**[Περού]**

Το Περού (ισπανικά: Perú, Κέτσουα: Piruw) είναι χώρα στη Νότια Αμερική. Το Περού είναι χαρακτηριστική χώρα της περιοχής των Άνδεων. Έχει έκταση 1.285.216 τ.χλμ., είναι δηλαδή 10 φορές μεγαλύτερη χώρα από την Ελλάδα και έχει πληθυσμό 33.725.844 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2023.

Οι περουβιανές πόλεις είναι πολυπολιτισμικές, με ιστορία που είναι αποτέλεσμα της σύγκρουσης του πολιτισμού των Άνδεων με αυτόν των Ισπανών αποίκων. Παγκοσμίως η χώρα είναι γνωστή ως το κέντρο του πολιτισμού των Ίνκας.

Το Περού είναι αναπτυσσόμενη χώρα με ελεύθερη αγορά, ενώ το κατά κεφαλήν εισόδημα το 2010 ήταν $5.195 δολάρια Αμερικής. Ιστορικά, η οικονομία είναι συνδεδεμένη με τις εξαγωγές, οι οποίες παρέχουν σκληρό νόμισμα για τη χρηματοδότηση των εισαγωγών και την εξυπηρέτηση του εξωτερικού χρέους. Παρά το γεγονός ότι οι εξαγωγές έχουν φέρει σημαντικά έσοδα, η βιώσιμη ανάπτυξη και μια πιο δίκαιη κατανομή του εισοδήματος έχουν αποδειχθεί ανέφικτες. Σύμφωνα με στοιχεία του 2008 το 36,2% του συνολικού πληθυσμού ζει σε φτώχεια και το 12,6% είναι εξαιρετικά φτωχό.

Από τις αρχές του 1990 γίνεται μεγάλη προσπάθεια τόσο από την κυβέρνηση όσο και από τον ιδιωτικό τομέα για την προώθηση του τουρισμού. Ο κυριότερος τουριστικός προορισμός του Περού είναι το Μάτσου Πίτσου στο Κούζκο, γνωστό και ως η κρυφή πόλη των Ίνκας.

Στο νοτιοδυτικό Περού στις όχθες της λίμνης Τιτικάκα βρίσκεται η λαογραφική πρωτεύουσα του Περού Πούνο και τα «πλεούμενα νησιά» Ούρος, πόλος έλξης των τουριστών που περνούν οδικώς στη Βολιβία, με την οποία το Περού μοιράζεται τη λίμνη Τιτικάκα.

**[Η εκπαίδευση στο Περού]**

Σύμφωνα με το Σύνταγμα του Περού, η εκπαίδευση είναι υποχρεωτική και δωρεάν στα δημόσια σχολεία για το αρχικό, πρωτοβάθμιο και δευτεροβάθμιο επίπεδο. Είναι επίσης δωρεάν στα δημόσια πανεπιστήμια για φοιτητές που δεν είναι σε θέση να πληρώσουν δίδακτρα και έχουν επαρκή ακαδημαϊκή απόδοση.

Καθ 'όλη τη διάρκεια της ιστορίας του Περού, η εκπαιδευτική δομή και η ποιότητα του έθνους παρέμεινε κακή. Οι ελίτ που οργάνωσαν το εκπαιδευτικό σύστημα προώθησαν τον συντηρητισμό και τον αυταρχισμό, ενώ παράλληλα υπερασπίστηκαν μια κοινωνική ιεραρχία που εμπόδιζε μια κοινωνική κινητικότητα που θα βελτίωνε τη ζωή των πολιτών. Η αναποτελεσματικότητα της ρύθμισης, η διαφθορά και η έλλειψη ενδιαφέροντος της κυβέρνησης για βελτιώσεις συνέβαλε στη χαμηλή ποιότητα της εκπαιδευτικής δομής του Περού. Η έλλειψη διαπίστευσης τριτοβάθμιας εκπαίδευσης του Περού και η εξάρτησή του από τον εξορυκτισμό - με την εξόρυξη να μην απαιτεί μεγάλη επιστημονική υποστήριξη - ήταν επίσης επιζήμια για τα πανεπιστήμια και τις ερευνητικές εγκαταστάσεις εντός του έθνους. Το Κογκρέσο έχει πρόσφατα αποδυναμώσει περαιτέρω τα πρότυπα διαπίστευσης στα πανεπιστήμια.

Η σχολική εκπαίδευση στο Περού διαρκεί 12 χρόνια και χωρίζεται σε 4 επίπεδα: Πρωτοβάθμια εκπαίδευση διάρκειας 6 ετών. Δευτεροβάθμια εκπαίδευση διάρκειας 5 ετών: (Αυτό το επίπεδο περιλαμβάνει 2 έτη γενικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και 3 έτη ακαδημαϊκής ή τεχνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) και Περιφερειακή Εκπαίδευση.

**[Ακαδημαϊκό Έτος]**

Το ακαδημαϊκό έτος στο Περού αρχίζει τον Μάρτιο και τελειώνει τον Νοέμβριο/Δεκέμβριο. Οι καλοκαιρινές διακοπές ξεκινούν από το τέλος Δεκεμβρίου έως τον Φεβρουάριο.Οι χειμερινές διακοπές είναι τον Ιούλιο.

**[Γλώσσα διδασκαλίας]**

Η γλώσσα διδασκαλίας στο Περού είναι τα ισπανικά. Δίγλωσση εκπαίδευση προσφέρεται επίσης στο Περού, κυρίως ισπανικά-Aymara ή ισπανικά-κέτσουα.

**[Προσχολική Εκπαίδευση (Educacion Inicial)]**

Η προσχολική εκπαίδευση αρχίζει στην ηλικία των 3 ετών. Αυτό το εκπαιδευτικό επίπεδο προσφέρεται από τα νηπιαγωγεία και προάγει τη συνολική ανάπτυξη του παιδιού. Η προσχολική εκπαίδευση είναι υποχρεωτική για παιδιά ηλικίας 5 έως 6 ετών.

Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Educacion Primaria)

Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση στο Περού είναι υποχρεωτική και διάρκειας 6 ετών. Αυτό το εκπαιδευτικό επίπεδο χωρίζεται σε 3 κύκλους των 2 ετών ο καθένας:

- Ο πρώτος κύκλος περιλαμβάνει τις τάξεις 1 και 2
- Ο δεύτερος κύκλος περιλαμβάνει τις τάξεις 3 και 4
- Ο τρίτος κύκλος περιλαμβάνει τις τάξεις 5 και 6

Ο μαθητής ξεκινά στον πρώτο κύκλο, ο οποίος αποτελείται από την πρώτη και τη δεύτερη τάξη. Η ηλικία των παιδιών που εισέρχονται σε αυτό το στάδιο της εκπαίδευσής τους είναι έξι χρόνια. Αυτό το επίπεδο αρχίζει στην πρώτη τάξη και τελειώνει με την έκτη τάξη και χωρίζεται, για σκοπούς προγράμματος σπουδών, σε τρεις κύκλους: πρώτος κύκλος (πρώτη και δεύτερη τάξη), κύκλος δύο (τρίτη και τέταρτη τάξη) και τρίτος κύκλος (πέμπτη και έκτη τάξη). Μετά την έκτη τάξη, ο μαθητής περνά στο γυμνάσιο.

Μεταξύ 1980 και 1988, οι μεγάλες μειώσεις στη χρηματοδότηση της εκπαίδευσης στη Λατινική Αμερική προκάλεσαν σημαντική μείωση των εγγραφών στα δημοτικά σχολεία. Επειδή η προσβασιμότητα και οι επιδόσεις των μαθητών στο δημοτικό σχολείο ήταν ιστορικά χαμηλές, το Υπουργείο Παιδείας έχει επικεντρωθεί στην αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων την τελευταία δεκαετία. Από το 2007 έως το 2015, τα επίπεδα κατανόησης κειμένου αυξήθηκαν κατά 34% και οι μαθηματικές βαθμολογίες κατά 20%. Ενώ έχει σημειωθεί βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών, εξακολουθεί να υπάρχει εκπαιδευτική ανισότητα μεταξύ των παιδιών που ζουν σε αγροτικές περιοχές σε σύγκριση με εκείνα που ζουν σε αστικές περιοχές, στις οποίες τα παιδιά σε πιο αγροτικές περιοχές έχουν μειωμένες ακαδημαϊκές επιδόσεις. Το εκπαιδευτικό χάσμα μεταξύ αγροτικών και αστικών περιοχών διατηρείται και σε όλη τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Από το 93% των παιδιών ηλικίας μεταξύ 6 και 11 ετών που φοιτούν στο δημοτικό σχολείο, το 23% είναι εγγεγραμμένα σε τάξεις χαμηλότερες από την ηλικιακή τους ομάδα. Αυτή η τάση είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στα παιδιά των οποίων η μητρική γλώσσα είναι η κέτσουα ή μια γλώσσα του Αμαζονίου, καθώς και στα παιδιά που είναι εξαιρετικά φτωχά. Υπάρχει επίσης ένα αυξανόμενο ποσοστό παιδιών που ολοκληρώνουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευσή τους μέχρι την ηλικία των 12 και 13 ετών. Λόγω των κακών εκπαιδευτικών επιδόσεων και της ανεπαρκούς μάθησης, οι μαθητές διατρέχουν κίνδυνο να επαναλάβουν την τάξη. Μέχρι τη στιγμή που αυτά τα παιδιά αποφοιτούν από το δημοτικό σχολείο, είναι ήδη σε μια ηλικία όπου μπορούν να εισέλθουν στην αγορά εργασίας, οπότε εγκαταλείπουν την εργασία αντί να συνεχίσουν την εκπαίδευσή τους.

**[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Educacion Secundaria)]**

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο Περού είναι υποχρεωτική και διάρκειας 5 ετών. Αυτό το εκπαιδευτικό επίπεδο αποτελείται από δύο κατευθύνσεις:

- Γενική δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Είναι διάρκειας 2 ετών. Το επίπεδο αυτό είναι υποχρεωτικό.
- Ακαδημαϊκή ή τεχνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Είναι διάρκειας 3 ετών. Οι μαθητές μετά την ολοκλήρωση της γενικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης υποχρεούνται να επιλέξουν μεταξύ ακαδημαϊκής και τεχνικής δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο ακαδημαϊκό ρεύμα, οι μαθητές επιλέγουν μεταξύ επιστήμης και τεχνών. και στο τεχνικό ρεύμα, διδάσκονται τεχνικά και επαγγελματικά θέματα.

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελείται από πέντε έτη. Οι μαθητές διδάσκονται ένα ευρύ φάσμα θεμάτων, συμπεριλαμβανομένης της περουβιανής ιστορίας, της παγκόσμιας ιστορίας, της φυσικής, της βιολογίας, της χημείας, της επιστήμης των υπολογιστών, των μαθηματικών, της αγγλικής ως ξένης γλώσσας, της λογοτεχνίας κ.λπ. Οι μαθητές διδάσκονται επίσης από πολλούς δασκάλους, σε αντίθεση με το δημοτικό σχολείο όπου διδάσκονται από έναν μόνο δάσκαλο. Οι βαθμοί βασίζονται σε ένα σύστημα από 0 έως 20, όπου το 0 έως 10 θεωρείται αποτυχημένος βαθμός.
Το 2014, το 81,5% του περουβιανού πληθυσμού είχε παρακολουθήσει δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο αριθμός των εγγραφών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συνεχίζει να αυξάνεται, αλλά οι μαθητές αντιμετωπίζουν σχολική καθυστέρηση. Για παράδειγμα, το 13,7% των μαθητών ηλικίας μεταξύ 12 και 17 ετών είναι σε χαμηλότερη τάξη σε σύγκριση με την ηλικιακή τους ομάδα.

**[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]**

Η τριτοβάθμια εκπαίδευση στο Περού αποτελείται από τεχνολογικά κολέγια, τόσο δημόσια όσο και ιδιωτικά. Προσφέρουν μαθήματα διάρκειας τριών ετών (περίπου 3.000 ώρες σπουδών), αποφοιτώντας με τίτλο ως Τεχνικοί Επαγγελματίες. Ορισμένα μαθήματα μπορεί να έχουν διάρκεια τεσσάρων ετών (περίπου 4.000 ώρες σπουδών) και ένας φοιτητής θα αποφοιτήσει με τον τίτλο του Επαγγελματία.

**[Πανεπιστημιακή εκπαίδευση]**

Η τριτοβάθμια εκπαίδευση με τη μορφή πανεπιστημίων ξεκίνησε επίσημα στο Περού και την Αμερική με την ίδρυση του Βασιλικού και Ποντιφικού Πανεπιστημίου του Αγίου Μάρκου στην Πόλη των Βασιλέων με το βασιλικό διάταγμα που εξέδωσε ο βασιλιάς Carlos V στις 12 Μαΐου 1551. Το ινστιτούτο άνοιξε ως Sala Capitular del Convento de Santo Domingo το 1553. Το 1571, έλαβε παπική έγκριση και το 1574 έλαβε το όνομα του Εθνικού Πανεπιστημίου του Αγίου Μάρκου.
Ο πρόδρομος του Εθνικού Πανεπιστημίου του Σαν Μάρκος, το "Estudio General o Universidad", ιδρύθηκε στο Κούσκο από τους Δομινικανούς την 1η Ιουλίου 1548. Αυτό το ίδρυμα ήταν υπεύθυνο για τη διδασκαλία ευαγγελιστών για τις νέες χώρες και δίδασκε γραφές, θεολογία, γραμματική και τη γλώσσα Κέτσουαν.

**[Πανεπιστήμια στο Περού]**

Με 18 περουβιανά πανεπιστήμια μεταξύ των 300 που αναφέρονται στην κατάταξη των καλύτερων πανεπιστημίων στην Λατινική Αμερική, το Περού προσφέρει μια καλή επιλογή για υποψήφιους διεθνείς φοιτητές. Το ανώτερο ίδρυμα του Περού είναι το Pontificia Universidad Católica del Perú, ένα ιδιωτικό πανεπιστήμιο με έδρα την πρωτεύουσα του Περού Λίμα, το οποίο ανέβηκε από την 31η θέση στη Λατινική Αμερική το 2012, στη 19η το 2015. Μετά από αυτό είναι το Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), το οποίο πρόσφατα έπεσε μερικές θέσεις στην 60η στη Λατινική Αμερική. Ιδρύθηκε στα μέσα του 16ου αιώνα, UNMSM ισχυρίζεται ότι είναι ένα από τα παλαιότερα πανεπιστήμια στην Αμερική - και μάλιστα στον κόσμο. Όπως και το Pontificia Universidad Católica del Perú, έχει την κύρια πανεπιστημιούπολη του στη Λίμα.
Επίσης, στα κορυφαία 150 στην κατάταξη [QS University: Λατινική Αμερική] είναι τα πανεπιστήμια : Universidad Peruana Cayetano Heredia (64η), Universidad de Lima (102η), Universidad Nacional Agraria la Molina (117η), Universidad Nacional de Ingeniería Peru (134η) και Universidad del Pacifico (139η). Συνολικά, το Περού έχει περίπου 80 πανεπιστήμια, με τα ιδιωτικά ιδρύματα να ξεπερνούν αριθμητικά τα δημόσια. Τα δίδακτρα ποικίλλουν, αλλά γενικά οι διεθνείς φοιτητές μπορούν να αναμένουν να πληρώσουν χαμηλά έως μεσαία δίδακτρα, με πολλά πανεπιστήμια να χρεώνουν ανά πίστωση και όχι ανά εξάμηνο ή έτος.
Τα τελευταία χρόνια έχει θεσπιστεί ένα σύστημα καθολικής διαπίστευσης, το οποίο αναμένεται να έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ποιότητας σε όλους τους τομείς. Οι προπτυχιακές σπουδές τείνουν να

περιλαμβάνουν δύο χρόνια γενικών σπουδών, πριν από άλλα δύο χρόνια εξειδίκευσης. Οι μεταπτυχιακές και διδακτορικές σπουδές διαρκούν επίσης περίπου δύο χρόνια η καθεμία.

**Ποιότητα**

Η ποιότητα της εκπαίδευσης του Περού παρέμεινε κακή καθ 'όλη τη διάρκεια της ιστορίας του. Αν και η περουβιανή κυβέρνηση επιβλέπει την εκπαίδευση σε όλο το έθνος με το Υπουργείο Παιδείας, η ρύθμιση είναι αποκεντρωμένη δεδομένου ότι η εξουσία μεταβιβάζεται στους χαμηλότερους κλάδους του υπουργείου. Οι εκπαιδευτικοί στο Περού δεν κινητοποιούνται και στενοχωριούνται επίσης από τους χαμηλούς μισθούς - το χαμηλότερο οποιασδήποτε χώρας στη Λατινική Αμερική - που στερείται κυβερνητικής υποστήριξης, λαμβάνουν οι ίδιοι την κακή εκπαίδευση χωρίς ρύθμιση και συχνά κατακλύζονται από το μεγάλο μέγεθος τάξης. Έχει προταθεί στο Περού να βελτιώσει τη χρηματοδότησή του της δημόσιας εκπαίδευσης, δημιουργώντας παράλληλα ένα σύστημα για την αξιολόγηση της ποιότητας της διδασκαλίας στα σχολεία.

Στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, η έλλειψη ρύθμισης και πιστοποίησης έχει επίσης οδηγήσει σε κακή ποιότητα εκπαίδευσης. Υπήρξε επίσης έλλειψη ενδιαφέροντος σχετικά με την έρευνα στο Περού, καθώς η οικονομία του έθνους βασίζεται κυρίως στους πόρους εξόρυξης - που δεν απαιτεί προηγμένες επιστημονικές ή τεχνολογικές δυνατότητες - με αποτέλεσμα πανεπιστήμια χαμηλότερης ποιότητας.

**[Εισαγωγή σε Σπουδές Πανεπιστημιακού Επιπέδου]**

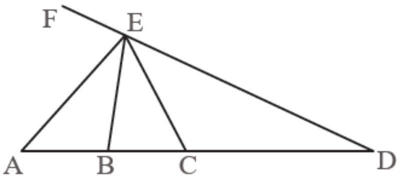
Για την είσοδο στην τριτοβάθμια εκπαίδευση στο Περού, οι φοιτητές πρέπει να κατέχουν το επίσημο πιστοποιητικό σπουδών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Certificado Oficial de Estudios de Educacion Secundaria). Οι φοιτητές για να εισέλθουν στα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στο Περού πρέπει να υποβληθούν σε εισαγωγικές εξετάσεις ή ανταγωνιστικές εξετάσεις (Examen de Ingreso ή Concurso). Αυτά καθορίζονται από μεμονωμένα πανεπιστήμια στο Περού. Ορισμένα πανεπιστήμια διεξάγουν 2 επίπεδα εξετάσεων - μια γενική και μια μεγάλη ειδική εξέταση. Οι εξετάσεις αυτές διεξάγονται δύο φορές το χρόνο, μία στην αρχή του έτους, από τον Ιανουάριο έως τον Απρίλιο και μία στα μέσα του έτους, τον Ιούλιο και τον Αύγουστο. Υπάρχουν ορισμένα πανεπιστήμια που έχουν 3 διαδικασίες εισαγωγής. Οι προϋποθέσεις εισαγωγής και η διαδικασία εγγραφής διαφέρουν ανάλογα με το πανεπιστήμιο.

Θα παρουσιάσουμε ακολούθως τα θέματα εξετάσεων στα Μαθηματικά για την εισαγωγή στο Εθνικό Πανεπιστήμιο Μηχανικών - Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) και στην συνέχεια τις εξετάσεις στα μαθηματικά για εισαγωγή στο UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS (UNMSM) ανά τομέα, ήτοι:
Επιστήμες υγείας - Area A
Βασικές επιστήμες - Area B
Μηχανική-Area C
Οικονομικές επιστήμες και διοικητικές επιστήμες -Area D
Ανθρωπιστικές και νομικές και κοινωνικές επιστήμες -Area E.

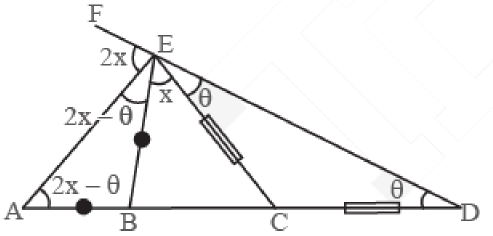
**Examen UNI 2024-I Μαθηματικά**
**Τετάρτη 14 Φεβρουαρίου 2024**

**Γεωμετρία**

Ερώτηση 01
Ένα τρίγωνο $\boldsymbol{AED}$ φαίνεται στο σχήμα. Τα σημεία $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{D}$ είναι συνευθειακά, $\boldsymbol{EC = CD}$ και $\boldsymbol{AB = EB}$. Γνωρίζοντας ότι $\boldsymbol{m\angle AEF = 2(m\angle BEC)}$, υπολογίστε $\boldsymbol{m\angle BEC}$

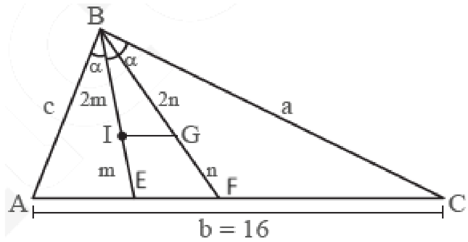



A) $\mathbf{36°}$ B) $\mathbf{34°}$ C) $\mathbf{32°}$ D) $\mathbf{38°}$ E) $\mathbf{30°}$
Λύση




Έστω $\boldsymbol{x = B\hat{E}C}$ και $\boldsymbol{\theta = m\angle E\hat{D}C}$ Άρα $\boldsymbol{A\hat{E}F = 2x}$
Η γωνία $\boldsymbol{A\hat{E}F}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\boldsymbol{AED}$, άρα $\mathbf{E\hat{A}B = 2x - \boldsymbol{\theta}}$. Από τα ισοσκελή τρίγωνα $\boldsymbol{EAB}$ ($\boldsymbol{AB = EB}$)και $\boldsymbol{ECD}$ ($\boldsymbol{EC = CD}$), έχω τις γωνίες του σχήματος. Αφού $\boldsymbol{F\hat{E}D = 180°}$ έχω $\boldsymbol{2x + 2x - \theta + x + \theta = 180°}$άρα $\boldsymbol{5x = 180°} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 36°}}$.
Άρα Α.

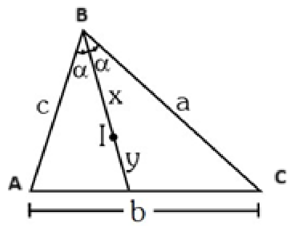
Ερώτηση 02
Σε ένα τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$, το τμήμα που ενώνει το έγκεντρο και το βαρύκεντρο είναι παράλληλο με την πλευρά $\boldsymbol{AC}$. Εάν η πλευρά $\boldsymbol{AC}$ είναι $\boldsymbol{16u}$, τότε η περίμετρος (σε $\boldsymbol{u}$ ) του τριγώνου ABC είναι
A) **48** B) **36** C) **32** D) **64** E) **24**
Λύση




Από Θεώρημα έγκεντρου(*) έχω $\frac{\mathbf{a+c}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{BI}}{\boldsymbol{IE}}$ Αφού $\boldsymbol{IG//AC}$, από θεώρημα Θαλή έχω $\frac{\boldsymbol{BI}}{\boldsymbol{IE}} = \frac{\mathbf{BG}}{\boldsymbol{GF}}$. Για το βαρύκεντρο G έχω $\frac{\mathbf{BG}}{\boldsymbol{GF}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}$. Άρα έχω $\frac{\mathbf{a+c}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{BI}}{\boldsymbol{IE}} = \frac{\mathbf{BG}}{\boldsymbol{GF}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} \Rightarrow \mathbf{a + c = 2\boldsymbol{b}} \Rightarrow \mathbf{a + c + \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{b}} \Rightarrow \boldsymbol{\Pi_{ABC} = 48}$.
Άρα Α.

(*) Θεώρημα έγκεντρου (Teorema del Incentro)
Σε κάθε τρίγωνο $\boldsymbol{\Delta\ ABC}$ , το έγκεντρό του Ι διαιρεί την διχοτόμο μιας γωνίας του σε δυο τμήματα με αναλογία το άθροισμα των πλευρών που περιέχουν την γωνία προς την τρίτη πλευρά

$$\boldsymbol{\frac{AB + BC}{AC} = \frac{BI}{IP}}$$



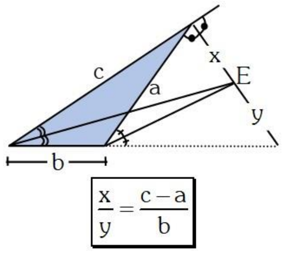

$$\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b}$$

**<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>**
Από το θεώρημα της διχοτόμου στο τρίγωνο $\boldsymbol{\Delta\ ABC}$ έχω

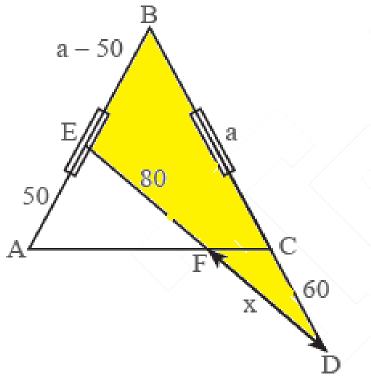
$\boldsymbol{\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AP}{AC-AP} \Longrightarrow AB(AC - AP) = BC(AP) \Longrightarrow AB(AC) - AB(AP) = BC(AP) \Longrightarrow AB(AC) = BC(AP) + AB(AP) \Rightarrow AB(AC) = AP(AB + BC) \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AB+BC}{AC}}$

Από το θεώρημα της διχοτόμου στο τρίγωνο $\boldsymbol{ABP}$ έχω $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AP}} = \frac{\boldsymbol{BI}}{\boldsymbol{IP}} \Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{AB+BC}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{BI}}{\boldsymbol{IP}}}$

Ισχύει και το Θεώρημα Παράκεντρου (Teorema del Excentro)
Σε κάθε τρίγωνο ο λόγος μεταξύ της διαφοράς των δύο πλευρών και της τρίτης πλευράς είναι ίσος με τον λόγο των τμημάτων που καθορίζονται από το παράκεντρο στην εξωτερικό διχοτόμο τη σχετική με την τρίτη πλευρά.



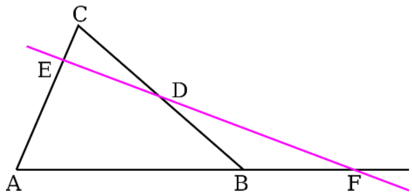

Ερώτηση 03
Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}(\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BC})$, η πλευρά $\boldsymbol{BC}$ εκτείνεται στο σημείο $\boldsymbol{D}$ . Φέρουμε από το D ένα ευθύγραμμο τμήμα που τέμνει τις πλευρές $\boldsymbol{AC}$ και $\boldsymbol{AB}$ στα σημεία $\boldsymbol{F}$ και $\boldsymbol{E}$, αντίστοιχα. Έτσι, $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{50\ cm}, \boldsymbol{EF} = \boldsymbol{80\ cm}$ και $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{60\ cm}$. Υπολογίστε το μήκος (σε cm) του τμήματος $\boldsymbol{DF}$.



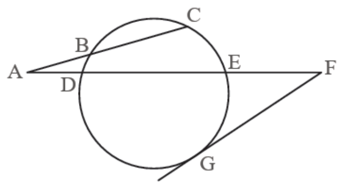

A) **96** B) **98** C) **100** D) **92** E) **94**
Λύση

Από το θεώρημα Μενελάου(*) για το τρίγωνο $\boldsymbol{BED}$ και την ευθεία $\boldsymbol{AC}$ έχω
$\frac{\boldsymbol{BA}}{\boldsymbol{AE}} \times \frac{\boldsymbol{EF}}{\boldsymbol{FD}} \times \frac{\boldsymbol{DC}}{\boldsymbol{CB}} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{50}} \times \frac{\mathbf{80}}{\boldsymbol{x}} \times \frac{\mathbf{60}}{\boldsymbol{a}} = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{96}$. Άρα A

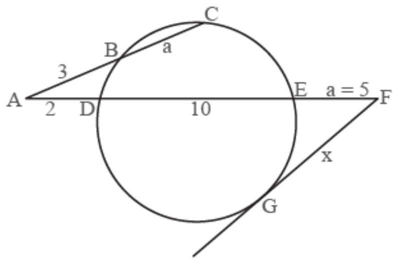
(*) Θεώρημα Μενελάου
Αν μία ευθεία τέμνει τις πλευρές BC, CA, AB του τριγώνου στα σημεία D, E, F αντίστοιχα (που είναι διαφορετικά από τα A, B, C), τότε $\frac{\boldsymbol{AF}}{\boldsymbol{FB}} \times \frac{\boldsymbol{BD}}{\boldsymbol{DC}} \times \frac{\boldsymbol{CE}}{\boldsymbol{EA}} = \mathbf{1}$.




Ερώτηση 04
Στο σχήμα, έχουμε έναν κύκλο, έτσι ώστε $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{3u}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{EF}, \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{2u}, \boldsymbol{DE} = \boldsymbol{10u}$. Εάν $\boldsymbol{G}$ είναι το σημείο εφαπτομένης, τότε το μήκος (σε u) του εφαπτόμενου τμήματος $\boldsymbol{FG}$ είναι



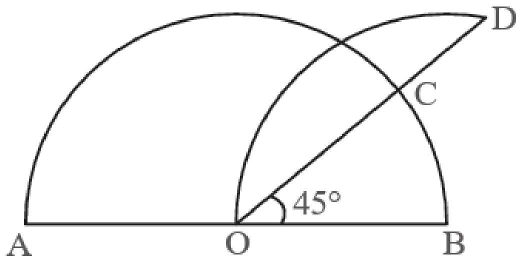

A) $\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}$ B) $\frac{9}{2}\sqrt{\mathbf{3}}$ C) $\frac{7}{2}\sqrt{\mathbf{3}}$ D) $\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}$ E) $\frac{11}{2}\sqrt{\mathbf{3}}$
Λύση




Από την δύναμη του σημείου A ως προς τον κύκλο έχουμε $\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{AE} \Rightarrow \mathbf{3}(\mathbf{3} + \boldsymbol{a}) = \mathbf{2}(\mathbf{2} + \mathbf{10}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{5}$
Από την δύναμη του σημείου F ως προς τον κύκλο έχουμε $\boldsymbol{FE} \cdot \boldsymbol{FD} = \boldsymbol{FG}^2 \Rightarrow \boldsymbol{BC}(\boldsymbol{BC} + \mathbf{10}) = \boldsymbol{x}^2 \Rightarrow \mathbf{5}(\mathbf{5} + \mathbf{10}) = \boldsymbol{x}^2 \Rightarrow \boldsymbol{x}^2 = \mathbf{75} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}$

Ερώτηση 05

Στο σχήμα που απεικονίζεται, το $\boldsymbol{O}$ είναι το κέντρο του ημικυκλίου διαμέτρου $\boldsymbol{AB}$ και το $\boldsymbol{B}$ είναι το κέντρο του κυκλικού τόξου $\boldsymbol{OD}$. Προσδιορίστε την αναλογία των μηκών των τόξων $\boldsymbol{ACB}$ και $\boldsymbol{OD}$.




A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{3}{2}$C) $\mathbf{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

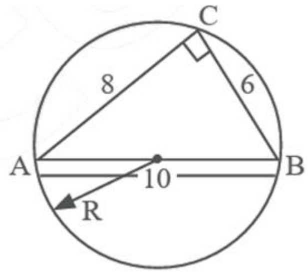
Λύση

Αφού το σημείο B είναι το κέντρο του τόξου OD, τότε $\boldsymbol{BO = BD \Rightarrow ODB = OBD = 45^\circ \Rightarrow OBD = 90^\circ}$

Άρα $\frac{\mathbf{L}\widehat{\mathbf{ACB}}}{\mathbf{L}\widehat{\mathbf{OD}}} = \frac{2\pi R\frac{180^\circ}{360^\circ}}{2\pi R\frac{90^\circ}{360^\circ}} = \mathbf{2}$ . Άρα C

Ερώτηση 06

Ένα τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ εγγράφεται σε κύκλο ακτίνας μήκους $\boldsymbol{R}$, έτσι ώστε $\boldsymbol{AB = 10u, BC = 6u}$ και $\boldsymbol{AC = 8u}$. Προσδιορίστε (σε u) την τιμή του $\boldsymbol{R}$.



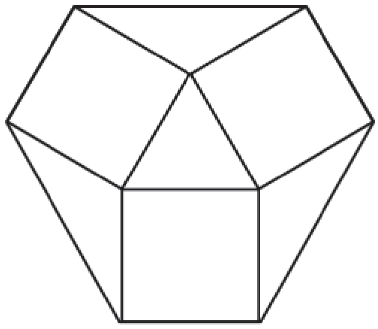

A) $\mathbf{5}$ B) $\mathbf{3}$ C) $\mathbf{4}$ )D $\mathbf{6}$ E)$\mathbf{2}$

Λύση

Τα μήκη του τριγώνου αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα, άρα του τρίγωνο είναι ορθογώνιο με C ορθή γωνία, άρα AB διάμετρος του κύκλου. Άρα $\boldsymbol{2R = 10 \Rightarrow R = 5}$. Άρα A

Ερώτηση 07

Σε κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου $\boldsymbol{4m}$ κατασκευάζεται ένα τετράγωνο. Ενώνοντας τις 6 εξωτερικές κορυφές των τετραγώνων, προσδιορίζεται ένα εξάγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε (σε $\boldsymbol{m^2}$) το εμβαδόν της εξαγωνικής περιοχής.



A) $\mathbf{48 + 16\sqrt{3}}$ B) $\mathbf{48}$ C) $\mathbf{28 + 10\sqrt{3}}$ D) $\mathbf{48 + \sqrt{3}}$ E) $\mathbf{24 + 10\sqrt{3}}$

Λύση

Έχω τρία τετράγωνα πλευράς 4 με εμβαδόν $\mathbf{4^2}$=16 το καθένα,

ένα ισόπλευρο πλευράς 4 με εμβαδόν $\mathbf{4^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}}$

και τρία ισοσκελή τρίγωνα με τις ίσες πλευρές μήκους 4 να περιέχουν γωνία $\mathbf{360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 120^\circ}$ με εμβαδόν $\mathbf{\frac{4\times 4}{2}\sin 120^\circ = \frac{4\times 4}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}}$ το καθένα.

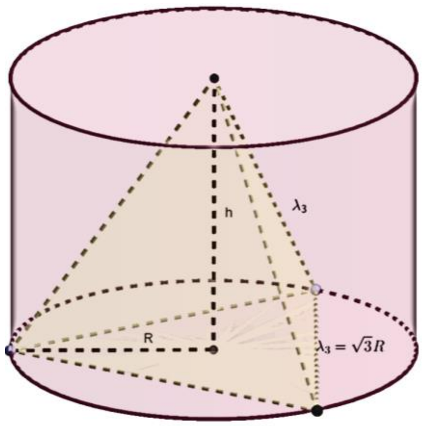
Άρα $\boldsymbol{E = 3 \cdot 16 + 4\sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3} = 48 + 16\sqrt{3}}$. Άρα A

Ερώτηση 08

Σε έναν ορθό κύλινδρο, εγγράφεται μια **κανονική** πυραμίδα με τριγωνική βάση της οποίας ο όγκος είναι $\boldsymbol{10\sqrt{3}cm^3}$ . Υπολογίστε τον όγκο (σε $\boldsymbol{cm^3}$) του κυλίνδρου.

A) $\frac{80}{3}\boldsymbol{\pi}$ B) $\frac{200}{3}\boldsymbol{\pi}$ C) $\mathbf{40}\boldsymbol{\pi}$ D) $\frac{100}{3}\boldsymbol{\pi}$ E) $\frac{50}{3}\boldsymbol{\pi}$

Λύση

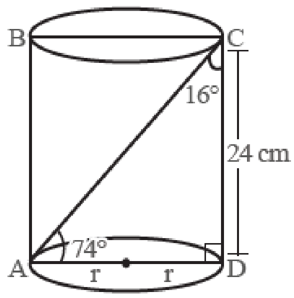



Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, όλες οι ακμές της είναι ίσες μεταξύ τους, άρα η βάση της πυραμίδας είναι ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο στην κυκλική βάση του κυλίνδρου, συνεπώς $\boldsymbol{\lambda_3 = \sqrt{3}R}$, όπου $\boldsymbol{R}$ η ακτίνα της κυκλικής βάσης, ενώ το εμβαδόν της τριγωνικής βάσης είναι $\mathbf{E} = (\boldsymbol{\lambda_3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{R^2}$. Για τον όγκο της πυραμίδας έχω $\boldsymbol{V_\pi = \frac{1}{3}E \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 h}$.

Για τον όγκο του κυλίνδρου έχω $\boldsymbol{V_\kappa = \pi R^2 h}$. Με διαίρεση κατά μέλη έχω: $\frac{V_\kappa}{V_\pi} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 h} \Rightarrow \frac{V_\kappa}{10\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{V_\kappa = 40\pi\ cm^3}$. Άρα C

Ερώτηση 09

Κατά την εκτέλεση της γραμμής 1 του μετρό της Λίμα, κατασκευάζονται στύλοι με κυκλική βάση και σχήμα ορθού κυλίνδρου. Γνωρίζοντας ότι το μέσο ύψος του ψηλότερου στύλου είναι $\boldsymbol{24\,m}$ και ότι το μακρύτερο τμήμα που ενώνει δύο σημεία των απέναντι βάσεων του σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία $\mathbf{74°}$, υπολογίστε περίπου (σε $\boldsymbol{m^3}$) τον όγκο του στύλου.




A) $\boldsymbol{293\pi}$ B) $\boldsymbol{295\pi}$ C) $\boldsymbol{296\pi}$ D) $\boldsymbol{294\pi}$ E) $\boldsymbol{292\pi}$

Λύση

Στο τρίγωνο ADC οι πλευρές του ακολουθούν την πυθαγόρεια τριάδα 7-24-25. Πράγματι $\boldsymbol{tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) = 74°}$. Έχω $\boldsymbol{tan74° = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{24}{7} = \frac{24}{2r} \Rightarrow r = 3,5}$. Άρα $\boldsymbol{V = \pi r^2 h = \pi 3,5^2 \cdot 24 = 294\pi}$. Άρα D.

Ερώτηση 10

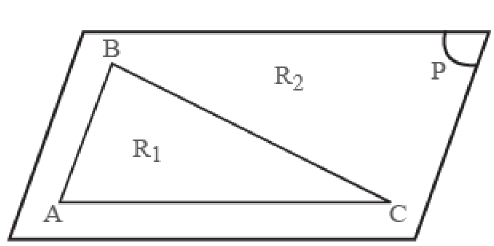
Αναφέρετε την τιμή αλήθειας (V) ή ψεύδους (F) των ακόλουθων προτάσεων:

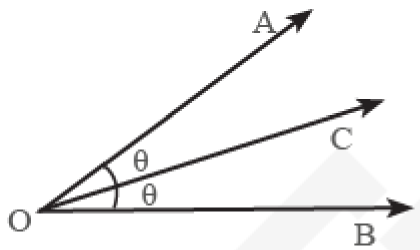
I. Ένα τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ περιέχεται σε ένα επίπεδο $\boldsymbol{P}$, έτσι το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ χωρίζει το επίπεδο $\boldsymbol{P}$ σε δύο κυρτά σύνολα.
II. Εάν η ημιευθεία $\boldsymbol{OC}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\boldsymbol{AOB}$, τότε η $\boldsymbol{OC}$ είναι κυρτό σύνολο.
III. Αν $\boldsymbol{R}$ είναι η τριγωνική περιοχή $\boldsymbol{ABC}$ από την οποία έχει εξαχθεί ένα σημείο $\boldsymbol{P}$, τότε $\boldsymbol{R - P}$ είναι ένα κυρτό σύνολο.

A) FVF B) FFF C) VVV D) VVF E) FVV

Λύση

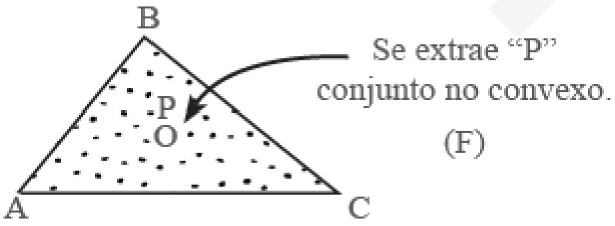
I. Το σύνολο $\boldsymbol{R_2}$ έξω από το τρίγωνο δεν είναι κυρτό, καθώς υπάρχουν σημεία του συνόλου αυτού που δεν συνδεόνται με ευθύγραμμο τμήμα που όλα τα σημεία του να βρίσκονται στο $\boldsymbol{R_2}$. Για παράδειγμα οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου του σχήματος. Άρα F






II. Η ημιευθεία OC είναι κυρτό σύνολο , άρα V

III. Η αφαίρεση του σημείου P από το τρίγωνο το καθιστά μη κυρτό σύνολο. (Σκεφτείτε δυο σημεία του τριγώνου D και E που το ευθύγραμμο τμήμα περνά από το P). Άρα F

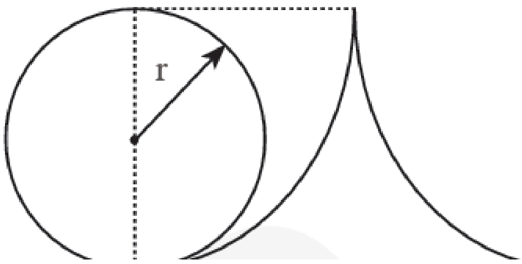



Τελικά FVF, δηλαδή Α.

**Τριγωνομετρία**

Ερώτηση 11

Υπολογίστε τον αριθμό των στροφών που κάνει ο τροχός ακτίνας $\boldsymbol{r}$ εάν κυλά από τη θέση A στη θέση B σε δύο ράμπες που είναι τεταρτημόρια περιφερειών ακτίνας $\boldsymbol{2r}$.

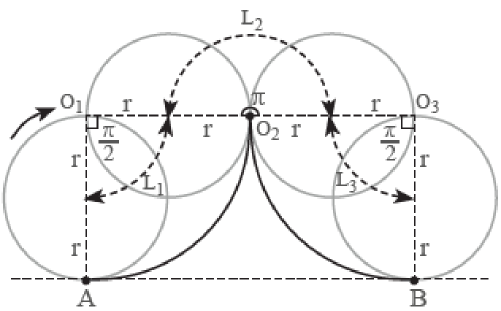



A) $\boldsymbol{1}$ B) $\boldsymbol{4}$ C) $\boldsymbol{1,5}$ D) $\boldsymbol{2}$ E) $\boldsymbol{0,5}$

Λύση

Σχεδίαση της τροχιάς του κέντρου

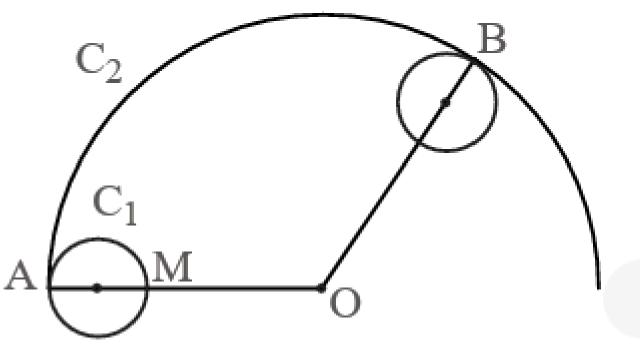
Το κέντρο του κύκλου κάνει αρχικά ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας r, στη συνέχει ένα ημικύκλιο ίδιας ακτίνας και ξανά ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας r. Άρα κάνει έναν κύκλου ακτίνας r.




Άρα Α

Ερώτηση 12

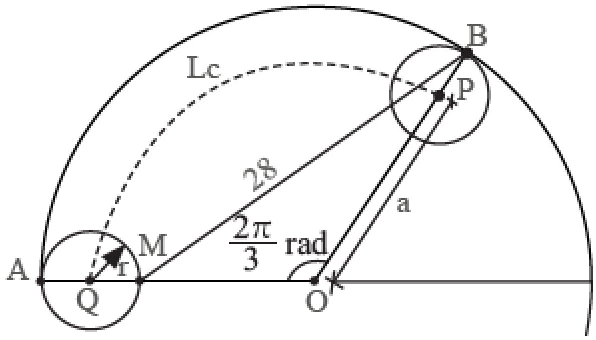
Στο σχήμα που παρουσιάζεται, ο τροχός $\boldsymbol{C_1}$ περιστρέφεται στην περιφέρεια $\boldsymbol{C_2}$ από το A στο B σε $\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}$ στροφές. Εάν είναι αλήθεια ότι η γωνία $\boldsymbol{AOB = 120°}$ και το τμήμα $\boldsymbol{MB = 28u}$. Υπολογίστε την τιμή της διαμέτρου $\boldsymbol{AM}$ του $\boldsymbol{C_1}$ (σε u).




A) $\boldsymbol{6}$ B) $\boldsymbol{4}$ C) $\boldsymbol{8}$ D) $\boldsymbol{9}$ E) $\boldsymbol{10}$

Λύση

Σε $\frac{4}{3}$ στροφές το κέντρο του τροχού $\boldsymbol{C_1}$ διαγράφει τόξο μήκους $\frac{4}{3}\boldsymbol{2\pi r} = \frac{8}{3}\boldsymbol{\pi r}$. Το τόξο αυτό αντιστοιχεί στον κυκλικό τομέα $\boldsymbol{POQ}$ κύκλου ακτίνας OP και ισούται με $\boldsymbol{2\pi OP}\frac{120}{360} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\pi OP}$. Άρα $\frac{8}{3}\boldsymbol{\pi r} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\pi OP} \Rightarrow \boldsymbol{OP = 4r} \Rightarrow \boldsymbol{OB = 5r, OM = 3r}$




Από το νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο $\boldsymbol{POQ}$ έχουμε ότι :

$\boldsymbol{MB^2 = MO^2 + OB^2 - 2MO \cdot OB\, cos120°} \Rightarrow \boldsymbol{28^2} = (\boldsymbol{3r})^2 + (\boldsymbol{5r})^2 + \boldsymbol{2 \cdot 3r \cdot 5r}\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{28^2 = 9r^2 + 25r^2 + 15r^2} \Rightarrow \boldsymbol{28^2 = 49r^2} \Rightarrow \boldsymbol{4^2 7^2 = 49r^2} \Rightarrow \boldsymbol{r = 4u}$. Άρα η διάμετρος $\boldsymbol{AM = 2r = 8u}$. Άρα C

Ερώτηση 13

Ο Luis βρίσκεται $\boldsymbol{195\ m}$ από τον Carlos με κατεύθυνση S 37º O. O Juan βρίσκεται $\boldsymbol{125\ m}$ από τον Luis προς την κατεύθυνση N 37º O. Υπολογίστε την κατά προσέγγιση απόσταση μεταξύ Juan και Carlos (σε m).

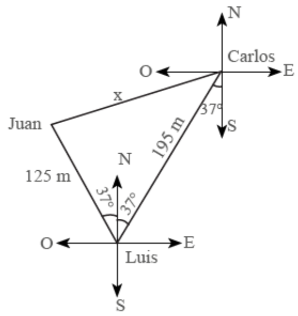
A) $\boldsymbol{225}$ B) $\boldsymbol{200}$ C) $\boldsymbol{220}$ D) $\boldsymbol{230}$ E) $\boldsymbol{210}$

Λύση

Από το νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο $\boldsymbol{JLC}$ έχουμε ότι :

$\mathbf{JC^2} = \boldsymbol{JL^2 + LC^2 - 2(JC)(LC)}\mathbf{cos74°}$ με $\mathbf{cos74°} = \frac{7}{25}$ (πυθαγόρεια τριάδα 7-24-25)

$\mathbf{x^2 = 125^2 + 195^2 - 2(125)(195)cos74°} \Rightarrow \mathbf{x^2 = 125^2 + 195^2 - 2(125)(195)}\frac{7}{25} \Rightarrow \mathbf{x^2 = 125^2 + 195^2 - 2(25)(39)7} \Rightarrow \mathbf{x^2 = 5^2[25^2 + 39^2 - 2(39)7]} \Rightarrow \mathbf{x^2 = 5^2[625 + 1521 - 546]} \Rightarrow \mathbf{x^2 = 5^2 1600} \Rightarrow \mathbf{x = 200m}$. Άρα B




Ερώτηση 14

Έστω $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $\boldsymbol{c \neq 1}$. Εάν η απόσταση του $\boldsymbol{A(2;2)}$ από το $\boldsymbol{B(6;b)}$ είναι $\boldsymbol{5\ u}$ και η απόσταση του $\boldsymbol{B}$ από το $\boldsymbol{C(c;4)}$ είναι $\boldsymbol{\sqrt{26}\ u}$. Υπολογίστε την απόσταση του $\boldsymbol{A}$ από το $\boldsymbol{C}$ (σε u).

A) $\sqrt{\mathbf{29}}$ B) $\sqrt{\mathbf{40}}$ C) $\sqrt{\mathbf{11}}$ D) $\sqrt{\mathbf{5}}$ E) $\sqrt{\mathbf{85}}$

Λύση

Έχω $\mathbf{d(A,B)} = \sqrt{(\mathbf{2-6})^2 + (\mathbf{2}-\boldsymbol{b})^2} \Rightarrow \mathbf{5} = \sqrt{\mathbf{16 + (2-b)^2}} \Rightarrow \mathbf{b = 5 \rightarrow B(6,5)}$

Ακόμα έχω $\mathbf{d(B,C)} = \sqrt{\mathbf{(6-c)^2 + (5-4)^2}} \Rightarrow \sqrt{\mathbf{26}} = \sqrt{\mathbf{(6-c)^2 + 1}} \Rightarrow \mathbf{c = 11 \rightarrow C(11,4)}$

Συνεπώς $\mathbf{d(A,C)} = \sqrt{\mathbf{(2-11)^2 + (2-4)^2}} = \sqrt{\mathbf{85}}$. Άρα E

Ερώτηση 15

Υπολογίστε την τιμή του N που ικανοποιεί την έκφραση: $\frac{1}{2}\mathbf{N} = \boldsymbol{sin}(\mathbf{-510°}) - \mathbf{tan}\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \mathbf{sec}\left(\frac{16\pi}{3}\right)$

A) $\mathbf{-3/2}$ B) $\mathbf{3}$ C) $\mathbf{-3}$ D) $\mathbf{-2}$ E) $\mathbf{-4}$

Λύση

Έχω

$$\boldsymbol{sin}(\mathbf{-510°}) = \boldsymbol{sin}(\mathbf{-360° - 150°}) = -\boldsymbol{sin}(\mathbf{150°}) = -\boldsymbol{sin}(\mathbf{180° - 30°}) = -\boldsymbol{sin}(\mathbf{30°}) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{tan}\left(\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{tan}\left(\mathbf{2}\boldsymbol{\pi} + \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{tan}\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{tan}\left(\boldsymbol{\pi} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = -\mathbf{tan}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right) = \mathbf{-1}$$

$$\mathbf{sec}\left(\frac{\mathbf{16}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = \mathbf{sec}\left(\mathbf{4}\boldsymbol{\pi} + \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = \mathbf{sec}\left(\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}\left(\boldsymbol{\pi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)} = -\frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{-2}$$

Άρα

$\frac{1}{2}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{sin}(-\mathbf{510}°) - \mathbf{tan}\left(\frac{\mathbf{11\pi}}{\mathbf{4}}\right) + \mathbf{sec}\left(\frac{\mathbf{16\pi}}{\mathbf{3}}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\boldsymbol{N} = -\frac{1}{2} + \mathbf{1} - \mathbf{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{N} = -\mathbf{1} + \mathbf{2} - \mathbf{4} = -\mathbf{3}$. Άρα C

Ερώτηση 16

Εάν ισχύει ότι: $\mathbf{9}\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{40}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{41}$, υπολογίστε την τιμή: $\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{x})$.

A) $-\mathbf{4/5}$ B) $-\mathbf{6/5}$ C) $\mathbf{4/5}$ D) $\mathbf{6/5}$ E) $-\mathbf{5/4}$

Λύση

Έχω $-\mathbf{9}\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{40}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{41} \Rightarrow -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{41}}\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x}) - \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{41}}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$. Παρατηρώ ότι $\left(-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{41}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(-\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{41}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$ και λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$, προκύπτει άμεσα ότι $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{41}}$ και $\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{41}}$. Άρα $\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})} + \frac{\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})} = \frac{\mathbf{1}}{-\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{41}}} + \frac{-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{41}}}{-\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{41}}} = -\frac{\mathbf{41}}{\mathbf{40}} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{40}} = -\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{40}} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.

Άρα A.

Ερώτηση 17

Έχετε τις ακόλουθες προτάσεις:

**I.** $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\alpha}) < \mathbf{0} \wedge \mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0} \Rightarrow \exists \mathbf{k} \in \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha} \in \left\langle (\mathbf{2k+1})\boldsymbol{\pi}; (\mathbf{4k+3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \right\rangle$

**II.** $\exists \mathbf{k} \in \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta} \in \left\langle (\mathbf{4k-3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; (\mathbf{2k-1})\boldsymbol{\pi} \right\rangle \Rightarrow \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\theta}) \geq -\mathbf{1}$

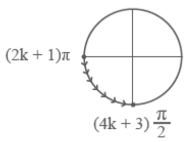
**III.** $\exists \mathbf{k} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{\theta} \in \left\langle (\mathbf{4k-3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; (\mathbf{2k-1})\boldsymbol{\pi} \right\rangle \Rightarrow \mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) \geq -\mathbf{1}$

Αφού προσδιορίσετε αν κάθε πρόταση είναι αληθής (V) ή ψευδής (F), δείξτε την εναλλακτική λύση που παρουσιάζει τη σωστή ακολουθία.

A) VVV B) VFV C) VVF D) VFF E) FVF

Λύση

I. Έχω $(\mathbf{4}\boldsymbol{k}+\mathbf{3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\kappa\pi} + \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}$. Άρα το διάστημα $\left\langle (\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\pi}; (\mathbf{4}\boldsymbol{k}+\mathbf{3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \right\rangle$ αντιστοιχεί στο 3ο τεταρτημόριο. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο έχω ότι αν $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\alpha}) < \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{\alpha}) > \mathbf{0}$, τότε η γωνία α είναι στο 3ο τεταρτημόριο. Άρα V




II. Έχω $\left\langle (\mathbf{4k-3})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; (\mathbf{2k-1})\boldsymbol{\pi} \right\rangle = \left\langle \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}; \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} + \boldsymbol{\pi} \right\rangle$, δηλαδή $\boldsymbol{\theta} \in$ 2ο τεταρτημόριο. Η $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\theta}) \geq -\mathbf{1}$ ισχύει για οποιαδήποτε γωνία. Άρα V

III. Έχω όπως πριν ότι $\boldsymbol{\theta} \in$ 2ο τεταρτημόριο, άρα $\mathbf{0} \geq \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta}) \geq -\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0} \leq -\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0} \geq \frac{\mathbf{1}}{-\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta})} \geq \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0} \geq -\mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0} \leq \mathbf{sec}(\boldsymbol{\theta}) \leq -\mathbf{1}$. Άρα F

Άρα VVF, άρα C

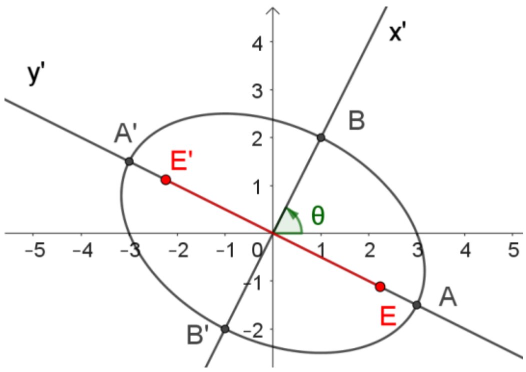
Ερώτηση 18

Η έλλειψη εξίσωσης: $\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}\boldsymbol{xy} + \mathbf{8}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{M}$, με $(\boldsymbol{M} > \mathbf{0})$ έχει εστιακή απόσταση ίση με $\mathbf{5}$. Υπολογίστε την τιμή του $\boldsymbol{M}$.

A) $\mathbf{45}$ B) $\mathbf{36}$ C) $\mathbf{25}$ D) $\mathbf{70}$ E) $\mathbf{40}$

Λύση

*Για να εξαλείψουμε τον παράγοντα **xy** μετασχηματίζουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων **Oxy** στρέφοντας τους άξονές του κατά γωνία $\boldsymbol{\theta > 0}$ τέτοια ώστε* $\boxed{\boldsymbol{tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}}} = \frac{4}{5-8} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 4\tan^2(\theta) - 6\tan(\theta) - 4 = 0 \Rightarrow$ $\tan(\theta) = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{8} \Rightarrow \tan(\theta) = 2 \vee \tan(\theta) = -\frac{1}{2} \overset{\theta>0}{\Longrightarrow} \boldsymbol{tan\theta = 2} \Rightarrow$ $\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \wedge \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.




Άρα $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Η αρχική εξίσωση στο νέο σύστημα συντεταγμένων $\boldsymbol{Ox'y'}$ γίνεται

$$5\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{x'}{\sqrt{5}} - \frac{2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right) + 8\left(\frac{2x'}{\sqrt{5}} + \frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2 = M \Leftrightarrow$$

$$5\left(\frac{x'^2}{5} - \frac{4x'y'}{5} + \frac{4y'^2}{5}\right) + 4\left(\frac{2x'^2}{5} - \frac{4x'y'}{5} + \frac{x'y'}{5} - \frac{2y'^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4x'^2}{5} + \frac{4x'y'}{5} + \frac{y'^2}{5}\right) = M \Leftrightarrow$$

$$x'^2(1 + 1{,}6 + 6{,}4) + y'^2(4 - 1{,}6 + 1{,}6) + x'y'(-4 - 3{,}2 + 0{,}8 + 6{,}4) = M$$

$$9x'^2 + 4y'^2 = M \Leftrightarrow \frac{x'^2}{\frac{M}{9}} + \frac{y'^2}{\frac{M}{4}} = 1$$

Έλλειψη με μεγάλο άξονα των $\boldsymbol{y'}$ και $\alpha^2 = \frac{M}{4}, \beta^2 = \frac{M}{9} \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = \frac{M}{4} - \frac{M}{9} = \frac{5M}{36} \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{5M}}{6} \Rightarrow 2\gamma = \frac{\sqrt{5M}}{3} \Rightarrow E'E = \frac{\sqrt{5M}}{3}$

$\Rightarrow 5 = \frac{\sqrt{5M}}{3} \Rightarrow 25 = \frac{5M}{9} \Rightarrow M = 45$. Άρα A

Ερώτηση 19

Γνωρίζοντας ότι: $\sqrt{3}sin(z) = cos(y), \sqrt{3}sin(y) = cos(x)$

Υπολογίστε την τιμή του: $\frac{1}{12}(9\sin^2(z) + \cos^2(x))$

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση

Έχω με ύψωση στο τετράγωνο ότι $3\sin^2(z) = \cos^2(y) \Leftrightarrow 9\sin^2(z) = 3\cos^2(y)$ και $3\sin^2(y) = \cos^2(x)$

Άρα $\frac{1}{12}(9\sin^2(z) + \cos^2(x)) = \frac{1}{12}\left(3\cos^2(y) + 3\sin^2(y)\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ άρα D.

Ερώτηση 20

Να λυθεί η ανίσωση : $|tan(x)| + cos(2x) \leq 1$, στο διάστημα $[0; \pi]$

A) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ B) $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$ C) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ D) $\phi$ E) $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

Λύση

Έχω $|tan(x)| + cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow |tan(x)| - 1 + cos(2x) \leq 0 \Leftrightarrow |tan(x)| - 2cos^2(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} - 2|\sin(x)|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\sin(x)|\left(\frac{1-2|\sin(x)|\cdot|\cos(x)|}{|\cos(x)|}\right) \leq 0 \Leftrightarrow |\sin(x)| = 0$ ή $1 - 2|\sin(x)| \cdot |\cos(x)| \leq 0 \Leftrightarrow x \in 0, \pi$ ή $1 - |\sin(2x)| \leq 0$. Έχω $1 - |\sin(2x)| \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq |\sin(2x)| \Leftrightarrow |\sin(2x)| = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$. Άρα $x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$. Άρα B

**Αριθμητική**

Ερώτηση 21

Στις 20 Ιανουαρίου 2023, άνοιξε ένας τραπεζικός λογαριασμός με 10.000 \$ με ποσοστό TEA 20%, ανατοκιζόμενο καθημερινά. Πρέπει να υπολογιστεί ο τόκος που προκύπτει από αυτό το κεφάλαιο σε δολάρια μέχρι την ημερομηνία ακύρωσης, η οποία ήταν η 10η Μαρτίου. (TEA: Ετήσιο πραγματικό επιτόκιο) Δεδομένα: $\mathbf{1,2^{\frac{49}{360}} = 1,0251}$. Θεωρήστε ένα έτος 360 ημερών.

A) 413 B) 259 C) 310 D) 350 E) 251

Λύση

Από τις 20 Ιανουαρίου 2023 έως την 10η Μαρτίου είναι 49 μέρες. Αν f είναι το ημερήσιο επιτόκιο τότε για κεφάλαιο C θα ισχύει ότι $\mathbf{C \times f^{360} = C + 20\%}\boldsymbol{C} \Rightarrow \mathbf{C \times f^{360} = 1,20C} \Rightarrow \boldsymbol{f}^{\mathbf{360}} \mathbf{= 1,20} \Rightarrow \mathbf{f = (1,20)^{\frac{1}{360}}}$. Άρα μετά από 49 μέρες το κεφάλαιο θα έχει γίνει $\mathbf{C \times f^{49} = 10.000 \times (1,20)^{\frac{49}{360}} = 10.251}$. Συνεπώς οι τόκοι θα είναι $\mathbf{10.251 - 10.000 = 251}$. Άρα E

Ερώτηση 22

Ένα κεφάλαιο κατατίθεται στο 1%, μηνιαίο ανατοκιζόμενο μηνιαίως. η διαφορά στα ποσά στο τέλος του τρίτου και δεύτερου μήνα είναι S/ 10.201. Υπολογίστε το ποσό σε Σολ (η νομισματική μονάδα του Περού) στο τέλος του δεύτερου μήνα. και αναφέρετε το άθροισμα των ψηφίων του ποσού αυτού ως απάντηση.

A) 5 B) 2 C) 1 D) 4 E) 3

Λύση

Έστω $\boldsymbol{C}$ το αρχικό κεφάλαιο, τότε στο τέλος του 3ου και του 2ου μήνα θα έχω στην τράπεζα $\mathbf{C \times 1,01^2}$ $\mathbf{C \times 1,01^3}$ και, αντίστοιχα. Άρα έχω $\mathbf{C \times 1,01^3 - C \times 1,01^2 = 10201 = 101^2 \Rightarrow (1,01 - 1)C \times 1,01^2 = 101^2 \Rightarrow 0,01}\boldsymbol{C} \mathbf{= 101^2/1,01^2 \Rightarrow 0,01}\boldsymbol{C} \mathbf{= 10.000} \Rightarrow \boldsymbol{C} \mathbf{= 1.000.000}$. Άρα στο τέλος του 2ου μήνα έχω $\mathbf{1.000.000 \times 1,01^2 = 1.000.000 \times 1,0201 = 1.020.100}$ Σολ. Το άθροισμα των ψηφίων είναι $\mathbf{1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 = 4}$. Άρα D

Ερώτηση 23

Δεδομένου του ακόλουθου πίνακα συχνοτήτων, η κατανομή των οποίων είναι συμμετρική, κοινού πλάτους κλάσης και όχι απαραίτητα μονοτροπική (Μονοτροπική κατανομή σημαίνει ότι υπάρχει μόνο μία υψηλότερη τιμή,unimodal distribution)

| $\boldsymbol{I_i}$ | $\boldsymbol{f_i}$ | $\boldsymbol{F_i}$ | $\boldsymbol{h_i}$ |
|---|---|---|---|
| $[\mathbf{20};\ \ )$ | 9 | | |
| $[\ \ ;\ \ )$ | | | 0,24 |
| $[\ \ ;\ \ )$ | | | |
| $[\ \ ;\mathbf{52})$ | | 41 | |
| $[\ \ ;\ \ )$ | | | |

Προσδιορίστε το άθροισμα της διάμεσης τιμής(median) και της(των) επικρατούσας(ων) τιμής(ων) (mode).

A) 160 B) 80 C) 120 D) 150 E) 60

Λύση

Οι τέσσερις πρώτες κλάσεις αφορούν στο διάστημα $[\mathbf{20};\mathbf{52})$ συνολικού πλάτους 32. Λόγω της συμμετρικής κατανομής, κάθε κλάση έχει πλάτος $\mathbf{32/4 = 8}$, και είναι οι $[\mathbf{20};\mathbf{28}), [\mathbf{28};\mathbf{36}), [\mathbf{36};\mathbf{44}), [\mathbf{44};\mathbf{52}), [\mathbf{52};\mathbf{60})$.

Λόγω της συμμετρίας έχω $\boldsymbol{f_1 = f_5 = 9}$ και $\boldsymbol{f_2 = f_4}$.

Ακόμα έχω $\boldsymbol{F_1 = 9}$ και $\boldsymbol{N = F_5 = F_4 + f_5 = 41 + 9 = 50}$. Άρα $\boldsymbol{f_2 = N \cdot h_2 = 50 \cdot 0,24 = 12}$.

Τέλος έχω $\boldsymbol{f_3 = N - f_1 - f_2 - f_4 - f_5 = 50 - 9 - 12 - 12 - 9 = 8}$. Και ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

| $\boldsymbol{I_i}$ | $\boldsymbol{f_i}$ | $\boldsymbol{F_i}$ | $\boldsymbol{h_i}$ |
|---|---|---|---|
| $[\mathbf{20};\mathbf{28})$ | 9 | 9 | 0,18 |
| $[\mathbf{28};\mathbf{36})$ | 12 | 21 | 0,24 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[36;\ 44)$ | 8 | 29 | 0,16 |
| $[44; 52)$ | 12 | 41 | 0,24 |
| $[52;\ 60)$ | 9 | 50 | 0,18 |

*Για τον υπολογισμό της διαμέσου σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις, χρησιμοποιείται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων ή ο τύπος:* $\boldsymbol{\delta = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot C_i}$ *όπου,* $\boldsymbol{L_i}$ *είναι το κάτω άκρο της μεσαίας κλάσης,* $\boldsymbol{C_i}$ *είναι το πλάτος της μεσαίας κλάσης,* $\boldsymbol{f_i}$ *είναι η συχνότητα της μεσαίας κλάσης και* $\boldsymbol{F_{i-1}}$ *είναι η αθροιστική συχνότητα της προηγούμενης από τη μεσαία κλάσης.*

Άρα εδώ έχω $\boldsymbol{\delta = 36 + \frac{\frac{50}{2} - 21}{8} \cdot 8 = 40}$

Έχω δύο επικρατούσες κλάσεις την $\boldsymbol{I_2 = [28; 36)}$ και $\boldsymbol{I_4 = [44; 52)}$

*Ας θεωρήσουμε ότι το «L» είναι το κατώτερο όριο της τροπικής τάξης, το «h» είναι το μέγεθος του διαστήματος κλάσης,* $\boldsymbol{f_m}$ *είναι η συχνότητα της τροπικής τάξης,* $\boldsymbol{f_1}$ *είναι η συχνότητα της κλάσης που προηγείται της τροπικής κλάσης, και* $\boldsymbol{f_2}$ *είναι η συχνότητα της κλάσης που διαδέχεται την τροπική τάξη. Εδώ, η τροπική κλάση είναι το διάστημα δεδομένων με την υψηλότερη συχνότητα. Έτσι, η επικρατούσα τιμή δίνεται από τον τύπο:* $\boldsymbol{Mode = L + h\frac{(f_m - f_1)}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)}}$

Άρα για την επικρατούσα κλάση $\boldsymbol{I_2}$ έχω $\mathbf{Mode1 = 28 + 8\frac{(12-9)}{(12-9)+(12-8)} = 28 + \frac{24}{7}}$

Ενώ για την επικρατούσα κλάση $\boldsymbol{I_4}$ έχω $\mathbf{Mode2 = 44 + 8\frac{(12-8)}{(12-8)+(12-9)} = 44 + \frac{32}{7}}$

Άρα $\boldsymbol{\delta} + \mathbf{Mode1 + Mode2 = 40 + 28 + \frac{24}{7} + 44 + \frac{32}{7} = 120}$. Άρα C

Ερώτηση 24

Μετά από καταγγελία ομάδας φοιτητών του μαθήματος της χημείας, αποφασίστηκε η αύξηση κατά 5 μονάδες στην τελική εξέταση. Όσον αφορά τους νέους βαθμούς (βαθμολογίες), αναφέρετε την αξία αλήθειας των ακόλουθων προτάσεων:

I. Η διακύμανση μειώνεται.
II. Ο αριθμητικός μέσος όρος αυξάνεται.
III. Ο λόγος VAR/MA αυξάνεται. (MA: αριθμητικός μέσος όρος και VAR: διακύμανση)

A) FVF B) FVV C) VFV D) VVF E) VVV

Λύση

Έστω $\boldsymbol{x_i}$ οι αρχικές βαθμολογίες των μαθητών και $\boldsymbol{y_i}$ οι τελικές βαθμολογίες τους. Έχω $\boldsymbol{y_i = x_i + 5}$.

I. Έχω $\boldsymbol{Var(X) = Var(Y)}$, άρα η διακύμανση δεν μεταβάλλεται, άρα F
II. Έχω $\boldsymbol{\overline{Y} = \overline{X} + 5}$, Άρα ο μέσος όρος αυξάνεται, άρα V
III. Έχω $\boldsymbol{\frac{Var(Y)}{\overline{Y}} = \frac{Var(X)}{\overline{X}+5} < \frac{Var(X)}{\overline{X}}}$, δηλαδή ο λόγος VAR/MA μειώνεται, άρα F

Άρα FVF, άρα A

Ερώτηση 25

Ένας μαθητής αγοράζει 3 βιβλία μαθηματικών, 2 βιβλία βιολογίας, 3 βιβλία φυσικής και 2 βιβλία χημείας. Θέλετε να τα τακτοποιήσετε σε ένα ράφι που έχει χώρο για δέκα βιβλία, με πόσους τρόπους θα μπορείτε να το κάνετε αυτό, αν τα βιβλία με το ίδιο θέμα πρέπει να είναι μαζί;

(A) 864 (B) 1728 (C) 2304 (D) 2592 (E) 3456

Λύση

Σε πρώτη φάση έχω $\mathbf{4}!$ τρόπους να τοποθετήσω τα βιβλία ως προς τα 4 θέματα. Στην συνέχεια έχω $\mathbf{3}!$ τρόπους τοποθέτησης των βιβλίων μαθηματικών, $\mathbf{3}!$ για της φυσική, $\mathbf{3}!$ για τη βιολογία και $\mathbf{3}!$ για τη χημεία. Τελικά έχω $\mathbf{4! \times 3! \times 2! \times 3! \times 2! = 24 \times 6 \times 2 \times 6 \times 2 = 3456}$ συνδυασμούς. Άρα E.

**Θεωρία αριθμών**

Ερώτηση 26

Έστω ότι τα **a**,**b**,**c** είναι φυσικοί αριθμοί. Εάν ο συμβολισμός $\boldsymbol{a|b}$ υποδεικνύει ότι το **a** είναι διαιρέτης του **b**, υποδείξτε την τιμή αλήθειας των ακόλουθων προτάσεων:

- **I.** $[\mathbf{a|b} \wedge \mathbf{a|(b+c)}] \rightarrow \mathbf{a|c}$
- **II.** $[\mathbf{a|b} \wedge \mathbf{b|c}] \rightarrow \mathbf{a|c}$
- **III.** $[\mathbf{a|(b+c)} \wedge \mathbf{a|(b-c)}] \rightarrow \mathbf{a|b}$

A) FVF B) VVV C) FFV D) VFV E) VVF

Λύση

- I. Έχω $[\mathbf{a|b} \wedge \mathbf{a|(b+c)}] \rightarrow \boldsymbol{b = ma, b + c = na}$ για κάποια $\boldsymbol{m, n} \in \boldsymbol{Z}$. Άρα $\boldsymbol{m\alpha + c = n\alpha} \rightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{n\alpha - m\alpha} \rightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{(n-m)\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha|c}$. άρα V
- II. Έχω $[\mathbf{a|b} \wedge \mathbf{b|c}] \rightarrow \boldsymbol{b = ma, c = nb}$ για κάποια $\boldsymbol{m, n} \in \boldsymbol{Z}$. Άρα $\boldsymbol{c = nm\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha|c}$. άρα V
- III. Έχω $[\mathbf{2|(3+1)} \wedge \mathbf{2|(3-1)}] \rightarrow \mathbf{2 \nmid 3}$ άρα F

Άρα VVF, άρα E.

Ερώτηση 27

Έστω ότι η ανάλυση πρώτων παραγόντων ενός αριθμού $\boldsymbol{N}$ έχει ως εξής: $\mathbf{N = a^3(a+1)^2 5^{3a} 7^b 11^c}$ Επιπλέον, το $\mathbf{2^3 3^2 7^b}$έχει 32 σύνθετους θετικούς διαιρέτες. Πόσους περιττούς διαιρέτες πρώτους με το 847 έχει ο N;

A) 8 B) 14 C) 15 D) 21 E) 12

Λύση

Οι αριθμοί $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{a}$ +1 είναι διαδοχικοί, άρα ο ένας από τους δύο είναι άρτιος, όμως ο μόνος πρώτος άρτιος είναι ο 2. Αν $\boldsymbol{a+1=2}$, τότε $\boldsymbol{a=1}$, αλλά ο 1 δεν είναι πρώτος. Αν $\boldsymbol{a=2}$, τότε $\boldsymbol{a+1=3}$, δεκτό αφού οι 2 και 3 είναι πρώτοι. Άρα $\boldsymbol{a=2}$.

Ο αριθμός $\mathbf{2^3 3^2 7^b}$ έχει 32 σύνθετους θετικούς διαιρέτες και 4 μη σύνθετους, απλούς, θετικούς διαιρέτες, τους (1, 2, 3 και 7). Ακόμα ο αριθμός $\mathbf{2^3 3^2 7^b}$ έχει $\boldsymbol{(3+1)(2+1)(b+1)}$ θετικούς διαιρέτες (απλούς και σύνθετους). Άρα έχω $\boldsymbol{(3+1)(2+1)(b+1) = 32+4 \Rightarrow 12(b+1) = 36 \Rightarrow b = 2}$.

Άρα $\mathbf{N = 2^3 \times 3^2 \times 5^6 \times 7^2 \times 11^c}$

Έχω $\mathbf{847 = 7 \times 11^2}$

Οι περιττοί διαιρέτες του **N** δεν είναι πολλαπλάσια του 2. Το 7 και 11 είναι κοινοί διαιρέτες των N και 847, άρα και αυτοί παραλείπονται. Απομένουν οι διαιρέτες του $\mathbf{3^2 \times 5^6}$ που είναι σε πλήθος $\mathbf{(2+1)(6+1) = 21}$ . Άρα D

Ερώτηση 28

Δύο ρητοί αριθμοί έχουν παρονομαστή 11 και αριθμητή δύο διαδοχικούς θετικούς ακεραίους. Επιπλέον, μεταξύ αυτών των ρητών αριθμών περιλαμβάνεται ο ρητός αριθμός, του οποίου η δεκαδική τιμή είναι $\mathbf{0,25\widehat{45}}$ Υπολογίστε το άθροισμα των αριθμητών αυτών των ρητών αριθμών.

A) 6 B) 4 C) 3 D) 7 E) 5

Λύση

Έχω

$\mathbf{\frac{x}{11} < 0,25\widehat{45} < \frac{x+1}{11} \Leftrightarrow \frac{x}{11} < 0,25 + 0,00\widehat{45} < \frac{x+1}{11} \Leftrightarrow \frac{x}{11} < \frac{1}{4} + \frac{45}{9900} < \frac{x+1}{11} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < \frac{11}{4} + \frac{45}{900} < x + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < 2,75 + 0,05 < x + 1 \Leftrightarrow x < 2,8 < x + 1}$. Άρα $\boldsymbol{x = 2}$.

Άρα οι αριθμητές αυτών των ρητών αριθμών είναι ο 2 και ο 3, με άθροισμα 5. Άρα E

Ερώτηση 29

Υπολογίστε τον αριθμό των ακέραιων τιμών N με: $\mathbf{18^2 \le N < 19^2}$ και $\mathbf{7^3 \le N < 8^3}$

A) 23 B) 18 C) 25 D) 36 E) 16

Λύση

Έχω $\left.\begin{matrix} \mathbf{18^2 \le N < 19^2 \Leftrightarrow 324 \le N < 361} \\ \mathbf{7^3 \le N < 8^3 \Leftrightarrow 343 \le N < 512} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{343 \le N < 361}$. Άρα $\mathbf{N \in 343, 344, \ldots, 360}$.

Το σύνολο αυτό περιέχει $\mathbf{360 - 343 + 1 = 18}$ στοιχεία, άρα B

Ερώτηση 30

Δεδομένης της έκφρασης $\mathbf{A = \overline{ab0ab} + \overline{129\boldsymbol{ab}} + 40}$, προσδιορίστε τη μικρότερη τιμή που λαμβάνει το $\boldsymbol{M = a + b}$ έτσι ώστε το $\boldsymbol{A}$ να είναι ένα τέλειο τετράγωνο, όπου **a** και **b** $\in \boldsymbol{N(a \ne b)}$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Λύση

Έχω $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{ab0ab}} + \overline{\mathbf{129}\boldsymbol{ab}} + 40 = \overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{1001}) + \mathbf{12900} + \overline{\mathbf{ab}} + \mathbf{40} = \mathbf{ab}(\mathbf{1002}) + \mathbf{12940} = \overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{2 \times 3 \times 167}) + \mathbf{12940} = \boldsymbol{k^2} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{2 \times 3 \times 167}) + \mathbf{12940} \equiv \boldsymbol{k^2}\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{167} \Rightarrow \mathbf{81} \equiv \boldsymbol{k^2}\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{167} \Rightarrow \boldsymbol{k} \equiv \pm 9\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{167} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{167 + 9, 167 - 9} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{176}, \boldsymbol{k} = \mathbf{158}$

Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{176}$ έχω $\overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{1002}) + \mathbf{12940} = \mathbf{176^2} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{1002}) = \mathbf{30976 - 12940 = 18036} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{18} \Rightarrow \boldsymbol{M} = \mathbf{1 + 8 = 9}$

Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{158}$ έχω $\overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{1002}) + \mathbf{12940} = \mathbf{158^2} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}}(\mathbf{1002}) = \mathbf{24964 - 12940 = 12024} \Rightarrow \overline{\mathbf{ab}} = \mathbf{12} \Rightarrow \boldsymbol{M} = \mathbf{1 + 2 = 3}$

Άρα η μικρότερη τιμή είναι το 3, άρα A

**ΆΛΓΕΒΡΑ**

Ερώτηση 31

Υποδείξτε τη σωστή ακολουθία αφού προσδιορίσετε αν η πρόταση είναι αληθής (V) ή ψευδής (F):

I. $\forall \boldsymbol{\alpha, \beta}, \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{a^2 \ \ge \ \beta}$

II. Εάν το $\boldsymbol{A} \subset [\mathbf{0; 3}]$, τότε το A έχει ένα μέγιστο στοιχείο.

III. $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ , είναι αλήθεια ότι $|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| + |\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| + |\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| \ge \mathbf{2}$.

A) FFV B) VVV C) VFV D) FVV E) FFF

Λύση

I. Για $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$ έχω $\mathbf{0 < 1}$, άρα F

II. Έστω $\boldsymbol{A} = [\mathbf{0; 3}) \subset [\mathbf{0; 3}]$. Όμως το $[\mathbf{0; 3})$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο! Άρα F

III. Από τριγωνική ανισότητα έχω
$|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| + |\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| = |\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| + |\mathbf{3} - \boldsymbol{x}| \ge |\boldsymbol{x} - \mathbf{1} + \mathbf{3} - \boldsymbol{x}| = \mathbf{2}$
Επιπλέον, έχω $|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| \ge \mathbf{0}$ . Με πρόσθεση κατά μέλη έχω $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| + |\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| + |\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| \ge \mathbf{2}$. Άρα V

Άρα FFV, άρα A

Ερώτηση 32

Αφού αναλύσετε την αλήθεια (V) ή το ψεύδος (F) των ακόλουθων προτάσεων, επισημάνετε την εναλλακτική λύση που έχει τη σωστή σειρά:

I. Αν το $\mathbf{P(x, y) = x^m y^n (2x^{2m+1} + 7y^{54n+1})^7}$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο, τότε είναι αλήθεια ότι $\boldsymbol{\frac{m}{n}} = \mathbf{27}$ .

II. Εάν τα πολυώνυμα $\boldsymbol{Q(x)} = \mathbf{23}\boldsymbol{x} + \mathbf{51}$ και $\boldsymbol{P(x)} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})$ είναι ίσα, τότε $\boldsymbol{\frac{a}{b}} = \mathbf{\frac{97}{120}}$.

III. Η $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ είναι ρίζα πολλαπλότητας δύο $\mathbf{P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x + 3}$.

A) VFV B) VVF C) FFF D) FFV E) VFF

Λύση

I. *Αν σε ένα πολυώνυμο όλοι οι όροι του, ως προς μια ή ως προς όλες τις μεταβλητές του, είναι του ίδιου βαθμού, τότε λέμε ότι το πολυώνυμο είναι ομογενές.*
Έστω $\boldsymbol{m = n = 0}$, τότε $\mathbf{P(x,y) = x^0y^0(2x^1 + 7y^1)^7 = (2x + 7y)^7}$το οποίο είναι ένα ομογενές πολυώνυμο 7ου βαθμού. Αλλά $\boldsymbol{\frac{m}{n} = \frac{0}{0} \neq 27}$. Άρα F

II. Έχω $\boldsymbol{a(x-3) + b(x-2) \equiv 23x + 51}$. Για $\boldsymbol{x = 3}$ έχω $\boldsymbol{b = 23 \times 3 + 51 = 120}$. Για $\boldsymbol{x = 2}$ έχω $\boldsymbol{-\alpha = 23 \times 2 + 51 = 97 \Rightarrow \alpha = -97}$. Άρα $\boldsymbol{\frac{a}{b} = -\frac{97}{120}}$. Άρα F

III. Έχω $\mathbf{P(1) = 2 - 7 + 1 + 7 + 3 = 6 \neq 0}$, άρα δεν είναι ούτε απλή ρίζα, άρα F

Άρα FFF, άρα C

Ερώτηση 33

Προσδιορίστε τον ανεξάρτητο όρο ενός τρίτου βαθμού πολυωνύμου $\boldsymbol{P(x)}$ με κύριο συντελεστή ίσο με ένα και επιπλέον ισχύει ότι: $\boldsymbol{P(-1) = P(-2) = P(-3)}$. Είναι επίσης γνωστό ότι το άθροισμα των συντελεστών του $\boldsymbol{P(x)}$ είναι $\mathbf{105}$.

A) 11 B) 89 C) 6 D) 87 E) 1

Λύση

Έχω $\boldsymbol{P(-1) = P(-2) = P(-3) = k \Rightarrow P(x) \equiv (x+1)(x+2)(x+3) + k}$.

Αφού το άθροισμα των συντελεστών του $\boldsymbol{P(x)}$ είναι $\mathbf{105}$, έχω ότι

$\boldsymbol{P(1) = 105 \Rightarrow (1+1)(1+2)(1+3) + k = 105 \Rightarrow k = 81 \Rightarrow P(x) \equiv (x+1)(x+2)(x+3) + 81}$.

Ο σταθερός όρος είναι ίσος με το $\boldsymbol{P(0) \equiv (0+1)(0+2)(0+3) + 81 = 87}$. Άρα D

Ερώτηση 34

Προσδιορίστε την αλήθεια (V) ή το ψεύδος (F) των ακόλουθων προτάσεων:

I. $\forall$**x,y** $\in \mathbb{R}$ με **xy>0,** ισχύει ότι $\boldsymbol{ln(xy) = ln(x) + ln(y)}$.

**II.** $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} - 0, \mathbf{ln}(\mathrm{x}^2) = 2\mathbf{ln}(x)}$.

III. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{g(x) = e^{x^3 - \frac{1}{x}} + ln(x-3)}$ είναι το $\boldsymbol{\langle 3; \infty \rangle}$

Σημειώστε τη σωστή εναλλακτική λύση:

A) FFF B) VVV C) FFV D) VVF E) FVV

Λύση

I. Η πρόταση $\boldsymbol{xy > 0}$ δεν σημαίνει ότι οπωσδήποτε $\boldsymbol{x > 0 \wedge y > 0}$, αλλά ενδέχεται να ισχύει και ότι $\boldsymbol{x < 0 \wedge y < 0}$. Για αυτές τις συνθήκες, οι λογάριθμοι στο 2ο μέλος της ισότητας δεν ορίζονται, άρα F

II. Το σωστό είναι ότι $\boldsymbol{\mathbf{ln}(\mathrm{x}^2) = 2\mathbf{ln}(|x|)}$. Η δοσμένη σχέση ισχύει μόνο για $\boldsymbol{x > 0}$. Άρα F

III. Για το πεδίο ορισμού της g, πρέπει $\mathbf{(x \neq 0 \wedge x - 3 > 0) \Rightarrow \boldsymbol{D_f} = \langle 3; \infty \rangle}$. Άρα V

Άρα FFV, άρα C.

Ερώτηση 35

Λύστε, στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, την ακόλουθη ανισότητα:$\boldsymbol{log\left(\sqrt{\mathrm{x}^2 + 19}\right) \geq 1}$

A) $\boldsymbol{x \in [-10; 10]}$ B) $\mathbf{x \in [-9; 9]}$ C) $\boldsymbol{|x| \geq 9}$ D) $\boldsymbol{|x| < 9}$ E) $\boldsymbol{|x| > 9}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{log\left(\sqrt{\mathrm{x}^2 + 19}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x}^2 + 19} \geq 10 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 + 19 \geq 100 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 \geq 81 \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x}^2} \geq \sqrt{81} \Leftrightarrow |x| \geq 9}$. Άρα C

Ερώτηση 36

Προσδιορίστε το άθροισμα των τιμών των ακέραιων λύσεων του ακόλουθου συστήματος:

$$\begin{cases} \boldsymbol{(1 + 4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1}} \\ \boldsymbol{\mathrm{y}^3 + 4x + 1 + log\,(\mathrm{y}^2 + 2x) = 0} \end{cases}$$

A) 2 B) -1 C) 3 D) -2 E) 0

Λύση

Θέτω $\boldsymbol{2x-y=m}$, οπότε η πρώτη εξίσωση γίνεται $\boldsymbol{(1+4^m)5^{1-m}=1+2^{m+1}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{1+4^m}}{\boldsymbol{5^m}} = \frac{\boldsymbol{1+2^{m+1}}}{\boldsymbol{5}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{1+2^{2m}}}{\boldsymbol{5^m}} = \frac{\boldsymbol{1+2^{m+1}}}{\boldsymbol{5}}$ με προφανή λύση την $\boldsymbol{m=1 \Leftrightarrow 2x-y=1 \Leftrightarrow 2x=y+1}$. Άρα η δεύτερη εξίσωση γίνεται $\boldsymbol{y^3+2y+2+1+log(y^2+y+1)=0 \Leftrightarrow y^3+2y+3+log(y^2+y+1)=0}$, με προφανή λύση την $\boldsymbol{y=-1 \Rightarrow x=0}$ και άθροισμα $\boldsymbol{x+y=-1}$, άρα B.

Ερώτηση 37

Δεδομένης της ακόλουθης εξίσωσης μήτρας: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ Προσδιορίστε το X.

A) $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Λύση

Έχω $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Άρα $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow$ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Άρα B

Ερώτηση 38

Δεδομένου του ακόλουθου συστήματος γραμμικών εξισώσεων: $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-5z=33} \\ \mathbf{-3x+y+2}\boldsymbol{z}\mathbf{=-11} \\ \mathbf{x+2y+4}\boldsymbol{z}\mathbf{=-8} \end{cases}$

Προσδιορίστε την τιμή $\boldsymbol{x+y+z}$.

A) 1 B) -2 C) 2 D) -1 E) 0

Λύση

Έχω $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-5z=33} \\ \mathbf{-3x+y+2}\boldsymbol{z}\mathbf{=-11} \\ \mathbf{x+2y+4}\boldsymbol{z}\mathbf{=-8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{2x+3y-5z=33} \\ \mathbf{-3x+y+2}\boldsymbol{z}\mathbf{=-11} \\ \mathbf{x=-2y-4}\boldsymbol{z}\mathbf{-8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{-4y-8z}\mathbf{-16+3y-5z=33} \\ \boldsymbol{+6y+12z}\mathbf{+24+y+2}\boldsymbol{z}\mathbf{=-11} \\ \mathbf{x=-2y-4}\boldsymbol{z}\mathbf{-8} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \boldsymbol{-y-13z=49} \\ \boldsymbol{7y+14z=-35} \\ \mathbf{x=-2y-4}\boldsymbol{z}\mathbf{-8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y=-13z-49} \\ \boldsymbol{-91z-343+14z=-35} \\ \mathbf{x=-2y-4}\boldsymbol{z}\mathbf{-8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y=-13z-49} \\ \boldsymbol{-77z=308} \\ \mathbf{x=-2y-4}\boldsymbol{z}\mathbf{-8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y=3} \\ \boldsymbol{z=-4} \\ \mathbf{x=2} \end{cases}$. Άρα $\boldsymbol{x+y+z=1}$.

Άρα A

Ερώτηση 39

Προσδιορίστε την αλήθεια (V) ή το ψεύδος (F) των ακόλουθων προτάσεων:

I. Η σειρά $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} (\mathbf{-1})^{\mathbf{n}}$ συγκλίνει στο μηδέν.
II. Η σειρά $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ συγκλίνει.
III. Εάν το $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{0}$, τότε $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$ συγκλίνει.

A) FFF B) VVV C) FVV D) FFV E) VFF

Λύση

I. Έστω το μερικό άθροισμα των πρώτων n όρων είναι $\mathbf{S_n = -1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^n} = \begin{cases} \mathbf{0}, \ \boldsymbol{\alpha\nu}\ \mathbf{n}\ \boldsymbol{\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} \\ \mathbf{-1}, \boldsymbol{\alpha\nu}\ \mathbf{n}\ \boldsymbol{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} \end{cases}$. Άρα η σειρά δεν συγκλίνει αφού εναλλάσσεται μεταξύ δυο σταθερών. Άρα F
II. Η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, άρα F
III. Έστω $\mathbf{a_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$, με $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{0}$ ,αλλά όπως είδαμε η σειρά $\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ δεν συγκλίνει, άρα F

Άρα FFF, άρα A

Ερώτηση 40

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας ο τύπος είναι: $\mathbf{f(x) = x^2 - ax}$. Προσδιορίστε την τιμή ενός $\mathbf{a > 0}$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\mathbf{Ran(f) = [-4; +\infty\rangle}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Λύση

Θέλω $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{-4}$. Η παραβολή $\mathbf{x^2} - \boldsymbol{ax}$ έχει ελάχιστο για $\boldsymbol{x} = -\frac{-\boldsymbol{a}}{\mathbf{2\cdot 1}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}$, την τιμή $\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{a}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right) = -\frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$.
Άρα έχω $-\frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} = \mathbf{-4} \Longrightarrow \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} = \mathbf{16} \overset{\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{4}$. Άρα D

**UNMSM 2023 - II**
**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**
**ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΥΓΕΙΑΣ - Area A**
Sábado 1 de abril de 2023

**Λογική-Μαθηματική Ικανότητα**
ΕΡΩΤΗΣΗ 16
Υπάρχουν έξι υποψηφιότητες σε μια σχολική εκλογή, στις οποίες ο νικητής θα είναι αυτός που θα πάρει τις περισσότερες ψήφους. Μετά την καταμέτρηση του 90% των ψήφων, τα προκαταρκτικά αποτελέσματα είχαν ως εξής:

| Álex | Diana | Jorge | Doris | Julio | Selma |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 20 | 18 | 12 | 10 | 9 |

Εάν κάθε ψήφος είναι υπέρ οποιουδήποτε υποψηφίου, πόσοι υποψήφιοι εξακολουθούν να έχουν πιθανότητες να κερδίσουν τις εκλογές;
A) 4 B) 3 C) 6 D) 2 E) 5
Λύση
Μέχρι τώρα έχουν ψηφίσει $\mathbf{21+20+18+12+10+9=90}$ ψηφοφόροι και αφού αυτοί αποτελούν το 90% των ψήφων έπεται ότι απομένουν ακόμα 10 ψήφοι. Ο Άλεξ, η Νταϊάνα, ο Χόρχε και η Ντόρις μπορούν ακόμα να κερδίσουν. Επομένως, ο αριθμός των υποψηφίων είναι ίσος με 4. Άρα Α

ΕΡΩΤΗΣΗ 17
Σύμφωνα με τους αριθμούς που εμφανίζονται, που αποτελούνται από κάρτες αριθμημένες με διαδοχικούς ζυγούς αριθμούς, καθορίστε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που αναγράφεται στην κεντρική κάρτα στην καρτέλα 30.

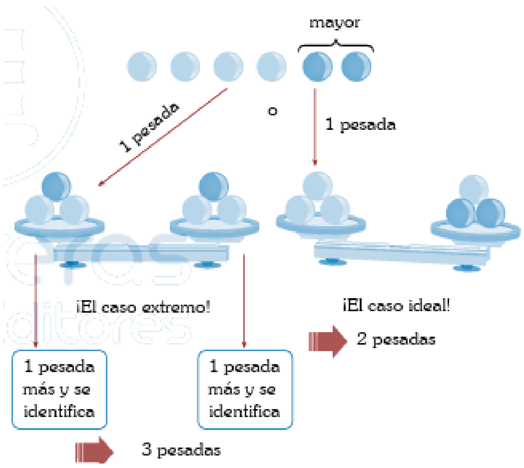
figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

A) 18 B) 16 C) 14 D) 20 E) 12
Λύση
Παρατηρούμε ότι η $\boldsymbol{\nu}$-οστή κάρτα περιέχει $\mathbf{2\boldsymbol{\nu}-1}$ αριθμούς. Άρα οι $\mathbf{30}$ κάρτες έχουν $\mathbf{1+3+5+7+\cdots+59=30(1+59)/2=900}$ αριθμούς συνολικά. Ο τελευταίος αριθμός στην τελευταία καρτέλα είναι ο $\mathbf{2\times 900=1800}$. Η τελευταία κάρτελα περιέχει 59 αριθμούς και η κεντρική κάρτα είναι η $30^{η}$ που είναι μικρότερη από τον τελευταίο αριθμό κατά $\mathbf{2\times(59-30)=58}$, άρα είναι ίση με $\mathbf{1800-58=1742}$ με άθροισμα ψηφίων $\mathbf{1+7+4+2=14}$. Άρα C.

ΕΡΩΤΗΣΗ 18
Ο Manuel έχει έξι μπίλιες πανομοιότυπες σε σχήμα και μέγεθος. Όλες οι μπίλιες έχουν το ίδιο βάρος, εκτός από δύο που έχουν περισσότερο βάρος από τις άλλες. Αν αυτές οι δύο μπίλιες που έχουν περισσότερο βάρος ζυγίζουν το ίδιο, πόσες ζυγίσεις, τουλάχιστον, πρέπει να κάνει ο Μανουήλ σε μια ζυγαριά με δύο πιατάκια, για να αναγνωρίσει, με βεβαιότητα, τις δύο μπίλιες που έχουν περισσότερο βάρος;
A) 4 B) 3 C) 6 D) 2 E) 5
Λύση
Βάζω τις μισές μπίλιες στο ένα πιατάκι – ζυγό και τις άλλες μισές στο άλλο.

Έχω δυο περιπτώσεις:

1. Αν ο ζυγός ισορροπεί τότε οι δυο βαρύτερες μπίλιες μοιράστηκαν στους δυο ζυγούς. Για να εντοπίσω την βαρύτερη από τις τρεις μπίλιες στο ένα πιατάκι θα χρειαστώ άλλη μια ζύγιση, βάζω από μια σε ένα πιατάκι, αν ισορροπούν τότε η τρίτη μπίλια , αυτή που δεν ζύγισα είναι η βαρύτερη, αλλιώς το πιατάκι που είναι πιο χαμηλά έχει την βαρύτερη μπίλια. Άρα συνολικά χρειάζομαι 3 ζυγίσεις.
2. Αν ο ζυγός δεν ισορροπεί τότε οι δυο μπίλιες βρίσκονται στο πιατάκι που είναι πιο χαμηλά. Θα χρειαστώ άλλη μια ζύγιση για να εντοπίσω τις 2 βαρύτερες από τις 3 αυτές μπίλιες. Άρα συνολικά 2 ζυγίσεις.




Άρα θα χρειαστώ τουλάχιστον 3 ζυγίσεις, άρα Β

ΕΡΩΤΗΣΗ 19

Η Τζούλια και ο Ροντόλφο γεννήθηκαν την Κυριακή 29 Φεβρουαρίου 2004. Στις 28 Φεβρουαρίου 2023, αρραβωνιάστηκαν για να παντρευτούν στις 29 Φεβρουαρίου του έτους κατά το οποίο αυτή η ημερομηνία είναι ξανά Κυριακή για πρώτη φορά, όπως την ημέρα που γεννήθηκαν. Εάν τηρήσουν τη δέσμευσή τους, ο γάμος θα πραγματοποιηθεί το έτος.

A) 2036 B) 2040 C) 2028 D) 2032 E) 2044

Λύση

Κάθε τετραετία από την γέννησή τους έχει $\mathbf{4 * 365 + 1 = 1461 = 7 \times 208 + 5}$

Άρα η ημέρα της εβδομάδας πηγαίνει μπροστά κατά 5 ημέρες.

Άρα 2008-Παρασκευή, 2012 Τετάρτη, 2016-Δευτέρα, 2020-Σάββατο, 2024 Πέμπτη, 2028 Τρίτη, 2032 Κυριακή. Άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 20

Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου, συμμετείχαν οι ομάδες Huancas. Κέτσουα και Αϊμάρα, παίζοντας όλοι εναντίον όλων, σε έναν μόνο γύρο. Ο πίνακας δείχνει τον αριθμό των γκολ που σημείωσαν και δέχτηκαν οι τρεις ομάδες στο τέλος του πρωταθλήματος. Εάν υπήρχαν δύο ισοπαλίες, ποιο ήταν το αποτέλεσμα του αγώνα μεταξύ των Huancas και των Quechuas, αντίστοιχα;

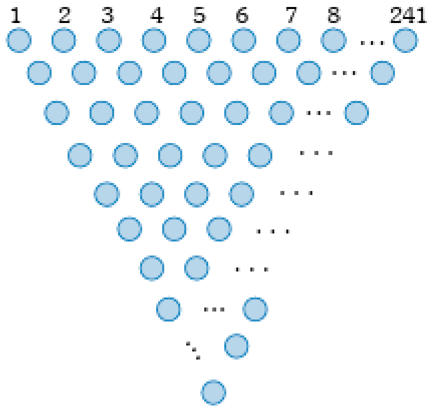
| Ομάδες | Γκολ Υπέρ | Γκολ Κατά |
|---|---|---|
| Huancas | 7 | 6 |
| Κέτσουα | 6 | 7 |
| Αϊμάρα | 8 | 8 |

A) 4 - 2 B) 5 - 0 C) 3 - 3 D) 4 - 1   E) 3 - 2

Έγιναν συνολικά τρεις αγώνες οι δυο εκ των οποίων λήξαν ισοπαλία. Η ομάδα Huancas έδωσε δύο αγώνες. Δεν μπορεί και οι αυτοί αγώνες να λήξαν ισοπαλία, αφού τότε τα γκολ υπέρ θα ήταν ίσα με τα γκολ κατά. Αφού έχει 1 γκολ υπέρ περισσότερα από κατά, η ομάδα κέρδισε το ένα ματς σκοράροντας ένα γκολ παραπάνω από την αντίπαλη ομάδα, άρα 3-2. Η ομάδα που έχασε, στο δεύτερο μάτς της έφερε ισοπαλία, άρα έχει ένα γκολ λιγότερο υπερ από κατά, άρα αυτή που έχασε από την Huancas είναι η Κέτσουα. Άρα Huancas- Κέτσουα 3-2. Στα άλλα ματς έχω ισοπαλία με σκορ Huancas-Αϊμάρα 4-4 και Κέτσουα-Αϊμάρα 4-4. Άρα Ε

Ερώτηση 21

Ο αριθμός που απεικονίζεται αποτελείται από σημεία, όπου τρία συνεχόμενα σημεία είναι ισοδύναμα μακριά, δηλαδή κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και τα σημεία στην πρώτη σειρά αριθμούνται από το 1 έως το 241. Ένα κινητό Α χρειάζεται $\frac{10}{9}$ δευτερόλεπτα για να μετακινηθεί από το ένα σημείο στο άλλο κοντά. Εάν το κινητό Α βρίσκεται στο σημείο με αριθμό 1, ποιος είναι ο συντομότερος χρόνος που θα χρειαστεί για να μετακινηθείτε σε όλα τα σημεία μέχρι να καταλήξει στο σημείο με αριθμό 241;




A) 12 h B) 10 h C) 9 h D) 8 h E) 7 h

Όλες οι μπίλιες είναι $\mathbf{1+2+3+\cdots+241=\frac{241\times 242}{2}=241\times 121}$, άρα το κινητό θα χρειαστεί $\mathbf{241\times 121-1}$ αναπηδήσεις από το ένα σημείο στο άλλοα διάρκειας η καθαμιά $\frac{10}{9}$ δευτερόλεπτα, άρα θα χρειαστεί τουλάχιστον $\mathbf{(241\times 121-1)\times \frac{10}{9}\,sec \geq (240\times 120)\times \frac{10}{9} = 80\times 40\times 10sec = 32000sec = \frac{32000}{3600}h = \frac{80}{9}h}$. Άρα θα χρειαστεί τουλάχιστον 9h, άρα C

Ερώτηση 22

Ο Armando, ο Bruno, ο César, ο Daniel, ο Ernesto και ο Fernando ζουν στο ίδιο οκταώροφο κτίριο και ο καθένας σε διαφορετικό όροφο. Ο Armando ζει τρεις ορόφους μακριά τόσο από τον Bruno όσο και από τον César, ο δεύτερος και ο έκτος όροφος δεν κατοικούνται. Ο Cesar, για να πάει στο διαμέρισμα όπου ζει, χρησιμοποιεί πάντα το ασανσέρ για να ανέβει. Ο Φερνάντο ζει στον τελευταίο όροφο. Αν ο Ντάνιελ και ο Ερνέστο ανέβουν μαζί από τον πρώτο όροφο χρησιμοποιώντας το ασανσέρ, ο Ντάνιελ φτάνει πρώτος στον όροφο όπου μένει. Σε ποιο διαμέρισμα ζει ο Ερνέστο;

A) Πέμπτο B) Τέταρτο C) Έβδομο D) Τρίτο E) Πρώτο

Λύση

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα με την ακόλουθη σειρά:- Ο δεύτερος και ο έκτος όροφος δεν κατοικούνται. Ο Fernando ζει στον τελευταίο όροφο. Άρα

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ος | 2ος | 3ος | 4ος | 5ος | 6ος | 7ος | 8ος |
| | Κενο | | | | Κενο | | Fernando |

Ο Armando ζει τρεις ορόφους μακριά τόσο από τον Bruno όσο και από τον César. Άρα μένει αναγκαστικά στον 4ο όροφο. Άρα

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ος | 2ος | 3ος | 4ος | 5ος | 6ος | 7ος | 8ος |
| | Κενο | | Armando | | Κενο | | Fernando |

Ο Cesar ζει τρεις ορόφους μακριά από τον Armando, άρα μένει στο 1ο ή τον 7ο όροφο, αλλά χρησιμοποιεί πάντα το ασανσέρ. Άρα μένει στον 7ο όροφο. Επομένως ο Bruno μένει στον 1ο όροφο. Άρα

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ος | 2ος | 3ος | 4ος | 5ος | 6ος | 7ος | 8ος |
| Bruno | Κενο | | Armando | | Κενο | Cesar | Fernando |

Ο Ντάνιελ φτάνει πρώτος στο διαμέρισμα όπου ζει από ότι ο Ερνέστο. Άρα ο Ντάνιελ μένει πιο χαμηλά. Οι άνθρωποι θα βρίσκονται ως εξής:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ος | 2ος | 3ος | 4ος | 5ος | 6ος | 7ος | 8ος |
| Bruno | Κενο | Daniel | Armando | Ernesto | Κενο | Cesar | Fernando |

Ως εκ τούτου, ο Ernesto ζει στον πέμπτο όροφο. Άρα A.

Ερώτηση 23

Στην εκλογή του γενικού γραμματέα ενός πολιτικού κόμματος, ψήφισαν 600 ψηφοφόροι. Μόνο ένας υποψήφιος έτρεξε σε αυτόν τον διαγωνισμό και η εκλογή του απαιτούσε τουλάχιστον την ψήφο των μισών συν ενός από τους εκλέκτορες. Δεδομένου ότι η πρώτη ψηφοφορία δεν συγκέντρωσε τον απαιτούμενο αριθμό ψήφων, διεξήχθη δεύτερη ψηφοφορία με τον ίδιο αριθμό εκλογέων: στην περίπτωση αυτή, ο υποψήφιος έλαβε διπλάσιο αριθμό ψήφων από αυτόν που έλαβε στην πρώτη ψηφοφορία. Αν το άθροισμα των ψήφων που δεν πήγαν υπέρ του υποψηφίου τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη ψηφοφορία ήταν 480 και δεν υπήρχαν αποχές και στις δύο ψηφοφορίες, με πόσες ψήφους εξελέγη ο γενικός γραμματέας;

A) 240 B) 480 C) 560 D) 380 E) 420

Λύση

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

| | 1η ψηφοφορία | 2η ψηφοφορία | Σύνολο |
|---|---|---|---|
| Υπέρ | x | 2x | |
| Κατά | 600-x | 600-2x | 1200-3x |
| Σύνολο | 600 | 600 | |

Άρα έχω $\mathbf{1200-3x=480 \Rightarrow x=240}$. Άρα ο γενικός γραμματέας εξελέγη με $\mathbf{2x=480}$ ψήφους. Άρα B

Ερώτηση 24

Το σχήμα I δείχνει το ποσό των εξαγωγών από μια χώρα Q σε ευρωπαϊκές χώρες από το 2017 έως το 2022, σε χιλιάδες δολάρια. Προσδιορίστε, σε χιλιάδες δολάρια, το άθροισμα των ποσών των εξαγωγών στους τομείς της Αλιείας (Pesca) και των Ορυχείων (Mineria) για το έτος 2020, λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή του ποσού των εξαγωγών ανά τομέα για το έτος 2020, όπως φαίνεται στο Σχήμα II

Figura I

Figura II

A) 1820 B) 3290 C) 3430 D) 2520 E) 1260

Λύση

Το ποσοστό των εξαγωγών από αλιεία και ορυχεία είναι $\mathbf{100\% - \frac{108}{360} \cdot 100\% = 100 - 30\% = 70\%}$. Οι συνολικές εξαγωγές το 2020 ήταν 3600 χιλιάδες δολάρια, άρα οι αντίστοιχες εξαγωγές από αλιεία και ορυχεία ήταν αξίας $\mathbf{70\% \cdot 3600 = 2520}$ χιλιάδες δολάρια, άρα D.

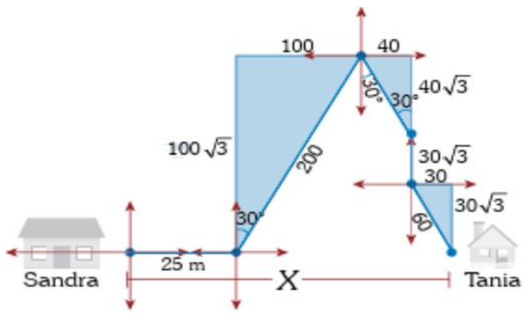
Ερώτηση 25

Για να πάει στο σπίτι της φίλης της Τάνιας, η Σάντρα ακολουθεί την ακόλουθη διαδρομή: πρώτον, περπατά $\mathbf{25}$ μέτρα ανατολικά του σπιτιού της, μετά $\mathbf{200\,m}$ με κατεύθυνση B 30° A· μετά $\mathbf{80\,m}$ με κατεύθυνση S 30° A· μετά $\mathbf{30\sqrt{3}\,m}$ με κατεύθυνση προς νότο και τέλος $\mathbf{60\,m}$ με κατεύθυνση S 30° A μέχρι να φτάσει στο σπίτι της φίλης της Τάνιας. Πόσο μακριά είναι μεταξύ των σπιτιών και των δύο;

A) 200 m B) 170 m C) 195 m D) 205 m E) 210 m

Λύση

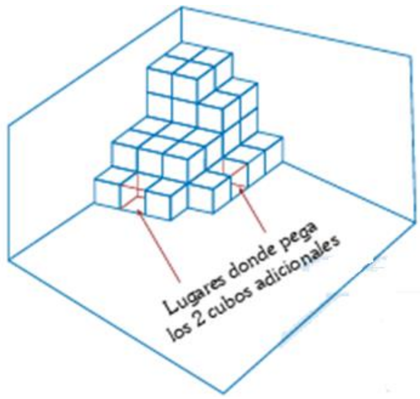
Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η διαδρομή του σχήματος.




Από το γράφημα: $\boldsymbol{X = 25 + 100 + 40 + 30 = 195m}$. Άρα c

Ερώτηση 26

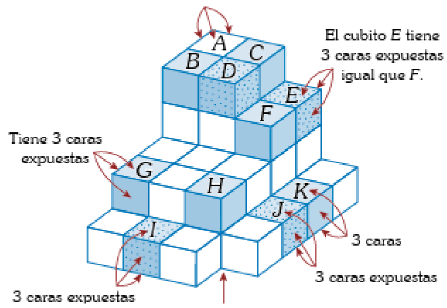
Ο Joaquín έχει ένα στερεό που σχηματίζεται από 39 ίδιους κύβους των οποίων οι ακμές έχουν μήκος 5 cm, κολλημένες μεταξύ τους στις έδρες τους, οι οποίες με τη σειρά τους στηρίζονται στον τοίχο ενός δωματίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο Joaquín αποφασίζει να κολλήσει 2 ακόμη κύβους, πανομοιότυπους με τους κύβους του στερεού, έναν σε κάθε ένα από τα σημεία που αναφέρονται στο σχήμα. Εάν ο Joaquin βυθίσει εντελώς το στερεό σε ένα δοχείο με κόκκινο χρώμα, πόσοι κύβοι του στερεού που σχηματίζεται από τους 41 κύβους, των οποίων οι ακμές έχουν μήκος 5 cm, υπάρχουν με μόνο τρεις έδρες βαμμένες κόκκινες;




A) 11 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Λύση

Ο κύβος A έχει 3 εκτεθειμένα πρόσωπα που θα βαφτούν κόκκινα. Ομοίως, οι κύβοι B, C , D ,E ,E,F,G,H,I,J και K έχουν 3 εκτεθειμένες έδρες που θα βαφτούν. Στην ίδια στήλη με τον κύβο A αλλά στο κάτω μέρος (βάση) υπάρχει ένας κύβος L που έχει επίσης 3 εκτεθειμένα πρόσωπα (πίσω, κάτω και πλάγια). Άρα 12 έδρες, άρα D.




ΕΡΩΤΗΣΗ 27

Η Καμίλα επισκέφθηκε τον γιατρό της, ο οποίος της συνταγογράφησε να παίρνει τρία χάπια φαρμάκου A κάθε 8 ώρες και δύο δισκία φαρμάκου B κάθε 6 ώρες για ορισμένο χρονικό διάστημα. Η Καμίλα ξεκίνησε και ολοκλήρωσε τη θεραπεία της λαμβάνοντας ταυτόχρονα και τα δύο φάρμακα σύμφωνα με τις οδηγίες του γιατρού. Εάν το κόστος κάθε χαπιού είναι 7 Σολ και το κόστος κάθε δισκίου είναι 8 Σολ και εάν αυτό που ξόδεψε για χάπια είναι όσο αυτό που ξόδεψε σε δισκία, πόσες ημέρες διήρκεσε η θεραπεία της;

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

Λύση

Έχω $\boldsymbol{ΕΚΠ(8,6)=24}$, άρα κάθε 24 ώρες η Καμίλα λαμβάνει ταυτόχρονα τα χάπια και τα δισκία της. Κάθε 24ωρο ξοδεύει $\mathbf{3*24/8*7=63}$ Σολ για χάπια και $\mathbf{24/6*8*2=64}$ Σολ για δισκία. Άρα μετά από x μέρες έχω:

$\boldsymbol{63x+3*7=64x+2*8 \Leftrightarrow 63x+21=64x+16 \Leftrightarrow x=5}$, άρα A

ΕΡΩΤΗΣΗ 28

Με την ακόλουθη διάταξη, λαμβάνοντας υπόψη την ίση ελάχιστη απόσταση από το ένα γράμμα στο άλλο σε όλες τις αναγνώσεις, πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να διαβαστεί η λέξη POLLO (ΚΟΤΟΠΟΥΛΟ);

P P

O O O

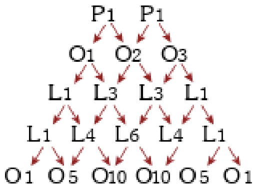
L L L L

L L L L L

O O O O O O

A) 45 B) 48 C) 54 D) 32 E) 52

Λύση




Από το νέο σχήμα προκύπτει ότι οι διαφορετικοί τρόποι που μπορεί να διαβαστεί η λέξη POLLO είναι συνολικά $\mathbf{1+5+10+10+5+1=32}$, άρα D.

ΕΡΩΤΗΣΗ 29

O Ramon ρωτήθηκε πόσο χρονών είναι και απάντησε ως εξής:

1. « Είμαι άνω των 16 ετών.
2. Ο αριθμός που δείχνει την ηλικία μου, σε χρόνια, είναι ζυγός αριθμός.
3. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία μου, σε χρόνια, ήταν μονοψήφια».

Αν ο Ραμόν είναι γνωστό ότι λέει πάντα ψέματα, σε πόσα χρόνια από τώρα θα είναι 20 χρονών;

A) 7 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

Λύση

Από την $3^{η}$ πρόταση, προκύπτει ότι πριν από 5 χρόνια η ηλικία του Ramon ήταν διψήφια, δηλαδή τουλάχιστον 10, άρα η σημερινή ηλικία του είναι τουλάχιστον 15. Από την $1^{η}$ πρόταση προκύπτει ότι είναι το πολύ 15 ετών. Άρα είναι 15 Ενώ από την $2^{η}$ πρόταση η ηλικία του είναι μονός αριθμός, που επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα 15 που βρήκαμε. άρα ο Ramon για γίνει 20 χρονών θέλει ακόμα 5 χρόνια, άρα B

ΕΡΩΤΗΣΗ 30

Ο Ιωάννης έχει τέσσερα ερμητικά σφραγισμένα και αδιαφανή πιθάρια, δύο λευκά και δύο κόκκινα. Ένα από τα βάζα περιέχει καραμέλες με γεύση φράουλας. Ένα άλλο βάζο περιέχει καραμέλες με γεύση ανανά. Ένα ακόμα άλλο, καραμέλες με γεύση πορτοκαλιού και οι τελευταίες καραμέλες είναι με γεύση αχλαδιού. Είναι γνωστό ότι:

I. Οι καραμέλες με γεύση φράουλας και οι καραμέλες με γεύση πορτοκαλιού βρίσκονται σε βάζα διαφορετικών χρωμάτων.
II. Εάν οι καραμέλες με γεύση φράουλας βρίσκονται σε κόκκινο βάζο, τότε οι καραμέλες με γεύση ανανά και οι καραμέλες με γεύση αχλαδιού βρίσκονται σε βάζα του ίδιου χρώματος.

Στη συνέχεια, είναι πάντα αλήθεια ότι

A) Οι καραμέλες με γεύση ανανά βρίσκονται σε λευκό βάζο.

B) Οι καραμέλες με γεύση αχλαδιού και πορτοκαλιού βρίσκονται σε βάζα του ίδιου χρώματος

C) Οι καραμέλες με γεύση φράουλα βρίσκονται στο λευκό βάζο.

D) Ένα λευκό βάζο περιέχει καραμέλες με γεύση αχλαδιού.

E) Τα κόκκινα βάζα δεν περιέχουν καραμέλες με γεύση πορτοκάλι

Λύση

Εάν η φράουλα είναι σε πιθάρι με κόκκινο χρώμα, τότε σύμφωνα με την πρόταση II, ο ανανάς και το αχλάδι θα βρίσκονται σε βάζα του ίδιου χρώματος λευκό ή κόκκινο. Από την πρόταση I, έχουμε ότι ο ανανάς και το αχλάδι δεν έχουν το ίδιο χρώμα → Έχω τρία πιθάρια με το ίδιο χρώμα. → Άτοπο. Άρα η φράουλα δεν είναι σε κόκκινο → Η φράουλα είναι σε άσπρο πιθάρι. Άρα C

(Από την I οι καραμέλες με γεύση πορτοκαλιού είναι σε κόκκινο βάζο. Άρα η E απορρίπτεται. Στα άλλα δυο βάζα (1 κόκκινο και ένα λευκό, μπορεί να τοποθετηθούν άλλοτε στο ένα ο ανανάς και άλλοτε το αχλάδι). Άρα οι A, B και D δεν αληθεύουν πάντα).

**Αριθμητική**

ΕΡΩΤΗΣΗ 31

Η πώληση βενζίνης 95 οκτανίων τις τελευταίες τέσσερις ημέρες, σε ένα συγκεκριμένο βενζινάδικο, ήταν $\overline{(\boldsymbol{a}-\mathbf{2})\boldsymbol{b}\mathbf{6}_{\boldsymbol{\alpha}}}$, $\overline{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}+\mathbf{1})\mathbf{5}_{\boldsymbol{b}}}$, $\overline{(\boldsymbol{c}-\mathbf{2})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})_{\mathbf{8}}}$ και $\overline{\mathbf{1}\boldsymbol{ca}}$ γαλόνια. Εάν το c παίρνει τη μέγιστη τιμή του, πόσα γαλόνια, συνολικά, πωλήθηκαν;

(A) 786 (B) 805 (C) 884 (D) 810 (E) 812

Λύση

Για να είναι ο $\overline{(\boldsymbol{a}-\mathbf{2})\boldsymbol{b}\mathbf{6}_{\boldsymbol{\alpha}}}$ έγκυρος αριθμός πρέπει $\boldsymbol{a}>\mathbf{6}, \boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.

Για να είναι ο $\overline{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}+\mathbf{1})\mathbf{5}_{\boldsymbol{b}}}$ έγκυρος αριθμός πρέπει $\boldsymbol{b}>\mathbf{5}, \boldsymbol{b}>\boldsymbol{c}+\mathbf{1}$.

Για να είναι ο $\overline{(\boldsymbol{c}-\mathbf{2})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})_{\mathbf{8}}}$ έγκυρος αριθμός πρέπει $\mathbf{8}>\boldsymbol{c}-\mathbf{2}$, $\mathbf{8}>\boldsymbol{a}, \mathbf{8}>\boldsymbol{b}+\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{7}>\boldsymbol{b}$.

Αφού $\mathbf{7}>\boldsymbol{b}>\mathbf{5} \Rightarrow \boldsymbol{b}=\mathbf{6}$. Αφού $\mathbf{8}>\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{6} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{7}$. Αφού $\boldsymbol{b}>\boldsymbol{c}+\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{5}>\boldsymbol{c}$ και το c παίρνει την μέγιστη τιμή του για $\boldsymbol{c}=\mathbf{4}$. Άρα πουλήθηκαν $\overline{\mathbf{566}_{\mathbf{7}}}+\overline{\mathbf{455}_{\mathbf{6}}}+\overline{\mathbf{277}_{\mathbf{8}}}+\overline{\mathbf{147}}=(\mathbf{5}\times\mathbf{49}+\mathbf{6}\times\mathbf{7}+\mathbf{6})+(\mathbf{4}\times\mathbf{36}+\mathbf{5}\times\mathbf{6}+\mathbf{5})+(\mathbf{2}\times\mathbf{64}+\mathbf{7}\times\mathbf{8}+\mathbf{7})+\mathbf{147}=\mathbf{293}+\mathbf{179}+\mathbf{191}+\mathbf{147}=\mathbf{810}$. Άρα D

Ερώτηση 32

Σε ένα σχολείο, ο συνολικός αριθμός των μαθητών είναι ένας 3ψήφιος αριθμός που κατανέμεται εξίσου μεταξύ 14 τάξεων. Εάν σε μια άσκηση σεισμού όλοι συγκεντρώθηκαν στο προαύλιο σε ομάδες των 10 μαθητών και έμειναν 8, καθορίστε το άθροισμα όσο το δυνατόν περισσότερων και λιγότερων μαθητών στο σχολείο.

A) 1106 B) 986 C) 786 D) 896 E) 1216

Αν x ο αριθμός των μαθητών, τότε έχω $\boldsymbol{x}=\mathbf{10}\boldsymbol{k}+\mathbf{8}$ και $\boldsymbol{x}=\mathbf{14}\boldsymbol{n}$. Άρα $\mathbf{10}\boldsymbol{k}+\mathbf{8}=\mathbf{14}\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{k}+\mathbf{4}=\mathbf{7}\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{k}+\mathbf{4}\equiv\mathbf{0}\boldsymbol{mod7} \Leftrightarrow \mathbf{5}\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{3}\boldsymbol{mod7} \Leftrightarrow \mathbf{15}\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{9}\boldsymbol{mod7} \Leftrightarrow \boldsymbol{k}\equiv\mathbf{2}\boldsymbol{mod7} \Leftrightarrow \boldsymbol{k}=\mathbf{7}\boldsymbol{m}+\mathbf{2}$. Άρα $\boldsymbol{x}=\mathbf{10}(\mathbf{7}\boldsymbol{m}+\mathbf{2})+\mathbf{8}=\mathbf{70}\boldsymbol{m}+\mathbf{28}$. Ακόμα έχω $\mathbf{100}\leq\boldsymbol{x}\leq\mathbf{999} \Leftrightarrow \mathbf{100}\leq\mathbf{70}\boldsymbol{m}+\mathbf{28}\leq\mathbf{999} \Leftrightarrow \mathbf{72}\leq\mathbf{70}\boldsymbol{m}\leq\mathbf{971} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{72}}{\mathbf{70}}\leq\boldsymbol{m}\leq\frac{\mathbf{971}}{\mathbf{70}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{140}}{\mathbf{70}}\leq\boldsymbol{m}\leq\frac{\mathbf{910}}{\mathbf{70}} \Leftrightarrow \mathbf{2}\leq\boldsymbol{m}\leq\mathbf{13}$ με $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{min}}=\mathbf{70}\times\mathbf{2}+\mathbf{28}=\mathbf{168}$ και $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{max}}=\mathbf{70}\times\mathbf{13}+\mathbf{28}=\mathbf{938}$. Το ζητούμενο άθροισμα είναι $\mathbf{168}+\mathbf{938}=\mathbf{1106}$. Άρα A

ΕΡΩΤΗΣΗ 33

Η Valentina και ο Gerardo συνεργάστηκαν για να ανοίξουν μια επιχείρηση για τη σχολική εκστρατεία, συγκεντρώνοντας και οι δύο κεφάλαιο 8000 Σολς, και στο τέλος της εκστρατείας απέκτησαν συνολικό κέρδος 6000 Σολ. Εάν ο Gerardo συνεισέφερε 1600 Σολ λιγότερες από τη Valentina, πόσες Σολ κέρδισε ο Gerardo σε αυτήν την επιχείρηση;

A) 1600 B) 2400 C) 1200 D) 1400 E) 3200

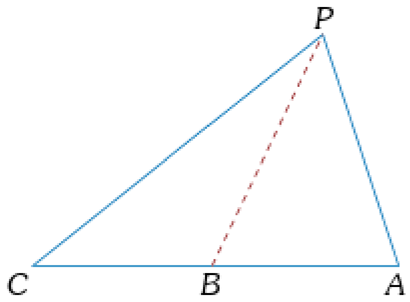
Λύση

Έχω $\boldsymbol{V}+\boldsymbol{G}=\mathbf{8000} \Rightarrow \boldsymbol{G}+\mathbf{1600}+\boldsymbol{G}=\mathbf{8000} \Rightarrow \boldsymbol{G}=\mathbf{3200}$ δηλαδή τα $\frac{\mathbf{3200}}{\mathbf{8000}}=\mathbf{40}\%$ του αρχικού κεφαλαίου, άρα ο Gerardo δικαιούται το 40% των κερδών που είναι το $\mathbf{40}\%\times\mathbf{6000}=\mathbf{2400}$ Σολ. Άρα B

**Γεωμετρία**

Ερώτηση 34

Σε μια προπόνηση ποδοσφαίρου, ο προπονητής τοποθετεί τέσσερις παίκτες στις θέσεις P, A, B και C, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν $\boldsymbol{PA = 35\,m, AC = 40\,m, PC = 45\,m}$, A, B και C είναι συγγραμμικά και ο παίκτης στο B βρίσκεται σε ίση απόσταση από τους παίκτες στα A και C, βρείτε την απόσταση που διανύει η μπάλα καθώς κινείται σε ευθεία γραμμή από το P στο B



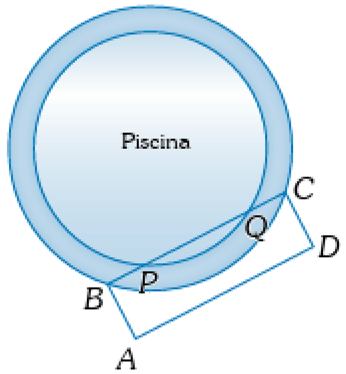

A) 30 m B) 40 m C) 35 m D) 32 m E) 38 m

Λύση

Από το θεώρημα των διαμέσων έχω $\boldsymbol{PC^2 + PA^2 = 2PB^2 + \frac{AC^2}{2} \Leftrightarrow 45^2 + 35^2 = 2PB^2 + \frac{40^2}{2} \Leftrightarrow 2025 + 1225 = 2PB^2 + 800 \Leftrightarrow 2450 = 2PB^2 \Leftrightarrow 1225 = PB^2 \Leftrightarrow PB = 35}$. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ. 35

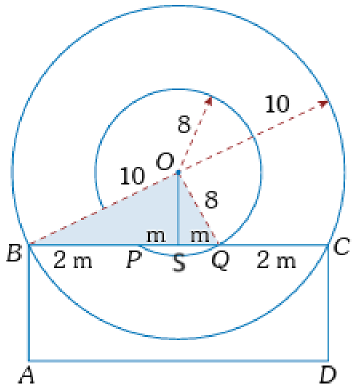
Το σχήμα δείχνει μια κυκλική πισίνα με ακτίνα 8 m και μια αντιολισθητική επιφάνεια γύρω της με τη μορφή κυκλικής κορώνας με διαφορά 2 m στις ακτίνες της. Εάν η ορθογώνια περιοχή ABCD αντιπροσωπεύει την ορθογώνια προβολή μιας πλατφόρμας που συγκρατεί τη σανίδα κατάδυσης που χρησιμοποιείται για να πηδήξει στην πισίνα έτσι ώστε $\boldsymbol{BP = PQ}$, βρείτε το μήκος της πλατφόρμας άλματος.




A) $\boldsymbol{9\sqrt{2}}$ m B) $\boldsymbol{8\sqrt{2}}$ m C) $\boldsymbol{5\sqrt{2}}$ m D) $\boldsymbol{7\sqrt{2}}$ m E) $\boldsymbol{6\sqrt{2}}$ m

Λύση

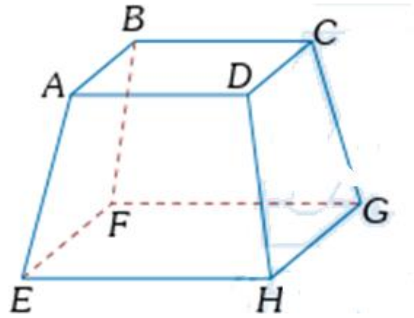
Έστω $\boldsymbol{BP = PQ = 2PS}$. Από εφαρμογή του Π.Θ. στα ορθογώνια τρίγωνα BOS και QOS έχουμε: $\boldsymbol{\left.\begin{matrix} BO^2 = BS^2 + OS^2 \\ QO^2 = QS^2 + OS^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10^2 = (3PS)^2 + OS^2 \\ 8^2 = PS^2 + OS^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 10^2 - 8^2 = 8PS^2 \Rightarrow PS^2 = \frac{36}{8} = \frac{18}{4} \Rightarrow}$




$\boldsymbol{PS = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BC = 6PS = 9\sqrt{2}}$. Άρα A

ΕΡΩΤΗΣΗ 36

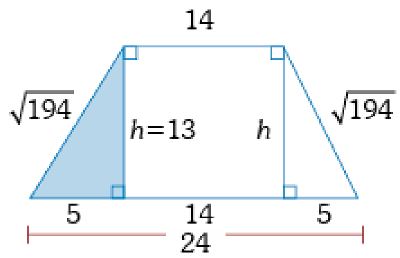
Στο σχήμα υπάρχει ένα βάθρο $\boldsymbol{ABCD\ EFGH}$ του οποίου το σχήμα είναι αυτό μιας κόλουρης πυραμίδας με βάση τετράγωνη. Εάν $\boldsymbol{AB = 14\,dm, EF = 24\,dm}$ και $\boldsymbol{CG = \sqrt{194}\,dm}$, βρείτε το εμβαδόν της πλευρικής επιφάνειας του βάθρου.




A) $\boldsymbol{978\,dm^2}$ B) $\boldsymbol{898\,dm^2}$ C) $\boldsymbol{588\,dm^2}$ D) $\boldsymbol{988\,dm^2}$ E) $\boldsymbol{790\,dm^2}$

Λύση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το τετραπλάσιο του εμβαδού του $\boldsymbol{ADHE}$. Φέροντας τις κάθετες προβολές από τα σημεία Α και D στην πλευρά ΕΗ έχουμε το ακόλουθο σχήμα




Συνεπώς $\boldsymbol{E = 4(ADHE) = 4\left(\frac{B+\beta}{2}\right)h = 4\left(\frac{24+14}{2}\right)13 = 4 \times 247 = 988\ dm^2}$. Άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 37

Ο Μάριο και ο Πέτρος έχουν ο καθένας έναν ορισμένο αριθμό βόλων. Ο διπλάσιος αριθμός βόλων που έχει ο Πέτρος, αυξημένος κατά τρεις, υπερβαίνει αυτόν που έχει ο Μάριος. αλλά διπλάσιοι βόλοι από όσους έχει ο Πέτρος είναι λιγότερο από το τριπλάσιο των βόλων από τον Μάριο, μειωμένα κατά επτά βόλους. Εάν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των βόλων που έχει ο Mario είναι μικρότερος από πέντε, ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός βόλων που έχουν μαζί ο Mario και ο Pedro;

A) 7 B) 4 Γ) 5 Δ) 3 E) 6

Λύση

Έστω x ο αριθμός των βόλων του Mario και y ο αριθμός των βόλων του Πέτρου. Έχουμε: $\boldsymbol{\begin{cases} 2y+3>x \\ 2y<3x-7 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\begin{cases} 2y+3>x \\ -2y>-3x+7 \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3>-2x+7 \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow x=3 \vee 4}$. Αν $\boldsymbol{x=3}$, τότε αφού $\boldsymbol{2y<3x-7=2 \Rightarrow y<1 \Rightarrow y=0}$, απορρίπτεται. Άρα $\boldsymbol{x=4}$, οπότε $\boldsymbol{2y<3\cdot 4-7=5 \Rightarrow y<2,5 \Rightarrow y=1 \vee 2}$ και ο μέγιστος αριθμός βόλων που έχουν οι δυο τους είναι $\boldsymbol{4+2=6}$. Άρα Ε

ΕΡΩΤΗΣΗ 38

Η αποταμίευση του Raul είναι 150 Σολ λιγότερη από το διπλάσιο της αποταμίευσης σε Σολ που συγκέντρωσε η Sabina και το ένα έβδομο της αποταμίευσης του Raul είναι 200 σολ λιγότερο από την αποταμίευση της Sabina. Προσδιορίστε το άθροισμα και των δύο αποταμιευτών.

A) 300 (B) 600 (C) 650 (D) 350 (E) 560

Λύση

Έστω x Sol η αποταμίευση του Raul και y της Sabina. Έχουμε $\boldsymbol{\left.\begin{matrix} x=2y-150 \\ \frac{x}{7}=y-200 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2y-150 \\ x=7y-1400 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\left.\begin{matrix} 7y-1400=2y-150 \\ x=7y-1400 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5y=1250 \\ x=7y-1400 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=250 \\ x=1750-1400 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=250 \\ x=350 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y=600}$. Άρα Β

**Τριγωνομετρία**

ΕΡΩΤΗΣΗ 39

Μια ευθεία κυλινδρική δεξαμενή ύψους 4 μέτρων είναι κατασκευασμένη για την αποθήκευση νερού. Εάν το μήκος της περιφέρειας της βάσης του είναι αριθμητικά ίσο με το άθροισμα των λύσεων στην εξίσωση $\boldsymbol{\frac{3\cos x}{1+\cos 2x} = 2\cos x}$ στο διάστημα $\boldsymbol{[0;\pi]}$, προσδιορίστε τον όγκο του νερού, ο οποίος μπορεί να αποθηκευτεί στη δεξαμενή

A) $\boldsymbol{3\pi\ m^3}$ B) $\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi\ m^3}$ C) $\boldsymbol{\pi\ m^3}$ D) $\boldsymbol{4\pi\ m^3}$ E) $\boldsymbol{\frac{25}{16}\pi\ m^3}$

Λύση

Έχω $\frac{3\cos x}{1+\cos 2x} = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{3\cos x}{2\cos^2 x} = 2\cos x = 0 \overset{\cos x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{3}{2\cos x} = 2\cos x \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ με ρίζες στο διάστημα $[0;\pi]$, τις $\frac{\pi}{6} \wedge \frac{5\pi}{6}$. Άρα $2\pi R = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$. Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = \pi\, m^3$. Άρα C.

ΕΡΩΤΗΣΗ 40

Είναι απαραίτητο να φτιάξετε ένα κουτί χωρίς καπάκι, από ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτόνι με πλευρά $\mathbf{50\ cm}$. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να κοπούν στις γωνίες αντίστοιχα τετράγωνα εμβαδού $(x+6)^2 cm^2$ και οι προεξέχουσες περιοχές πρέπει να διπλωθούν, για να σχηματίσουν το κιβώτιο. Εάν η τιμή του $x$ λαμβάνεται απλοποιώντας την έκφραση

$$x\csc^2 18^\circ = \left[\frac{\cos 7^\circ - \cos 11^\circ}{\sin 11^\circ - \sin 7^\circ} + \frac{\sin 10^\circ - \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \cos 10^\circ}\right]^2$$

Βρείτε τον όγκο του κουτιού.

A) $\mathbf{9216\ cm^3}$ B) $\mathbf{9072\ cm^3}$ C) $\mathbf{9248\ cm^3}$ D) $\mathbf{9000\ cm^3}$ E) $\mathbf{8624\ cm^3}$

Λύση

Έχω

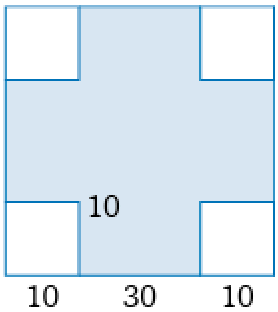
$$\cos 7^\circ - \cos 11^\circ = -2\sin\left(\frac{7^\circ + 11^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{7^\circ - 11^\circ}{2}\right) = 2\sin 9^\circ \sin 2^\circ$$

$$\sin 11^\circ - \sin 7^\circ = 2\cos\left(\frac{7^\circ + 11^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{11^\circ - 7^\circ}{2}\right) = 2\cos 9^\circ \sin 2^\circ$$

$$\sin 10^\circ - \sin 8^\circ = 2\cos\left(\frac{10^\circ + 8^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{10^\circ - 8^\circ}{2}\right) = 2\cos 9^\circ \sin 1^\circ$$

$$\cos 8^\circ - \cos 10^\circ = -2\sin\left(\frac{8^\circ + 10^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{8^\circ - 10^\circ}{2}\right) = 2\sin 9^\circ \sin 1^\circ$$

Άρα




$$\left[\frac{\cos 7^\circ - \cos 11^\circ}{\sin 11^\circ - \sin 7^\circ} + \frac{\sin 10^\circ - \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \cos 10^\circ}\right]^2 = \left[\frac{2\sin 9^\circ \sin 2^\circ}{2\cos 9^\circ \sin 2^\circ} + \frac{2\cos 9^\circ \sin 1^\circ}{2\sin 9^\circ \sin 1^\circ}\right]^2$$

$$= [\tan 9^\circ + \cot 9^\circ]^2 = \left(\frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ}\right)^2$$

Η αρχική εξίσωση γίνεται

$$\frac{x}{\sin^2 18^\circ} = \left(\frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{4\sin^2 9^\circ \cos^2 9^\circ} = \left(\frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ}\right)^2 \Rightarrow x = 4$$

Οπότε κόβουμε στις γωνίες τετράγωνα πλευράς $x + 6 = 4 + 6 = 10cm$. Το κουτί θα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων $\mathbf{30 \times 30 \times 10}$ με όγκο $\mathbf{9000\ cm^3}$. Άρα D.

**ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**

**Area B**

**Λογική-Μαθηματική Ικανότητα**

ΕΡΩΤΗΣΗ 16

Ο Alfredo έχει τακτοποιήσει πέντε αριθμημένες κάρτες όπως φαίνεται στην εικόνα 1. Εάν μια κίνηση συνίσταται στην αλλαγή της θέσης τριών ή δύο από τρία γειτονικά πλακίδια, και η αλλαγή μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις πέντε πιθανότητες (δηλαδή, εάν το πρωτότυπο είναι ABC οι πιθανές αλλαγές είναι ACB, BAC, BCA, CAB και CBA), σε πόσες κινήσεις, τουλάχιστον, μπορεί ο Alfredo να λάβει μια διάταξη όπως φαίνεται στο Σχήμα 2;

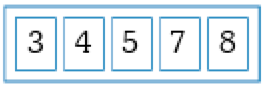


Figura 1

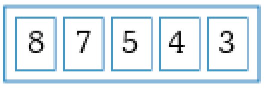


Figura 2

A) 7 B) 6 C) 4 D) 5   E) 3

Λύση

Εκτελώντας τις κινήσεις, του διπλανού πίνακα έχουμε

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 5 | 4 | 3 | 7 | 8 |
| 5 | 4 | 8 | 7 | 3 |
| 8 | 4 | 5 | 7 | 3 |
| 8 | 7 | 5 | 4 | 3 |

Άρα 4 κινήσεις, άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 17

Ο αριθμός των χτυπημάτων σε ένα ρολόι είναι μικρότερος κατά ένα από τον αριθμό των ωρών που δείχνει εκείνη τη στιγμή. Εάν ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών κουδουνισμάτων είναι πάντα ο ίδιος και για να δείξει 8:00 π.μ. στον αριθμό των κουδουνισμάτων που χτύπησε, χρησιμοποίησε 3 δευτερόλεπτα, πόσα δευτερόλεπτα θα χρειαστεί αυτό το ρολόι για να χτυπήσει τον αντίστοιχο αριθμό κουδουνισμάτων όταν χτυπήσει 10:00 π.μ.;

A) 4 B) 4.5 C) 5 D) 5.5 E) 6

Λύση

Στις 8:00 π.μ. ο αριθμός των κουδουνισμάτων είναι 7 και μεταξύ των 7 κουδουνισμάτων μεσολαβούν 6 χρονικά διαστήματα συνολικής διάρκειας 3 δευτερολέπτων. Άρα ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών χτυπημάτων είναι 0,5 δευτερόλεπτα. Για να χτυπήσει την ώρα 10:00 π.μ. το ρολόι θα κουδουνίσει 9 φορές. Μεταξύ αυτών των κουδουνισμάτων μεσολαβούν 8 χρονικά διαστήματα συνολικής διάρκειας 4 δευτερολέπτων. Άρα A

ΕΡΩΤΗΣΗ 18

Από τις 10:00 π.μ. της Κυριακής 25 Δεκεμβρίου 2022, ένα ρολόι άρχισε να γυρίζει δύο λεπτά πίσω για κάθε ώρα που περνούσε. Τι ώρα χτύπησε αυτό το ρολόι το Σάββατο 31 Δεκεμβρίου του ίδιου έτους στις 10:00 π.μ.;

A) 5:48 π.μ. B) 5:12 π.μ. C) 5:30 π.μ. D) 5:42 π.μ. E) 6:12 π.μ

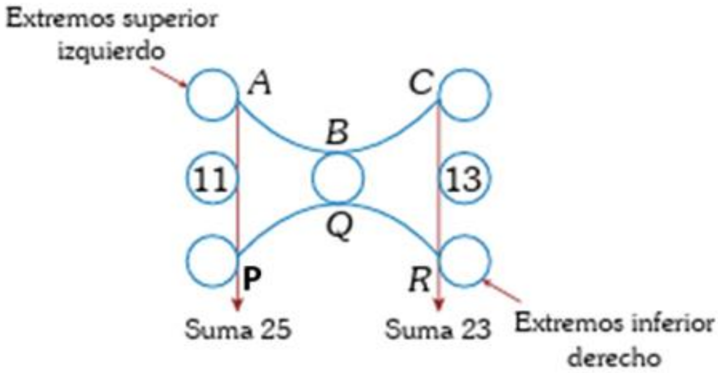
Λύση

Για κάθε 58 λεπτά που γυρίζει το ρολόι, περνάνε 60 λεπτά πραγματικού χρόνου.

Από την Κυριακή 10:00 π.μ ως το ακόλουθο Σάββατο 10:00 π.μ μεσολαβούν $\mathbf{6 \cdot 24 = 144}$ ώρες, οπότε το ρολόι μένει πίσω $\mathbf{2 \cdot 144 = 288 min = 4h\,48\,min}$. άρα θα δείχνει $\mathbf{10h00min - 4h\,48\,min = 5h12min}$. άρα Β

ΕΡΩΤΗΣΗ 19

Στα κενά κυκλικά πλαίσια του σχήματος που παρουσιάζεται, ο Joao πρέπει να γράψει τους αριθμούς 2, 3, 5, 7 και 9, χωρίς επανάληψη, έτσι ώστε το άθροισμα των τριών αριθμών που γράφονται στα κυκλικά πλαίσια που συνδέονται μέσω των καμπυλών ABC και PQR να είναι 14 σε κάθε ένα. Όμοια και το άθροισμα των τριών αριθμών που αναγράφονται στα κυκλικά τετραγωνίδια που ενώνονται με κάθε κατακόρυφο τμήμα πρέπει να είναι το αναφερόμενο στην εικόνα άθροισμα. Εάν ο Joao δεν έγραψε έναν πρώτο αριθμό στο πλαίσιο στην επάνω αριστερή γωνία, ποιος είναι ο αριθμός που έγραψε στο κυκλικό πλαίσιο στην κάτω δεξιά γωνία;




A) 5 B) 3 C) 7 D) 9 E) 2

Λύση

Ο μόνος σύνθετος αριθμός από τους 2, 3, 5, 7 και 9, είναι ο 9. Άρα στην πάνω αριστερή γωνία έχω το 9, $\boldsymbol{A = 9}$. Από το σχήμα έχω $\boldsymbol{A + 11 + P = 25 \Rightarrow P = 5}$. Ακόμα έχω: $\left.\begin{matrix}\boldsymbol{A+B+C=14}\\ \boldsymbol{P+Q+R=14}\\ \boldsymbol{C+13+R=23}\end{matrix}\right\} \overset{Q=B}{\Longrightarrow} \left.\begin{matrix}\boldsymbol{B+C=5}\\ \boldsymbol{B+R=9}\\ \boldsymbol{C+R=10}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{B + C + R = \frac{5+9+10}{2} \Rightarrow 5 + R = 12 \Rightarrow R = 7}$. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 20

Αφού ρίξετε τέσσερα κανονικά ζάρια σε ένα τραπέζι, παίρνετε έναν αριθμό διαφορετικών σημείων, στις επάνω όψεις τους, τα οποία δίνουν άθροισμα 17. Εάν στη συνέχεια πάρουμε ένα από τα ζάρια, ποιο είναι το μεγαλύτερο άθροισμα του αριθμού των κουκκίδων στις έδρες που έρχονται σε επαφή με το τραπέζι των τριών ζαριών που απομένουν;

A) 9 B) 11 C) 12 D) 10 E) 8

Λύση

Αφού οι επάνω όψεις των ζαριών δίνουν άθροισμα 17, οι κάτω όψεις δίνουν άθροισμα $\mathbf{4 \cdot 7 - 17 = 11}$. Για να πετύχω το μεγαλύτερο άθροισμα μετά την αφαίρεση του ενός ζαριού, θα αφαιρέσω την μικρότερη τιμή που μπορώ δηλαδή το 1. Οπότε θα έχω μέγιστο άθροισμα το 10. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν φέραμε π.χ. 6542 μα άθροισμα άνω όψεων 17, οι κάτω όψεις είναι οι 1235 που με απόσυρση του πρώτου ζαριού δίνουν άθροισμα $\mathbf{2 + 3 + 5 = 10}$, όπως θέλαμε. Άρα D.

ΕΡΩΤΗΣΗ 21

Ο διάσημος μουσικός Βόλφγκανγκ Αμαντέους Μότσαρτ γεννήθηκε στις 27 Ιανουαρίου 1756 στο Σάλτσμπουργκ της Αυστρίας. Αν η 27η Ιανουαρίου 1858 ήταν Τετάρτη, ποια ημέρα της εβδομάδας γεννήθηκε;

A) Δευτέρα B) Κυριακή C) Παρασκευή D) Πέμπτη E) Τρίτη

Λύση

Από την 27η Ιανουαρίου 1858 έως την 27η Ιανουαρίου 1854 μεσολαβούν $\mathbf{4 \times 365 + 1 = 1461 = 7 \times 208 + 5}$ μέρες (το 1856 είναι δίσεκτο έτος). Από την 27η Ιανουαρίου 1858 έως την 27η Ιανουαρίου 1756 μεσολαβούν

$\mathbf{25\times 4+2}$ έτη=$\mathbf{25\times(7\times 208+5)+2\times 365}$ μέρες (κανονικά το 1800 δεν είναι δίσεκτο έτος!). Έχω $\mathbf{25\times(7\times 208+5)+2\times 365=7\times 25\times 208+125+2\times(52\times 7+1)=7\times 25\times 208+125+2\times 52\times 7+2=7\times 25\times 208+2\times 52\times 7+127=7\times 25\times 208+2\times 52\times 7+18\times 7+1=}$. Άρα Τρίτη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 22

Οι Andrés, Bernardo και Carlos είναι κάτω των 48 ετών. Επίσης, οι αριθμοί που δείχνουν τα έτη των τριών είναι πολλαπλάσια του πέντε, διαδοχικά, όχι απαραίτητα με αυτή τη σειρά. Θέλετε να καθορίσετε το άθροισμα των ηλικιών τους. Παρεχόμενες πληροφορίες:

I. Η ηλικία ενός από αυτούς είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο όρο των ηλικιών των άλλων δύο.
II. Η ηλικία του μεγαλύτερου από τα τρία είναι πολλαπλάσιο του 9.

Έτσι, για να προσδιοριστεί το άθροισμα των ηλικιών των τριών

A) Αρκούν μόνο οι πληροφορίες του II.

B) Οι πληροφορίες του I από μόνες τους αρκούν.

C) είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν και οι δύο πληροφορίες

D) κάθε μία από τις ξεχωριστές πληροφορίες είναι επαρκής.

E) χρειάζονται περισσότερες πληροφορίες

Λύση

Έστω $\boldsymbol{x,y,z}$ οι ηλικίες των τριών κατά αύξουσα σειρά (δεν ταυτίζονται απαραίτητα με την σειρά εμφάνισης των ονομάτων).

Η πληροφορία I ισοδυναμεί με την πρόταση ότι τα έτη των τριών είναι πολλαπλάσια του πέντε, διαδοχικά, όχι απαραίτητα με αυτή τη σειρά. Άρα δεν προσθέτει κάτι και μπορεί να παραλειφθεί. Έχω $\boldsymbol{x+y+z<48+48+48=144}$. Έχω $\boldsymbol{x+5=y=z-5\Rightarrow x+y+z=3y\xRightarrow{y=5k}x+y+z=15k\Rightarrow x+y+z\in 135,120,105,90,75,60,45,30}$. Άρα δεν επαρκεί για να προσδιοριστεί το άθροισμα των ηλικιών των τριών.

Από την πληροφορία II προκύπτει ότι $\boldsymbol{z=5\times 9\times k=45k\xRightarrow{z<48}z=45,y=40,x=35\Rightarrow x+y+z=120}$. Η πληροφορία είναι επαρκής. Άρα A

Ερώτηση 23

Η Rosa έχει αγοράσει πορτοφόλια για S / 96 και S / 84, αλλά δεν θυμάται πόσα από κάθε τιμή αγόρασε. Απλά θυμάται ότι ξόδεψε, συνολικά, S/3084 και ότι ο αριθμός των πορτοφολιών που αγοράστηκαν στην τιμή των S/96 δεν έφτασε τα δέκα. Πόσα πορτοφόλια αγοράσε συνολικά;

A) 37 B) 35 C) 36 D) 34 E) 38

Λύση

Έστω x ο αριθμός των πορτοφολιών τιμής S/96 και y ο αριθμός των πορτοφολιών τιμής S/84.

Έχω $\boldsymbol{96x+84y=3084\Leftrightarrow 8x+7y=257\Rightarrow 8x+7y\equiv 257 mod7\Rightarrow x\equiv 5mod7\xRightarrow{(x<10)}x=5,y=31}$. Άρα C

Ερώτηση 24

Σε μια αδιαφανή τεφροδόχο, έχετε είκοσι καρφίτσες πανομοιότυπες σε σχήμα και μέγεθος, αριθμημένες με ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 20, χωρίς επανάληψη. Πόσες καρφίτσες, τουλάχιστον, πρέπει να τραβηχτούν τυχαία για να είμαστε σίγουροι ότι μεταξύ αυτών που σχεδιάζονται υπάρχουν δύο βώλοι των οποίων η διαφορά στον αριθμό τους είναι μεγαλύτερη από 15;

A) 18 B) 17 C) 16 D) 14E) 15

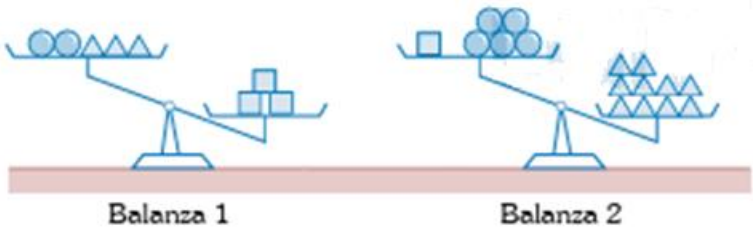
Λύση

Λαμβάνοντας υπόψη το χειρότερο σενάριο, παίρνουμε τις καρφίτσες με τη χαμηλότερη αρίθμηση, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο των οποίων η διαφορά είναι μεγαλύτερη από 15.

Η επόμενη καρφίτσα (η 16η) θα έχει οπωσδήποτε αριθμό με διαφορά από το 1 μεγαλύτερη των 15 μονάδων. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 25

Το σχήμα δείχνει δύο μη ισορροπημένες κλίμακες, όπου τα ίδια αντικείμενα έχουν το ίδιο ακέραιο βάρος σε χιλιόγραμμα. Επιπλέον, διαφορετικά αντικείμενα έχουν διαφορετικά βάρη και το βάρος των κυκλικών και τριγωνικών αντικειμένων είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερο. Προσδιορίστε το μέγιστο βάρος, σε χιλιόγραμμα, ενός τετράγωνου αντικειμένου.




A) 12 B) 15 C) 13 D) 16 E) 14

Λύση

Έστω 

.

Αφού το βάρος των κυκλικών και τριγωνικών αντικειμένων είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερο έχω $\boldsymbol{x = 1, y = 2 \vee x = 2, y = 1} (*)$

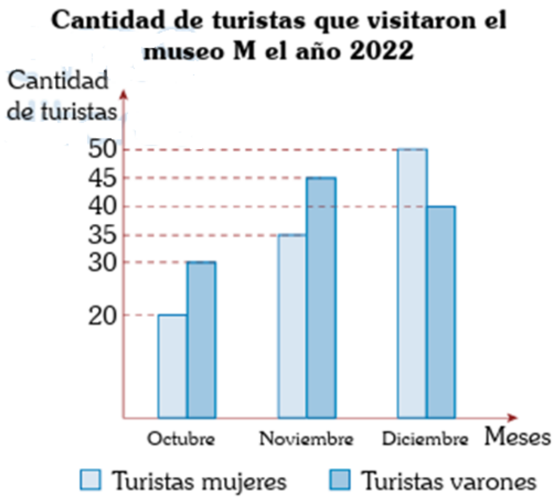
Από τον πρώτο ζυγό έχω $\boldsymbol{2x + 3y < 3z}$, ενώ από τον δεύτερο ζυγό έχω $\boldsymbol{z + 5x < 10y \Leftrightarrow z < 10y - 5x}$. Άρα

$\boldsymbol{2x + 3y < 3(10y - 5x) \Leftrightarrow 2x + 3y < 30y - 15x \Leftrightarrow 17x < 27y \overset{(*)}{\Rightarrow} x = 1, y = 2}$.

Άρα έχω $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{2x + 3y < 3z} \\ \boldsymbol{z < 10y - 5x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 < 3z} \\ \boldsymbol{z < 10 \cdot 2 - 5 \cdot 1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{8 < 3z} \\ \boldsymbol{z < 15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{z \in 3, 4, 5, 6, \ldots 14}$. άρα $\boldsymbol{z_{max} = 14}$. Άρα E

ΕΡΩΤΗΣΗ 26

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τον αριθμό των ανδρών και γυναικών τουριστών που επισκέφθηκαν ένα μουσείο M τους τελευταίους τρεις μήνες του 2022.




Εκείνη τη χρονιά, κάθε τουρίστας που επισκέφθηκε το μουσείο πλήρωσε S / 30 το μήνα Οκτώβριο, S / 40 το μήνα Νοέμβριο και S / 50 το μήνα Δεκέμβριο. Σας ζητείται να προσδιορίσετε:

I. Τον συνολικό αριθμό τουριστών που επισκέφθηκαν το μουσείο M το τελευταίο τρίμηνο του 2022.

II. Την θετική διαφορά μεταξύ των εσόδων που προέρχονται από τις πληρωμές που πραγματοποιούνται από όλους τους άνδρες τουρίστες κατά τους μήνες Νοέμβριο και Δεκέμβριο και της είσπραξης που προκύπτει από τις πληρωμές που πραγματοποιούνται από όλες τις γυναίκες τουρίστες κατά τους μήνες Νοέμβριο και Δεκέμβριο.

A) 220 και S/200 B) 220 και S/150 C) 220 και S/100 D) 200 και S/100 E) 250 και S/150·

Λύση

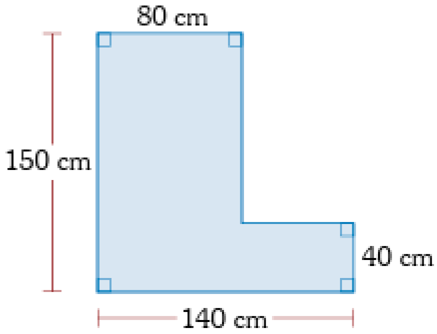
Έχω

| | Οκτ | Νοε | Δεκ | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|
| Αριθμός τουριστών | 20 | 35 | 50 | 105 |
| Αριθμός τουριστριών | 30 | 45 | 40 | 115 |
| Σύνολο | | | | 220 |

Τα έσοδα από τους άνδρες τους μήνες Νοε και Δεκ είναι =$\mathbf{35 \times 40 + 50 \times 50 = 3900}$. Τα έσοδα από τις γυναίκες τους μήνες Νοε και Δεκ είναι =$\mathbf{45 \times 40 + 40 \times 50 = 3800}$. Οπότε η διαφορά τους είναι 3900-3800=100S. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 27

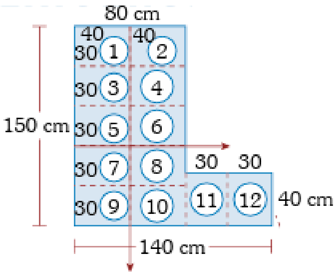
Ο Manuel έχει μια ξύλινη σανίδα όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν έχετε ένα πριόνι που κάνει ευθείες κοπές και θέλετε να πάρετε όσο το δυνατόν περισσότερα ορθογώνια κομμάτια 40 cm επί 30 cm από το χαρτόνι, πόσες ευθείες κοπές πρέπει να κάνετε τουλάχιστον;




A) 7 B) 5 C) 3 D) 4 E) 6

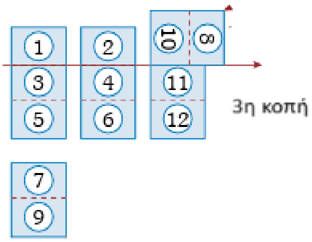
Λύση

Η σανίδα αποτελείται από 12 κομμάτια διαστάσεων 40 cm επί 30 cm όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάνουμε



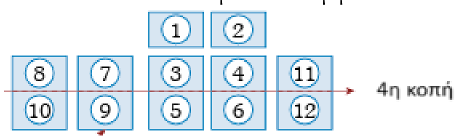

πρώτα τις δυο κοπές του σχήματος.

Στη συνέχεια επανατοποθετούμε τα κομμάτια όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα και κάνουμε μια νέα




τρίτη κοπή.

Τέλος επανατοποθετούμε τα κομμάτια όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα και κάνουμε μια νέα τέταρτη

κοπή. 


. Άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 28

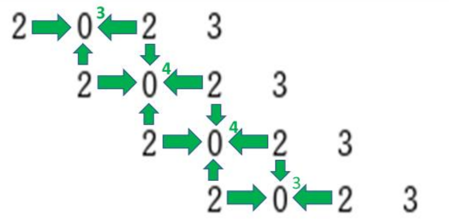
Στη διάταξη που παρουσιάζεται, λαμβάνοντας ως ίση την ελάχιστη απόσταση από το ένα ψηφίο στο άλλο σε κάθε ανάγνωση, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να διαβαστεί ο αριθμός 2023;

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 | 3 | | | |
| | 2 | 0 | 2 | 3 | | |
| | | 2 | 0 | 2 | 3 | |
| | | | 2 | 0 | 2 | 3 |

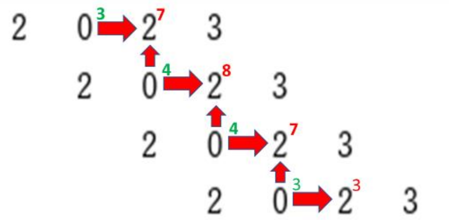
(A) 43 (B) 20 (Γ) 32 (Δ) 34 (Ε) 45

Λύση

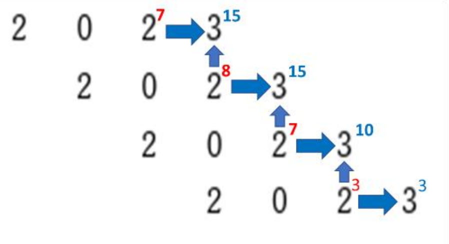
Έχουμε διαδοχικά για να πάμε από το 2 στο 0



Έχουμε διαδοχικά για να πάμε από το 0 στο 2



Έχουμε τελικά για να πάμε από το 2 στο 3



Άρα συνολικά έχουμε $\mathbf{15+15+10+3=43}$ τρόπους ανάγνωσης του αριθμού 2023. Άρα Α

ΕΡΩΤΗΣΗ 29

Οι ομάδες M, N, P και Q συμμετείχαν σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου, παίζοντας όλες μεταξύ τους σε έναν γύρο. Ο πίνακας δείχνει τα παιχνίδια που κερδήθηκαν (PG), τους αγώνες που βγήκαν ισοπαλία (PE), τους χαμένους αγώνες (PP), τα γκολ υπέρ που σημειώθηκαν (GF) και τα γκολ εναντίον (GA) των τεσσάρων ομάδων στο τέλος του τουρνουά. Εάν στον αγώνα μεταξύ της ομάδας N και της ομάδας P σημειώθηκαν 2 γκολ και έληξε ισόπαλος και στον αγώνα μεταξύ της ομάδας M και της ομάδας P σημειώθηκαν 5 γκολ, ποιο ήταν το αποτέλεσμα του αγώνα μεταξύ της ομάδας N και της ομάδας Q;

| | PG | PE | PP | GF | GC |
|---|---|---|---|---|---|
| M | 2 | 1 | 0 | 6 | 4 |
| N | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 |
| P | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 |
| Q | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 |

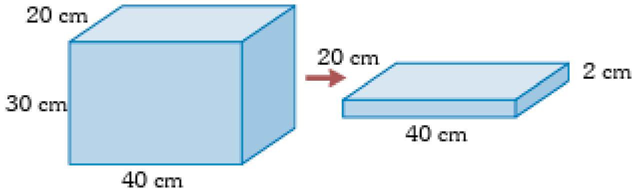
A) 2 - 2 B) 2 - 1 C) 2 - 0 D) 3 - 0 E) 4 - 2

Λύση

Έχω N-P=1-1. Στον αγώνα μεταξύ της ομάδας M και της ομάδας P σημειώθηκαν 5 γκολ, άρα όχι ισοπαλία. Η ομάδα P έχει 0 νίκες, άρα P-M=0-5 ή 1-4 ή 2-3. Λόγω του 5-7 γκολ της ομάδας P, τα αντίστοιχα σκορ για το P-Q είναι 4-1 ή 3-2 ή 2-3. Άρα P-M=2-3, P-Q=2-3. Όλες οι ομάδες έχουν από μια ισοπαλία. Άρα ο αγώνας M-Q ήταν ισόπαλος, με σκορ M-Q=0-0 ή 1-1 ή 2-2, αφού η M δέχτηκε συνολικά 4 γκολ. Αν M-Q=2-2, τότε M-N=1-0, N-Q=3-2 και η ομάδα Q έχει γκολ 7-7, άτοπο. Αν M-Q=0-0, τότε M-N=3-2, N-Q=1-0 και η ομάδα Q έχει γκολ 3-3, άτοπο. Άρα M-Q=1-1, οπότε M-N=2-1, N-Q=2-1 και η ομάδα Q έχει γκολ 5-5, δεκτό. Άρα Β.

ΕΡΩΤΗΣΗ 30

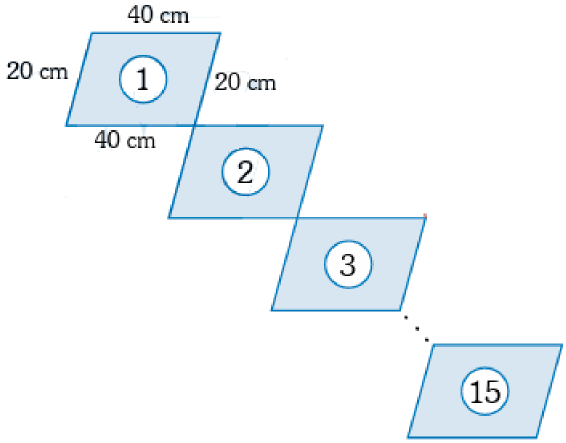
Ο Manuel έχει ένα κομμάτι ξύλου που έχει σχήμα ευθύγραμμου παραλληλεπιπέδου του οποίου οι διαστάσεις είναι 20 cm × 30 cm × 40 cm. Χωρίζει το μπλοκ εντελώς με ευθείες τομές, παράλληλες με τις έδρες του μπλοκ, σε αντίστοιχα κομμάτια πάχους 2 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα κομμάτια θα τοποθετηθούν σε μια επίπεδη περιοχή έτσι ώστε κάθε κομμάτι να έρχεται σε επαφή με κάποιο άλλο κομμάτι. Προσδιορίστε τη μέγιστη περίμετρο της περιοχής που καλύπτεται από όλα τα κομμάτια.




A) 20 m B) 14 m C) 18 m D) 17 m E) 19 m

Λύση

Τα κομμάτια που αποκόπηκαν είναι 15 σε πλήθος. Προκειμένου οι πλάκες να έρχονται σε επαφή και να καταλαμβάνουν τη μέγιστη περίμετρο, τοποθετούνται ως εξής




Οπότε η ζητούμενη περίμετρος είναι ίση με $\mathbf{15} \times (\mathbf{2} \times \mathbf{20} + \mathbf{2} \times \mathbf{40}) = \mathbf{1800}\boldsymbol{cm} = \mathbf{18}\boldsymbol{m}$. άρα C

**Αριθμητική Γνώση**

ΕΡΩΤΗΣΗ 31

Οι αδελφές Σόνια και Μπεατρίζ έχουν $\overline{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\boldsymbol{a}}$ και $\overline{(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\boldsymbol{b}\mathbf{1}}$ Sol, αντίστοιχα. Η πρώτη ποσότητα είναι πολλαπλάσιο του 7 και η δεύτερη πολλαπλάσιο του 9. Για να αγοράσουν ένα κόσμημα για τη μητέρα της, το οποίο κοστίζει $\overline{(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{2})\mathbf{0}}$ Sol, κάθε μία από αυτές συνεισφέρει το ίδιο ποσό. Πόσες Sol κράτησε η Σόνια αφού έδωσε το μερίδιό της;

(Α) 143 (Β) 231 (Γ) 123 (Δ) 132 (Ε) 133

Λύση

Η Σόνια είχε $\overline{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{100} + (\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}) \times \mathbf{10} + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{111}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{10}$ Sol.

Η Μπεατρίζ είχε $\overline{(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\boldsymbol{b}\mathbf{1}} = (\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}) \times \mathbf{100} + \boldsymbol{b} \times \mathbf{10} + \mathbf{1} = \mathbf{100}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \mathbf{101}$ Sol.

Έχω $\mathbf{111}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{10} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{7} \Rightarrow \mathbf{6}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{3} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{7} \Rightarrow -\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{3} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{7} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{3}$

Ακόμα έχω $\mathbf{100}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \mathbf{101} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{9} \Rightarrow \mathbf{401} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{9} \Rightarrow \mathbf{5} + \boldsymbol{b} \equiv \mathbf{0}\boldsymbol{mod}\mathbf{9} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{4}$

Άρα η Σόνια είχε 343 Sol και συνέβαλε τα μισά του $\overline{(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{2})\mathbf{0}} = \mathbf{420}$ Sol , δηλαδή 210 Sol. Της έμειναν $\mathbf{343} - \mathbf{210} = \mathbf{133}$ Sol. Άρα Ε

ΕΡΩΤΗΣΗ 32

Σε ένα κατάστημα δερμάτινων ειδών, η τιμή μιας τσάντας ως προς την τιμή ενός ιμάντα είναι σε αναλογία $\mathbf{11:2}$ και η τιμή ενός πορτοφολιού ως προς την τιμή ενός ιμάντα είναι σε αναλογία $\mathbf{7:3}$. Εάν η Έλενα πληρώσει S / 243 περισσότερο για μια τσάντα παρά για έναν ιμάντα, πόσες Sol περισσότερο θα πλήρωνε για ένα πορτοφόλι από ό, τι για έναν ιμάντα;

A) 54 B) 87 C) 60 D) 72 E) 80

Λύση

Έστω Τ: τιμή τσάντας Ι: τιμή ιμάντα Π: τιμή πορτοφολιού. Έχω $\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{I}}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}}$ και $\frac{\boldsymbol{\Pi}}{\boldsymbol{I}}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{T}-\boldsymbol{I}=\mathbf{243} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{I}=\mathbf{243} \Leftrightarrow \boldsymbol{I}=\mathbf{54}, \boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{I}\times\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}=\mathbf{54}\times\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}=\mathbf{126}$. Άρα για το πορτοφόλι θα πλήρωνε $\mathbf{126-54=72}$ Sol παραπάνω. Άρα D.

ΕΡΩΤΗΣΗ 33

Όσον αφορά τις ποσότητες παιχνιδιών που πούλησε καθημερινά η Καμίλα τις τελευταίες έξι ημέρες, είναι γνωστό ότι ο μέσος όρος, η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος είναι 23, 22 και 24, αντίστοιχα. Εάν η μεγαλύτερη από αυτές τις ποσότητες είναι η μικρότερη δυνατή, ποιος ήταν ο μικρότερος αριθμός παιχνιδιών που πούλησε η Καμίλα σε οποιαδήποτε από αυτές τις έξι ημέρες;

A) 13 B) 22 C) 17 D) 21 E) 12

Λύση

Έχω $\boldsymbol{a}\le \boldsymbol{b}\le \boldsymbol{c}\le \boldsymbol{d}\le \boldsymbol{e}\le \boldsymbol{f}$ με διάμεσο $\mathbf{24}=\frac{\boldsymbol{c+d}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\mathbf{48}$, μέσο όρο $\mathbf{23}=\frac{\boldsymbol{a+b+c+d+e+f}}{\mathbf{6}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{138} \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{90}$. Θέλω να ελαχιστοποιήσω την $\boldsymbol{f}\ge\mathbf{24}$, άρα να μεγιστοποιήσω το άθροισμα $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}(=\mathbf{90}-\boldsymbol{f})$. Έχω για την επικρατούσα τιμή 22 ότι είναι μικρότερη ή ίση της διαμέσου, άρα οι τρεις πρώτες τιμές $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\le\mathbf{22}$ και προκειμένου να μεγιστοποιήσω το άθροισμα $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}$ τότε:

Αν θέσω $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\mathbf{22}$ , έχω $\boldsymbol{d}=\mathbf{26}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{90} \Leftrightarrow \mathbf{22}+\mathbf{22}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{90} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{46}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f}$ άτοπο.

Άρα $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\mathbf{22}$ οπότε έχω $\boldsymbol{d}=\mathbf{26}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{90} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{68}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}\ge\mathbf{52} \Rightarrow \mathbf{68}-\boldsymbol{a}\ge\mathbf{52} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\le\mathbf{16}$.

Για $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{16}$, έχω $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{52}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}=\boldsymbol{f}=\mathbf{26}$, άτοπο αφού τώρα θα έχω επικρατούσα τιμή το 26 και όχι το 22.

Για $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{15}$, έχω $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{53}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{e}=\mathbf{26},\boldsymbol{f}=\mathbf{27}$ άτοπο αφού θα έχω και πάλι επικρατούσα τιμή το 26.

Για $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{14}$, έχω $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{54}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{e}=\mathbf{26},\boldsymbol{f}=\mathbf{28}$ ή $\boldsymbol{e}=\mathbf{27},\boldsymbol{f}=\mathbf{27}$ άτοπο αφού θα έχω επικρατούσα τιμή το 26 ή το 27 αντίστοιχα.

Για $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{13}$, έχω $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}=\mathbf{55}$ με $\mathbf{26}\le\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{f} \Rightarrow \boldsymbol{e}=\mathbf{26},\boldsymbol{f}=\mathbf{29}$ ή ή $\boldsymbol{e}=\mathbf{27},\boldsymbol{f}=\mathbf{28}$. Η πρώτη απορρίπτεται αφού θα έχω και πάλι επικρατούσα τιμή το 26. Η άλλη δεκτή αφού έχω $\mathbf{13}\le\mathbf{22}\le\mathbf{22}\le\mathbf{26}\le\mathbf{27}\le\mathbf{28}$ με μέσο όρο, επικρατούσα τιμή και διάμεσος να είναι ίσα με 23, 22 και 24, αντίστοιχα. Άρα A.

ΕΡΩΤΗΣΗ 34

Η Τερέζα αναμιγνύει τρία είδη κινόα των οποίων οι τιμές ανά κιλό, σε Sol, είναι 8,40, 9,50 και P. Εάν η αναλογία των βαρών τους είναι 5, 3 και 2, αντίστοιχα, και η Τερέζα πωλεί το χιλιόγραμμο αυτού του μείγματος σε τιμή 12,40 Sol με κέρδος 25% επί της τιμής πώλησης, ποια είναι η αξία, σε σόλες, του P;

A) 12,75 B) 12,10 C) 11,25 D) 11,75 E) 10,50

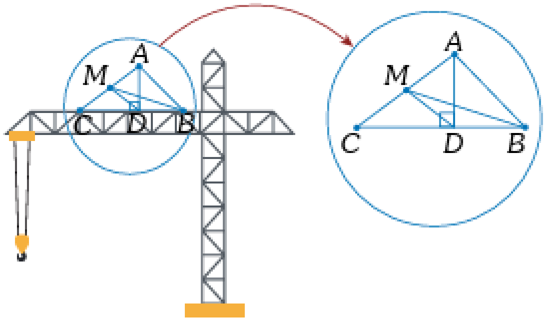
Λύση

Έχω $\boldsymbol{T\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta}=\mathbf{12,4}$ με $\boldsymbol{T\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta}=\boldsymbol{A\rho\chi\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta}+\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{\tau\iota\mu\eta\ \pi\acute{\omega}\lambda\eta\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow \mathbf{0,75}\ \boldsymbol{\tau\iota\mu\eta\ \pi\acute{\omega}\lambda\eta\sigma\eta\varsigma}=\boldsymbol{A\rho\chi\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta} \Rightarrow \boldsymbol{A\rho\chi\iota\kappa\eta\ \tau\iota\mu\eta}=\mathbf{0,75}\times\mathbf{12,40}=\mathbf{9,30}$Sol. Έχω ακόμα ότι ο σταθμικός μέσος όρος $\mathbf{9,3}=\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\kappa}\times\mathbf{8,4}+\mathbf{3}\boldsymbol{\kappa}\times\mathbf{9,5}+\mathbf{2}\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{P}}{(\mathbf{5+3+2})\boldsymbol{\kappa}} \Rightarrow \mathbf{93}=\mathbf{42}+\mathbf{28,5}+\mathbf{2}\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P}=\mathbf{11,25}$. Άρα C.

**Γεωμετρία**

ΕΡΩΤΗΣΗ 35

Στο σχήμα φαίνεται ένας κατασκευαστικός γερανός που έχει την ικανότητα να κινεί, να ανυψώνει και να χαμηλώνει βαριά υλικά. Είναι γνωστό ότι $\boldsymbol{AC = 40\ m}$ και $\boldsymbol{BD = 20\ m}$. Βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του μήκους του $\boldsymbol{BM}$ εάν το σημείο M βρίσκεται σε ίση απόσταση από τα A και C (Τα σημεία A, B, C, D και M είναι συνεπίπεδα)



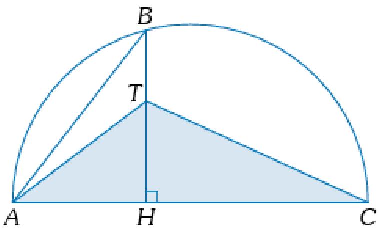

A) 41 m B) 39 m C) 37 m D) 38 m E) 35 m

Λύση

Το τμήμα $\boldsymbol{DM}$ είναι διάμεσος από την ορθή γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ACD, άρα $\boldsymbol{DM = \frac{AC}{2} = \frac{40}{2} = 20}$. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\boldsymbol{MDB}$ έχω : $\boldsymbol{|MD - DB| < MB < MD + DB \Rightarrow 0 < MB < 40 \xRightarrow{MB \in \mathbb{Z}} MB_{man} = 39}$. Άρα B

ΕΡΩΤΗΣΗ 36

Στο σχήμα, η ημικυκλική περιοχή αντιπροσωπεύει ένα πάρκο. Εάν $\boldsymbol{AB = 10\ m}$ και $\boldsymbol{AH = HT}$, βρείτε το εμβαδόν της τριγωνικής περιοχής $\boldsymbol{ATC}$ που προορίζεται για παιδικό παιχνίδι.



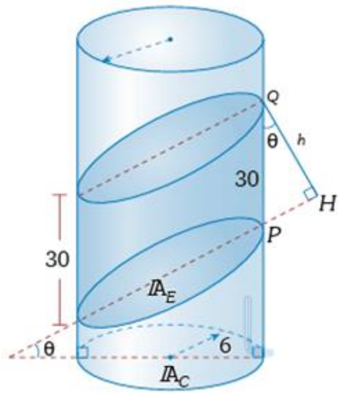

A) $\boldsymbol{70\ m^2}$ B) $\boldsymbol{40\ m^2}$ C) $\boldsymbol{60\ m^2}$ D) $\boldsymbol{30\ m^2}$ E) $\boldsymbol{50\ m^2}$

Λύση

Η γωνία ABC είναι ορθή αφού βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABC έχω $\boldsymbol{AB^2 = AH \cdot AC \Longrightarrow 10^2 = TH \cdot AC \Longrightarrow 100 = 2(ATC) \Rightarrow (ATC) = 50m^2}$. Άρα E

ΕΡΩΤΗΣΗ 37

Ένας ορθός κύλινδρος του οποίου η ακτίνα έχει μήκος 6 m τέμνεται από δύο παράλληλα επίπεδα που καθορίζουν έναν πλάγιο κύλινδρο του οποίου οι ελλειπτικές βάσεις έχουν εμβαδόν $\boldsymbol{60\pi\ m^2}$ η καθεμιά. Εάν ο γεννήτορας στον πλάγιο κύλινδρο έχει μήκος 30 μέτρα, βρείτε το μήκος του ύψους του πλάγιου κυλίνδρου.




A) 18 m B) 21 m C) 25 m D) 20 m E) 16 m

Λύση

Έστω ότι το επίπεδο όποιας από τις δυο παράλληλες ελλειπτικές βάσεις του πλάγιου κυλίνδρου σχηματίζει γωνία θ με το επίπεδο της κυκλικής βάσης του ορθού κυλίνδρου. Έχω ότι η κυκλική βάση είναι ορθή προβολή της ελλειπτικής βάσης, συνεπώς $\boldsymbol{E_{κύκλου} = E_{έλλειψης} \cdot cos\theta \Rightarrow \pi \cdot 6^2 = 60\pi \cdot cos\theta \Rightarrow cos\theta = 0,6}$. Έχω ακόμα ότι $\boldsymbol{\theta = P\widehat{Q}H}$ (ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες). Άρα στο ορθογώνιο $\boldsymbol{PQH}$ έχω $\boldsymbol{cos\theta = \frac{QH}{QP} \Rightarrow 0,6 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 18m}$. Άρα A.

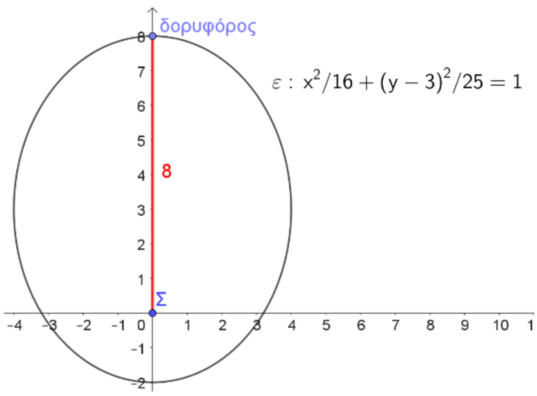
Ερώτηση 38

Η NASA έχει θέσει έναν δορυφόρο σε τροχιά γύρω από τη Σελήνη, ο οποίος περιγράφει μια ελλειπτική τροχιά. Λαμβάνοντας το κέντρο της Σελήνης ως την αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και με μονάδα μέτρησης το megameter, η τροχιά του δορυφόρου ικανοποιεί την εξίσωση $\boldsymbol{25x^2 + 16y^2 - 96y =}$

**256**. Βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορεί να έχει ο δορυφόρος από το κέντρο της Σελήνης, σε μεγαμέτρα.

A) 6 B) 10 C) 8 D) 12 E) 9

Λύση




Έχω $\boldsymbol{25x^2 + 16y^2 - 96y = 256 \Leftrightarrow 25x^2 + 16(y^2 - 6y + 9 - 9) = 256 \Leftrightarrow 25x^2 + 16(y-3)^2 = 25 \times 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1}$.
Άρα ο δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά με κέντρο της το σημείο $\boldsymbol{K(0,3)}$ και μεγάλο άξονα των άξονα $\boldsymbol{y'y}$. Στο σχήμα βλέπουμε την τροχιά του δορυφόρου. Έχω $\boldsymbol{\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3}$. Άρα η εστία της έλλειψης είναι το σημείο $(\boldsymbol{x_K, y_K - \gamma}) = (\boldsymbol{0,0})$, δηλαδή το κέντρο Σ της Σελήνης. Το πιο απομακρυσμένο σημείο της έλλειψης από την εστία της είναι το απέναντι της άκρο του μεγάλου άξονα, δηλαδή το σημείο $\boldsymbol{\Delta(0,8)}$. Άρα η μέγιστη απόσταση είναι η $\boldsymbol{\Sigma\Delta = 8}$. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 39

Σε ένα εργαστήριο ραπτικής, κατασκευάζονται φορέματα (Vestidos), μπλούζες και παντελόνια, χρησιμοποιώντας τρεις ραπτομηχανές διαφορετικών εμπορικών σημάτων, όλες σε καλή κατάσταση λειτουργίας. Η εβδομαδιαία παραγωγή για κάθε μηχάνημα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| | **Máquina marca A** | **Máquina marca B** | **Máquina marca C** |
|---|---|---|---|
| Vestidos | 20 | 15 | 8 |
| Blusas | 40 | 50 | 60 |
| Pantalones | 30 | 10 | 20 |

Προσδιορίστε τον συνολικό αριθμό μονάδων μηχανών των εμπορικών σημάτων A, B και C που απαιτούνται για την κατασκευή 700 φορεμάτων, 2300 μπλούζες και 1020 παντελόνια την εβδομάδα.

A) 55 B) 46 C) 48 D) 47 E) 57

Λύση

Έστω x, y, z ο αριθμός των μηχανών μάρκας A, B, C, αντίστοιχα. Έχουμε $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{20x + 15y + 8z = 700} \quad (\mathbf{I}) \\ \boldsymbol{40x + 50y + 60z = 2300}\ (\mathbf{II}) \\ \boldsymbol{30x + 10y + 20z = 1020}(\mathbf{III}) \end{aligned}\right\}$

Άρα $(\mathbf{I}) - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}(\mathbf{II}) \Rightarrow \boldsymbol{8x - 10z = 10 \Leftrightarrow 4x - 5z = 5}(\mathbf{IV})$.

Από $\mathbf{5(III) - (II)} \Rightarrow \boldsymbol{110x + 40z = 2800 \Leftrightarrow 11x + 4z = 280}(\mathbf{V})$

Από $\mathbf{4(IV) + 5(V)} \Rightarrow \boldsymbol{71x = 1420} \Rightarrow \mathbf{x = 20, y = 12, z = 15}$.

Άρα απαιτούνται συνολικά $\mathbf{x + y + z = 47}$ μηχανήματα, άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 40

Η ανάπτυξη του αξιοσημείωτου πηλίκου $\frac{x^{2n+3} - y^{3m-5}}{x^3 - y^2}$ έχει 17 όρους και είναι αλήθεια ότι ο βαθμός του κεντρικού όρου αντιπροσωπεύει τον αριθμό των εργαζομένων που έχει η Μαρία στην εταιρεία της. Πόσους υπαλλήλους έχει η Νάνσυ, αν έχει $(\boldsymbol{m + n})$ περισσότερους υπαλλήλους από τη Μαρία;

A) 77 B) 37 C) 40 D) 61 E) 67

Λύση

| |
|---|
| Στη στοιχειώδη άλγεβρα, τα αξιοσημείωτα πηλίκα είναι εκείνα τα πηλίκα από τα οποία λαμβάνονται πολυώνυμα, δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ίσο με μηδέν. Στις περισσότερες περιπτώσεις παρουσιάζονται στη γενική τους μορφή, ως εξής: $\frac{x^n \pm y^n}{x^m \pm y^m}$ |
| |
| Περίπτωση 1 |
| Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν ο n είναι μονός ή ζυγός αριθμός. |
| $\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-(k+1)} y^k = x^{n-1} + x^{m-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots y^{n-1}$ |
| Παράδειγμα: $\frac{x^4-y^4}{x-y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ <br> $\frac{x^5-y^5}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ |
| Περίπτωση 2 |
| Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν n είναι ζυγός αριθμός. Αν το n ήταν περιττό, δεν θα ήταν αξιοσημείωτο πηλίκο. |
| $\frac{x^n - y^n}{x + y} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-(k+1)} y^k = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots y^{n-1}$ |
| Παράδειγμα $\frac{x^4-y^4}{x+y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ |
| Περίπτωση 3 |
| Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν n είναι μονός αριθμός. Αν το n ήταν άρτιο, δεν θα ήταν αξιοσημείωτο πηλίκο. |
| $\frac{x^n + y^n}{x + y} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-(k-1)} y^k = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots y^{n-1}$ |
| Παράδειγμα: $\frac{x^5+y^5}{x+y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$ |
| Περίπτωση 4 |
| Αυτή η περίπτωση δεν ισχύει τόσο είτε το x είτε το y είναι περιττό ή ζυγό: $\frac{x^n+y^n}{x-y}$ |
| |
| Γενικές περιπτώσεις |
| Οι ακόλουθες 5 περιπτώσεις προκύπτουν όταν οι εκθέτες παρονομαστή δεν είναι ίσοι με 1, αλλά αποτελούν πολλαπλάσια της τιμής του αριθμητή. Έτσι, για αυτές τις περιπτώσεις, "m είναι αναγκαστικά ένας παράγοντας του n", ή με άλλα λόγια, "n είναι ένα πολλαπλάσιο του m". |
| |
| Περίπτωση 1 |
| Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν n είναι μονός ή ζυγός αριθμός. Αν το n είναι περιττό, το m είναι αναγκαστικά περιττό. Εάν το n είναι άρτιος, το m μπορεί να είναι περιττό ή ζυγό. |
| $\frac{x^n - y^n}{x^m - y^m} = \sum_{k=0}^{n/m} y^{n-m(k+1)} x^{km} = x^{n-m} + x^{n-2m}y^m + x^{n-3m}y^{2m} + \cdots y^{n-m}$ |

$$\frac{x^{12}-y^{12}}{x^3-y^3} = \boldsymbol{x^9 + x^6y^3 + x^3y^6 + y^9}$$

Παραδείγματα: $$\frac{x^9-y^9}{x^3-y^3} = \boldsymbol{x^6 + x^3y^3 + y^6}$$

$$\frac{x^{-6}-y^{-6}}{x^{-2}-y^{-2}} = \boldsymbol{x^{-4} + x^{-2}y^{-2} + y^{-4}}$$

Περίπτωση 2

Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν n είναι ζυγός αριθμός, ενώ m μπορεί να είναι μονός ή ζυγός. Όταν το m είναι άρτιος, είναι μόνο ένα αξιοσημείωτο πηλίκο αν το $\frac{n}{m}$ είναι άρτιος αριθμός.

$$\frac{x^{12}-y^{12}}{x^3+y^3} = \boldsymbol{x^9 - x^6y^3 + x^3y^6 - y^9}$$

Παραδείγματα: $$\frac{x^8-y^8}{x^2+y^2} = \boldsymbol{x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}} = \boldsymbol{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$$

Περίπτωση 3

Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν n είναι μονός αριθμός. Αν το n ήταν άρτιο, θα ήταν ένα αξιοσημείωτο πηλίκο μόνο αν είναι μέρος της περίπτωσης 4.

$$\boldsymbol{\frac{x^n + y^n}{x^m + y^m} = \sum_{k=0}^{n/m} (-1)^k y^{n-m(k+1)} x^{km} = x^{n-m} - x^{n-2m}y^m + x^{n-3m}y^{2m} - \cdots y^{n-m}}$$

Παράδειγμα: $\frac{x^9+y^9}{x^3+y^3} = \boldsymbol{x^6 - x^3y^3 + y^6}$

Περίπτωση 4

Αυτή η ειδική περίπτωση συμβαίνει όταν n και m είναι ζυγοί αριθμοί και m είναι ένας παράγοντας n. Αυτό συμβαίνει μόνο εάν το πηλίκο $\frac{n}{m}$ δίνει έναν μονό αριθμό.

$$\boldsymbol{\frac{x^n + y^n}{x^m + y^m} = \sum_{k=0}^{n/m} (-1)^k y^{n-m(k+1)} x^{km} = x^{n-m} - x^{n-2m}y^m + x^{n-3m}y^{2m} - \cdots y^{n-m}}$$

Παράδειγμα: $\frac{x^{10}+y^{10}}{x^2+y^2} = \boldsymbol{x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8}$

Περίπτωση 5

Αυτή η περίπτωση δεν ισχύει τόσο είτε το x είτε το y είναι περιττό ή ζυγό: $\frac{x^n+y^n}{x^m-y^m}$

**Ιδιότητες**

Μόνο εάν πρόκειται για αξιοσημείωτο πηλίκο, πληρούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

**Αριθμός όρων ανάπτυξης**

Για να βρείτε τον αριθμό των όρων που θα έχει το ανάπτυγμα του ακόλουθου αξιοσημείωτου πηλίκου: $\frac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s}$, έχω $\boxed{\frac{p}{r} = \frac{q}{s} = \text{πλήθος όρων του πολυωνύμου}}$.

Ο γενικός όρος $\boldsymbol{t_k}$ του πολυωνύμου υπολογίζεται με τους ακόλουθους τρόπους:

Για την περίπτωση 1, χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα: $\boldsymbol{t_k = x^{(n-km)}y^{(km-m)}}$

Για όλες τις άλλες περιπτώσεις, οι όροι θα εναλλάσσονται μεταξύ +, όταν το k είναι περιττό. και -, όταν το k είναι άρτιος: $\boldsymbol{t_k = (-1)^{(k-1)}x^{(n-km)}y^{(km-m)}}$

Έχω σύμφωνα με τα παραπάνω ότι ο αριθμός όρων πολυωνύμου$= \boldsymbol{\frac{2n+3}{3} = \frac{3m-5}{2} = 17 \Rightarrow n = 24, m = 13}$

άρα $\frac{x^{2n+3}-y^{3m-5}}{x^3-y^2} = \frac{x^{51}-y^{34}}{x^3-y^2} = \frac{(x^3)^{17}-(y^2)^{17}}{x^3-y^2} = \frac{\mathrm{X}^{17}-\mathrm{Y}^{17}}{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}$

και $\boldsymbol{t_{\text{central}} = t_{\frac{17+1}{2}} = t_9 = (-1)^{(9-1)} X^{(17-9)} Y^{(9-1)} = X^8 Y^8 = (x^3)^8 (y^2)^8 = x^{24} y^{16}}$ με βαθμό $\boldsymbol{24 + 16 = 40}$. Άρα η Μαρία έχει 40 εργαζόμενους και η Νάνσυ έχει $\boldsymbol{40 + m + n = 77}$. Άρα Α

ΕΡΩΤΗΣΗ 41

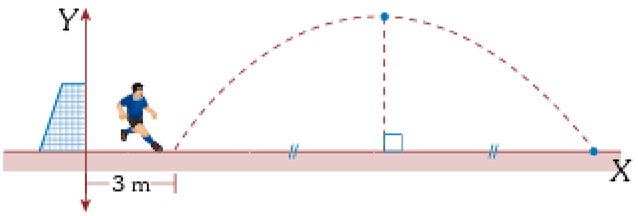
Προκειμένου να παρακινήσει τους μαθητές του στο θέμα της αντίστροφης συνάρτησης, ο Jorge, ο οποίος είναι ο καθηγητής μαθηματικών, δηλώνει τα εξής: "Για την πραγματική συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ με τύπο: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{225}{24}, x \in \left[3; \frac{9}{2}\right]}$ βρείτε τη μέγιστη τιμή που ανήκει στο πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της $\boldsymbol{f}$, γιατί αυτή η τιμή είναι η ηλικία του γιου μου». Σύμφωνα με τα παραπάνω, πόσο χρονών είναι ο γιος του Χόρχε; A) 7 B) 9 C) 6 D) 10 E) 12

Λύση

Έχω $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{225}{24} = \frac{4x^2 - 20x + 225}{24} = \frac{4x^2 - 20x + 25 + 200}{24} = \frac{(2x-5)^2 + 200}{24}}$. Έχω $\boldsymbol{3 \le x \le \frac{9}{2} \Rightarrow 6 \le 2x \le 9 \Rightarrow 1 \le 2x - 5 \le 4 \Rightarrow 1 \le (2x-5)^2 \le 16 \Rightarrow 201 \le (2x-5)^2 + 200 \le 216 \Rightarrow \frac{201}{24} \le \frac{(2x-5)^2 + 200}{24} \le 9 \Rightarrow \frac{201}{24} \le \mathrm{f}(x) \le 9}$.

Έχω ότι $\boldsymbol{D_{f^{-1}} = f\left(\left[3; \frac{9}{2}\right]\right) = \left[\frac{201}{24}; 9\right]}$ με μέγιστη τιμή το 9. Επομένως, ο γιος του Χόρχε είναι 9 ετών. Άρα Β.

ΕΡΩΤΗΣΗ 42




Σε έναν ποδοσφαιρικό αγώνα, ένας κεντρικός αμυντικός κάνει μια πάσα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μπάλα ακολουθεί μια παραβολική τροχιά που διαμορφώνεται από την πραγματική συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, της οποίας ο κανόνας αντιστοιχίας δίνεται από $\boldsymbol{\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{80}x^2 + ax + b; 3 \le x \le 43}$ και χτυπά τον αγωνιστικό χώρο 40 μέτρα μπροστά του. Προσδιορίστε το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα που ρίχνει ο παίκτης.

A) 5,50 m B) 4 m C) 4,25 m D) 3,75 m E) 5 m

Λύση

Έχω ότι το τριώνυμο $\boldsymbol{-\frac{1}{80}x^2 + ax + b}$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\boldsymbol{3}$ και $\boldsymbol{43}$, άρα $\boldsymbol{\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{80}(x-3)(x-43)}$ με $\boldsymbol{maxf = \mathrm{f}(23) = -\frac{1}{80}(20)(-20) = 5}$. Άρα το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα είναι 5μ. Άρα Ε.

**Τριγωνομετρία**

ΕΡΩΤΗΣΗ 43

Ένας πολιτικός μηχανικός σχεδιάζει το σχέδιο ενός σπιτιού με έναν εσωτερικό κήπο του οποίου το σχήμα είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο Τ. Είναι γνωστό ότι το x είναι μια οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου Τ για το οποίο είναι αλήθεια ότι

$$\boldsymbol{\sec^4 60^\circ \cos(90^\circ - x) + 8\sin x = \csc^2 30^\circ \sin(90^\circ - x) + \cot^2 30^\circ \cos x}$$

και η τιμή της έκφρασης $\boldsymbol{H = 7\csc x - 3\cot\frac{x}{2}}$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ημερών που χρειάστηκε ο μηχανικός για να συντάξει το σχέδιο του σπιτιού. Αφού ξεκινήσετε την κατάρτιση του σχεδίου, πόσες ημέρες μετά την παράδοση της εργασίας;

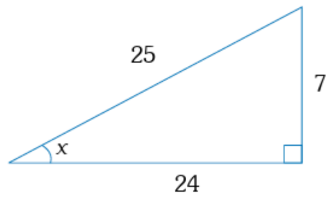
A) 5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\sec^4 60^\circ = \frac{1}{\cos^4 60^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16, \cot^2 30^\circ = \frac{1}{\tan^2 30^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3, \csc^2 30^\circ = \frac{1}{\sin^2 30^\circ} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4}$

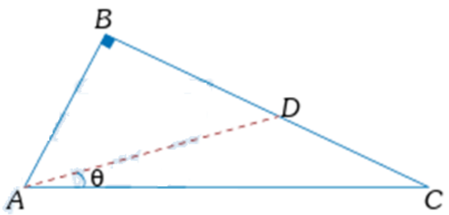
Έχω

$\boldsymbol{\sec^4 60^\circ \cos(90^\circ - x) + 8sinx = \csc^2 30^\circ \sin(90^\circ - x) + \cot^2 30^\circ cosx \Rightarrow 16sinx + 8sinx = 4cosx + 3cosx \Rightarrow 24sinx = 7cosx \Rightarrow tanx = \frac{7}{24}}$. Άρα η γωνία x είναι η οξεία γωνία του ορθογωνίου με πυθαγόρεια τριάδα 7-24-25. Άρα $\boldsymbol{H = 7\csc x - 3\cot\frac{x}{2} = H = 7\csc x - 3(cscx + cotx) = 4cscx - 3cotx = 4\left(\frac{25}{7}\right) - 3\left(\frac{24}{7}\right) = 4}$. Άρα C




ΕΡΩΤΗΣΗ 44

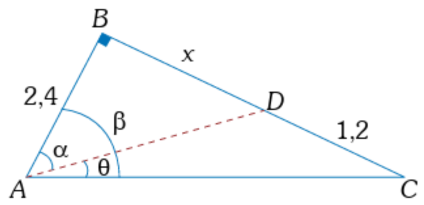
Το σχήμα αναπαριστά μια τριγωνικού σχήματος ξύλινη σανίδα ABC. Ένας ξυλουργός πρέπει να αποκτήσει δύο τριγωνικές σανίδες ξύλου κόβοντας τη γραμμή AD, όπου το σημείο D βρίσκεται μεταξύ των σημείων B και C. Προσδιορίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων B και D, εάν AB = 2,4 m και DC = 1,2 m. Θεωρήστε tanθ = 8/31.




A) 1,8 m B) 3,2 m C) 2,4 m D) 1,5 m E) 1,2 m

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{x}{2,4}}$, $\boldsymbol{\tan\beta = \frac{x+1,2}{2,4}}$ και $\boldsymbol{\theta = \beta - \alpha \Rightarrow}$




$$\boldsymbol{\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{8}{31} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \Rightarrow \frac{8}{31} = \frac{\frac{x+1,2}{2,4} - \frac{x}{2,4}}{1 + \frac{x+1,2}{2,4}\cdot\frac{x}{2,4}} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{8}{31} = \frac{1,2\cdot 2,4}{2,4^2 + (x+1,2)\cdot x} \Rightarrow 8[2,4^2 + (x+1,2)\cdot x] = 31\cdot 1,2\cdot 2,4 \Rightarrow}$$

$\boldsymbol{8x^2 + 9,6x + 46,08 = 89,28 \Longrightarrow 8x^2 + 9,6x - 43,2 = 0 \Longrightarrow x^2 + 1,2x - 5,4 = 0 \Longrightarrow (x+3)(x-1,8) = 0 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = 1,8m}$. Άρα A.

Ερώτηση 45

Η μέση θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου του κινητήρα ενός αυτοκινήτου σε μια καλοκαιρινή ημέρα, t δευτερόλεπτα μετά την εκκίνησή του, μπορεί να υπολογιστεί με την ακόλουθη έκφραση:

$$\boldsymbol{T(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}t\right) + 33}$$

Μετά από πόσα δευτερόλεπτα ο κινητήρας του αυτοκινήτου φτάνει στη μέγιστη θερμοκρασία του; A) 45 B) 20 C) 28 D) 24 E) 25·

Λύση

Έχω

$\boldsymbol{T(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}t\right) + 33 = 4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) - 8\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{48}t\right)\right] + 33 = 16\sin^2\left(\frac{\pi}{48}t\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) + 25 = 16\sin^2\left(\frac{\pi}{48}t\right) + 2 * 4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 25 = \left(4\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) + \frac{1}{2}\right)^2 + 25 - \frac{1}{4} \leq \left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + 25 - \frac{1}{4}}$.

Η μέγιστη τιμή προκύπτει για πρώτη φορά όταν $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{48}t\right) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{48}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 24sec}$. Άρα D

**Μηχανική**

**Area C**

Ερωτήσεις 16-45 Όπως Area B

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**
**Area D**

**Λογική-Μαθηματική Δεξιότητα**
ΕΡΩΤΗΣΗ 16
Σε ένα αδιαφανές κουτί, ο Juan Carlos έχει δώδεκα πλακίδια αριθμημένα από το 1 έως το 6, έτσι ώστε δύο πλακίδια να έχουν την ίδια αρίθμηση, δηλαδή: υπάρχουν δύο πλακίδια αριθμημένα με 1, δύο πλακίδια αριθμημένα με 2, δύο πλακίδια αριθμημένα με 3 και ούτω καθεξής. Πόσα πλακίδια, τουλάχιστον, πρέπει να επιλέξει τυχαία ο Χουάν Κάρλος για να έχει με βεβαιότητα, μεταξύ των πλακιδίων που επιλέχτηκαν, δύο πλακίδια των οποίων το γινόμενο των αριθμών με τους οποίους αριθμούνται είναι ζυγός αριθμός;
A)2 B) 6 C)5 D)8 E)7
Λύση
Το χειρότερο σενάριο: επιλέγονται αρχικά μόνο οι περιττοί αριθμοί. Τότε: 1,1,3,3,5,5. Τα ανά δυό γινόμενά τους είναι περιττός αριθμός. Ο έβδομος θα είναι άρτιος. Οπότε θα υπάρχει πλέον ζεύγος πλακίδιων με το γινόμενο των αριθμών με τους οποίους αριθμούνται να είναι ζυγός αριθμός. Άρα Ε.

Ερώτηση 17
Οι μισθοί των Carlos, Ramiro, Juan και Sofía ανέρχονται σε S / 2000, S / 2300, S / 1700 και S / 2200, όχι απαραίτητα με τη σειρά που αναφέρθηκαν. Όσον αφορά τους μισθούς τους, οι οποίοι είναι διαφορετικοί, κάνουν τις ακόλουθες δηλώσεις:
Juan: «Ο μισθός μου, προστιθέμενος σε αυτόν της Sofía είναι πάνω από S/ 3700».
Ramiro: "Ο μισθός μου, προστιθέμενος σε αυτόν του Carlos, είναι μικρότερος από S / 4500."
Sofía: «Ο μισθός μου είναι S/ 1700».
Carlos: «Κερδίζω περισσότερα από τον Ramiro».
Αν όλοι λένε πάντα ψέματα, πόσο είναι το άθροισμα των μισθών του Ramiro και του Juan;
A) S/ 4500 B) S/ 3900 C) S/ 4300 D) S/ 4000 E) S/ 4200
Λύση
Ramiro: "Ο μισθός μου, προστιθέμενος σε αυτόν του Carlos, είναι μικρότερος από S / 4500."
Άρα $\boldsymbol{Ramiro + Carlos \geq 4500}$. Άρα $(\boldsymbol{Ramiro}, \boldsymbol{Carlos}) = (\mathbf{2300}, \mathbf{2200}) \vee (\mathbf{2200}, \mathbf{2300})$.
Carlos: «Κερδίζω περισσότερα από τον Ramiro».
Άρα $\boldsymbol{Ramiro > Carlos}$. Άρα $(\boldsymbol{Ramiro}, \boldsymbol{Carlos}) = (\mathbf{2300}, \mathbf{2200})$.
Sofía: «Ο μισθός μου είναι S/ 1700». Άρα $\boldsymbol{Sofía = 2000}$,
Juan: «Ο μισθός μου, προστιθέμενος σε αυτόν της Sofía είναι πάνω από S/ 3700».
Άρα $\boldsymbol{Juan + Sofía \leq 3700}$. Άρα $\boldsymbol{Juan = 1700}$. Άρα $\boldsymbol{Ramiro + Juan = 2300 + 1700 = 4000}$. Άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 18
Οι ηλικίες τεσσάρων φίλων Angela, Barbara, Camila και Danna είναι 10, 13, 15 και 17 ετών, όχι απαραίτητα με τη σειρά που αναφέρθηκαν. Επιπλέον, είναι γνωστά τα εξής:
- Το άθροισμα των αριθμών που δείχνουν τις ηλικίες της Barbara και της Danna είναι ένας πρώτος αριθμός.
- Το άθροισμα των αριθμών που δείχνουν τις ηλικίες της Angela, της Camila και της Danna είναι ένας περιττός αριθμός.
Πόσο είναι το ελάχιστο άθροισμα, σε χρόνια, των ηλικιών της Angela και της Danna; A) 28 B) 25 C) 23 D) 27 E) 30
Λύση

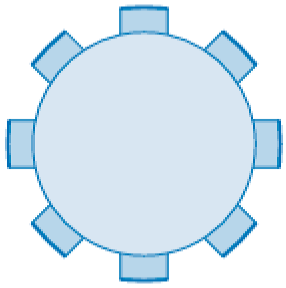
Αν κάποια από τις ηλικίες της Angela, της Camila και της Danna είναι 10 ετών, οι άλλες δυο θα έχουν περιττό αριθμό για ηλικία και το άθροισμα των τριών ηλικιών θα είναι άρτιος, άτοπο. Άρα καμιά τους δεν είναι 10 ετών. Συνεπώς $\boldsymbol{Barbara = 10}$.

Έχω $\mathbf{10 + 15 = 25}$, σύνθετος. $\mathbf{10 + 17 = 27}$, σύνθετος. $\mathbf{10 + 13 = 23}$, πρώτος. Άρα $\boldsymbol{Danna = 13}$.

Άρα $\boldsymbol{Angela = 15 \vee 17}$. Συνεπώς, το ελάχιστο άθροισμα, σε χρόνια, των ηλικιών της Angela και της Danna είναι $\mathbf{15 + 13 = 28}$. Άρα A.

ΕΡΩΤΗΣΗ 19

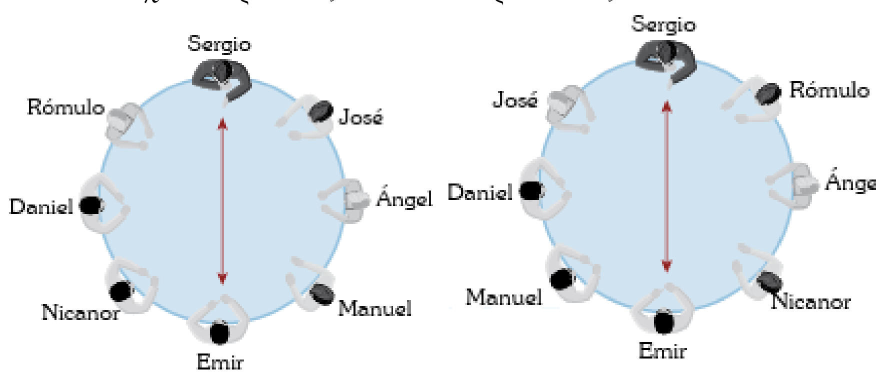
Οκτώ συμμαθητές από ένα σχολείο κάθονται σε οκτώ καρέκλες συμμετρικά κατανεμημένες γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, όπως φαίνεται στην εικόνα. Τα ακόλουθα είναι γνωστά: Ο Εμίρης κάθεται δίπλα στον Μανουήλ και τον Νικάνορα. Ο Ιωσήφ κάθεται στα αριστερά του Δανιήλ, αλλά όχι δίπλα στον Ρωμύλο. Ο Άγγελος κάθεται απέναντι από τον Δανιήλ, όπως ο Ρωμύλος κάθεται απέναντι από τον Μανουέλ. Ποιος κάθεται απέναντι από τον Sergio;



A) Μανουήλ B) Νικάνωρ C) Εμίρης D) Ρωμύλος E) Ιωσήφ

Λύση

Από τα στοιχεία παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις




Και στις δυο περιπτώσεις ο Εμίρης κάθεται απέναντι από τον Sergio. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 20

Σε μια συνάντηση παρευρέθηκε πλήθος ατόμων. Στην αρχή της συνάντησης, όλοι οι συμμετέχοντες διανεμήθηκαν σε M διαθέσιμα τραπέζια. Έτσι 8 άτομα κάθισαν γύρω από κάθε ένα από τα M τραπέζια. Στη συνέχεια, για τη διευκόλυνση όλων των παρευρισκόμενων, ενεργοποιήθηκαν 4 ακόμη τραπέζια, επομένως, τώρα όλοι οι συμμετέχοντες διανεμήθηκαν σε (M + 4) τραπέζια και στην περίπτωση αυτή 6 άτομα κάθισαν γύρω από κάθε ένα από τα (M + 4) τραπέζια. Πόσα άτομα παρακολούθησαν συνολικά τη συνάντηση;

A) 84 B) 72 C) 90 D) 48 E) 96

Λύση

Έχω $\mathbf{8}\boldsymbol{M} = \mathbf{6}(\boldsymbol{M} + \mathbf{4}) \Leftrightarrow \mathbf{8}\boldsymbol{M} = \mathbf{6}\boldsymbol{M} + \mathbf{24} \Leftrightarrow \boldsymbol{M} = \mathbf{12}$ τραπέζια, άρα $\mathbf{12 \times 8 = 96}$ άτομα. Άρα E

ΕΡΩΤΗΣΗ 21

Ο Rodrigo έφυγε από το σπίτι του για το σχολείο του την ώρα που υποδεικνύεται από το ρολόι που φαίνεται στην εικόνα. Τι ώρα, ακριβώς, έφυγε ο Ροντρίγκο από το σπίτι του;

A) $\boldsymbol{7h\,18\frac{9}{13}min}$ B) $\boldsymbol{7h\,18\frac{6}{13}min}$ C) $\boldsymbol{7h\,17\frac{6}{13}min}$ D) $\boldsymbol{7h\,18\frac{1}{13}min}$ E) $\boldsymbol{7h\,17\frac{2}{13}min}$

Λύση

Ο ωροδείκτης διέγραψε από τα μεσάνυχτα γωνία $\boldsymbol{240° - \hat{\theta}}$, ενώ ο λεπτοδείκτης διέγραψε γωνία $\boldsymbol{7 \cdot 360° + 90° + \hat{\theta}}$. Η γωνιακή ταχύτητα του ωροδείκτη είναι $\frac{360°}{12h}$ άρα χρειάστηκε χρόνο $\frac{240°-\hat{\theta}}{\frac{360°}{12h}} = \frac{12(240°-\hat{\theta})}{360°}\boldsymbol{h}$. Η γωνιακή ταχύτητα του λεπτοδείκτη είναι $\frac{360°}{h}$ άρα χρειάστηκε χρόνο $\frac{7\cdot360°+90°+\hat{\theta}}{\frac{360°}{h}} = \frac{7\cdot360°+90°+\hat{\theta}}{360°}\boldsymbol{h}$. Προφανώς έχω $\frac{12(240°-\hat{\theta})}{360°} = \frac{7\cdot360°+90°+\hat{\theta}}{360°} \Longrightarrow \boldsymbol{12(240° - \hat{\theta}) = 7 \cdot 360° + 90° + \hat{\theta} \Rightarrow 2880° = 2610° + 13\hat{\theta} \Rightarrow \hat{\theta}} = \frac{270}{13}°$ που για τον λεπτοδείχτη αντιστοιχούν σε $\frac{\frac{270}{13}}{360}\boldsymbol{h} = \frac{\frac{270}{13}}{360}\boldsymbol{60min} = \frac{270\cdot60}{13\cdot360}\boldsymbol{min} = \frac{45}{13}\boldsymbol{min} = \boldsymbol{3}\frac{6}{13}\boldsymbol{min}$. Άρα ο Ροντρίγκο έφυγε στις $\boldsymbol{7h\,15min + 3\frac{6}{13}min = 7h\,18\frac{6}{13}min}$. Άρα Β

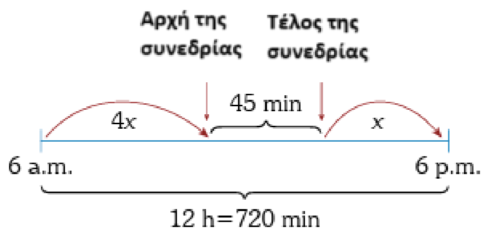
ΕΡΩΤΗΣΗ 22

Σήμερα, έφυγα από το σπίτι για τη δουλειά στις 6:00 π.μ. και επέστρεψα στις 6:00 μ.μ. Μια 45λεπτη εκπαιδευτική συνεδρία πραγματοποιήθηκε στην δουλειά. Εάν ο χρόνος από τη στιγμή που έφυγα από το σπίτι μέχρι την έναρξη της εκπαίδευσης ήταν τετραπλάσιος από τον χρόνο μεταξύ του τέλους της εκπαίδευσης και της ώρας που επέστρεψα στο σπίτι, τι ώρα ξεκίνησε η εκπαίδευση;

A) 2:00 μ.μ. B) 3:30 μ.μ. C) 4:00 μ.μ. D) 3:00 μ.μ. E) 2:30 μ.μ.

Λύση

Έχω το παρακάτω γραφικό σύμφωνα με τα δεδομένα μας.




Άρα $\boldsymbol{4x + 45 + x = 720 \Longrightarrow 5x = 675 \Rightarrow x = 135\ min}$. Με $\boldsymbol{4x = 540\ min = 9\ h}$. Άρα η συνεδρίαση ξεκίνησε στις $\boldsymbol{6:00\ \pi.\mu. + 9h = 3:00\ \mu.\mu.}$ άρα D

ΕΡΩΤΗΣΗ 23

Στην ακόλουθη σειρά σχημάτων που σχηματίζονται από διαφανή και σύμφωνα κυκλικά φύλλα, προσδιορίστε το σχήμα 1731.

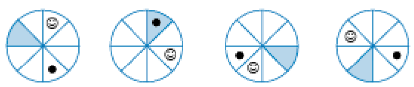
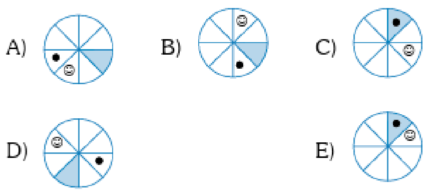


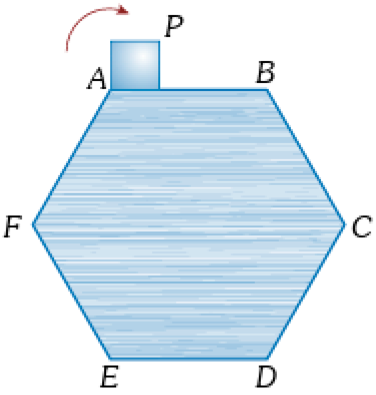
Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4




Λύση

Το σκιασμένο φύλλο μετακινείται κατά δυο θέσεις δεξιόστροφα. Το ίδιο και το χαμόγελο. Και τα δυο επανέρχονται στην αρχική τους θέση κάθε 4 σχήματα.
Ο μαύρος κύκλος κινείται κατά τρεις θέσεις αριστερόστροφα και επανέρχεται στην αρχική του θέση κάθε 8 σχήματα. Έχω $\mathbf{1731 = 4 \cdot 432 + 3}$ και $\mathbf{1731 = 8 \cdot 216 + 3}$, άρα το σκιασμένο φύλλο, το χαμόγελο και ο μαύρος κύκλος θα βρίσκονται στο σχήμα 1731 όπου βρίσκονταν στο σχήμα 3. Άρα Α.

ΕΡΏΤΗΣΗ 24

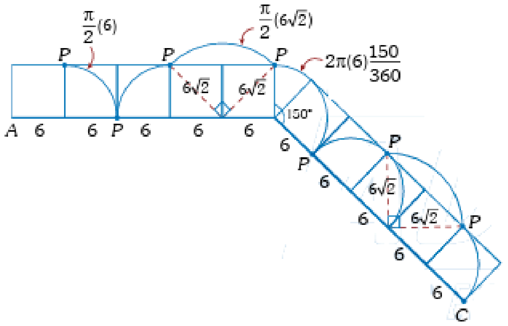



Η εικόνα απεικονίζει μια κανονική εξαγωνικού σχήματος ξύλινη σανίδα ABCDEF με πλευρές διαστάσεων 30 cm και ένα τετράγωνο φύλλο που στηρίζεται πάνω της, οι πλευρές του οποίου έχουν διαστάσεις 6 cm. Εάν το τετράγωνο φύλλο κινείται προς τα εμπρός περιστρέφοντας κατά μήκος των πλευρών του εξαγώνου, πάντα στηριζόμενο στην κορυφή του και χωρίς ολίσθηση, έως ότου η κορυφή P συμπίπτει με την κορυφή C του εξαγώνου, ποιο είναι το ελάχιστο μήκος σε εκατοστά που θα ταξιδέψει το σημείο P;

**A)** $\mathbf{3(5+2\sqrt{2})\pi}$ **B)** $\mathbf{(20+\sqrt{2})\pi}$ **C)** $\mathbf{(17+6\sqrt{2})\pi}$ **D)** $\mathbf{(20+3\sqrt{2})\pi}$ **E)** $\mathbf{6(3+\sqrt{2})\pi}$

Λύση

Η κίνηση που θα κάνει το σημείο P περιγράφεται στο παρακάτω γραφικό. Το μήκος αυτής της διαδρομής είναι $\mathbf{4(3\pi) + 2\pi(3\sqrt{2}) + 5\pi = \pi(6\sqrt{2} + 17)}$. Άρα C.



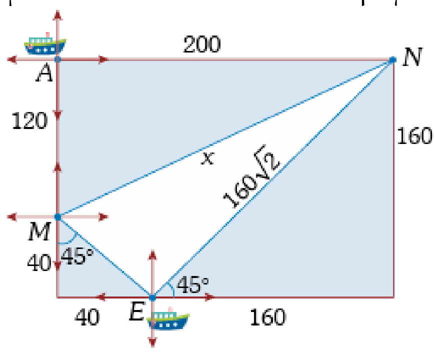

ΕΡΩΤΗΣΗ 25

Ένα πλοίο αναχωρεί από το σημείο Α που βρίσκεται βόρεια του λιμένα Μ, ταυτόχρονα με ένα άλλο πλοίο αναχωρεί από το σημείο Ε που βρίσκεται προς τα ΝΑ του ίδιου λιμένα Μ. Εάν το πλοίο που έφυγε από το Α ταξιδεύει **200** μίλια ανατολικά και φτάνει στο λιμάνι Ν και το πλοίο που έφυγε από το Ε ταξιδεύει $\mathbf{160\sqrt{2}}$ μίλια προς τα ΒΑ και φτάνει επίσης στο λιμάνι Ν, ποια είναι η απόσταση, σε μίλια, μεταξύ του λιμένα Μ και του λιμένα Ν;

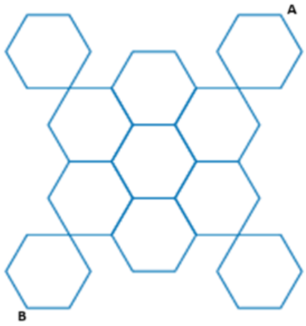
A) $\mathbf{30\sqrt{15}}$ B) $\mathbf{40\sqrt{17}}$ C) $\mathbf{30\sqrt{14}}$ D) $\mathbf{50\sqrt{34}}$ E) $\mathbf{40\sqrt{34}}$

Λύση

Έχουμε το ακόλουθο γράφημα. Συνεπώς $\boldsymbol{MN = x =} \mathbf{\sqrt{120^2 + 200^2} = 40\sqrt{34}}$, άρα Ε



ΕΡΩΤΗΣΗ 26

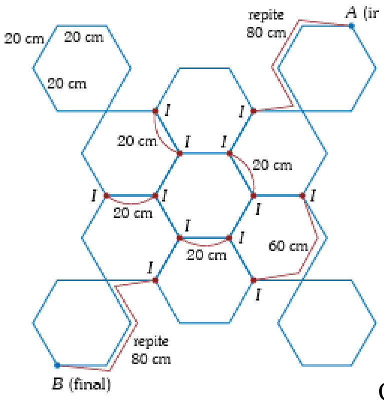



Το σχήμα που απεικονίζεται αντιπροσωπεύει μια δομή σύρματος που αποτελείται από 11 κανονικά εξάγωνα με πλευρές διαστάσεων 20 cm. Ένα μυρμήγκι βρίσκεται στην κορυφή A και κινείται μόνο κατά μήκος του σύρματος. Ποιο είναι το ελάχιστο μήκος που θα ταξιδέψει για να περάσει από ολόκληρη τη δομή και να καταλήξει στην κορυφή B;

A) 13,60 μ. B) 13,80 μ. C) 14,00 μ. D) 13,40 μ. E) 14,20 μ.

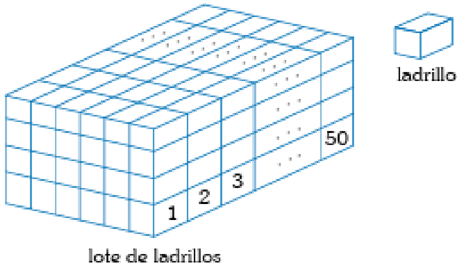
Λύση

Το μυρμήγκι θα περάσει τουλάχιστον μια φορά από καθεμιά από τις 54 πλευρές του σχήματος. Άρα θα κάνει τουλάχιστον $\mathbf{54 \cdot 20 = 1080}\boldsymbol{cm}$




Οι πλευρές από όπου θα περάσει ξανά φαίνονται στο σχήμα και έχουν μήκος $\mathbf{4 \cdot 20 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 80 = 300}\boldsymbol{cm}$. Άρα θα κάνει τουλάχιστον $\mathbf{1380}\boldsymbol{cm} = \mathbf{13,80}\boldsymbol{m}$. Άρα B.

ΕΡΩΤΗΣΗ 27



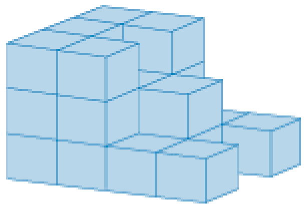

Ο Marco, διευθυντής της κατασκευαστικής εταιρείας που είναι υπεύθυνη για την κατασκευή της πολυκατοικίας La Portada del Sol, πρέπει να αγοράσει αρκετές παρτίδες τούβλων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν ο μηχανικός που είναι υπεύθυνος για την κατασκευή υποδεικνύει ότι απαιτούνται 100 χιλιάδες τούβλα αυτού του τύπου, πόσες παρτίδες τούβλων, τουλάχιστον, θα αγοράσει ο Marco;

A) 83 B) 100 C) 90 D) 84 E) 85

Λύση

Κάθε παρτίδα τούβλων περιέχει $\mathbf{50 \cdot 6 \cdot 4 = 1200}$ τούβλα. Άρα ο Marco θα χρειαστεί τουλάχιστον $\frac{\mathbf{10000}}{\mathbf{1200}} = \mathbf{83,33}$ παρτίδες και επειδή ο αριθμός των παρτίδων είναι ακέραιος έχουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός παρτίδων που χρειάζεται ο Marco είναι 84. Άρα D.

ΕΡΩΤΗΣΗ 28



Ένα ξύλινο στερεό αποτελείται από 23 κύβους με ακμές διαστάσεων 1 cm, κολλημένες μεταξύ τους στις πλευρές τους, δύο προς δύο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο Ηλίας έχει επίσης 100 κύβους των οποίων οι άκρες είναι 1 εκατοστό και χρησιμοποιώντας μερικούς από αυτούς, κολλώντας στις πλευρές τους δύο προς δύο, θέλει να ολοκληρώσει το στερεό που φαίνεται να σχηματίζει έναν συμπαγή κύβο, αλλά του οποίου η άκρη είναι ελάχιστου μήκους. Πόσους από αυτούς τους κύβους θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε για να φτιάξετε τον συμπαγή κύβο;

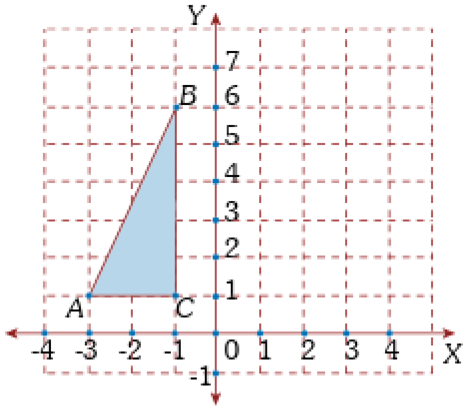
A) 41 B) 40 C) 42 D) 44 E) 39

Λύση

Ο συμπαγής κύβος που θέλει να φτιάξει θα είναι διαστάσεων $\mathbf{4 \cdot 4 \cdot 4\, cm^3 = 64 cm^3}$, δηλαδή θα αποτελείται από 64 κύβους με ακμές διαστάσεων 1 cm. Ο υποφαινόμενος κύβος περιέχει ήδη 23 τέτοιους κύβους, άρα ο Ηλίας θα χρειαστεί άλλους $\mathbf{64 - 23 = 41}$ κύβους. Άρα A.

ΕΡΩΤΗΣΗ 29

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ που απεικονίζεται έχει ως κορυφή του τα σημεία $\boldsymbol{A(-3;1)}, \boldsymbol{B(-1;6)}$και$\boldsymbol{C(-1;1)}$.Λαμβάνοντας ως άξονα συμμετρίας τη γραμμή της εξίσωσης $\boldsymbol{x = 0}$, κατασκευάζουμε το συμμετρικό τρίγωνο $\boldsymbol{A'B'C'}$ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε το τρίγωνο $\boldsymbol{PQR}$ ενώνοντας τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\boldsymbol{A'B'C'}$. Προσδιορίστε το άθροισμα των συντεταγμένων των κορυφών του τριγώνου $\boldsymbol{PQR}$




A) 14 B) 12 C) 15 D) 11 E) 13

Λύση

Η γραμμή με εξίσωση $\boldsymbol{x = 0}$ είναι ο άξονας των y. Άρα οι κορυφές του τριγώνου A'B'C' θα είναι τα σημεία $\boldsymbol{A'(3;1)}, \boldsymbol{B'(1;6)}$και$\boldsymbol{C'(1;1)}$. Τα μέσα των πλευρών του τριγώνου αυτού είναι τα $\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{B'+C'}}{\boldsymbol{2}} = \left(\boldsymbol{1};\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\right)$, $\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{B'+A'}}{\boldsymbol{2}} = \left(\boldsymbol{2};\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\right)$,$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{A'+C'}}{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{2};\boldsymbol{1})$, με άθροισμα συντεταγμένων $\boldsymbol{1 + \frac{7}{2} + 2 + \frac{7}{2} + 2 + 1 = 13}$. Άρα E

ΕΡΩΤΗΣΗ 30

Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου, οι ομάδες Anta, Bicos, Canta και Dacca συμμετείχαν, παίζοντας όλες μεταξύ τους σε έναν γύρο. Το σχήμα δείχνει τον πίνακα με τα παιχνίδια που παίχτηκαν (PJ), τους αγώνες που κερδήθηκαν (PG), τους ισόπαλους αγώνες (PE), τους χαμένους αγώνες (PP), τα γκολ υπέρ (GF) και τα γκολ κατά (GA) κάθε ομάδας.

| Ομάδες | PJ | PG | PE | PP | GF | GC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anta | 3 | 2 | 0 | 1 | 4 | 3 |
| Bicos | 3 | 2 | 0 | 1 | 3 | 1 |
| Canta | 3 | 1 | 0 | 2 | 2 | 4 |
| Dacca | 3 | 1 | 0 | 2 | 2 | 3 |

Εάν η Dacca νίκησε την Anta και η Anta νίκησε την Canta, και οι δύο περιπτώσεις με 2 γκολ προς 1, ποιο ήταν το αποτέλεσμα του αγώνα Bicos εναντίον Canta;

A) 4 - 1 B) 3 - 2 C) 2 - 0 D) 3 - 1 E) 2 - 1

Λύση

Έχω Anta-Dacca =2-1 και Anta-Canta =1-2. Άρα στον αγώνα Anta-Bicos το σκορ ήταν 1-0 (ώστε τα γκολ της Anta να είναι 4-3 και οι νίκες 2).

Η Canta μια νίκη με την Anta, τα άλλα δυο τα έχασε.

Για την Dacca έχω Anta-Dacca =2-1 άρα στα άλλα δυο παιχνίδια έχει 1 γκολ υπέρ και 1 κατά. Επιπλέον, στα άλλα δυο παιχνίδια έχει 1 νίκη και 1 ήττα. Άρα έχω Dacca-Canta=1-0 και Dacca-Bicos=0-1.

Η Bicos έχει Bicos-Anta=0-1, Bicos -Dacca=1-0 και γκολ 3-1. Άρα Bicos-Canta=2-0. Άρα C.

**Αριθμητική γνώση**

ΕΡΩΤΗΣΗ 31

Στις συνεταιριστικές ενώσεις του προγράμματος Glass of Milk σε μια περιοχή της Λίμα, μια παρτίδα χαρτοκιβωτίων γάλακτος κατανέμεται δίκαια. Κάθε ένωση λαμβάνει 37 κουτιά και 19 περισσεύουν. Εάν υπήρχαν άλλα 157 κιβώτια στην παρτίδα, κάθε ένωση θα είχε άλλα 8 κιβώτια και θα είχαν απομείνει 8 κιβώτια. Πόσοι συνεταιρισμοί του προγράμματος Glass of Milk υπάρχουν σε αυτή την περιοχή;

A) 17 B) 21 C) 16 D) 22 E) 19

Λύση

Έστω Π ο συνολικός αριθμός των χαρτοκιβωτίων γάλακτος και N ο αριθμός των συνεταιρισμών.

Κάθε ένωση λαμβάνει 37 κουτιά και 19 περισσεύουν. Άρα $\boldsymbol{\Pi = 37N + 19}$.

Εάν υπήρχαν άλλα 157 κιβώτια στην παρτίδα, κάθε ένωση θα είχε άλλα 8 κιβώτια και θα είχαν απομείνει 8 κιβώτια. Άρα $\boldsymbol{\Pi + 157 = (37 + 8)N + 8}$. Με αφαίρεση κατά μέλη έχω $\boldsymbol{157 = 8N - 11 \Rightarrow N = 21}$. Άρα B.

ΕΡΩΤΗΣΗ 32

Με έναν ορισμένο αριθμό βόλων, τον ελάχιστο δυνατό, μπορείτε να σχηματίσετε ακέραιες σε πλήθος ομάδες με 2, 3 και 5 βόλους η καθεμία. Αν είχατε άλλους 4 βόλους, θα είχατε σχηματίσει έναν ακέραιο αριθμό ομάδων με 7 μονάδες η καθεμία. Πόσοι βόλοι θα περισσέψουν όταν σχηματιστούν ομάδες των 11 βόλων η καθεμιά;

A) 3 B) 8 C) 5 D) 7 E) 9

Λύση

Έστω N ο αριθμός των βόλων. Αυτός θα είναι κοινό πολλαπλάσιο των 2,3 και 5, άρα πολλαπλάσιο του 30. Άρα $\boldsymbol{N = 30k, k} \in \mathbb{N}$.

Αν είχατε άλλους 4 βόλους, θα είχατε σχηματίσει έναν ακέραιο αριθμό ομάδων με 7 μονάδες η καθεμία.

Άρα $\boldsymbol{N + 4 \equiv 0mod7 \Rightarrow 30k + 4 \equiv 0mod7 \Longrightarrow 2k \equiv -4mod7 \Longrightarrow 2k \equiv 3mod7 \Longrightarrow 8k \equiv 12mod7 \Longrightarrow}$

$\boldsymbol{k \equiv 5mod7 \Longrightarrow k = 5}$, αφού θέλουμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό βόλων.

Άρα $\boldsymbol{N = 150 = 143 + 7 = 11 \cdot 13 + 7}$. Άρα με τους 150 βόλους θα σχηματιστούν 13 ομάδες των 11 βόλων η καθεμιά και θα περισσέψουν 7 βόλοι. Άρα D.

ΕΡΩΤΗΣΗ 33

Σε δίκαιη βάση, ο επικεφαλής μιας εταιρείας ετοιμάζεται να διανείμει κέρδος S/24.960 μεταξύ των έξι υπαλλήλων του. Κατά τον χρόνο υπογραφής του διατάγματος όμως, αποφασίζουν τελικά να το πράξουν σε άμεση αναλογία με τους μισθούς τους και αντιστρόφως ανάλογα με τον αριθμό των απουσιών από τον χώρο εργασίας κατά τους τελευταίους έξι μήνες. Οι μισθοί των έξι εργαζομένων είναι S/2200, S/2700, S/2400, S/2800, S/3300 και S/3600. Επιπλέον, ο αριθμός των απουσιών κατά τη διάρκεια των τελευταίων έξι μηνών είναι 4, 3, 2, 5, 6 και 9 ημέρες, αντίστοιχα. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του ποσού που θα προέκυπτε από τη δίκαιη διανομή και του μικρότερου ποσού που διανεμήθηκε;

A) S/1520 B) S/2120 C) S/1980 D) S/1840 E) S/1760

Λύση

Αν γινόταν ισοκατανομή ο κάθε υπάλληλος θα έπαιρνε $\boldsymbol{S/24.960{:}6 = S/4.160}$.

Αν$\boldsymbol{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5}$ ***και*** $\boldsymbol{U_6}$ είναι τα ποσά που πήραν τελικά οι 6 υπάλληλοι αντίστοιχα τότε έχω

$$\boldsymbol{\frac{U_1 \times 4}{2200} = \frac{U_2 \times 3}{2700} = \frac{U_3 \times 2}{2400} = \frac{U_4 \times 5}{2800} = \frac{U_5 \times 6}{3300} = \frac{U_6 \times 9}{3600} \Rightarrow \frac{U_1}{550} = \frac{U_2}{900} = \frac{U_3}{1200} = \frac{U_4}{560} = \frac{U_5}{550} = \frac{U_6}{400}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6}{550 + 900 + 1200 + 560 + 550 + 400} = \frac{24960}{4160} = 6}$$

Το πιο μικρό ποσό ήταν το $\boldsymbol{U_6 = 6 \times 400 = 2400}$. Άρα η ζητούμενη διαφορά είναι ίση με $\boldsymbol{S/4.160 - S/2,400 = S/1760}$. Άρα E.

ΕΡΩΤΗΣΗ 34

Ο Jaime προσλαμβάνει για τις υπηρεσίες του τον Marco για ορισμένο αριθμό ημερών. Αυτή τη στιγμή, ο Marco πρέπει να μεταμοσχεύσει έναν ορισμένο αριθμό μηλιών με τον ακόλουθο τρόπο: την πρώτη ημέρα πρέπει να μεταμοσχεύσει 3 φυτά και για αυτό το έργο πρέπει να λάβει 5 Sol. Στη συνέχεια, από τη δεύτερη ημέρα, πρέπει να εμβολιάσει 4 περισσότερα φυτά από την προηγούμενη ημέρα και πρέπει να λάβει 8 Sol περισσότερες από την πληρωμή της προηγούμενης ημέρας. Αν ο Jaime του πλήρωσε 915 Sol για όλα τα εμβολιασμένα φυτά, πόσα φυτά μπόλιασε ο Marco;

(A) 461 (B) 435 (C) 465 (D) 469 (E) 495

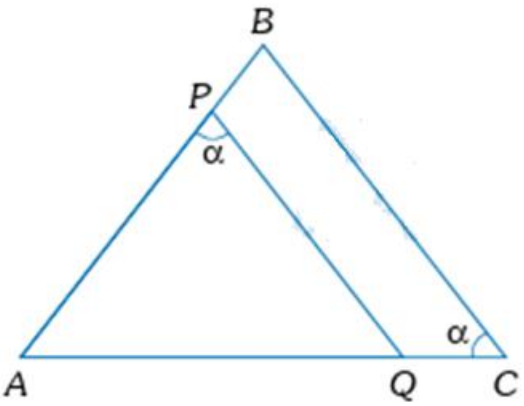
Λύση

Έστω ν ο αριθμός των ημερών που δούλεψε ο Marco, τότε την κ-οστή μέρα πληρώθηκε $\boldsymbol{\alpha_\kappa = 5 + 8(\kappa-1), \kappa \geq 1}$. Άρα συνολικά πληρώθηκε $\boldsymbol{S_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}\nu = \frac{(5+5+8(\kappa-1))}{2}\nu = \big(5+4(\nu-1)\big)\nu = (4\nu+1)\nu \Rightarrow 4\nu^2+\nu-915 = 0 \Rightarrow (\nu-15)(4\nu+61) = 0 \overset{\nu>0}{\Longrightarrow} \nu = 15}$ μέρες.

Την κ-οστή μέρα φύτεψε $\boldsymbol{\varphi_\kappa = 3+4(\kappa-1), \kappa \geq 1}$. Άρα στις 15 μέρες φύτεψε $\boldsymbol{S_{15} = \frac{(\varphi_1+\varphi_{15})}{2}15 = \frac{(3+3+4(15-1))}{2}15 = \big(3+2(14)\big)15 = 31 \cdot 15 = 465}$ φυτά.

**Γεωμετρία**

ΕΡΩΤΗΣΗ 35



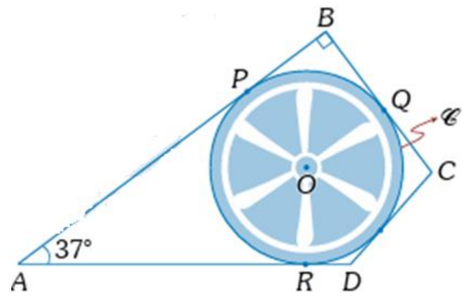

Στο σχήμα, το τρίγωνο ABC αντιπροσωπεύει μια γεωργική γη χωρισμένη με το σύνορο PQ έτσι, ώστε η περιοχή PBCQ να προορίζεται για την καλλιέργεια αραβοσίτου και η τριγωνική περιοχή $\boldsymbol{APQ}$ για την καλλιέργεια γεωμήλων. Εάν $\boldsymbol{5PQ = 4BC}$ και η έκταση της περιοχής για φύτευση αραβοσίτου είναι 900 m², βρείτε την περιοχή της περιοχής για την καλλιέργεια πατάτας.

A) 1600 m² B) 1500 m² C) 1800 m² D) 1700 m² E) 1400 m²

Λύση

Έχω $\boldsymbol{5PQ = 4BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{4}{5} = \lambda}$. Τα τρίγωνα $\boldsymbol{ABC \approx APQ \Rightarrow \frac{(APQ)}{(ABC)} = \lambda^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{(APQ)}{(ABC)-(APQ)} = \frac{16}{25-16} \Rightarrow \frac{(APQ)}{(PBCQ)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{(APQ)}{900} = \frac{16}{9} \Rightarrow (APQ) = 1600m^2}$. Άρα A

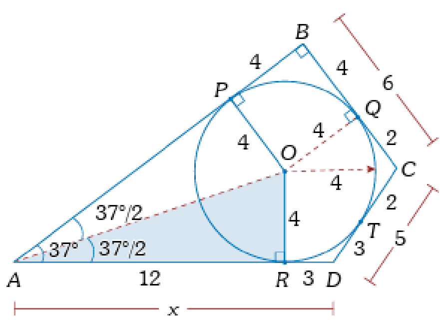
ΕΡΩΤΗΣΗ 36




Το σχήμα δείχνει την εγκατάσταση ενός βιομηχανικού συστήματος εξαερισμού, το τετράπλευρο ABCD περιγράφει τον κύκλο C (με κέντρο O) και διέρχεται από τα σημεία P, Q και R, τα οποία είναι σημεία εφαπτομένης. Αν $\boldsymbol{BC = 6\ dm, CD = 5\ dm}$, και η ακτίνα του κύκλου C είναι $\boldsymbol{4\ dm}$, βρείτε το AD.

A) $\boldsymbol{14\ dm}$ B) $\boldsymbol{15\ dm}$ C) $\boldsymbol{16\ dm}$ D) $\boldsymbol{15,5\ dm}$ E) $\boldsymbol{14,5\ dm}$

Λύση



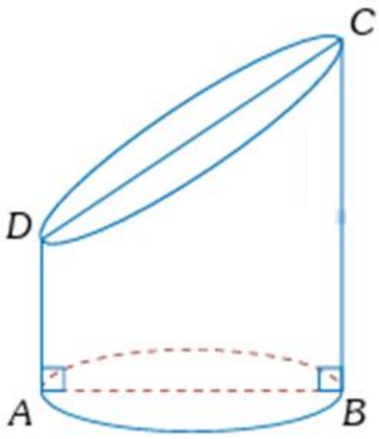

Έχω εύκολα ότι το POBQ είναι τετράγωνο, άρα $\boldsymbol{BP = BQ = R = 4}$

Άρα $\boldsymbol{CT = CQ = 2}$ και $\boldsymbol{DR = DT = 3}$.

Το τμήμα AO διχοτομεί την γωνία 37° , οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο AOR έχει οξεία γωνία την $\boldsymbol{\frac{37°}{2}}$ με χαρακτηριστική εφαπτομένη ίση με $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$. Άρα $\boldsymbol{tan\left(\frac{37°}{2}\right) = \frac{OR}{AR} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{AR} \Rightarrow AR = 12}$. Άρα $\boldsymbol{AD = 12+3 = 15}$. Άρα B

M-N=3-2, N-Q=1-0 και η ομάδα Q έχει γκολ 3-3, άτοπο.ΕΡΩΤΗΣΗ 37

Στο σχήμα, μπορούμε να δούμε έναν κορμό δέντρου, κομμένο σαν έναν κορμό ορθού κυλίνδρου. Εάν η ελλειπτική βάση με τον κύριο άξονα DC σχηματίζει διεδρική γωνία 37° με την κυκλική βάση και τα μήκη των μέγιστων και ελάχιστων γεννητριών είναι $\boldsymbol{BC = 5\ dm}$ και $\boldsymbol{AD = 2\ dm}$, αντίστοιχα, βρείτε τον όγκο του κορμού του δέντρου.

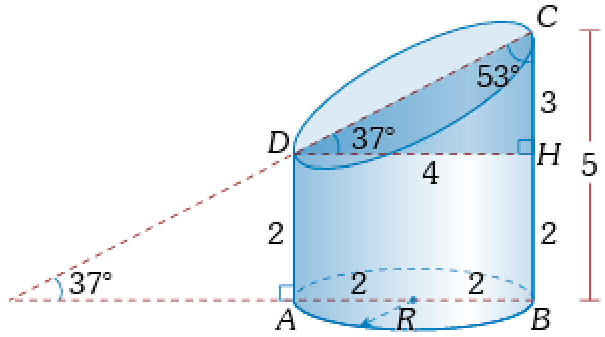



A) 15π dm³ B) 16π dm³ C) 12π dm³ D) 14π dm³ E) 10π dm³

Λύση

Έχω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ότι το ορθογώνιο τρίγωνο DCH έχει οξεία γωνία 37° άρα έχει την χαρακτηριστική αναλογία πλευρών 3-4-5. Άρα $\boldsymbol{\frac{CH}{DH} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC-AD}{DH} = \frac{3}{4} \Rightarrow DH = 4 \Rightarrow R = 2, DC = 5}$.

Ο όγκος του κομμένου κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{V = \pi R^2 \frac{(DA+BC)}{2} = \pi 2^2 \frac{(2+5)}{2} = 14\pi}$ dm³. Άρα D




**Άλγεβρα**

ΕΡΩΤΗΣΗ 38

Η ηλικία που θα είμαι σε τρία χρόνια είναι μικρότερη από το διπλάσιο της ηλικίας που ήμουν πριν από έξι χρόνια. Εάν δεν είμαι ακόμη είκοσι ετών και η αριθμητική τιμή της τρέχουσας ηλικίας μου αντιπροσωπεύεται από έναν ακέραιο αριθμό, καθορίστε την ελάχιστη ηλικία, σε έτη, που θα μπορούσα να είμαι.

A) 18 B) 17 C) 16 D) 19 E) 15

Λύση

Αν $\boldsymbol{x}$ η ηλικία μου θα έχω ότι $\boldsymbol{x + 3 < 2(x - 6) \wedge x < 20 \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 3 < 2x - 12 \wedge x < 20 \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow 15 < x < 20 \wedge x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in 16, 17, 18, 19}$. Άρα η ελάχιστη ηλικία μου είναι 16 ετών. Άρα C

ΕΡΩΤΗΣΗ 39

Η Monica, η Norma και η Paola πηγαίνουν στον ίδιο πάγκο λαχανικών σε μια αγορά για να αγοράσουν πατάτες και κρεμμύδια, σύμφωνα με τις πληροφορίες που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

| | Πατάτες(kg) | Κρεμμύδια(kg) |
|---|---|---|
| Monica | 3 | 2 |
| Norma | 4 | 15 |
| Paola | 3 | 7 |

Εάν η Monica και η Norma πλήρωσαν 13,80 και 19,10 Sol για την αγορά και των δύο προϊόντων, αντίστοιχα, καθορίστε πόσες Sol πλήρωσε συνολικά η Paola.

A) 62,70 B) 53,90 C) 59,50 D) 61,60 E) 64,80

Λύση

Έστω x Sol το κόστος ενός κιλού πατάτας και y Sol το κόστος ενός κιλού κρεμμυδιών. Τότε έχω $\begin{cases}\boldsymbol{3x+2y=13,8}\\ \boldsymbol{4x+3y=19,1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{9x+6y=41,4}\\ \boldsymbol{-8x-6y=-38,2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=3,2}\\ \boldsymbol{-8(3,2)-6y=-38,2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=3,2}\\ \boldsymbol{38,2-25,6=6y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=3,2}\\ \boldsymbol{y=2,1}\end{cases}$

Άρα η Paola πλήρωσε $\boldsymbol{15x+7y=15(3,2)+7(2,1)=62,70Sol}$. Άρα A.

ΕΡΩΤΗΣΗ 40

Ο αριθμός των μονάδων ενός αντικειμένου που οι κατασκευαστές είναι πρόθυμοι να προσφέρουν και ο αριθμός των μονάδων αυτού του αντικειμένου που οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να αγοράσουν, όταν η τιμή του αντικειμένου είναι p Sol, δίνονται, αντίστοιχα, από $\boldsymbol{q=p^2+5p-100}$ και $\boldsymbol{q=350-2p}$. Προσδιορίστε τον αριθμό των μονάδων που οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να αγοράσουν όταν αυτή η ποσότητα συμπίπτει με εκείνη που προσφέρουν οι κατασκευαστές.

(A) 345 (B) 314 (C) 414 (D) 425 (E) 324

Λύση

Αφού προσφορά = ζήτηση έχω $\boldsymbol{p^2+5p-100=350-2p \Rightarrow p^2+7p-450=0 \Rightarrow (p+25)(p-18)=0 \overset{p>0}{\Longrightarrow} p=18}$. Άρα ο αριθμός των μονάδων που οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να αγοράσουν είναι $\boldsymbol{350-2p=350-2\cdot 18=314}$. Άρα B

**Τριγωνομετρία**

ΕΡΩΤΗΣΗ 41

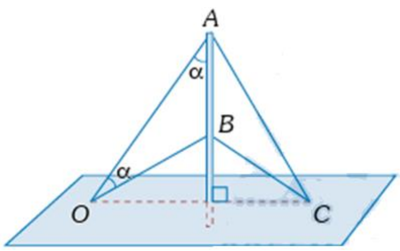
Ένας ποδοσφαιριστής περνάει πάσα στον συμπαίκτη του που βρίσκεται 25 μέτρα από τη θέση του. Όταν περνάει, η μπάλα δημιουργεί μια γωνία ανύψωσης θ° με την οριζόντια. Εάν η οριζόντια απόσταση που διανύει η μπάλα καθορίζεται από την έκφραση $\boldsymbol{d=50\,sin\left(\frac{4}{5}\theta^\circ\right)}$ μέτρα, υπολογίστε αυτή τη γωνία ανύψωσης.

A) 45° B) 36,5° C) 30° D) 37,5° E) 53,5°

Λύση

Έχω $\boldsymbol{25=50\,sin\left(\frac{4}{5}\theta^\circ\right) \Rightarrow sin\left(\frac{4}{5}\theta^\circ\right)=\frac{1}{2}=sin(30^\circ) \Rightarrow \frac{4}{5}\theta^\circ=30^\circ \Rightarrow \theta^\circ=37,5^\circ}$. Άρα D.

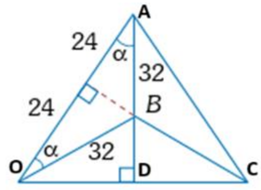
ΕΡΩΤΗΣΗ 42




Το σχήμα δείχνει την εγκατάσταση μιας κεραίας ραδιοφώνου προσαρτημένης μέσω των καλωδίων OA, OB, AC και CB στα σταθερά σημεία O και C, που βρίσκονται στο έδαφος. Προσδιορίστε το μήκος της κεραίας ραδιοφώνου, γνωρίζοντας ότι 1,3 μέτρα του μήκους της είναι κάτω από την επιφάνεια και τα μήκη των καλωδίων OA και OB είναι ίσα με 48 και 32 μέτρα, αντίστοιχα.

A) 36,3 μ B) 38,3 μ C) 36,7 μ D) 37,7 μ E) 37,3 μ

Λύση




Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αφού φέρουμε το ύψος από το B στο τρίγωνο OAB, ότι $\boldsymbol{cosa=cos\,AOB=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}}$ και $\boldsymbol{cosa=cos\,OAB=\frac{AD}{OA} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{AD}{48} \Rightarrow AD=36}$. Άρα η κεραία έχει μήκος $\boldsymbol{36+1,3=37,3\mu}$. Άρα E

**Ανθρωπιστικές και νομικές και κοινωνικές επιστήμες**

**Area E**

Οι ερωτήσεις 16-32 είναι οι ερωτήσεις 16-32 της area D

Οι ερωτήσεις 33,34 είναι οι ερωτήσεις 35-36 της area D

Οι ερωτήσεις 35,36 είναι οι ερωτήσεις 38-39 της area D

**[Πηγές]**


Περού - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)
https://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_Peru
http://www.elumbreras.com.pe/admision-uni-2023-2
https://www.trilce.edu.pe/academia
https://www.ucss.edu.pe/admision/modalidades-de-ingreso/examen-de-admision/temario-del-examen-de-admision/
https://www.formate.pe/admision-ucss-examen-universidad-catolica-sedes-sapientiae-56.html#que-carreras-profesionales-ofrece-universidad-catolica-sedes-sapientiae-ucss-especialidades-puedo-postular-eb65aaptjmjlon22jgz
https://elcomercio.pe/respuestas/estudios-carreras/examen-de-admision-san-marcos-2024-ii-a-que-hora-inicia-quienes-rinden-la-prueba-y-otros-detalles-tdpe-noticia-2/
https://www.perueducation.info/admission-requirements/admission-requirements-for-higher-education.html
https://paginaeducativa.com/geometria/proporcionalidad-y-semejanza/
https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/perigrafiki08.pdf
https://www.cuemath.com/data/mode/