[Ελβετία]
Η Ελβετία (επίσημη ονομασία: Ελβετική Συνομοσπονδία / γερμανικά: Schweizerische Eidgenossenschaft, γαλλικά: Confédération suisse, ιταλικά: Confederazione Svizzera, ρομανικά: Confederaziun svizra, λατινικά: Confoederatio Helvetica) είναι χώρα της δυτικοκεντρικής Ευρώπης. Έχει έκταση 41.285 τ.χλμ. και πληθυσμό 8.902.308 κατοίκους σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για τον Ιούνιο του 2023.
Αποτελείται από 26 καντόνια και ημικαντόνια. Πρωτεύουσα της είναι η Βέρνη ενώ η μεγαλύτερη πόλη η Ζυρίχη. Άλλα σημαντικά αστικά κέντρα είναι η Βασιλεία, η Γενεύη, η Λωζάνη και το Βίντερτουρ. Νόμισμα της χώρας είναι το ελβετικό Φράγκο. Έχει υψηλό βιοτικό επίπεδο και ανεπτυγμένο εμπόριο, βιομηχανία και τουρισμό.

[Εκπαιδευτικό Σύστημα Ελβετίας]
Η κατώτερη εκπαίδευση είναι υποχρεωτική και δίνεται δωρεάν σ' όλα τα καντόνια. Το επόμενο στάδιο, της μέσης, χωρίζεται στην επαγγελματική (τεχνικές σχολές) και στην ακαδημαϊκή (Λύκεια) που οδηγεί στα πανεπιστήμια και στα πολυτεχνεία. Σε σύγκριση με τις άλλες χώρες της Ευρώπης η Ελβετία έχει τα περισσότερα πανεπιστήμια και πολυτεχνεία, ανάλογα φυσικά με το μικρό πληθυσμό της χώρας. Περίφημο είναι το πολυτεχνείο της Ζυρίχης, καθώς και η Οικονομική Σχολή της Λωζάνης. Στα ελβετικά πανεπιστήμια φοιτούν και χιλιάδες ξένοι σπουδαστές που πηγαίνουν κυρίως για μεταπτυχιακές σπουδές, λόγω του υψηλού επιστημονικού επιπέδου που παρέχουν αυτά τα πανεπιστήμια.

Μέχρι και την έκτη Δημοτικού τα παιδιά ανεξαρτήτως πνευματικού επιπέδου είναι στην ίδια τάξη. Μετά το Γυμνάσιο χωρίζεται σε τέσσερις κατηγορίες που λέγονται: Γυμνάσιο, Ζεκ. 1 (συντόμευση από το ζεκουντάρ), Ζεκ. 2 και Ζεκ.3. Από αυτές τις τέσσερις βαθμίδες μόνο από τη μία μπορεί κανείς να σπουδάσει και αυτή είναι το Γυμνάσιο. Το Γυμνάσιο τελειώνει μόνο ένας στους πέντε μαθητές. Για να εισέλθει κανείς στο Γυμνάσιο, πρέπει να δώσει εξετάσεις και εάν τις περάσει δεν θα ξαναχρειαστεί για να πάει στο Πανεπιστήμιο. Η άλλη περίπτωση είναι να τον προτείνει ο καθηγητής του από τη Ζεκ. 3. Εξαιρούνται η ιατρική και η Νομική Σχολή. Όταν κάποιος περνάει τις εξετάσεις του γυμνασίου περνάει από μία δοκιμαστική φάση που διαρκεί μέχρι έξι μήνες. Στη Ζεκ πάει κανείς και δεν τελειώνει πανεπιστήμιο, αλλά μία σχολή σαν τα ελληνικά ΕΠΑΛ, όπου από εκεί μπορεί να γίνει κανείς κομμωτής, ξυλουργός κλ.π..

Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ελβετία δεν είναι το ίδιο μεταξύ των καντονιών με αποτέλεσμα να είναι εξαιρετικά δύσκολο να γραφτεί ένας ενιαίος οδηγός. Για παράδειγμα, στη Γαλλόφωνη Ελβετία οι όροι Gymnase, Collège, Lyceé μπορεί να σημαίνουν ακριβώς την ίδια σχολική βαθμίδα ανάλογα με το καντόνι! Επειδή ακριβώς τα Καντόνια για άλλη μια φορά είναι υπεύθυνα για τα σχολεία οπότε το κάθε καντόνι έχει και τους δικούς του “νόμους” και διαδικασίες πάνω στη μόρφωση, οπότε υπάρχουν πολλές διαφοροποιήσεις από περιοχή σε περιοχή.
Το Εκπαιδευτικό Σύστημα της Ελβετίας είναι κάτι αρκετά διαφοροποιημένο από τα συνηθισμένα. Ίσως και γι’ αυτό ακριβώς το λόγο η Ελβετία να παραμένει στις χώρες με μικρό ποσοστό ανεργίας, καθώς στοχεύει επί της ουσίας. Η αλήθεια είναι ότι τα δημόσια σχολεία προσφέρουν μόρφωση υψηλού επιπέδου.
Το Ελβετικό εκπαιδευτικό σύστημα θεωρείται από τα καλύτερα και δίνεται ιδιαίτερη βάση στη μόρφωση των παιδιών από νεαρή ηλικία. Συνήθως η πλειοψηφία πηγαίνει σε δημόσια σχολεία, καθώς τα ιδιωτικά έχουν αρκετά τσιμπημένες τιμές και πέρα από αυτό σε μερικές περιπτώσεις θεωρούνται ότι πηγαίνουν μαθητές που δεν τα “κατάφεραν” στο δημόσιο σχολείο.
Όσον αφορά την ιδιωτική πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι ιδιαίτερα αναπτυγμένη για το μέγεθος της χώρας με πάνω από 260 ιδιωτικά σχολεία. Τα περισσότερα από αυτά προσφέρουν πολλά διαφορετικά προγράμματα σπουδών και σε διάφορες γλώσσες. Κάποια από αυτά είναι μικρά σχολεία στα βουνά, οικοτροφεία των 400 μαθητών και κάποια άλλα μεγέθους 2500 μαθητών. Κατά κανόνα απευθύνονται σε εύπορους ή σε εργαζομένους πολυεθνικών και διεθνών οργανισμών.
Οι ιδιωτικές επαγγελματικές σχολές καθώς και τα ιδιωτικά πανεπιστήμια ποικίλουν σε ποιότητα και σε επαγγελματική αποκατάσταση. Υπάρχουν σχολές όπως η περίφημη σχολή τουριστικών επαγγελμάτων της Λοζάνης για την οποία μπορεί να χρειαστούν 130,000 CHF για δίδακτρα, εξασφαλίζουν όμως άμεση

επαγγελματική αποκατάσταση με απόσβεση του κόστους σπουδών μέσα σε 2 χρόνια! Αυτονόητο πως και σε αυτές τις ιδιωτικές σχολές οι απαιτήσεις για την εισαγωγή καθώς και η φοίτηση είναι εξόχως απαιτητικές.

[Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στην Ελβετία]
Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι υποχρεωτική στην Ελβετία και δωρεάν και περιλαμβάνει 8 έτη: τις 2 τάξεις του νηπιαγωγείου και το δημοτικό. Συνήθως αναφέρεται ως πρώτος Κύκλος ανάλογα σε ποιο κομμάτι της Ελβετίας βρίσκεστε.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση Ελβετίας]
Το αντίστοιχο του ελληνικού γυμνασίου. Ανάλογα με το καντόνι μπορεί να υπάρχουν μέχρι και 3 διαφορετικού είδους γυμνάσια με διαφορετικό ακαδημαϊκό προφίλ και επίπεδο δυσκολίας. Οι σπουδές είναι αρκετά απαιτητικές, με διαρκείς αξιολογήσεις, πολύ δουλειά στο σπίτι ειδικά για τα γυμνάσια υψηλού επίπεδου.

Ταυτόχρονα γίνεται μια σοβαρή προσπάθεια επαγγελματικού προσανατολισμού. Με την ολοκλήρωση των σπουδών, στην ηλικία των 15 τελειώνει και η υποχρεωτική εκπαίδευση. Ανάλογα με τις επιδόσεις το 75% των μαθητών θα ακολουθήσει τεχνικές ή επαγγελματικές δημόσιες ή ιδιωτικές σχολές κλπ. Το υπόλοιπο 25% θα συνεχίσει για το ανώτερο απολυτήριο Λυκείου (το ποσοστό αυτό διαφέρει από καντόνι σε καντόνι και κυμαίνεται από 10-45%).

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ελβετία ξεκινάει αμέσως μετά το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, είναι υποχρεωτική και χωρίζεται σε 2 στάδια: την ανώτερη δευτεροβάθμια και την κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Όπως αναφέρθηκε και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στην Ελβετία, τα Καντόνια είναι υπεύθυνα για τα σχολεία και το εκπαιδευτικό σύστημα γενικότερα και γι' αυτό ακριβώς το λόγο υπάρχουν πολλές διαφοροποιήσεις από καντόνι σε καντόνι και σε ποιο τμήμα της Ελβετίας βρίσκεστε (Γερμανόφωνο, Γαλλόφωνο, Ιταλόφωνο κλπ).

Για να τα δούμε λίγο πιο αναλυτικά:
Συνήθως η εισαγωγή των παιδιών στην κατώτερη δευτεροβάθμια ξεκινάει από την ηλικία των 12 ετών (11-12 ετών) και διαρκεί μέχρι την ηλικία των 15 ετών, ενώ στη συνέχεια αποφασίζεται πως θα προχωρήσει στον τομέα της εκπαίδευσης και αν συνεχίσει στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Συνολικά διαρκεί 4 έτη.

Το σχολείο κατώτερης δευτεροβάθμιας μπορείτε να το συναντήσετε ως Kantonsschule, ή όπως ονομάζεται και στην Ελλάδα, Gymnasium δηλαδή Γυμνάσιο.

Συνήθως η πλειοψηφία των Καντονιών θέτει τεστ εισαγωγής στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ανάλογα με τις επιδόσεις του μαθητή κατατάσσεται ανάλογα και χωρίζεται σε τμήματα με παιδιά ανάλογων επιδόσεων.

[Επιλογή Ακαδημαϊκής ή Επαγγελματικής Κατάρτισης]
Τα παιδιά στην ηλικία των 12 ετών θα πρέπει να αποφασίσουν το είδος της Καριέρας που θα ακολουθήσουν και ανάλογα θα πρέπει να επιλέξουν για το είδος της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης που θα ακολουθηθεί.

Για παιδιά που ενδιαφέρονται να ακολουθήσουν Επαγγελματική Σταδιοδρομία θα πρέπει να ακολουθήσουν κάτι σαν Επαγγελματικό Λύκειο που έχουμε στην Ελλάδα και μόλις τελειώσουν τη φοίτηση θα πάρουν και το αντίστοιχο δίπλωμα Επαγγελματικής Κατάρτισης.

Για παιδιά που θέλουν να πάνε ακόμα πιο υψηλά ακαδημαϊκά και να μπουν σε Πανεπιστήμιο, θα πρέπει να φοιτήσουν σε Kantonsschule/Gymnasium και να δώσουν τελικές εξετάσεις για να περάσουν το Matura, που είναι απαραίτητο για την εισαγωγή σε Πανεπιστήμιο.

[Οι εξετάσεις απολυτηρίου Matura]
Μέσω των εξετάσεων, οι μαθητές αποδεικνύουν ότι έχουν εκπληρώσει τους μαθησιακούς στόχους που αναφέρονται στο πρόγραμμα σπουδών, τη γενική τους εκπαίδευση και τον τίτλο εισαγωγής τους στο πανεπιστήμιο.
[Χρόνος διεξαγωγής των εξετάσεων]
Οι εξετάσεις πραγματοποιούνται στο τέλος της σχολικής περιόδου.
Η προετοιμασία και παρουσίαση των διατριβών Matura πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων ετών εκπαίδευσης.
[Εισαγωγή στις εξετάσεις]
Γίνονται δεκτοί μαθητές που έχουν ολοκληρώσει κανονικά τα δύο τελευταία έτη σε απολυτήριο σχολείο και το τελευταίο έτος στο εξεταστικό γυμνάσιο.
[Διατριβή Matura]
Κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων ετών, κάθε μαθητής, μόνος ή σε ομάδα υπό την επίβλεψη ενός εκπαιδευτικού, γράφει μια ανεξάρτητη, γραπτή διατριβή Matura και την παρουσιάζει προφορικά.
Ο στόχος της διατριβής Matura είναι να επιτρέψει στους μαθητές να αποκτήσουν πρόσβαση σε νέες γνώσεις, να αποκτήσουν γνώσεις σχετικά με τη μεθοδολογία της επιστημονικής ή καλλιτεχνικής εργασίας και να πραγματοποιήσουν με επιτυχία ένα μεγαλύτερο έργο μόνοι ή σε μια ομάδα.
Τα μαθήματα απολυτηρίου περιλαμβάνουν:
a. τα βασικά μαθήματα·
b. το μείζον μάθημα·
c. ένα συμπληρωματικό μάθημα.
Τα βασικά μαθήματα είναι:
1. Γερμανικά
2. Γαλλικά
3. Αγγλικά
4. Μαθηματικά
5. Βιολογία
6. Χημεία
7. Φυσική
8. Ιστορία
9. Γεωγραφία
10. Οπτικός σχεδιασμός ή μουσική.

Ο κορμός ενός ελβετικού απολυτηρίου είναι μια ευρεία γενική εκπαίδευση, δηλαδή η σύνθεση των μαθημάτων είναι βασικά η ίδια για όλους. Ωστόσο, επιλέγοντας ένα προφίλ, όλοι οι μαθητές ορίζουν μια θεματική εστίαση που αντιστοιχεί στις κλίσεις τους. Όταν επιλέγετε ένα προφίλ, είναι "μόνο" για το κύριο μάθημα.
Το κύριο μάθημα είναι ένα από τα ακόλουθα:
1. Προφίλ A: Εφαρμογές των μαθηματικών και της φυσικής.
2. Προφίλ B: Βιολογία και Χημεία.
3. Προφίλ G: Ελληνικά
4. Προφίλ I: Ιταλικά
5. Προφίλ L: Λατινικά
6. Προφίλ M: Μουσική
7. Προφίλ R: Ρωσικά
8. Προφίλ S: Ισπανικά
9. Προφίλ W: Οικονομικά και Δίκαιο
10. Προφίλ Z: Οπτικός σχεδιασμός.

Το συμπληρωματικό μάθημα πρέπει να επιλεγεί από τα ακόλουθα μαθήματα:

1. Φυσική (όχι για το προφίλ A).
2. Χημεία (όχι για το προφίλ B).
3. Βιολογία (όχι για το προφίλ B).
4. Εφαρμογές των μαθηματικών (όχι για το προφίλ A).
5. Πληροφορική
6. Ιστορία
7. Γεωγραφία
8. Φιλοσοφία
9. Θρησκευτικό δόγμα.
10. Οικονομικά και νομικά (όχι για το προφίλ W).
11. Παιδαγωγική / ψυχολογία.
12. Καλλιτεχνικός σχεδιασμός (όχι για προφίλ M, Z).
13. Μουσική (όχι για τα προφίλ M, Z).
14. Αθλητισμός (όχι για τα προφίλ M, Z).

[Θέματα εξετάσεων, είδος εξετάσεων]

Τα μαθήματα των εξετάσεων είναι τα γερμανικά, τα γαλλικά, τα μαθηματικά και το κύριο μάθημα καθώς και το συμπληρωματικό μάθημα ή τα αγγλικά, κατ' επιλογή του φοιτητή.

Όλα τα θέματα εξετάζονται τόσο γραπτά όσο και προφορικά.

Από τα κύρια θέματα των προφίλ A και B, ένα υπο-θέμα εξετάζεται γραπτώς, το άλλο προφορικά. *

[Διάρκεια εξετάσεων]

Οι γραπτές εξετάσεις διαρκούν 4 ώρες.

Οι προφορικές εξετάσεις διαρκούν 15 λεπτά.

[Εναρμόνιση των εξετάσεων]

Οι εξετάσεις λαμβάνουν ουσιαστικά υπόψη τους μαθησιακούς στόχους των τελευταίων 2 ετών διδασκαλίας σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών των καντονιών. Οι γραπτές εξετάσεις στα βασικά μαθήματα και στα μαθήματα ειδικότητας είναι πανομοιότυπες για τα επιμέρους γυμνάσια.

[Ρυθμιστικό πλαίσιο για τις εξετάσεις απολυτηρίου]

Το παρόν ρυθμιστικό πλαίσιο έχει αναπτυχθεί από τα συμβούλια των καντονιών των γυμνασίων της περιοχής της Βασιλείας. Αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία τα μαθητικά συμβούλια των επιμέρους γυμνασίων σχεδιάζουν τις γραπτές εξετάσεις απολυτηρίου. Ενδεικτικά θέματα στο Γυμνάσιο Liestal: Εξετάσεις Matura (gymliestal.ch)

Γραπτά θέματα εξετάσεων

Τα θέματα και οι ασκήσεις των γραπτών εξετάσεων εκπονούνται από τα αντίστοιχα εκπαιδευτικά συμβούλια των γυμνασίων των καντονιών σε κάθε μάθημα γραπτής εξέτασης. Κατά κανόνα, δημιουργείται και διεξάγεται μια πανομοιότυπη γραπτή εξέταση για κάθε σχολείο και θέμα.

Στην περίπτωση της διατριβής Matura, η χρήση μη εξουσιοδοτημένων βοηθημάτων καθώς και οποιαδήποτε άλλη ανεντιμότητα, ιδίως λογοκλοπή, μπορεί να οδηγήσει σε μείωση του βαθμού που επιτεύχθηκε στη χαμηλότερη δυνατή βαθμολογία ή σε αποκλεισμό από τις εξετάσεις Matura.

[Μαθηματικά, βασικό μάθημα]

Οι ακόλουθες κατευθυντήριες γραμμές εγκρίθηκαν από το μαθητικό συμβούλιο μαθηματικών των καντονιών στις 31 Μαρτίου 2010 και εγκρίθηκε από την SLK στις 17 Μαρτίου 2010.

[Περιεχόμενο της εξέτασης (γνώσεις, δεξιότητες)]

Οι μαθητές μπορούν:

• Να εργαστούν και να λύσουν εργασίες από όλους τους σχετικούς τομείς των μαθηματικών του γυμνασίου.

• χρησιμοποιούν την τεχνική γλώσσα και τη γλώσσα τύπων καθώς και τις τεχνικές και τα εργαλεία υπολογισμού που έχουν μάθει σωστά και κατάλληλα.

[Δομή της εξέτασης]

Στοιχεία

• Η εξέταση αποτελείται από τουλάχιστον 5 εργασίες.

• Τα πεδία της ανάλυσης, της γεωμετρίας/διανυσματικής γεωμετρίας και της στοχαστικής λαμβάνονται υπόψη στην επιλογή των εργασιών.
• Οι εργασίες μπορούν να αποτελούνται από πολλές σύντομες εργασίες που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
• Η εξέταση περιλαμβάνει υποεργασίες με διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας
Στάθμιση & Κριτήρια
• Αξιολογούνται όλες οι εργασίες.
• Οι εργασίες σταθμίζονται περίπου εξίσου.
• Η εξέταση δείχνει τον αριθμό των βαθμών που μπορούν να επιτευχθούν ανά εργασία.
• Η βαθμολογική κλίμακα είναι γραμμική, με βαθμό 6 για το 80% έως 100% της μέγιστης δυνατής βαθμολογίας.
[Χρόνος]
Η γραπτή εξέταση διαρκεί 4 ώρες (240 λεπτά).
Βοηθήματα, αριθμομηχανές και φόρμουλες σύμφωνα με την εσωτερική συμφωνία του σχολείου.
[Περαιτέρω απαιτήσεις]
Η υλοποίηση και ο σχεδιασμός της προφορικής εξέτασης είναι ευθύνη του αντίστοιχου καθηγητή

Εφαρμογές των Μαθηματικών (κύριο μάθημα)
Επικεφαλής: Εκπαιδευτικός ΑΜ
Διάρκεια: 15 λεπτά
Προετοιμασία: Ο καθηγητής ΑΜ καθορίζει εάν η προφορική εξέταση θα διεξαχθεί με ή χωρίς χρόνο προετοιμασίας.
Απαιτήσεις: - Κατανόηση της θεωρίας που καλύπτεται - Εφαρμογή της θεωρίας σε συγκεκριμένα προβλήματα - Τεχνικά, γλωσσικά και τυπικά ορθή διατύπωση Βοηθήματα: Τα επιτρεπόμενα βοηθήματα καθορίζονται από τον δάσκαλο

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση στην Ελβετία]

Το μεγαλύτερο πανεπιστήμιο στην Ελβετία είναι το Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Ακολουθεί η Πολυτεχνική Σχολή της Ζυρίχης. Υπάρχουν 12 κρατικά πανεπιστήμια στη χώρα, εκ των οποίων τα 7 είναι κλασικά και τα 5 εξειδικευμένα.

Αν σκοπεύετε να σπουδάσετε οικονομικές επιστήμες, θα πρέπει να δώσετε προσοχή στα πανεπιστήμια του St. Gallen, νομικές ειδικότητες - στα πανεπιστήμια του Fribourg, της Λωζάνης και του Neuchatel, στις ακριβείς επιστήμες - στα πανεπιστήμια της Ζυρίχης, αλλά η φιλολογία διδάσκεται καλύτερα στη Γενεύη. Τα πανεπιστήμια που εκπαιδεύουν ειδικούς στον τομέα του διεθνούς τουρισμού και των ξενοδοχειακών επιχειρήσεων είναι επίσης δημοφιλή. Οι πιο δημοφιλείς ειδικότητες στην Ελβετία είναι οι ιατρικές.
Το ελβετικό σύστημα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης αντιπροσωπεύεται από τις ακόλουθες κατηγορίες εκπαιδευτικών ιδρυμάτων:

- Καντονιακά πανεπιστήμια - 10.
- Ομοσπονδιακά Ινστιτούτα Τεχνολογίας - 2.
- Πανεπιστήμια Εφαρμοσμένων Επιστημών - 8.
- Πανεπιστήμια εκπαίδευσης εκπαιδευτικών - 20.

Τα περισσότερα πανεπιστήμια είναι δημόσια, με εξαίρεση αρκετά ανεξάρτητα παιδαγωγικά πανεπιστήμια και ένα πανεπιστήμιο εφαρμοσμένων επιστημών. Επιπλέον, ένα δίκτυο ιδιωτικών εκπαιδευτικών ιδρυμάτων, ιδίως σχολών επιχειρήσεων, εκπροσωπείται καλά στην Ελβετία. Ωστόσο, πολλά από αυτά δεν έχουν κρατική διαπίστευση.
Η τριτοβάθμια εκπαίδευση στα δημόσια πανεπιστήμια της Ελβετίας πληρώνεται, συμπεριλαμβανομένων των πολιτών της χώρας. Ωστόσο, το κόστος μπορεί να θεωρηθεί συμβολικό: από 1000 έως 2000 CHF ετησίως. Αξιοσημείωτο είναι ότι τόσο για ντόπιους όσο και για ξένους φοιτητές η τιμή είναι σχεδόν η ίδια. Εξαίρεση αποτελεί το Πανεπιστήμιο της Ιταλικής Ελβετίας - 4000 CHF ετησίως και 8000 CHF ετησίως για αλλοδαπούς. Στα ιδιωτικά πανεπιστήμια βέβαια θα είναι πολύ πιο ακριβό.

[Πληροφορίες σχετικά με τις εισαγωγικές εξετάσεις ETH Zurich]
Η εξεταστέα ύλη στα επιμέρους μαθήματα ανταποκρίνεται στους εκπαιδευτικούς στόχους του Swiss Baccalaureate Recognition Ordinance της 15ης Φεβρουαρίου 1995, λαμβάνοντας υπόψη τις ειδικές ανάγκες του ETH.

Γνώση των βασικών μαθηματικών όρων και των θεμελιωδών σχέσεων μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων μεταξύ τους. Ικανότητα αναγνώρισης γενικών δομών σε μαθηματικά αντικείμενα και κατανόηση των λειτουργικών σχέσεων τους. Ικανότητα χρήσης μαθηματικών εργαλείων για την επίλυση εφαρμοζόμενων προβλημάτων. Αυτό περιλαμβάνει ιδίως την εφαρμογή μαθηματικών σκέψεων για επιλεγμένα προβλήματα βελτιστοποίησης και (χωρικά) γεωμετρικά ή στατιστικά προβλήματα.

Εξεταστέα ύλη

• Εξισώσεις

Βασικά στοιχεία της θεωρίας συνόλων. Γραμμικές εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων με το πολύ 3 αγνώστους. Τετραγωνικές εξισώσεις με έναν άγνωστο. Εκθετικές εξισώσεις.

• Συναρτήσεις και γραφήματα

Ιδιότητες στοιχειωδών συναρτήσεων (πολυωνυμική, λογαριθμική, εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις) και τα γραφήματα τους. Γραφήματα, ασύμπτωτες, συμμετρίες).
Πολλαπλασιασμός και διαίρεση πολυωνύμων.

• Τριγωνομετρία

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές ταυτότητες (αθροίσματος κ.λπ.). Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων. Υπολογισμοί σε ορθογώνια και γενικά τρίγωνα (νόμος ημιτόνων και νόμος των συνημιτόνων).

• Ακολουθίες και Σειρές

Έννοια ακολουθίας, αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι. Αθροίσματα των αντίστοιχων σειρών.
Πλήρης επαγωγή. Σύγκλιση ακολουθιών, όρια σειρών.

• Μιγαδικοί αριθμοί

Έννοια και αναπαραστάσεις μιγαδικών αριθμών (κανονική και πολική μορφή), πράξεις και εξισώσεις με μιγαδικούς αριθμούς.

• Παράγωγος, αντιπαράγωγος, ολοκλήρωμα

Έννοια της παραγώγου, κανόνες παραγώγισης. Μελέτη καμπύλης (ακρότατα, σημεία καμπής).
Αντιπαράγωγος και ορισμένο ολοκλήρωμα (μερική ολοκλήρωση, ολοκλήρωση με αντικατάσταση). Υπολογισμοί εμβαδού, όγκου και επιφάνειας απλών σωμάτων. Λύση προβλημάτων εύρεσης ακροτάτου με περιορισμούς

• Επίπεδη γεωμετρία

Οι θεμελιώδεις γεωμετρικοί τόποι της επίπεδης γεωμετρίας (συμπεριλαμβανομένων των μεσοκάθετων, των διχοτόμων γωνιών, των μεσοπαραλλήλων, του κύκλου του Θαλή, του κύκλου Fass, του κύκλου του Απολλώνιου κ.λπ.), καθώς και εφαρμογή στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων.

• Γεωμετρία του χώρου

Ανάπτυξη στερεομετρικών λύσεων με χρήση απλών γεωμετρικών τόπων.
Οποιαδήποτε υλοποίηση με διανυσματική γεωμετρία.

• Διανυσματική Γεωμετρία

Πραγματικοί διανυσματικοί χώροι με το πολύ 3 διαστάσεις, βαθμωτό και διανυσματικό γινόμενο, μικτά γινόμενα, όγκος. Παραμετρική αναπαράσταση και εξίσωση συντεταγμένων γεωμετρικών αντικειμένων συμπεριλαμβανομένων των κωνικών. Εφαρμογή στη λύση συγκεκριμένων εργασιών, ειδικά σε σχέση με τα θέματα που αναφέρονται στην «Γεωμετρία του χώρου».

• Συνδυαστική, υπολογισμός πιθανοτήτων, στατιστική

Βασικά στοιχεία της συνδυαστικής. Έννοιες τυχαίου πειράματος και πιθανότητας. Εξαρτώμενες, ανεξάρτητες και συμπληρωματικές μεταβλητές. Θεώρημα αθροίσματος και γινομένου, υπό όρους πιθανότητα. Υπολογισμός συγκεκριμένων πιθανοτήτων με τη μέθοδο του δέντρου συμβάντων. Βασικά στοιχεία στατιστικής, έννοια τυχαίων μεταβλητών, αναμενόμενη τιμή, τυπική απόκλιση. Διωνυμική και κανονική κατανομή.

Γραπτές εξετάσεις: Μέρος 1 Σύντομες ερωτήσεις: 1 ώρα (χωρίς βοηθήματα), Μέρος 2 Ερωτήσεις κειμένου (με βοηθήματα): 3 ώρες. Προφορική εξέταση: Μαθηματικά: 15 λεπτά. Επιτρεπόμενα βοηθήματα στο Μέρος II Λεκτικά προβλήματα της γραπτής εξέτασης: 1. Συλλογή τύπων "Τύποι, Πίνακες, Όρος: Μαθηματικά - Φυσική - Χημεία", εκδότης: DMK, DPK, DCK, Orell Füssli Verlag, Zurich, ISBN 978-3-280-04193-2 (επιτρέπονται παλαιότερες εκδόσεις) και Formulary "Formulae, Tables and Concepts. A Concise Handbook of Mathematics - Physics – Chemistry", εκδότης: DMK, DPK, DCK, Orell Füssli Verlag, Zurich, ISBN 978-3-280- 04084-3 Η συλλογή τύπων δεν πρέπει να περιέχει χειρόγραφες εγγραφές. Ωστόσο, επιτρέπεται η επισήμανση και η ευρετηρίαση (π.χ. αυτοκόλλητες σημειώσεις στην άκρη). 2. Αριθμομηχανές: επιτρέπονται τα ακόλουθα τρία μοντέλα. Οι αριθμομηχανές ελέγχονται στην αρχή της εισαγωγικής εξέτασης

1) Texas Instruments TI-30 eco RS

2) Casio FX-82 Solar
Wird nicht mehr produziert, kann aber weiterhin verwendet werden.

3) Casio FX-82 Solar II
Funktionen und Bedienung wie Casio FX-82 Solar, nur neues Gehäuse und neue Bezeichnung.

[FINAL EXAM IN MATHEMATICS OF MAY 13, 2022]

Gymnasium Muttenz profile A

Ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες:

• Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες.

• Πρόσθετη βοήθεια: Αγγλογερμανικό λεξικό

• Η διαδικασία επίλυσης όλων των προβλημάτων πρέπει να καταγράφεται με σαφήνεια και πληρότητα. Επιτρέπεται η χρήσης της αριθμομηχανής 1TI-nspire CX CAS . Η μνήμη της αριθμομηχανής πρέπει να καθαριστεί πριν από την εξέταση.

• Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

– Μέρος 1:

Επίλυση προβλημάτων 1 έως 4 μόνο με τη βοήθεια του μαθηματικού τυπολογίου (Adrian Wetzel. Formelsammlung Mathematik. 9th ed. 2021. ISBN: 978-3-9523907-1-9). Μόλις ολοκληρώσετε την επίλυση αυτού του μέρους, τοποθετήστε όλες τις αντίστοιχες σελίδες (συμπεριλαμβανομένων των φύλλων ασκήσεων) στο φάκελο που παρέχεται. Σφραγίστε το φάκελο και παραδώστε τον στον επόπτη. (Σημείωση: Μόνο οι σελίδες του σφραγισμένου φακέλου θα ληφθούν υπόψη για την αξιολόγηση του μέρους 1!)

- Μέρος 2:

Μόλις παραδώσετε το μέρος 1 σε σφραγισμένο φάκελο, θα λάβετε την αριθμομηχανή σας. Λύστε τα προβλήματα 5 έως 8 με τη βοήθεια της αριθμομηχανής σας και του μαθηματικού τυπολογίου.

• Ο τελικός βαθμός υπολογίζεται ως εξής:

Τελικός βαθμός = 5 · "βαθμοί που συγκεντρώθηκαν": 40 + 1 (rounded to half a mark)

Πρόβλημα	1	2	3	4	5	6	7	8	Σύνολο
Μέγιστη βαθμολογία	4.5	6	3.5	8	3.5	8	7	6.5	47
Βαθμοί που συγκεντρώθηκαν									

[Μέρος 1: Χωρίς αριθμομηχανή]

Τα προβλήματα 1 έως 4 πρέπει να λυθούν χωρίς την αριθμομηχανή. Η μόνη βοήθεια που επιτρέπεται σε αυτό το μέρος της εξέτασης είναι το μαθηματικό τυπολόγιο.

Πρόβλημα 1 (4.5P)

(α) Θεωρήστε τον αριθμό $\frac{3}{7+\mathrm{i}}$ και γράψτε τον σε κανονική μορφή. (1P)

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $\boldsymbol{z}$ με $\boldsymbol{z^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 P)

(γ) Θεωρήστε τον αριθμό $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}$ και γράψτε τον σε κανονική μορφή. (1.5P)

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $\frac{3}{7+\mathrm{i}} = \frac{3}{7+\mathrm{i}} \cdot \frac{7-\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}} = \frac{21-3\mathrm{i}}{50} = \frac{21}{50} - \frac{3}{50}\boldsymbol{i}$

(β) Έχουμε $\boldsymbol{z^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$

Άρα $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}$ ή $\mathbf{2}$

Άρα $\boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{12}\right)} = \cos\frac{\pi}{12} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{12} = \boxed{0,96593 - i0.25882}$

$\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{7\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{7\pi}{12} = \boxed{-0,25882 + i0.96593}$

$\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{15\pi}{12} + \boldsymbol{i}\sin\frac{15\pi}{12} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(γ) Έχουμε $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022} = \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{2022} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{2020\pi}{4}\right)}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(-505\pi)}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(-\pi)}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = (-\mathbf{1})(-\boldsymbol{i}) = \boxed{i}$

Πρόβλημα 2 (6P)

Ο Samus βρίσκεται σε ένα δωμάτιο στο $\boldsymbol{S} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Η κεκλιμένη οροφή αυτού του δωματίου είναι το επίπεδο $\boldsymbol{\Phi}$. Το επίπεδο $\boldsymbol{\Phi}$ περιέχει τα σημεία $\boldsymbol{A} = (\mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{7}), \boldsymbol{B} = (\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{9})$ και $\boldsymbol{C} = (\mathbf{8}, \mathbf{2}, \mathbf{7})$.

(α) Προσδιορίστε μια εξίσωση του επιπέδου $\boldsymbol{\Phi}$. (2.5 P)

Σημείωση: Εάν δεν μπορείτε να λύσετε το (a), θεωρήστε το επίπεδο με την εξίσωση

$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{x} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{y} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{z} - \mathbf{18} = \mathbf{0}$.

Τώρα υπάρχει ένας αντίπαλος στο $\boldsymbol{G} = (-\mathbf{1}, \mathbf{17}, \mathbf{13})$.

(β) Να δειχθεί ότι ο Samus και ο αντίπαλος βρίσκονται στην ίδια πλευρά του επιπέδου Φ. (1 P)

(γ) Ο Samus θέλει να αποτελειώσει τον εχθρό με το κανόνι λέιζερ του. Ωστόσο, δεδομένου ότι η άμεση ορατότητα προς τον αντίπαλο εμποδίζεται, πρέπει να στοχεύει σε ένα συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου $\boldsymbol{\Phi}$ έτσι ώστε η δέσμη λέιζερ να αντανακλάται εκεί με τέτοιο τρόπο ώστε ο αντίπαλος να χτυπηθεί από την ανακλώμενη δέσμη. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμής $\boldsymbol{g}$ στην οποία βρίσκεται η ανακλώμενη δέσμη φωτός. (2,5 P)

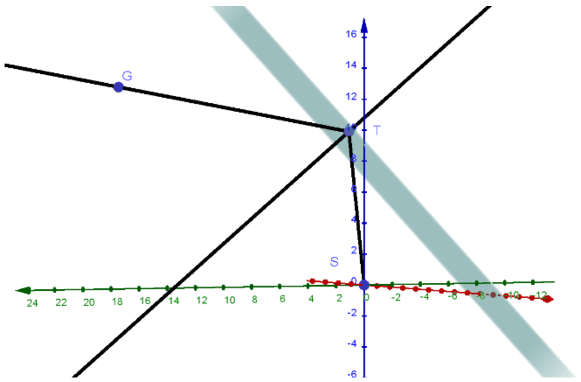
ΛΥΣΗ

(α) Η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου $\boldsymbol{\Phi}$ είναι: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_B & z_B & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$x\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 6 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -4x + 8y - 8z + 72 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 2y + 2z - 18 = 0}$

(β) Έχω $\boldsymbol{x_S} - \mathbf{2}\boldsymbol{y_S} + \mathbf{2}\boldsymbol{z_S} - \mathbf{18} = \mathbf{0} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{0} - \mathbf{18} = -\mathbf{18} < \mathbf{0}$ και $\boldsymbol{x_G} - \mathbf{2}\boldsymbol{y_G} + \mathbf{2}\boldsymbol{z_G} - \mathbf{18} = -\mathbf{1} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{17} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{13} - \mathbf{18} = -\mathbf{1} - \mathbf{34} + \mathbf{26} - \mathbf{18} = -\mathbf{27} < \mathbf{0}$ Άρα ο Samus και ο αντίπαλος βρίσκονται στην ίδια πλευρά του επιπέδου $\boldsymbol{\Phi}$

(γ) Έστω $\boldsymbol{T(x_T, y_T, z_T)}$ το σημείο του επιπέδου $\boldsymbol{\Phi}$ στο οποίο προσπίπτει η ακτίνα λέιζερ και $\vec{\boldsymbol{N}}$ το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $\boldsymbol{\Phi}$. Έστω $\vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{ST}}$ η προσπίπτουσα ακτίνα λέιζερ, άρα $\vec{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y_T} - \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z_T} - \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{y_T}, \boldsymbol{z_T})$



Έχω $\vec{\boldsymbol{N}} \perp \boldsymbol{\Phi}$ άρα $\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2})$ με $|\vec{\boldsymbol{N}}| = \sqrt{\boldsymbol{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \boldsymbol{3}$ και έστω $\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2})$

Έστω $\vec{\boldsymbol{R}}$ το ανακλώμενο διάνυσμα του $\vec{\boldsymbol{V}}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{\Phi}$. Έχω $\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{R}} = \overrightarrow{\boldsymbol{GT}}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{\boldsymbol{GT}} = (\boldsymbol{x_T} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{y_T} - \boldsymbol{17}, \boldsymbol{z_T} - \boldsymbol{13})$

Ισχύει ακόμα ότι $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{V}} - \boldsymbol{2}\pi\rho\beta_{\vec{n}}\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}} - \boldsymbol{2}(\vec{\boldsymbol{V}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{y_T}, \boldsymbol{z_T}) - \frac{2}{3}(\boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{2y_T} + \boldsymbol{2z_T})\frac{1}{3}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2})$. Αφού $\boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{2y_T} + \boldsymbol{2z_T} = \boldsymbol{18}$ έχουμε

$$\vec{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{y_T}, \boldsymbol{z_T}) - \frac{2}{3}18\frac{1}{3}(1, -2, 2) = (\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{y_T}, \boldsymbol{z_T}) - 4(1, -2, 2) = (\boldsymbol{x_T} - 4, \boldsymbol{y_T} + 2, \boldsymbol{z_T} - 8)$$

Άρα

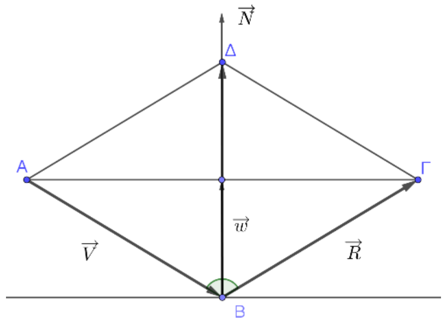
$$(k x_T - 4k, k y_T + 2k, k z_T - 8k) = (x_T + 1, y_T - 17, z_T - 13) \Rightarrow \left.\begin{matrix} k x_T - 4k = x_T + 1 \\ k y_T + 2k = y_T - 17 \\ k z_T - 8k = z_T - 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} (k-1)x_T = 4k + 1 \\ (k-1)y_T = -8k - 17 \\ (k-1)z_T = 8k - 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (k-1)x_T = 4k + 1 \\ (k-1)(-2)y_T = 16k + 34 \\ (k-1)2z_T = 16k - 26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (k-1)(x_T - 2y_T + 2z_T) = 36k + 9$$

$$\Rightarrow (k-1)18 = 36k + 9 \Rightarrow -27 = 18k \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

Άρα $x_T = \frac{4k+1}{k-1} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+1}{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{5}{-2.5} = 2, y_T = \frac{-8k-17}{k-1} = \frac{-8\left(-\frac{3}{2}\right)-17}{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{5}{-2.5} = 2, z_T = \frac{8k-13}{k-1} = \frac{8\left(-\frac{3}{2}\right)-13}{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{25}{-2.5} = 10$. Άρα $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{10})$ και $\vec{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{10}) - \boldsymbol{4}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2}) = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{10}, \boldsymbol{2})$ και η ζητούμενη ευθεία $\boldsymbol{g}$ είναι η : $(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{10}) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{10}, \boldsymbol{2}), \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

Πράγματι για $\boldsymbol{\lambda} = \frac{3}{2}$ έχω $(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{10}) + \frac{3}{2}(\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{10}, \boldsymbol{2}) = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{17}, \boldsymbol{13}) = \boldsymbol{G}$



Απόδειξη του $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{V}} - \boldsymbol{2}\pi\rho\beta_{\vec{n}}\vec{\boldsymbol{V}}$

Έχω από το σχήμα ότι $\vec{\boldsymbol{R}} - \vec{\boldsymbol{V}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{B\Gamma}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B\Delta}} = \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{w}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{w}} = \pi\rho\beta_{\vec{n}}\overrightarrow{-V} = -\pi\rho\beta_{\vec{n}}\vec{\boldsymbol{V}}$ Άρα $\boxed{\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{V}} - \boldsymbol{2}\pi\rho\beta_{\vec{n}}\vec{\boldsymbol{V}}}$

Πρόβλημα 3 (3.5P)

Χρησιμοποιώντας πλήρη επαγωγή, να αποδείξετε ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n}$ ο αριθμός $\boldsymbol{12^n - 7^n}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$. (3.5P)

ΛΥΣΗ

Για $\boldsymbol{n = 1}$ έχω $\boldsymbol{12^1 - 7^1 = 5}$, που διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$.

Έστω ότι ο $\boldsymbol{12^k - 7^k}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$. Άρα $\boldsymbol{12^k - 7^k = 5\mu}$, για κάποιον $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}$

Θα δείξω ότι και ο $\boldsymbol{12^{k+1} - 7^{k+1}}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$.

Έχω $\boldsymbol{12^{k+1} - 7^{k+1} = 12 \cdot 12^k - 7 \cdot 7^k = 5 \cdot 12^k + 7 \cdot 12^k - 7 \cdot 7^k = 5 \cdot 12^k + 7 \cdot (12^k - 7^k) = 5 \cdot 12^k + 5\mu = 5(12^k + \mu)}$. Άρα και ο $\boldsymbol{12^{k+1} - 7^{k+1}}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$. Συνεπώς για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n}$ ο αριθμός $\boldsymbol{12^n - 7^n}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{5}$.

Πρόβλημα 4 (8P)

Για τις επόμενες 16 προτάσεις πρέπει να αποφασίσετε αν η πρόταση είναι TRUE ή FALSE. Αυτό το ζήτημα βαθμολογείται ως εξής:

- Σωστή απάντηση: +0,5 P
- Οι τέσσερις πρώτες λανθασμένες απαντήσεις: 0 P
- Περαιτέρω λανθασμένες απαντήσεις: −0,5 P
- Καμία απάντηση: 0 P

Ελάχιστοι δυνατοί βαθμοί: 0 P.

(α)

	TRUE	FALSE	
$\boldsymbol{cos(2022 \cdot \pi) = -1}$			(0.5 P)
$\mathbf{2022^{\ln(1)} = 1}$			(0.5 P)
$\mathbf{Im((2023 + i \cdot 2022)^4) > 0}$			(0.5 P)
$\mathbf{arg\,(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{3}}$			(0.5 P)

ΛΥΣΗ

$\boldsymbol{cos(2022 \cdot \pi) = cos(2 \cdot 1011 \cdot \pi) = cos(0) = 1 \neq -1}$ FALSE

$\mathbf{2022^{\ln(1)} = 2022^0 = 1}$ TRUE

Έχω $\mathbf{(2023 + i \cdot 2022)^2 = 2023^2 - 2022^2 + \mathit{i}2 \cdot 2023 \cdot 2022 = 4045 + \mathit{i} \cdot 2023 \cdot 4044}$

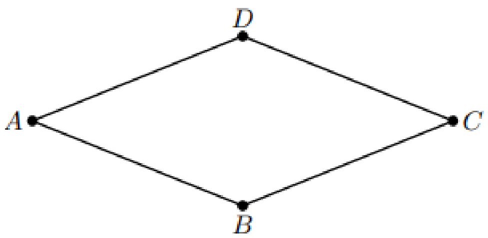
Άρα $\mathbf{(2023 + i \cdot 2022)^4 = 4045^2 - (2023 \cdot 4044)^2 + \mathit{i}2 \cdot 4045 \cdot 2023 \cdot 4044}$

Άρα $\mathbf{Im((2023 + i \cdot 2022)^4) = 2 \cdot 4045 \cdot 2023 \cdot 4044 > 0}$ TRUE

$\mathbf{\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ άρα $\mathbf{arg\,(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}}$ FALSE

(β)

Δεδομένου του ρόμβου ABCD του σχήματος 2



	TRUE	FALSE	
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}}$			(0.5 P)
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0}$			(0.5 P)
$\boldsymbol{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0}$			(0.5 P)

ΛΥΣΗ

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}}$ TRUE

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} > 0}$ αφού η γωνία των $\boldsymbol{\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}}}$ είναι οξεία. TRUE

$\boldsymbol{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0}$ αφού $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}}$ (οι διαγώνοι ρόμβου τέμνονται κάθετα) TRUE

(c) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 1)}$

	TRUE	FALSE	
$\boldsymbol{f'(1) = 0}$			(0.5 P)
Το γράφημα του f έχει ένα σημείο καμπής.			(0.5 P)
$\boldsymbol{f''(-3) < 0}$			(0.5 P)
Ισχύει ότι $\boldsymbol{f(-4) \cdot f'(-4) < 0}$			(0.5 P)

Έχω $\boldsymbol{f'(x) = -1 \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2}$ άρα $\boldsymbol{f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot (4)^2 = -8 \neq 0}$ FALSE

Έχω $\boldsymbol{f''(x) = -1 \cdot (x + 3) - 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2(x + 3) = -3x - 5}$

Ο πίνακας μεταβολών παρακάτω δίνει ότι έχουμε ένα σημείο καμπής για $\boldsymbol{x = -\frac{5}{3}}$ TRUE

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{f''(-3) = -3(-3) - 5 = 4 > 0}$ TRUE

$f(-4)\cdot f'(-4) = \left(-\frac{1}{2}\cdot(-4+3)^2\cdot(-4-1)\right)\left(-1\cdot(-4+3)\cdot(-4-1)-\frac{1}{2}\cdot(-4+3)^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-5)\right)\left(-1\cdot(-1)\cdot(-5)-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(-5-\frac{1}{2}\right) < 0$ TRUE

(d) Θεωρούμε τις ακόλουθες προτάσεις για την έλλειψη :

$$E: \frac{(x-2)^2}{2021} + \frac{(y-3)^2}{2022} = 1.$$

	TRUE	FALSE	
Το κέντρο της έλλειψης βρίσκεται στο $(-2,-3)$			(0.5 P)
Ο κάθετος άξονας της έλλειψης είναι μεγαλύτερος από τον οριζόντιο.			(0.5 P)

ΛΥΣΗ

Το κέντρο της έλλειψης βρίσκεται στο $(2,3)$FALSE

Ο κάθετος άξονας της έλλειψης είναι $2\beta = 2\sqrt{2022} > 2\sqrt{2021} = 2\alpha$ άρα μεγαλύτερος από τον οριζόντιο άξονα. TRUE

(e) Για τις ακόλουθες προτάσεις θεωρήστε την $X \sim \mathcal{N}(2022, 1)$.

	TRUE	FALSE	
$\mathrm{P}(X \geq 2022) = \mathrm{P}(X > 2022)$			(0.5 P)
$\mathrm{P}(X \leq 2022) = 0.5$			(0.5 P)
$\mathrm{P}(X > 2023) > 0.25.$			(0.5 P)

Έχω $\mathrm{P}(X \geq 2022) = \mathrm{P}(X > 2022) + \mathrm{P}(X = 2022) = \mathrm{P}(X > 2022) + 0 = \mathrm{P}(X > 2022)$ TRUE

Έχω $\mathrm{P}(X \leq 2022) = \mathrm{P}(X \leq \mu) = 0.5$ TRUE

Έχω $\mathrm{P}(X > 2023) = \mathrm{P}(X > \mu + \sigma) = 0.16 < 0.25$ FALSE

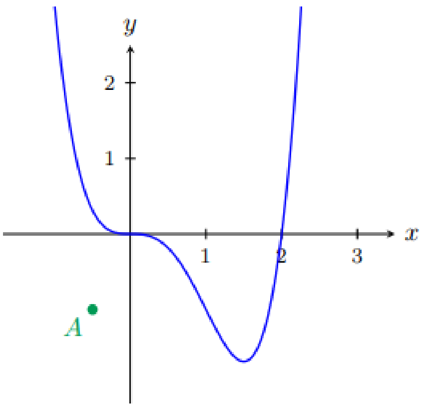
Μέρος 2: Με αριθμομηχανή

Μόλις παραδώσετε το μέρος 1 σε σφραγισμένο φάκελο, θα λάβετε την αριθμομηχανή σας. TI-nspire CX CAS αριθμομηχανή

Λύστε τα προβλήματα 5 έως 8 με τη βοήθεια της αριθμομηχανής σας και του μαθηματικού τυπολογίου.

Πρόβλημα 5 (3.5P)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\cdot x^3$.



(α) Προσδιορίστε την εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα του f στο σημείο της με $x = 1$. (1 P)

(β) Προσθέτουμε τώρα περαιτέρω εφαπτομένες στο γράφημα του f που περνούν από το σημείο $A = (-0.5, -1)$. Υπολογίστε τις συντεταγμένες όλων των αντίστοιχων σημείων επαφής. (2,5 P)

ΛΥΣΗ

(α) Έχω $f'(x) = 4x^3 - 6\cdot x^2$ και $f'(1) = 4 - 6 = -2$, $f(1) = 1 - 2 = -1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x = 1$ είναι η : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ ή $y + 1 = -2(x-1)$ ή $\boxed{y = -2x + 1}$

(β) Έστω x_0 το σημείο επαφής, τότε η αντίστοιχη εφαπτομένη είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ή

$$y - {x_0}^4 + 2{x_0}^3 = (4{x_0}^3 - 6{x_0}^2)(x - x_0) \xrightarrow{x=-0.5, y=-1} -1 - {x_0}^4 + 2{x_0}^3 = (4{x_0}^3 - 6{x_0}^2)(-0.5 - x_0)$$
$$\Rightarrow -1 - {x_0}^4 + 2{x_0}^3 = -2{x_0}^3 - 4{x_0}^4 + 3{x_0}^2 + 6{x_0}^3 \Rightarrow 3{x_0}^4 - 2{x_0}^3 - 3{x_0}^2 - 1 = 0$$
Με την βοήθεια αριθμομηχανής έχουμε $\boxed{x_0 = -0,90045}$ ή $\boxed{x_0 = 1,4592}$

Πρόβλημα 6 (8P)

Ο κακός Bernd και ο ανυποψίαστος Alfred γευματίζουν συχνά μαζί. Ο καθένας πετάει ένα νόμισμα για να καθορίσει ποιος πρέπει να πληρώσει για το φαγητό. Ο Alfred μετράει για το κεφάλι, ο Bernd για τον αριθμό. Ο Bernd θέλει τώρα να εκμεταλλευτεί τον Alfred και παίρνει ένα σημαδεμένο νόμισμα, όπου η πιθανότητα των κεφαλιών είναι 60%.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Alfred θα πρέπει να πληρώσει για ακριβώς 6 από τα επόμενα 10 γεύματα; (0,5 P)

(β) Ο Άλφρεντ παρατηρεί ότι πληρώνει για μεσημεριανό γεύμα πιο συχνά τον τελευταίο καιρό. Μετά από 50 γεύματα, μέτρησε ότι έπρεπε να πληρώσει 30 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό (30 φορές ή περισσότερο σε 50 ρολά) με ένα δίκαιο νόμισμα; (1 Π)

γ) Ο Alfred τηρεί αρχείο της παρατήρησής του. Πόσα από τα 100 γεύματα θα έπρεπε να πληρώσει για να έχει ισχυρή υποψία ότι το νόμισμα είναι πλαστό (δηλαδή η πιθανότητα να είναι ένα δίκαιο νόμισμα πέφτει κάτω από το 5%); (1,5 P)

(δ) Ο Άλφρεντ αντιμετωπίζει τον Μπερντ με τις υποψίες του και προτείνει τα εξής: Γυρίζουν το νόμισμα δύο φορές. αν εμφανιστεί το "ΚΖ", ο Bernd πληρώνει, αν εμφανιστεί το "ΖΚ", ο Alfred πληρώνει και αν εμφανιστεί το "ΚΚ" ή το "ΖΖ", το όλο θέμα ξεκινά ξανά μέχρι να κερδίσει κάποιος. Δείξτε ότι αυτή η προσέγγιση είναι δίκαιη, ανεξάρτητα από την πιθανότητα κεφαλών ή ουρών. (1 Π) Εμπνευσμένος από τις περιπέτειές του με τον Bernd, ο Alfred σκέφτεται ποιες δηλώσεις μπορούν να γίνουν σχετικά με τα γενικά μοτίβα των κεφαλιών και των ουρών. Ακολουθούν δύο ερωτήσεις που έθεσε στον εαυτό του.

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το μοτίβο "ΖΚΖ" στις πρώτες πέντε ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος; (2 P)

(στ) Εάν γυρίσετε ένα δίκαιο νόμισμα πέντε φορές, θα πάρετε ένα μοτίβο μήκους 5. Σε πόσα από αυτά τα μοτίβα, κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται τρεις φορές αμέσως μετά το άλλο. (Για παράδειγμα, επιτρέπονται τα "ΚΖΚΖΚ" ή "ΖΚΚΖΖ", αλλά όχι το "ΚΖΖΖΚ") (2 P)

ΛΥΣΗ

(α) $P = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 = \frac{10!}{6! \times 4!} 0.6^6 0.4^4 = 210 \cdot \ 0.6^6 0.4^4 = \boxed{0.2508}$

(β) έχω $\mu = np = 50 * 0.5 = 25$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Θέτω $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{30-25}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} = 1.414$

Οπότε $P(Z \geq z) = P(Z \geq 1.414) = 1 - P(Z \leq 1.414) = \boxed{0.07852}$ από πίνακες κανονικής κατανομής

(γ) $\alpha = 0.05 \Rightarrow \Phi(z_a) = 0.95 \Rightarrow P(Z \leq z_a) = 0.95 \Rightarrow z_a = 1.65$

Έχω $\mu' = n'p = 100 * 0.5 = 50$, $\sigma' = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{4}} = 5$

$z_a = \frac{x-\mu'}{\sigma'} \Rightarrow x = \mu' + z_a\sigma' = 50 + 1.65 * 5 = 58,25$ άρα αν πληρώσει $\boxed{59}$ γεύματα θα έχει ισχυρή υποψία ότι το νόμισμα είναι πλαστό.

(δ) $P("ZK") = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$ αλλά και $P("KZ") = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$ οπότε είναι δίκαιο

(ε) Όλοι οι συνδυασμοί για τις 5 ρίψεις είναι 2^5ενώ οι ευνοϊκοί συνδυασμοί είναι της μορφής $XYZKZ$ ή $XZKZY$ ή $ZKZXY$ όπου $X, Y \in \{Z, K\}$

Άρα $P(ZKZ) = P(XYZKZ) + P(XZKZY) + P(ZKZXY) = \frac{4+4+4}{2^5} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = \boxed{0.375}$

(στ) οι μη ευνοϊκοί συνδυασμοί είναι της μορφής $XYZZZ$ ή $XZZZY$ ή $ZZZXY$ ή $XYKKK$ ή $XKKKY$ ή $KKKXY$ όπου $X, Y \in \{Z, K\}$

Άρα $P=1 - \big(P(XYZZZ) + P(XZZZY) + P(ZZZXY) + P(XYKKK) + P(XKKKY) + P(KKKXY)\big) = 1 - \frac{4*6}{2^5} = \frac{8}{32} = \boxed{0.25}$

Πρόβλημα 7 (7P)

Η έλλειψη Ε έχει τις εστίες $F_1 = (-2, 0)$ και $F_2 = (8, 0)$ και περνά από το σημείο $A = (6, 4)$. Μία παραβολή P έχει εστία το F_2 και έχει τον άξονα y ως διευθετούσα ευθεία.

(α) Προσδιορίστε την εξίσωση της έλλειψης. (2 P)

(β) Προσδιορίστε την εξίσωση της παραβολής. (2,5 P) Σημείωση: Εάν δεν μπορείτε να λύσετε (α) ή (β), χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις $\boldsymbol{E}: \frac{(x-4)^2}{50} + \frac{y^2}{29} = 1$ και $\boldsymbol{P}: y^2 = 7 \cdot (x-5)$.
(c) Οι δύο καμπύλες έχουν τομή στο πρώτο τεταρτημόριο. Ποια είναι η γωνία κοπής που έχουν εκεί; (2.5 P)

ΛΥΣΗ

(α) Έχω $2\gamma = 8-(-2) = 10 \Rightarrow \gamma = 5$. Το κέντρο της έλλειψη είναι το μέσο του F_1F_2 δηλαδή το $\left(\frac{8+(-2)}{2}, 0\right) = (3,0)$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{(x-3)^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = \beta^2 + 25$

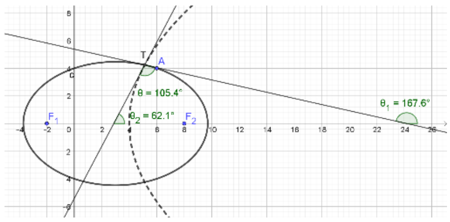
Αφού $A = (6,4)$ σημείο της έλλειψης έχουμε $\frac{(6-3)^2}{\alpha^2} + \frac{4^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{\alpha^2} + \frac{16}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow 9\beta^2 + 16\alpha^2 = \alpha^2\beta^2 \xLeftrightarrow{\alpha^2 = 25+\beta^2} 9\beta^2 + 16(25+\beta^2) = (25+\beta^2)\beta^2 \Leftrightarrow 9\beta^2 + 400 + 16\beta^2 = 25\beta^2 + \beta^4 \Leftrightarrow \beta^4 = 400 \Leftrightarrow \beta^2 = 20$ και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 45$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι $\boxed{\frac{(x-3)^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1}$

(β) Η κορυφή της παραβολής είναι στο μέσο τμήματος με το ένα άκρο το $F_2(8,0)$ και το άλλο στην αρχή των αξόνων, άρα το σημείο $\mathrm{K}(4,0)$. Για την παράμετρο p της παραβολής έχουμε $\frac{p}{2} = x_{F_2} - x_{\mathrm{K}} = 8 - 4 = 4 \Rightarrow p = 8$. Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 * p(x - x_{\mathrm{K}})$ ή $\boxed{y^2 = 16(x-4)}$

(γ) Για το σημείο τομής T έχουμε $\frac{(x_T-3)^2}{45} + \frac{16(x_T-4)}{20} = 1 \Leftrightarrow 20(x_T-3)^2 + 720(x_T-4) = 900 \Leftrightarrow (x_T-3)^2 + 36(x_T-4) = 45 \Leftrightarrow {x_T}^2 - 6x_T + 9 + 36x_T - 144 = 45 \Leftrightarrow {x_T}^2 + 30x_T - 180 = 0$

$x_T = \frac{-30 \pm \sqrt{1620}}{2} = -15 \pm 9\sqrt{5}$ δεκτή η $x_T = -15 + 9\sqrt{5} > 0$, ή $x_T = 5.124$ με την βοήθεια αριθμομηχανής.

Άρα ${y_T}^2 = 16(5.124 - 4) \Rightarrow y_T = \pm 4.241$ δεκτή η $y_T = 4.241$, αφού οι δύο καμπύλες έχουν τομή στο πρώτο τεταρτημόριο.



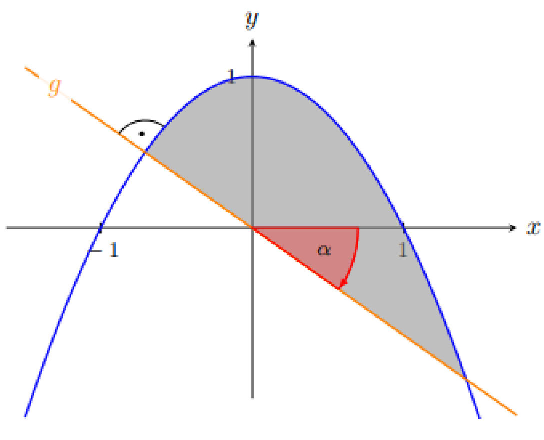
Η εφαπτομένη της έλλειψης στο T είναι: $\frac{(x_T-3)(x-3)}{45} + \frac{y_T y}{20} = 1$ με κλίση $\lambda = \frac{(x_T-3)}{45} : \frac{y_T}{20} = -0.222 \Rightarrow \theta_1 = 167.416°$

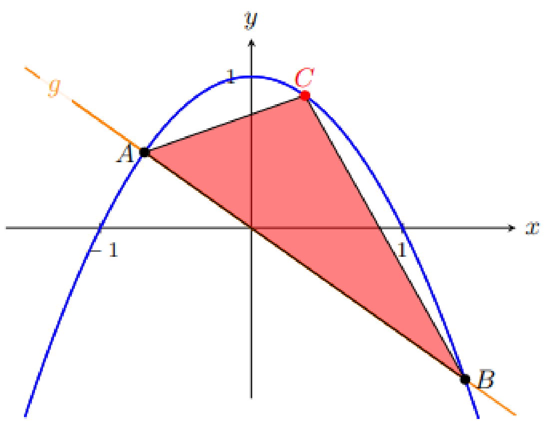
Η εφαπτομένη της παραβολής στο T είναι: $y_T y = p(x - x_{\mathrm{K}} + x_T - x_{\mathrm{K}}) = 8(x + x_T - 2x_{\mathrm{K}})$ με κλίση $\lambda = \frac{8}{y_T} = 1.866 \Rightarrow \theta_2 = 62.066°$

Έχω απ' το σχήμα ότι $\theta_1 = \theta + \theta_2 \Rightarrow \theta = \theta_2 - \theta_1 = \boxed{105.416°}$

Πρόβλημα 8 (6.5P)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$. Τώρα ο άξονας x περιστρέφεται δεξιόστροφα κατά γωνία α γύρω από την αρχή έως ότου η περιστρεφόμενη ευθεία γραμμή τέμνει το γράφημα του f σε ορθή γωνία για πρώτη φορά. Υποδηλώνουμε την περιστρεφόμενη ευθεία γραμμή με g.





Σχήμα 5: Σκίτσο του προβλήματος 8(α) και (β) Σχήμα 6: Σκίτσο του προβλήματος 8(γ)

(α) Υπολογίστε τη γωνία α. (2.5 P) Σημείωση: Εάν δεν μπορείτε να λύσετε το μέρος (α), υπολογίστε με $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$.

β) Υπολογίστε το εμβαδόν της περιοχής που είναι γκριζαρισμένο στο σχήμα 5. (1,5 P) (γ) Δηλώνουμε τις διασταυρώσεις του γραφήματος $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ με $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{x_C}, \boldsymbol{y_C})$ με $\boldsymbol{x_A} < \boldsymbol{x_C} < \boldsymbol{x_B}$ στο γράφημα του $\boldsymbol{f}$ έτσι ώστε το τρίγωνο $\triangle\, \boldsymbol{ABC}$ να έχει μέγιστο εμβαδόν. Δεν απαιτείται απόδειξη. (2,5 P)

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $\boldsymbol{f'(x) = -2x}$, η εξίσωσης της κάθετης στο Α του $\boldsymbol{C_g}$ είναι της μορφής

$$\boldsymbol{y - f(x_A) = \frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A) \xRightarrow{x=0,y=0} -f(x_A) = \frac{1}{-2x_A}(-x_A) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - {x_A}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow {x_A}^2 = \frac{1}{2} \xRightarrow{x_A<0} x_A = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\boldsymbol{y_A = 1 - {x_A}^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$ Άρα $\boldsymbol{\tan\widehat{xOA} = \lambda_g = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ και με την βοήθεια αριθμομηχανής $\boldsymbol{\widehat{xOA} = 144.715° \Rightarrow a = 180° - 144.715° = \boxed{35.264°}}$

(β) Η ευθεία g είναι η $\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

Για το σημείο Β έχουμε : $\boldsymbol{x_B > 0}$, $\boldsymbol{y_B = 1 - {x_B}^2}$ και $\boldsymbol{y_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_B}$. Οπότε $\boldsymbol{{x_B}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_B - 1 = 0 \Rightarrow \left(x_B + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x_B - \sqrt{2}) = 0}$. Άρα $\boldsymbol{x_B = \sqrt{2}, y_B = -1}$

Άρα $\boldsymbol{E_{\sigma\kappa\iota\alpha\varsigma} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(1 - x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} =}$

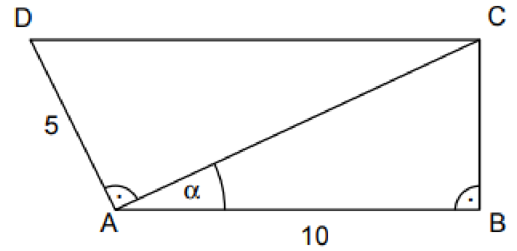
$\boldsymbol{\sqrt{2} - \sqrt{2}^3 + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{8}\sqrt{2}}}$

(γ) το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το ύψος από το σημείο $\boldsymbol{C}$ άρα όταν μεγιστοποιείται η $\boldsymbol{d(C, g) = \frac{\left|y_C + \frac{\sqrt{2}}{2}x_C\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}}$

Έχω $\boldsymbol{y_C + \frac{\sqrt{2}}{2}x_C = -{x_C}^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_C + 1}$ που ως τριώνυμο μεγιστοποιείται για $\boldsymbol{x_C = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}}$ άρα $\boldsymbol{y_C = 1 - {x_C}^2 = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}}$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $\boldsymbol{\boxed{C\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{7}{8}\right)}}$

Εισαγωγικές εξετάσεις στο ETH της Ζυρίχης φθινόπωρο 2018
Μαθηματικά Ι (Ανάλυση)

Εργασία 1 [6 βαθμοί]
Προσδιορίστε τη γωνία $\boldsymbol{\alpha}$ στο τραπέζιο $\boldsymbol{ABCD}$

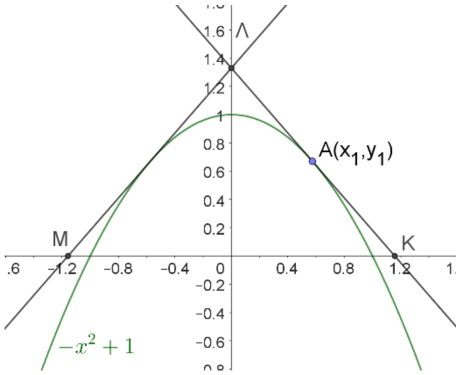


ΛΥΣΗ
Έχω $DC||AB$ άρα $\widehat{DCA}=\hat{a}$ άρα $\tan\widehat{DCA}=\frac{5}{AC}, \cos\hat{a}=\frac{10}{AC}\Rightarrow\frac{\tan\widehat{DCA}}{\cos\hat{a}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin a=\cos^2 a\Rightarrow\sin^2 a+2\sin a-1=0\Rightarrow\sin a=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$ δεκτή μόνο η $\sin a=\sqrt{2}-1>0$ αφού η γωνία είναι οξεία. Άρα $a=\sin^{-1}(\sqrt{2}-1)\Rightarrow\boxed{a=24,47^\circ}$ με τη βοήθεια αριθμομηχανής.

Εργασία 2 [12 βαθμοί]
Βρείτε το σύνολο λύσεων των ακόλουθων εξισώσεων στο $\mathbb{R}$.
a) $e^{2x}=2e^x+2$
b) $\frac{x+1}{x-x^2}=\frac{2x-12}{2x^2+x-3}$
c) $\ln(\sqrt{2x}+2)+\ln(x)=2\ln(\sqrt{3x-1})$
ΛΥΣΗ
a) $e^{2x}-2e^x+1=3\Leftrightarrow(e^x-1)^2=3\Leftrightarrow e^x-1=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow e^x=1+\sqrt{3}$
Η $e^x=1-\sqrt{3}<0$ είναι αδύνατη, άρα $\boxed{x=\ln(1+\sqrt{3})}$
b) $\frac{x+1}{x-x^2}=\frac{2x-12}{2x^2+x-3}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x(1-x)}=\frac{2x-12}{(2x+3)(x-1)}\overset{x-1\neq0}{\Longleftrightarrow}\frac{x+1}{-x}=\frac{2x-12}{2x+3}\Leftrightarrow(x+1)(2x+3)=-x(2x-12)\Leftrightarrow 2x^2+5x+3=-2x^2+12x\Leftrightarrow 4x^2-7x+3=0\Leftrightarrow(4x-3)(x-1)=0\Leftrightarrow\boxed{x=\frac{3}{4}}$
c) Πρέπει $x\geq\frac{1}{3}$. Οπότε $\ln(\sqrt{2x}+2)+\ln(x)=2\ln(\sqrt{3x-1})\Rightarrow(\sqrt{2x}+2)x=3x-1\Rightarrow\sqrt{2x^3}=x-1\overset{x>1}{\Longrightarrow}2x^3=x^2-2x+1\Rightarrow 2x^3-x^2+2x-1=0\Rightarrow x^2(2x-1)+(2x-1)=0\Rightarrow(x^2+1)(2x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}<1$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Εργασία 3 [12 βαθμοί]
Έστω $z_1, z_2, z_3, \ldots$ μια άπειρη γεωμετρική ακολουθία στο $\mathbb{C}$ και έστω $q=\frac{z_{n+1}}{z_n}$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$.
Τα δύο πρώτα στοιχεία της ακολουθίας είναι γνωστά: $z_1=4+i, z_2=1.5+2.5i$
α) Να προσδιορίσετε το q.
β) Από ποιο $n\in\mathbb{N}$ και μετά είναι η απόσταση μεταξύ του z_n και της αρχής των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο λιγότερο από 0,001;
γ) Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων σχεδιάζουμε τις ακτίνες $a_1, a_2, a_3, \ldots$ που διέρχονται από $z_1, z_2, z_3, \ldots$ αντίστοιχα. Υπάρχει ένα $m\in\mathbb{N}$, έτσι ώστε οι ακτίνες a_n και a_{n+m} για όλα τα $n\in\mathbb{N}$ να βρίσκονται η μία πάνω στην άλλη; Εάν ναι: προσδιορίστε m. Εάν όχι: γιατί όχι;
ΛΥΣΗ
α) $q=\frac{z_2}{z_1}=\frac{1.5+2.5i}{4+i}=\frac{1.5+2.5i}{4+i}\cdot\frac{4-i}{4-i}=\frac{8.5+8.5i}{16+1}=0.5+0.5i=\frac{1}{\sqrt{2}i}e^{-i\pi/4}$
β) θέλω $|z_n|<0.001\Leftrightarrow|q^{n-1}z_1|<0.001\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt{2}i}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right|^{n-1}|4+i|<0.001\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\sqrt{17}<0.001\Leftrightarrow\frac{17}{2^{n-1}}<10^{-6}\Leftrightarrow 2^{n-1}>17\cdot10^6\Leftrightarrow n-1>\log_2(17\cdot10^6)\Leftrightarrow n-1>24.019\Leftrightarrow n>25.019$
Άρα $n=26$
γ) Έχω $Arg(q)=\frac{\pi}{4}$. Άρα οι a_k και a_{k+1} σχηματίζου γωνία $\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{8}$. Άρα για $\boxed{m=8}$ έχω $Arg(z_{n+8})=Arg(z_n)$ δηλαδή οι a_n και a_{n+8} βρίσκονται η μία πάνω στην άλλη.

Εργασία 4 [12 βαθμοί]



Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f(x)=-x^2+1}$ φέρουμε εφαπτομένη στο πρώτο και στο δεύτερο τεταρτημόριο. Το συμμετρικό τρίγωνο ως προς τον άξονα $\boldsymbol{y}$, που σχηματίζεται από τις δύο εφαπτομένες και τον άξονα $\boldsymbol{x}$ πρέπει να έχει ελάχιστο εμβαδόν. Βρείτε το.

ΛΥΣΗ

Έχω

ΚΛ:$\boldsymbol{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)\Rightarrow y+{x_1}^2-1=-2x_1(x-x_1)}$

Για $\boldsymbol{y=0}$ έχω $\boldsymbol{\Rightarrow {x_1}^2-1=-2x_1x_\kappa+2{x_1}^2}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{-{x_1}^2-1}{-2x_1}=x_\kappa\Rightarrow x_\kappa=\frac{{x_1}^2+1}{2x_1}}$$

Για $\boldsymbol{x=0}$ έχω $\boldsymbol{y_\Lambda+{x_1}^2-1=2{x_1}^2\Rightarrow y_\Lambda={x_1}^2+1}$

Άρα $\boldsymbol{(M\Lambda K)=2(O\Lambda K)=2\frac{O\Lambda\cdot OK}{2}=y_\Lambda x_\kappa=({x_1}^2+1)\frac{{x_1}^2+1}{2x_1}=\frac{({x_1}^2+1)^2}{2x_1}}$

Θεωρώ την συνάρτηση $\boldsymbol{E(x)=\frac{(x^2+1)^2}{2x}, x\in(0,1]}$,

$\boldsymbol{E'(x)=\frac{2(x^2+1)\cdot 2x\cdot 2x-(x^2+1)^2\cdot 2}{(2x)^2}}$

Έχω $\boldsymbol{E'(x)=0\Rightarrow 8x^2(x^2+1)-2(x^2+1)^2=0\Rightarrow 4x^2-(x^2+1)=0\Rightarrow 3x^2=1\overset{x>0}{\Longrightarrow} x=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι το ελάχιστο εμβαδόν είναι

$\boldsymbol{E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1\right)^2}{2\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{2\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx \boxed{1.5396}}$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
$E(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1.5396$ T.E.	↗	2

Εργασία 5 [16 βαθμοί]

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{(x)=x^{\boldsymbol{n}}\cdot e^{\boldsymbol{x}}(n\in\mathbb{N})}$.

α) Έστω $\boldsymbol{n}$ = **1**. Προσδιορίστε τις ρίζες, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της $\mathbf{f_1(x)}$ και σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης. Στη συνέχεια, υπολογίστε το εμβαδόν στο τρίτο τεταρτημόριο, το οποίο περικλείεται από το γράφημα της $\mathbf{f_1(x)}$ και από τον άξονα $\boldsymbol{x}$.

β) Έστω $\boldsymbol{n}$ ένας αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Αποδείξτε μέσω πλήρους επαγωγής ότι $\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{(x)dx}\right|=\mathbf{n!}$

Σημείωση! Για όλα τα $\mathbf{n}\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι : $\mathbf{lim}_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{e^x}\right)=\mathbf{0}$

ΛΥΣΗ

α) Έχω $\mathbf{f_1(x)=0\Leftrightarrow x\cdot e^{\boldsymbol{x}}=0\Leftrightarrow x=0}$

$\mathbf{f'_1(x)=e^{\boldsymbol{x}}+x\cdot e^{\boldsymbol{x}}=(1+x)\cdot e^{\boldsymbol{x}}}$ και $\mathbf{f'_1(x)=0}\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-1}$

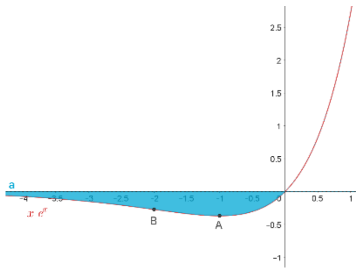
Έχουμε τοπικό ελάχιστο το $\boldsymbol{A}(\mathbf{-1,-e^{-1}})$

$\mathbf{f''_1(x)=e^{\boldsymbol{x}}+(1+x)\cdot e^{\boldsymbol{x}}=(2+x)\cdot e^{\boldsymbol{x}}}$ και $\mathbf{f''_1(x)=0}\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-2}$

Έχουμε σημείο καμπής το $\boldsymbol{B}(\mathbf{-2,-e^{-2}})$

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση είναι:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_1''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_1(x)$	0		Σ.Κ.		$-e^{-1}$ Τ.Ε.		$+\infty$



Για το ζητούμενο εμβαδόν έχουμε $\boldsymbol{E}=\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f_1(x)dx}\right|=\left|\int_{-\infty}^{0}-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e^xdx}\right|=\left|[-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e^x}]_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}-\boldsymbol{e^xdx}\right|=|[-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e^x}]_{-\infty}^{0}+[\boldsymbol{e^x}]_{-\infty}^{0}|=|(\mathbf{0-0})+(\mathbf{1-0})|=\mathbf{1}$

β) για $\boldsymbol{n}$ = **1** ισχύει$\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f_1(x)dx}\right|=\mathbf{1}$ από το προηγούμενο ερώτημα.

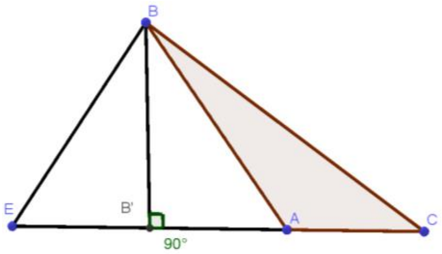
Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$ οπότε έχουμε $\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f}_{\boldsymbol{k}}\mathbf{(x)dx}\right|=\mathbf{k!}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ δηλαδή ότι $\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f}_{\boldsymbol{k+1}}\mathbf{(x)dx}\right|=\mathbf{(k+1)!}$

Έχουμε ότι $\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{f}_{\boldsymbol{k+1}}\mathbf{(x)dx}\right|=\left|\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{x^{k+1}\cdot e^xdx}\right|=\left|[\boldsymbol{x^{k+1}\cdot e^x}]_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}(\boldsymbol{k+1})\boldsymbol{x^ke^xdx}\right|=\left|(\mathbf{0-0})-(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{x^ke^xdx}\right|=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\left|\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{x^ke^xdx}\right|=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\mathbf{k!}=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})!$ όπως θέλαμε.

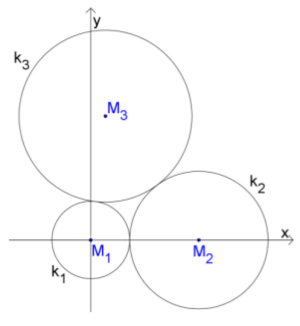
Εισαγωγικές εξετάσεις στο ΕΤΗ της Ζυρίχης ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018
Μαθηματικά ΙΙ (Γεωμετρία / Στατιστική)

Εργασία 1 [9 βαθμοί]
Δεδομένων των σημείων $\boldsymbol{A(1/8/0)}$, $\boldsymbol{B(6/6/5)}$ και $\boldsymbol{C(0/12/1)}$.
α) Προσδιορίστε το σημείο $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{AC}$ έτσι ώστε το τρίγωνο $\boldsymbol{ABE}$ να γίνει ισοσκελές με βάση $\boldsymbol{AE}$ [3 βαθμοί].
β) Στο επίπεδο $\boldsymbol{xy}$, υπολογίστε το σημείο $\boldsymbol{F}$ με την ιδιότητα ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου $\boldsymbol{ABF}$ να βρίσκεται στην ευθεία $\boldsymbol{AC}$. [3 βαθμοί]
γ) Προσδιορίστε το σημείο $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{AB}$ έτσι ώστε το τρίγωνο $\boldsymbol{ACG}$ να έχει εμβαδόν $\boldsymbol{18\sqrt{2}}$ [3 βαθμοί].
ΛΥΣΗ



α) Έστω η προβολή του $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ στο $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, είναι το $\overrightarrow{\boldsymbol{AB'}}$.
Έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{AB'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)$
$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = (-1,4,-1), \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (5,-2,5)$ Άρα
$\overrightarrow{\boldsymbol{AE}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{AB'}} = 2\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) = 2\frac{(-1,4,-1)}{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}}\cdot\frac{(-1,4,-1)\cdot(5,-2,5)}{\sqrt{5^2+(-2)^2+5^2}} = 2\cdot\frac{1}{18}(-18)(-1,4,-1) = (2,-8,2)$
Άρα $(x_E, y_E, z_E) = (x_A, y_A, z_A) + \overrightarrow{AE} = (1,8,0) + (2,-8,2) = (3,0,2)$
άρα $\boxed{E(3,0,2)}$
β) Έστω $\boldsymbol{F(x_F, y_F, z_F)}$ το ζητούμενο σημείο και $\boldsymbol{\Theta}$ το βαρύκεντρο του $\boldsymbol{ABF}$. Έχω $x_\Theta = \frac{x_A+x_B+x_F}{3}, y_\Theta = \frac{y_A+y_B+y_F}{3}, z_\Theta = \frac{z_A+z_B+z_F}{3}$ άρα $\Theta\left(\frac{7+x_F}{3}, \frac{14+y_F}{3}, \frac{5+z_F}{3}\right)$ Αφού $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{xy}$ επίπεδο, έχω $z_F = 0$ Αφού $\Theta \in AC \Rightarrow \overrightarrow{A\Theta} = \lambda\overrightarrow{AC} \Rightarrow \left(\frac{7+x_F}{3} - 1, \frac{14+y_F}{3} - 8, \frac{5+z_F}{3}\right) = \lambda(-1,4,-1) \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3}, \frac{7+x_F}{3} - 1 = \frac{5}{3}, \frac{14+y_F}{3} - 8 = -\frac{20}{3} \Rightarrow x_F = 1, y_F = -10$. Άρα $\boldsymbol{F(1,-10,0)}$
γ) $(ACG) = 18\sqrt{2} \Rightarrow 18\sqrt{2} = \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AG} \mid = \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{AC} \times \lambda\overrightarrow{AB} \mid =$
$$\frac{\mid \lambda \mid}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}\right| = |\lambda| \cdot \left|(18\vec{i} + 0\vec{j} - 18\vec{k}\right| = |\lambda| \cdot 18\sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \pm 2$$
Αν $\lambda = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} = (10,-4,10)$, άρα $\boxed{G(11,4,10)}$. Αν $\lambda = -2 \Rightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} = (-10,4,-10)$, άρα $\boxed{G(-9,12,-10)}$

Εργασία 2 [13 βαθμοί]
Δίνονται οι κύκλοι $\boldsymbol{k_1: x^2 + y^2 = 2025, k_2: (x-125)^2 + y^2 = 6400}$ και $\mathbf{k_3: (x-17)^2 + (y-144)^2 = 10000}$.
α) Οι τρεις κύκλοι εφάπτονται ο ένας τον άλλον εξωτερικά. Δείξτε αυτό στην περίπτωση των $\boldsymbol{k_2}$ και $\mathbf{k_3}$. [3 βαθμοί].
β) Προσδιορίστε τόσο το σημείο επαφής των $\boldsymbol{k_2}$ και $\mathbf{k_3}$ όσο και μια εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους[4 βαθμοί].
γ) Υπολογίστε το εμβαδόν της πεπερασμένης περιοχής που οριοθετείται από τους τρεις κύκλους. [6 βαθμοί]



ΛΥΣΗ
α) Αρκεί $\boldsymbol{M_2M_3 = R_2 + R_3 \Leftrightarrow \sqrt{(125-17)^2 + (144)^2} = \sqrt{6400} + \sqrt{10000} \Leftrightarrow 180 = 80 + 100}$ που ισχύει.
β) Έστω N το σημείο τομής των κύκλων $\boldsymbol{k_2}$ και $\mathbf{k_3}$. Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:
$(x-125)^2 - (x-17)^2 + y^2 - (y-144)^2 = 6400 - 10000 \Leftrightarrow (2x-142)(-108) + (2y-144)144 = -3600 \overset{:72}{\Rightarrow} (x-71)(-3) + (y-72)4 = -50 \Rightarrow -3x + 4y + 213 - 288 = -50$
$\Rightarrow -3x + 4y = 25 \Rightarrow y = \frac{25+3x}{4}$ οπότε η $\boldsymbol{k_2}$ γίνεται $(x-125)^2 + \left(\frac{25+3x}{4}\right)^2 = 6400 \Leftrightarrow x^2 - 250x + 125^2 + \frac{625+150x+9x^2}{16} = 6400 \Leftrightarrow 25x^2 - 3850x + 148225 = 0 \Rightarrow x^2 - 154x + 5929 = 0 \Rightarrow (x-77)^2 = 0 \Rightarrow x_N = 77 \Rightarrow y_N = \frac{25+3\cdot 77}{4} = 64 \Rightarrow \boxed{N(77,64)}$
γ) έχω $\mathbf{M_1M_2 = r_1 + r_2 = 125, M_2M_3 = r_2 + r_3 = 180, M_1M_3 = r_1 + r_3 = 145}$

$$\cos \mathrm{M_1} = \frac{\mathrm{M_1M_3}^2 + \mathrm{M_1M_2}^2 - \mathrm{M_2M_3}^2}{2 \cdot \mathrm{M_1M_3} \cdot \mathrm{M_1M_2}} = 0,117 \Rightarrow \mathrm{M_1} = 1,453 rad$$

$$\cos \mathrm{M_2} = \frac{\mathrm{M_1M_2}^2 + \mathrm{M_2M_3}^2 - \mathrm{M_1M_3}^2}{2 \cdot \mathrm{M_1M_2} \cdot \mathrm{M_2M_3}} = 0,6 \Rightarrow \mathrm{M_2} = 0,92 rad$$

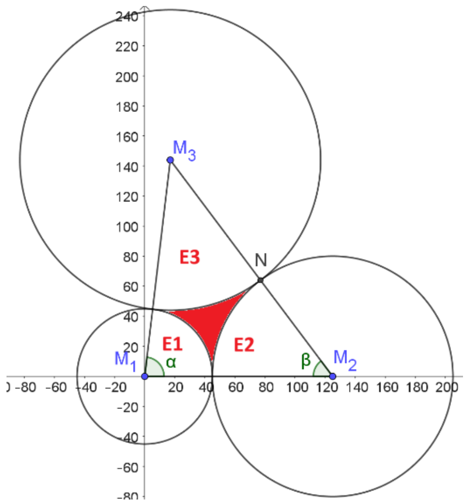
$$\mathrm{M_3} = \pi - 1,453 - 0,92 = 0,767 rad$$

$$E_1 = \frac{\mathrm{M_1}}{2\pi} \cdot \pi \cdot r_1^2 = 1471,7\ \tau.\mu$$

$$E_2 = \frac{\mathrm{M_2}}{2\pi} \cdot \pi \cdot r_2^2 = 2944\ \tau.\mu$$

$$E_3 = \frac{\mathrm{M_3}}{2\pi} \cdot \pi \cdot r_3^2 = 3835\ \tau.\mu$$

$$(\mathrm{M_1M_2M_3}) = \frac{1}{2}\mathrm{M_1M_2} \cdot y_{M_3} = \frac{1}{2} 125 \cdot 144 = 9000\ \tau.\mu$$



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = (\mathrm{M_1M_2M_3}) - E_1 - E_2 - E_3 = \boxed{749,3\ \tau.\mu}$$

Εργασία 3 [17 βαθμοί]

Ένα κυβικό ζάρι και τρία οκτάεδρα, καθένα με αριθμημένες τις έδρες τους από το 1 έως το 8, ρίχνονται ταυτόχρονα. Έστω $\boldsymbol{W}$ ο αριθμός που λαμβάνεται με τον κύβο και $\boldsymbol{S}$ το άθροισμα των αριθμών που λαμβάνονται με τα οκτάεδρα.

α) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του $\boldsymbol{S}$. [2 βαθμοί]

β) Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι το $\boldsymbol{W}$ και το $\boldsymbol{S}$ θα πάρουν και τα δύο την τιμή 5. [2 βαθμοί]

γ) Καθορίστε τον ελάχιστο αριθμό φορών που πρέπει να ριχτούν για να πάρει το S τη μέγιστη τιμή των 3 οκτάεδρων με βεβαιότητα 95%. [3 βαθμοί]

δ) Γνωρίζοντας ότι το άθροισμα και των τεσσάρων αριθμών είναι 10, προσδιορίστε την πιθανότητα ότι $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{S}$. [4 βαθμοί]

ε) Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι το $\boldsymbol{W}$ είναι περιττό και το $\boldsymbol{S}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{W}$. [6 βαθμοί]

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overline{S} = \overline{O_1} + \overline{O_2} + \overline{O_3} = 3\overline{O_1} = 3\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{27}{2}$

β) όλοι οι πιθανοί συνδυασμού είναι $6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 6 \cdot 8^3$

Οι ευνοϊκοί συνδυασμοί για να έχω $W = 5,\ S = 5$ είναι 1) $W = 5,\ S = 1 + 2 + 2$ (3συνδυασμοί) και 2) $W = 5,\ S = 1 + 1 + 3$ (3συνδυασμοί) Άρα $\mathrm{P} = \frac{3+3}{6 \cdot 8^3} = \frac{1}{8^3}$

γ) $\mathrm{P}(max) = \mathrm{P}(S = 24) = \mathrm{P}(O_1 = O_2 = O_3 = 8) = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$

Έστω n βολές. Έχω $\mathrm{P}(\mu\iota\alpha\ \tau\lambda\chi\ \varphi o\rho\acute{\alpha}\ S = 24) = 1 - \left(\frac{511}{512}\right)^n > 0,95 \Rightarrow \left(\frac{511}{512}\right)^n < 0,05 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln\left(\frac{511}{512}\right)} = 1532.3$

Άρα $\boxed{n \geq 1533}$

δ) Έχω

$$\begin{aligned}
10 &= 1+1+1+7 = 1+1+2+6 = 1+1+3+5 = 1+1+4+4 = 1+2+2+5 = 1+2+3+4 \\
&= 1+3+3+3 = 2+1+1+6 = 2+1+2+5 = 2+1+3+4 = 2+2+2+4 \\
&= 2+2+3+3 = 3+1+1+5 = 3+1+2+4 = 3+1+3+3 = 3+2+2+3 \\
&= 4+1+1+4 = 4+1+2+3 = 4+2+2+2 = 5+1+1+3 = 5+1+2+2 \\
&= 6+1+1+2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{W} = \mathrm{S} / \mathrm{W} + \mathrm{S} = 10) = \frac{6}{28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3} = \frac{6}{83} \approx 0.07229$$

ε) Παρατηρώ ότι $\mathrm{P}(\mathrm{S} = \mathrm{k}) = P(S = 27 - k)$. Οι ευνοϊκοί συνδυασμοί για κάθε S είναι:

S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12	S=13
1	3	6	10	15	21	28	36	42	46	48
S=24	S=23	S=22	S=21	S=20	S=19	S=18	S=17	S=16	S=15	S=14

Αφού

$$\mathbf{5 = 1+1+3 = 1+2+2}$$

$$\mathbf{6 = 1+1+4 = 1+2+3 = 2+2+2}$$

$$\mathbf{7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3}$$

$\mathbf{8 \;=\; 1+1+6 \;=\; 1+2+5 \;=\; 1+3+4 \;=\; 2+2+4 \;=\; 2+3+3}$

$\mathbf{9 \;=\; 1+1+7 \;=\; 1+2+6 \;=\; 1+3+5 \;=\; 1+4+4 \;=\; 2+2+5 \;=\; 2+3+4 \;=\; 3+3+3}$

$\mathbf{10 \;=\; 1+1+8 \;=\; 1+2+7 \;=\; 1+3+6 \;=\; 1+4+5 \;=\; 2+2+6 \;=\; 2+3+5 \;=\; 2+4+4}$
$\mathbf{=\; 3+3+4}$

$\mathbf{11 \;=\; 1+2+8 \;=\; 1+3+7 \;=\; 1+4+6 \;=\; 1+5+5 \;=\; 2+2+7 \;=\; 2+3+6 \;=\; 2+4+5}$
$\mathbf{=\; 3+3+5 \;=\; 3+4+4}$

$\mathbf{12 \;=\; 1+3+8 \;=\; 1+4+7 \;=\; 1+5+6 \;=\; 2+2+8 \;=\; 2+3+7 \;=\; 2+4+6 \;=\; 2+5+5}$
$\mathbf{=\; 3+3+6 \;=\; 3+4+5 \;=\; 4+4+4}$

$\mathbf{13 \;=\; 1+4+8 \;=\; 1+5+7 \;=\; 1+6+6 \;=\; 2+3+8 \;=\; 2+4+7 \;=\; 2+5+6 \;=\; 3+3+7}$
$\mathbf{=\; 3+4+6 \;=\; 3+5+5 \;=\; 4+4+5}$

Έχω $\mathbf{P(\boldsymbol{W}=1 \text{ ή } 3 \text{ ή } 5,\ \text{και}\ \boldsymbol{W}|\boldsymbol{S}) = P(\boldsymbol{W}=1\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=1\ldots 24) + P(\boldsymbol{W}=3\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=3,6,9,12,\ldots 24) + P(\boldsymbol{W}=5\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=5,10,15,20)}$

Για $\mathbf{W=1}$ τα $\mathbf{O_1, O_2, O_3}$ παίρνουν οποιαδήποτε τιμή άρα $\mathbf{8^3=512}$ συνδυασμούς

Για $\mathbf{W=3}$ έχω $\mathbf{1+10+28+46+46+28+10+1=170}$ συνδυασμούς

Για $\mathbf{W=5}$ έχω $\mathbf{6+36+46+15=103}$ συνδυασμούς

Άρα $\mathbf{P(\boldsymbol{W}=1 \text{ ή } 3 \text{ ή } 5,\ \text{και}\ \boldsymbol{W}|\boldsymbol{S}) = P(\boldsymbol{W}=1\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=1\ldots 24) + P(\boldsymbol{W}=3\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=3,6,9,12,\ldots 24) + P(\boldsymbol{W}=5\ \text{και}\ \boldsymbol{S}=5,10,15,20) = \frac{1}{6}\left(\frac{512}{512}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{170}{512}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{103}{512}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{512+170+103}{512}\right)=\frac{785}{3072}\approx\boxed{0,2555}}$

Εργασία 4 [11 βαθμοί]

Δεδομένου του επιπέδου $(\boldsymbol{\pi})$: $\mathbf{5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+14\boldsymbol{z}-529=0}$ και της ευθείας γραμμής $(\boldsymbol{\varepsilon})$ που περνά από τα σημεία $\boldsymbol{M}(\mathbf{-2,17,20})$ και $\boldsymbol{N}(\mathbf{0,19,19})$.

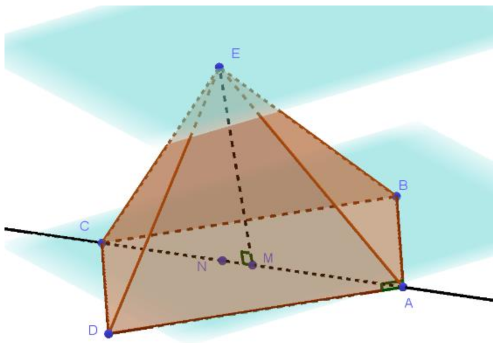
α) Προσδιορίστε τις εξισώσεις συντεταγμένων των επιπέδων που είναι παράλληλα με το επιπέδου $(\boldsymbol{\pi})$ και έχουν απόσταση $\mathbf{15}$ από αυτό. [2 βαθμοί]

β) Δείξτε ότι η ευθεία γραμμή $(\boldsymbol{\varepsilon})$ είναι παράλληλη με το επίπεδο $(\boldsymbol{\pi})$. [2 βαθμοί]

γ) Προσδιορίστε όλες τις κορυφές μιας ευθείας τετράγωνης πυραμίδας $\boldsymbol{ABCD'E}$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

- $\boldsymbol{M}$ είναι το κέντρο του τετραγώνου $\boldsymbol{ABCD}$.
- Το $\boldsymbol{A}$ και το $\boldsymbol{C}$ βρίσκονται στην $(\boldsymbol{\varepsilon})$.
- $\boldsymbol{E}$ βρίσκεται στο $(\boldsymbol{\pi})$.
- Η πυραμίδα έχει όγκο $\boldsymbol{V} \;=\; \mathbf{9000}$. [7 βαθμοί]

ΛΥΣΗ



α) έστω $(\boldsymbol{\pi})||(\boldsymbol{\pi}')$: $\mathbf{5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+14\boldsymbol{z}-\boldsymbol{k}=0}$

Έχω $\boldsymbol{T}\left(\mathbf{\frac{529}{5},0,0}\right)\in(\boldsymbol{\pi})$.

Θέλω $\quad \mathbf{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}')=15 \Rightarrow \frac{|529+0+0-\boldsymbol{k}|}{\sqrt{5^2+2^2+14^2}}=15 \Rightarrow |529-\boldsymbol{k}|=225 \Rightarrow}$

$\mathbf{\boldsymbol{k}=753}$ ή $\mathbf{\boldsymbol{k}=304}$

Άρα $\boxed{\mathbf{\boldsymbol{\pi_1}'\text{: } 5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+14\boldsymbol{z}-753=0}}$

ή $\boxed{\mathbf{\boldsymbol{\pi_2}'\text{: } 5\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+14\boldsymbol{z}-304=0}}$

β) παρατηρώ ότι $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{\pi}_2'$ άρα $\boldsymbol{MN}\in\boldsymbol{\pi}_2'||\boldsymbol{\pi}$ άρα $\boldsymbol{MN}||\boldsymbol{\pi}$

γ) Έχω $\mathbf{\boldsymbol{EM}=\boldsymbol{h}=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\pi})=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}_2')=15}$

$$\mathbf{\boldsymbol{V}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{ABCD})\boldsymbol{h}\Leftrightarrow 6750=\boldsymbol{\alpha}^2 15\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=15\sqrt{2}\Rightarrow\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{MC}=\boldsymbol{MD}=\boldsymbol{MA}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\alpha}=15}$$

Έχω $\mathbf{\boldsymbol{MC}||\boldsymbol{\varepsilon}||\boldsymbol{MN}\Rightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}=\boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}=\boldsymbol{\lambda}(2,2,-1)\Rightarrow 15^2=\left|\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}\right|^2=\boldsymbol{\lambda}^2(2^2+2^2(-1)^2)=9\boldsymbol{\lambda}^2\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}=\pm 5}$

Άρα $\mathbf{\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}=(10,10,-5)}$ ή $\mathbf{\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}=(-10,-10,5)=\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}}$

Άρα $\mathbf{\boldsymbol{C}\;=\;(10,10,-5)+(\boldsymbol{x_M},\boldsymbol{y_M},\boldsymbol{z_M})\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{C}(8,27,15)}}$, $\mathbf{\boldsymbol{A}\;=(-10,-10,5)+(\boldsymbol{x_M},\boldsymbol{y_M},\boldsymbol{z_M})\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{A}(-12,7,25)}}$

Έστω $\vec{\boldsymbol{n}}$ το κάθετο διάνυσμα στο $\boldsymbol{\pi}_2'$. Άρα $\mathbf{\vec{\boldsymbol{n}}=(5,2,14)}$. Έχω $\mathbf{\overrightarrow{\boldsymbol{MC}}\times\vec{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\Rightarrow\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ 2 & 2 & -1\\ 5 & 2 & 14\end{vmatrix}=\boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\Rightarrow}$

$\mathbf{(30,-33,-6)=\boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\Rightarrow 30^2+(-33)^2+(-6)^2=\boldsymbol{\lambda}^2 15^2\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}=\pm 3\Rightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}=\pm(10,-11,-2)\Rightarrow}$

$\mathbf{\boldsymbol{B}\;=\;(10,-11,-2)+(\boldsymbol{x_M},\boldsymbol{y_M},\boldsymbol{z_M})\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{B}(8,6,18)}}$, $\mathbf{\boldsymbol{D}\;=(-10,11,2)+(\boldsymbol{x_M},\boldsymbol{y_M},\boldsymbol{z_M})\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{D}(-12,28,22)}}$

Έχω $\mathbf{\overrightarrow{\boldsymbol{ME}}=\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{n}}\Rightarrow\left|\overrightarrow{\boldsymbol{ME}}\right|=|\boldsymbol{\lambda}||\vec{\boldsymbol{n}}|\Rightarrow 15=\boldsymbol{\lambda}\sqrt{5^2+2^2+14^2}\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}=1\Rightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{ME}}=(5,2,14)\Rightarrow}$

$\mathbf{\boldsymbol{E}=(5,2,14)+(\boldsymbol{x_M},\boldsymbol{y_M},\boldsymbol{z_M})\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{E}(3,19,34)}}$

[Πηγές]
Ελβετία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

SGS 643.21 - Διάταγμα για τις εξετάσεις απολυτηρίου - Καντόνι της Βασιλείας-Landschaft - Συλλογή διαταγμάτων (clex.ch)

ρυθμιστικό πλαίσιο εξετάσεων
https://www.gymliestal.ch/fileadmin/gymliestal/Maturabteilung/Kantonale-Rahmenvorgaben-Matur.pdf

Γραπτές εξετάσεις απολυτηρίου τελευταίας τριετίας
Γυμνάσιο Liestal: Εξετάσεις Matura (gymliestal.ch)

Kantonale-Maturvorgaben.pdf (gym-muttenz.ch)

https://farbitis.ru/el/africa/obuchenie-v-shveicarii-obrazovanie-v-shveicarii/

https://ethz.ch/de/studium/bachelor/bewerbung/auslaendische-reifezeugnisse/eth-aufnahmepruefung.html

εκπαιδευτικός στόχος ETH
PRÜFUNGSANFORDERUNGEN (ethz.ch)