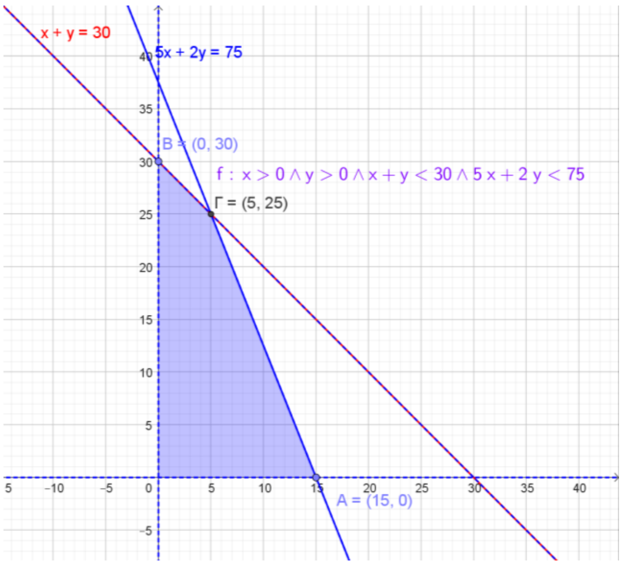
β) Πόσες εξόδους κάθε είδους πρέπει να προσφέρει καθημερινά η εταιρεία για να έχει τα μέγιστα έσοδα; Πόσα χρήματα θα φέρνετε σε καθημερινή βάση; [1,25 βαθμοί]

Λύση

α) Έστω $\boldsymbol{x \geq 0}$ ο αριθμός των σκαφών που προορίζονται για καταδύσεις και $\boldsymbol{y \geq 0}$ ο αριθμός των σκαφών που προορίζονται για εκδρομές με σκάφος.

Αφού κάθε κατάδυση έχει τιμή 60€ ανά άτομο και κάθε σκάφος για κατάδυση έχει 10 συμμετέχοντες, το εισόδημα που προκύπτει είναι $\boldsymbol{60 \cdot 10x = 600x}$. Όμοια το εισόδημα από τα εκδρομικά σκάφη είναι ίσο με $\boldsymbol{18 \cdot 25y = 450y}$. Άρα το συνολικό εισόδημα είναι $\boxed{\boldsymbol{f(x,y)=600x+450y}}$. Οι εκπαιδευτές που αντιστοιχούν δεν μπορεί να είναι πάνω από 75 άρα $\boxed{\boldsymbol{5x+2y \leq 75}}$. Τα σκάφη της εταιρείας που δεσμεύονται είναι το πολύ 30, άρα $\boxed{\boldsymbol{x+y \leq 30}}$.

Η εφικτή περιοχή εμφανίζεται στο παρακείμενο γράφημα.



β) Την μέγιστη τιμή της συνάρτησης θα την αναζητήσουμε στα άκρα του πολυγώνου της εφικτής περιοχής.

$\boldsymbol{O(0,0) \to f(0,0) = 0}$

$\boldsymbol{A(15,0) \to f(15,0) = 600 \cdot 15 + 0 = 9.000}$

$\boldsymbol{B(0,30) \to f(0,30) = 0 + 450 \cdot 30 = 13.500}$

$\boldsymbol{\Gamma(5,25) \to f(5,25) = 600 \cdot 5 + 450 \cdot 25 = 14.250}$ Μέγιστο !

Το μέγιστο εισόδημα προσαρμοσμένο στους αιτούμενους περιορισμούς είναι $\boxed{\boldsymbol{14.250€}}$ και επιτυγχάνεται με τη χρήση $\boxed{5}$ σκαφών για καταδύσεις και $\boxed{25}$ για εκδρομές.

5. Ο αριθμός χιλιογράμμων τροφής που έχουν δαπανήσει σε ένα καταφύγιο ζώων κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης εβδομάδας μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\boldsymbol{f(t) = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} -\right.}$

$\frac{9t}{2}+10\Big)$, όπου t είναι ο χρόνος σε ημέρες και εκτείνεται από την ημέρα t = 1 (Δευτέρα) έως την ημέρα t = 8 (Δευτέρα της επόμενης εβδομάδας).

α) Υπολογίστε πόσα κιλά τροφίμων δαπανήθηκαν την πρώτη Δευτέρα και την επόμενη Δευτέρα. Βρείτε ποια ημέρα εκείνης της εβδομάδας δαπανήθηκαν 100 κιλά τροφής. [1 βαθμός]

β) Προσδιορίστε τις ημέρες της εβδομάδας κατά τις οποίες η δαπάνη τροφίμων ήταν υψηλότερη και τις ημέρες κατά τις οποίες ήταν χαμηλότερη. Πόσα κιλά τροφίμων χρησιμοποιήθηκαν αυτές τις μέρες; [1,5 βαθμοί]

Λύση

α) Μας ζητούν την τιμή του $\boldsymbol{f(1)}$. Έχω $\boldsymbol{f(1)=10\left(-\frac{1^3}{8}+\frac{3\cdot 1^2}{2}-\frac{9}{2}+10\right)=\frac{275}{4}=\boxed{68,75kg}}$ καταναλώθηκαν την 1η Δευτέρα. Για την επόμενη Δευτέρα έχω $\boldsymbol{f(8)=10\left(-\frac{8^3}{8}+\frac{3\cdot 8^2}{2}-\frac{9\cdot 8}{2}+10\right)=\boxed{60kg}}$. Τέλος, μας ζητείται η τιμή του $\boldsymbol{t}$ για την οποία $\boldsymbol{f(t)=100 \Leftrightarrow 100=10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right) \Leftrightarrow 10=-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10 \Leftrightarrow -\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}=0 \Rightarrow -t^3+12t^2-36t=0 \Rightarrow -t(t^2-12t+36)=0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t^2-12t+36=0 \Leftrightarrow (t-6)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{t=6}}$

Άρα το Σάββατο καταναλώθηκαν 100 κιλά τροφής.

β) Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης στις ρίζες της παραγώγου της και στα άκρα του κλειστού διαστήματος [1,8].

Έχω $\boldsymbol{\left.\begin{array}{c} f'(t)=10\left(-\frac{3t^2}{8}+\frac{6t}{2}-\frac{9}{2}\right) \\ f'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 10\left(-\frac{3t^2}{8}+\frac{6t}{2}-\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow -\frac{3t^2}{8}+\frac{6t}{2}-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow -3t^2+24t-36=0 \Rightarrow t^2-8t+12=0 \Rightarrow (t-2)(t-6)=0 \Rightarrow t=2\Psi t=6}$.

Έχω

$\boldsymbol{f(2)=10\left(-\frac{2^3}{8}+\frac{3\cdot 2^2}{2}-\frac{9\cdot 2}{2}+10\right)=10(-1+6-9+10)=60}$ και $\boldsymbol{f(6)=100}$

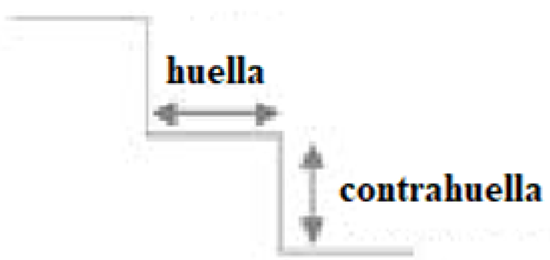
Έχουμε επομένως τον παρακάτω πίνακα προσήμων

x	1		2		6		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	68.75	$\searrow$	60	$\nearrow$	100	$\searrow$	60

Η χαμηλότερη κατανάλωση σημειώθηκε την ημέρα 2 (Τρίτη) και την ημέρα 8 (επόμενη Δευτέρα) με κατανάλωση 60 κιλών. Η υψηλότερη κατανάλωση σημειώθηκε την 6η ημέρα (Σάββατο) με κατανάλωση 100 κιλών.

6. Κατά το σχεδιασμό των σκαλοπατιών μιας σκάλας υπάρχουν διάφορες παράμετροι που πρέπει να ληφθούν υπόψη, δύο από τις οποίες είναι το πέλμα (το οριζόντιο τμήμα του σκαλοπατιού, όπου τοποθετείται το πόδι) και το ύψος (το κατακόρυφο τμήμα του σκαλοπατιού). Ο Γάλλος αρχιτέκτονας François Blondel διαπίστωσε στα τέλη του 17ου αιώνα ότι η ιδανική σχέση μεταξύ αυτών των δύο μεγεθών ήταν όταν το άθροισμα δύο υψών συν ένα πέλμα ήταν ίσο με 64 εκατοστά. Ονομάζουμε y το μήκος του ύψους και x το μήκος του πέλματος.

α) Βρείτε τη συνάρτηση που σας επιτρέπει να υπολογίσετε το ιδανικό μήκος του ύψους με βάση το μήκος του πέλματος. Ποιο θα ήταν το ιδανικό μήκος του ύψους εάν το πέλμα είναι 28 cm; [1 βαθμός] β) Οι ισχύοντες κανονισμοί ορίζουν ότι κατά το σχεδιασμό σκαλοπατιών για δημόσια χρήση είναι απαραίτητο το πέλμα να είναι τουλάχιστον 28 cm και το ύψος να είναι μεταξύ 13 και 18,5 cm. Επιπλέον, το άθροισμα δύο υψών συν ένα πέλμα πρέπει να είναι μεταξύ 54 και 70 cm. Γράψτε αυτές τις τρεις συνθήκες ως συνάρτηση των x και y. Εάν θέλουμε να κατασκευάσουμε μια σκάλα με βήματα πέλματος 40 cm, υπολογίστε μεταξύ των τιμών που πρέπει να συμπεριληφθεί ο ανυψωτήρας για να συμμορφωθεί με τους ισχύοντες κανονισμούς. [1,5 βαθμοί]



Λύση

α) Έχω ότι $\boldsymbol{2y + x = 64} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y = \frac{64-x}{2}}}$. Για πέλμα μήκους $\boldsymbol{x = 28cm}$ έχω ότι το ιδανικό ύψος του σκαλοπατιού είναι $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{64-28}}{\boldsymbol{2}} = \boxed{\boldsymbol{18cm}}$

β) έχω «το πέλμα να είναι τουλάχιστον 28 cm», άρα $\boxed{\boldsymbol{x \geq 28}}$,

«το ύψος να είναι μεταξύ 13 και 18,5 cm», άρα $\boxed{\boldsymbol{13 \leq y \leq 18,5}}$,

«το άθροισμα δύο υψών συν ένα πέλμα πρέπει να είναι μεταξύ 54 και 70 cm», άρα $\boxed{\boldsymbol{54 \leq x + 2y \leq 70}}$

Για πέλμα μήκους $\boldsymbol{x = 40cm}$ έχω $\boldsymbol{54 \leq 40 + 2y \leq 70 \Leftrightarrow 14 \leq 2y \leq 30 \Leftrightarrow 7 \leq y \leq 15}$ που συναληθεύει με την $\boldsymbol{13 \leq y \leq 18,5}$ για $\boxed{\boldsymbol{13 \leq y \leq 15}}$. Άρα για να πληρούν όλα τα πρότυπα, το ύψος του σκαλοπατιού πρέπει να είναι μεταξύ 13 και 15 εκατοστών.

[Πηγές]

https://www.educaweb.com/contenidos/educativos/selectividad/es-selectividad/
https://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_Spain
https://www.eduguide.gr/arthra/spoydes-sthn-ispania/
https://www.elmundo.es/andalucia/2023/06/15/648abafbfc6c83344d8b459b.html
https://www.ebaumatematicas.com/wp-content/uploads/2023/06/2oBachCC_EBAU_Andalucia_2023-Ordinaria_Resuelto_JuanAntonioMG.pdf