[Γαλλία]

Η Γαλλία (γαλλικά: France), με επίσημη ονομασία ως Γαλλική Δημοκρατία, είναι κράτος της Ευρώπης. Η συνολική έκταση της Γαλλίας, ανέρχεται σε 674.843 τ.χλμ. και έχει πληθυσμό 68.373.000 κατοίκους. Πρωτεύουσα και μεγαλύτερη πόλη είναι το Παρίσι.

Επίσημη γλώσσα της Γαλλίας, είναι η γαλλική και νόμισμά της είναι το ευρώ. Το σύνθημά της είναι «Ελευθερία, Ισότητα, Αδερφοσύνη», και η σημαία της αποτελείται από τρεις κάθετες λωρίδες χρώματος μπλε, άσπρου και κόκκινου. Ο ύμνος της είναι Η Μασσαλιώτιδα. Η συνταγματική αρχή της είναι «κυβέρνηση του λαού, από τον λαό και υπέρ του λαού».

Από τη δεκαετία του 1950, είναι ένα από τα ιδρυτικά μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Είναι πυρηνική δύναμη, και ένα από τα πέντε μόνιμα μέλη του Συμβουλίου Ασφαλείας των Ηνωμένων Εθνών. Η Γαλλία παίζει σημαντικό ρόλο στην παγκόσμια ιστορία με τον πολιτισμό της, τη γλώσσα της και τις δημοκρατικές και κοσμικιστικές της αξίες.

Η Γαλλία κατείχε, το 2012, την πέμπτη θέση παγκοσμίως στο ακαθάριστο εθνικό προϊόν. Η οικονομία της, κεφαλαιοκρατικού τύπου με αρκετά ισχυρή κρατική παρέμβαση. Είναι ένας από τους ηγέτες παγκοσμίως στους τομείς των τροφίμων, της αεροναυπηγικής, των αυτοκινήτων, των προϊόντων πολυτελείας, του τουρισμού και των πυρηνικών.

[Το εκπαιδευτικό σύστημα της Γαλλίας]

Σύμφωνα με το εκπαιδευτικό σύστημα της Γαλλίας, η φοίτηση των μαθητών διαρκεί 12 χρόνια. Συγκεκριμένα φοιτούν πέντε χρόνια στο δημοτικό σχολείο, τέσσερα χρόνια στο γυμνάσιο και τρία χρόνια στο λύκειο.

Το λύκειο αποτελείται από τρεις τάξεις, την Πρώτη – Seconde, την Δευτέρα – Premiere και την Τρίτη – Terminale για μαθητές ηλικίας 15-16 και 17-18 ετών αντίστοιχα.

Στη Δευτέρα και στη Τρίτη τάξη οι μαθητές κατανέμονται σε τρεις κλάδους: α) Λογοτεχνικός – Litteraire L β) Επιστημονικός – Scientifique S και γ) Κοινωνικοοικονομικός – Economique et sociale ES.

Έπειτα από τη τελευταία τάξη του Λυκείου δίνουν εξετάσεις για να αποκτήσουν απολυτήριο που ονομάζεται «Baccalaureat».

Με βάση τις εξετάσεις για το Baccalaureat, καταλαμβάνουν τις διάφορες θέσεις στη τριτοβάθμια εκπαίδευση που αποτελείται από Τεχνικές Σχολές και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα.

Τα ιδρύματα της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης είναι α) Το BTS Brevet Technique Superieur όπου η φοίτηση διαρκεί δύο χρόνια, β) Το Universite, το Πανεπιστήμιο και γ) Το Grande Ecole, το οποίο είναι και το πιο αναγνωρισμένο ανώτατο εκπαιδευτικό ίδρυμα και το δίπλωμα που λαμβάνει όποιος φοιτά σε αυτό έχει μεγαλύτερο κύρος και από αυτό του Πανεπιστημίου.

Τα λύκεια που υπάρχουν στη Γαλλική επαρχία αναλογούν σε μεγάλες περιφέρειες, δηλαδή υπάρχουν σε μία πόλη σχολεία, τα οποία καλύπτουν τις ανάγκες εκπαίδευσης μαθητών, που κατοικούν και σε γειτονικές περιοχές.

[Μέσα σ' ένα τυπικό Λύκειο]

Το Jacques Cartier είναι ένα τυπικό Λύκειο στη Γαλλία που έχει τεράστια έκταση με αρκετά διαφορετικά κτίρια που περιλαμβάνουν το σχολείο, τα διάφορα γήπεδα όπως γήπεδο μπάσκετ, ποδοσφαίρου, βόλεϊ, μπάντμιντον. Ακόμα υπάρχει μια αρκετά μεγάλη έκταση στην οποία οι μαθητές εξασκούνται στο άλμα εις μήκος, στο ακόντιο και στη σφαιροβολία. Ακόμα, μέσα σε ένα από τα κτίρια υπάρχει γυμναστήριο με όργανα για τους μαθητές. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μέσα στο χώρο του σχολείου, βρίσκεται και το σπίτι της διευθύντριας, ένα οίκημα αρκετά μεγάλο μέσα στο οποίο βρίσκεται και το γραφείο της, καθώς και το γραφείο του υποδιευθυντή του Λυκείου. Επίσης μέσα στο χώρο φυτεύονται δένδρα και λουλούδια για τη διατήρηση της ομορφιάς του σχολείου. Προχωρώντας προς τα γήπεδα του μπάσκετ ή του ποδοσφαίρου, βλέπουμε ένα άγαλμα, καθώς επίσης και τραπέζια, με καρέκλες και παγκάκια για να μελετούν οι μαθητές τα μαθήματά τους, χώρος που θυμίζει το αντίστοιχο σε μας προαύλιο.

Ο αριθμός των μαθητών στο Λύκειο Jacques Cartier, φαντάζει τεράστιος σύμφωνα με τα δεδομένα της χώρας μας. Οι μαθητές στο Λύκειο αυτό φτάνουν τους 1800 και οι καθηγητές τους 150, παρ' 'όλα αυτά όμως υπάρχει μια πολύ φιλική ατμόσφαιρα και μια πολύ καλή σχέση ανάμεσα στους μαθητές και τους καθηγητές. Το φαινόμενο της “αποξένωσης” μαθητών – καθηγητών που συχνά συναντούμε στην Ελλάδα, φαίνεται να απουσιάζει από το Λύκειο Jacques Cartier. Οι καθηγητές γνωρίζονται με τους μαθητές και τους φωνάζουν με τα μικρά τους ονόματα κι όχι με τα επώνυμα, σε αντίθεση βέβαια με την Ελλάδα.

Τα ωράρια των σχολείων στη Γαλλία διαφέρουν κατά πολύ από αυτά της Ελλάδας. Στο Λύκειο Jacques Cartier, το μάθημα ξεκινάει στις 8 το πρωί, και τελειώνει στις 6 το απόγευμα, χωρίς όμως οι ώρες των μαθημάτων να είναι συνεχόμενες. Επειδή οι ώρες φαγητού είναι από τις 11.45 μέχρι 1.00 για το μεσημεριανό και 6.45 μέχρι 7.15 για το βραδινό, το μάθημα σταματάει στις 12 για να φάνε οι μαθητές και οι καθηγητές και ξαναξεκινάει στις 2 μέχρι τις 6 το απόγευμα.

Δίνεται μεγάλη έμφαση στις ξένες γλώσσες – στα Γερμανικά και τα Αγγλικά – ενώ τα Αρχαία Ελληνικά αποτελούν μάθημα επιλογής, του οποίου δηλαδή η παρακολούθηση δεν είναι υποχρεωτική από όλους τους μαθητές.

[Η δομή και η οργάνωση του Γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος]

Το γαλλικό εκπαιδευτικό σύστημα είναι εμπνευσμένο από τις αρχές της Γαλλικής επανάστασης του 1789 και συνοψίζονται στην πρόταση του Γαλλικού Συντάγματος ότι «παρέχει ελεύθερη, υποχρεωτική, κοσμική εκπαίδευση σε όλα τα επίπεδα». Σημαντική ακόμα και σήμερα είναι η επιρροή των νομοθετημάτων του υπουργού Παιδείας Jules Ferry (γνωστοί και ως νόμοι Ferry) οι οποίοι καθιέρωσαν για την πρωτοβάθμια εκπαίδευση την δωρεάν φοίτηση (1881), την υποχρεωτική φοίτηση (1882) και την κοσμικότητα της δημόσιας εκπαίδευσης (1882).

Ο καθορισμός και η εφαρμογή της εκπαιδευτικής πολιτικής εμπίπτουν στην αρμοδιότητα της εκτελεστικής εξουσίας. Η φιλοσοφία του Γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος διαπνέεται από τις αξίες της δημοκρατίας και όπως καθορίζεται και νομοθετικά έχει ως κύριες αρχές και στόχους του εκπαιδευτικού συστήματος, τις ίσες ευκαιρίες, την επιτυχία όλων των μαθητών και την επαγγελματική ένταξη των νέων.

Το Γαλλικό εκπαιδευτικό σύστημα είναι με μακρά παράδοση συγκεντρωτικό. Η εκπαιδευτική πολιτική χαράσσεται σε κεντρικό επίπεδο, από τα προγράμματα σπουδών έως τη διαχείριση του εκπαιδευτικού προσωπικού. Η πρόσληψη των εκπαιδευτικών, ο ορισμός των επιθεωρητών και των διευθυντών σχολείων είναι θέματα που καθορίζονται κεντρικά από το Γαλλικό υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Νεολαίας. Για την τριτοβάθμια εκπαίδευση αρμόδιο είναι το υπουργείο Ανώτατης Εκπαίδευσης, Έρευνας και Καινοτομίας. Η τοπική αυτοδιοίκηση από την δεκαετία του 1980 σε μια διαδικασία αποκέντρωσης της διοίκησης του εκπαιδευτικού συστήματος έγινε υπεύθυνη για θέματα κατασκευής και συντήρησης των σχολικών κτιρίων, της μεταφοράς των μαθητών, της προμήθειας εκπαιδευτικού υλικού κ.λπ. Στη βαθμίδα των κολλεγίων και των λυκείων υπάρχουν σήμερα περιθώρια πρωτοβουλιών και διαφοροποίησης από την κρατική γραμμή σε διάφορα θέματα, όπως στον οικονομικό τομέα (κατανομή οικονομικών πόρων) ή στον καθορισμό των εκπαιδευτικών στρατηγικών που πρέπει να υιοθετηθούν για την επίτευξη των εθνικών στόχων.

[Οι βασικές αρχές του Γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος]

Συνοπτικά οι αρχές του γαλλικού εκπαιδευτικού συστήματος είναι:

Ελευθερία επιλογής είδους σχολείου. Στη Γαλλία οι μαθητές φοιτούν σε δημόσια σχολεία σε ποσοστό 83% και σε ιδιωτικά σχολεία που έχουν συμβληθεί με το κράτος το υπόλοιπο 17%. Τα ιδιωτικά σχολεία χρηματοδοτούνται από το Γαλλικό κράτος και είναι υποχρεωμένα να λειτουργούν εντός του δημόσιου εκπαιδευτικού νομοθετικού πλαισίου. Πολύ λίγοι μαθητές φοιτούν σε ανεξάρτητα ιδιωτικά σχολεία. Σε κάθε περίπτωση τα πτυχία και τα διπλώματα χορηγούνται κατόπιν εξετάσεων του Γαλλικού δημοσίου.

Το εκπαιδευτικό σύστημα είναι ουδέτερο σε όλα τα επίπεδα. Εκπαιδευτικοί και μαθητές καλούνται να επιδεικνύουν πολιτική, θρησκευτική και φιλοσοφική ουδετερότητα.

Η εκπαίδευση είναι υποχρεωτική (από το 1882 για το δημοτικό) για όλα τα παιδιά από την ηλικία των 6 έως 16 ετών. Από το σχολικό έτος 2019-2020 η υποχρεωτική εκπαίδευση ξεκινά από την ηλικία των 3 ετών (νηπιαγωγείο).

[Πρωτοβάθμια εκπαίδευση]

Στα δημοτικά σχολεία (Écoles élémentaires) εγγράφονται τα παιδιά στην ηλικία των 6 ετών και φοιτούν για 5 χρόνια έως το 11ο έτος της ηλικίας τους. Η ευθύνη της διαχείρισης και συντήρησης των σχολικών κτιρίων (γενικά της σχολικής περιουσίας) ανήκει στους Δήμους, ενώ το υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Νεολαίας είναι υπεύθυνο για την εκπαιδευτική διαδικασία (προγράμματα σπουδών, εκπαιδευτικό προσωπικό, θέματα σχολικής ζωής κλπ). Το πρόγραμμα σπουδών είναι δομημένο σε δύο κύκλους:

Ο κύριος κύκλος διδασκαλίας (3 χρόνια) :

1ο έτος: Προπαρασκευαστική τάξη (CP – courspreparatoire)

2ο έτος: Στοιχειώδη 1η τάξη (CE1 – cours élémentaire 1).

3ο έτος: Στοιχειώδη 2η τάξη τάξη (CE2 – cours élémentaire 2).

Ο κύκλος ενοποίησης (2 χρόνια) :

4ο έτος: 1η Μέση τάξη (CM1 – cours moyen 1).

5ο έτος: 2η Μέση τάξη (CM2 – cours moyen 2).

Ο κύκλος ενοποίησης ολοκληρώνεται στην 1η τάξη του Κολεγίου.

Από το σχολικό έτος 2018-2019 οι μαθητές που τελειώνουν το 1ο και το 30 έτος του δημοτικού σχολείου (CP και CE2) αξιολογούνται συμπληρώνοντας ένα τυποποιημένο φύλλο εξετάσεων που εκδίδει το υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Νεολαίας, ώστε να αποκτούν και οι εκπαιδευτικοί μια καλύτερη και σταθμισμένη στην Γαλλική επικράτεια εικόνα.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση]

Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση διαρκεί 7 έτη, ξεκινώντας από την ηλικία των 11 ετών και τελειώνοντας στα 18 έτη τους, από το 6ο έτος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης (Sixième – ISCED 2) έως το τελευταίο (Terminale – ISCED 3). Χωρίζεται σε δύο επίπεδα εκπαίδευσης:

Κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση που διαρκεί 4 έτη και παρέχεται από τα κολλέγια (Collèges) και Ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (3 έτη), που παρέχεται στα Λύκεια (Lycées).

Το κολλέγιο αντιστοιχεί στη βαθμίδα ISCED 2 και οι τάξεις του χαρακτηρίζονται από την έναρξη ως τη λήξη της φοίτησης όπως και τα χρόνια της υποχρεωτικής φοίτησης δηλαδή ως 6η,5η, 4η και 3η. Το πρόγραμμά του αποτελείται από 26 ώρες υποχρεωτικών μαθημάτων και συμπληρώνεται με μαθήματα επιλογής.

Στη βαθμίδα του κολεγίου, όπως και στις υπόλοιπες η εκπαιδευτική πολιτική χαράσσεται κεντρικά από το υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Νεολαίας και αφορά όλα τα επίπεδα της εκπαιδευτικής διαδικασίας (προγράμματα σπουδών, εκπαιδευτικό προσωπικό κλπ). Ως εκ τούτου, τα κολέγια διαθέτουν διοικητική, οικονομική και εκπαιδευτική αυτονομία, εντός των ορίων που θέτει η ισχύουσα εκπαιδευτική νομοθεσία. Σε κάθε κολέγιο το όργανο λήψης αποφάσεων είναι το Σχολικό Συμβούλιο στο οποίο προΐσταται ο διευθυντής του σχολείου. Το Σχολικό Συμβούλιο εκτός των άλλων είναι υπεύθυνο για την οικονομική διαχείριση του προϋπολογισμού του σχολείου και την κατάρτιση του σχολικού σχεδίου. Τα Διαμερίσματα είναι υπεύθυνα για την κατασκευή και συντήρηση των σχολικών κτιρίων των κολεγίων, για την μεταφορά των μαθητών από και προς αυτά, για την χορήγηση του απαραίτητου εξοπλισμού, για τη πρόσληψη και διαχείριση του τεχνικού προσωπικού κλπ.

Η αξιολόγηση των μαθητών γίνεται τριμηνιαία και ετήσια. Οι γονείς κάθε χρόνο υποβάλλουν αίτημα μετάβασης στην επόμενη τάξη του κολεγίου ή αίτημα επανάληψης τάξης. Με τα αιτήματα των γονέων πρέπει να συμφωνήσει το συμβούλιο τάξης του κάθε μαθητή. Σε περίπτωση διαφωνίας την απόφαση λαμβάνει ο διευθυντής του σχολείου. Στο τέλος του κολεγίου οι μαθητές μπορούν να δώσουν εξετάσεις για την απόκτηση του διπλώματος Le diplôme national du brevet. Είναι ένα δίπλωμα που πιστοποιεί τις γνώσεις και τις δεξιότητες που έχουν αποκτηθεί στο τέλος του κολλεγίου και δεν αποτελεί προαπαιτούμενο για την περαιτέρω εξέλιξη του μαθητή στην εκπαιδευτική διαδικασία, δηλαδή την εγγραφή στο Λύκειο.

Στην τελευταία τάξη του κολεγίου, έπειτα από διαδικασίες επαγγελματικού προσανατολισμού, επιπλέον συνέντευξης του μαθητή με τον υπεύθυνο εκπαιδευτικό, αλλά και πρότασης του συμβουλίου τάξης, λαμβάνεται η απόφαση από τους γονείς των μαθητών για το είδος του λυκείου που θα συνεχίσει την φοίτηση ο μαθητής. Η εγγραφή στα Λύκεια γίνεται χωρίς εξετάσεις. Η βαθμίδα του Λυκείου διαρκεί τρία χρόνια σε όλους τους τύπους Λυκείων (ISCED 3). Οι επιλογές που υπάρχουν είναι ένας από τους τρεις τύπους Λυκείων:

1. Λογοτεχνικό
2. Οικονομικό και Κοινωνικό
3. Επιστημονικό

Το Γενικό και Τεχνολογικό Λύκειο ολοκληρώνεται σε τρεις τάξεις (Seconde, Première, Terminale).
Τα τρία πεδία έχουν ένα κορμό μαθημάτων Γενικής παιδείας (ξεκινούν στην Α' τάξη σε ποσοστό 60% και ελαττώνονται έως 30% στην τελευταία τάξη) και διαφοροποιούνται σε μαθήματα του κάθε πεδίου. Βασικός σκοπός του Γενικού και Τεχνολογικού Λυκείου είναι η απόκτηση γενικής παιδείας, η απόκτηση του διπλώματος Baccalauréat και η συνέχιση των σπουδών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.
Η αξιολόγηση των μαθητών περιλαμβάνει γραπτές εξετάσεις των οποίων η διάρκεια και η συχνότητα είναι θέμα εκτίμησης του κάθε εκπαιδευτικού. Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης των μαθητών αποστέλλονται στις οικογένειες στο τέλος κάθε τριμήνου. Στην τελευταία τάξη (Terminale) διεξάγονται προσομοιωτικές εξετάσεις για το απολυτήριο (Baccalauréat). Το Baccalauréat περιλαμβάνει υποχρεωτικές γραπτές και προφορικές εξετάσεις με μεταβλητούς συντελεστές ανάλογα τον τύπο του.
Επαγγελματικό Λύκειο. Οι μαθητές στο Επαγγελματικό Λύκειο έχουν να επιλέξουν μεταξύ οκτώ Τομέων σπουδών και αρκετών ειδικοτήτων. Οι Τομείς σπουδών των Γαλλικών Επαγγελματικών Λυκείων είναι:

1. Βιομηχανίας της επιστήμης και της τεχνολογίας και της αειφόρου ανάπτυξης (STI2D)
2. Επιστήμη και τεχνολογία του σχεδιασμού και των εφαρμοσμένων τεχνών (STD2A)
3. Επιστήμες και τεχνολογίες διαχείρισης (STMG)
4. Υγείας και κοινωνικών επιστημών και τεχνολογιών (ST2S)
5. Εργαστήριο Επιστήμης και Τεχνολογίας (STL)
6. Τεχνικές μουσικής και χορού (TMD), υπό κοινό έλεγχο μεταξύ του Υπουργείου Παιδείας και του πολιτισμού και της επικοινωνίας
7. Φιλοξενίας (Τουριστικός)
8. Γεωργικός τομέας. Ο Τομέας λειτουργεί σε Λύκεια υπό την εποπτεία του Υπουργείου Γεωργίας και αποδίδει στους απόφοιτούς του Πτυχίο Τεχνικού Γεωπονίας.

Γενικά η Επαγγελματική Εκπαίδευση και Κατάρτιση (Ε.Ε.Κ.) στη Γαλλία συγκεντρώνει περίπου το 40% του μαθητικού δυναμικού, κάτω από το μέσο όρο της ΕΕ.
Στη Γαλλία το 75% των αποφοίτων της δευτεροβάθμιας Επαγγελματικής Εκπαίδευσης απορροφάται από την αγορά εργασίας.
Το επίπεδο μεταδευτεροβάθμιας (μη τριτοβάθμιας) εκπαίδευσης στη Γαλλία είναι σχεδόν ανύπαρκτο.

[Η τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Όποιος δεν διαθέτει δίπλωμα baccalauréat, αλλά θέλει να συνεχίσει τις σπουδές του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση πρέπει να αποκτήσει το δίπλωμα πρόσβασης στις πανεπιστημιακές σπουδές (Le Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires (D.A.E.U.), το οποίο εκδίδεται ύστερα από επιτυχή εξεταστική διαδικασία που οργανώνουν τα ίδια τα Πανεπιστήμια.
Η τριτοβάθμια εκπαίδευση στη Γαλλία σε γενικές γραμμές διακρίνεται:

1. Στις Μεγάλες Σχολές (Grandes écoles)
2. Στα Πανεπιστημιακά Ινστιτούτα Τεχνολογίας (Institut universitaire de technologie – IUT)
3. Στους Τομείς για Ανώτερους Τεχνικούς (Sections pour Techniciens Supérieurs – STS).

Καθοριστικό κριτήριο για την πρόσβαση σε κάθε σχολή της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη Γαλλία, είναι ο βαθμός του διπλώματος Baccalauréat. Ανάλογα με το είδος και την κατεύθυνση των σπουδών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση άρα και το είδος του διπλώματος Baccalauréat που διαθέτει ένας μαθητής, έχει και αντίστοιχο εύρος επιλογών πανεπιστημιακών σχολών που συνάδουν με αυτή τη κατεύθυνση. Η πρόσβαση σε σχολές υψηλού κύρους, προϋποθέτουν υψηλή βαθμολογία στο Baccalauréat, γεγονός που επιτρέπει, με μεγάλες πιθανότητες σε αυτούς τους μαθητές να συνεχίσουν στην τριτοβάθμια

εκπαίδευση και να ολοκληρώσουν με επιτυχία το διετές πρόγραμμα τάξεων προετοιμασίας σπουδών στην τριτοβάθμια (Classe préparatoire aux grandes écoles).
Μια ξεχωριστή περίπτωση είναι οι ιατρικές σχολές. Η πρόσβαση σε αυτές είναι αρχικά ελεύθερη. Όμως ο αριθμός των φοιτητών που θα συνεχίσουν στο 2ο έτος είναι συγκεκριμένος και περιορισμένος. Έτσι στο τέλος του 1ου έτους οι εξετάσεις και τα φίλτρα επιλογής είναι πολύ σκληρά και απορρίπτουν τους περισσότερους φοιτητές, που συνεχίζουν συνήθως σε άλλες σχολές του τομέα Υγείας (πχ Νοσηλευτική).
Η Γαλλία έχει υιοθετήσει τη συνθήκη της Μπολόνια και έτσι αποδίδει στην τριτοβάθμια εκπαίδευση πτυχίο με διάρκεια σπουδών 3 ετών, μεταπτυχιακό με συνολική διάρκεια 5 ετών και διδακτορικό με συνολική διάρκεια σπουδών 8 ετών.
Στη τριτοβάθμια εκπαίδευση οι φοιτητές πληρώνουν δίδακτρα, περισσότερο συμβολικά. Συγκεκριμένα τα ετήσια δίδακτρα σε επίπεδο πτυχίου (Bachelor) είναι 184 € για το πρώτο πτυχίο και 122 € για το δεύτερο πτυχίο. Αντίστοιχα οι μεταπτυχιακές σπουδές έχουν πλήρη ετήσια δίδακτρα 256 € και 186 € τα μειωμένα και τέλος οι διδακτορικές έχουν σπουδές αντίστοιχα ετήσια δίδακτρα 391 € και 260 € τα μειωμένα. Ταυτόχρονα μέσα από την φορολογική πολιτική προβλέπονται εκπτώσεις φόρου που αντισταθμίζουν τα δίδακτρα σε ένα βαθμό. Υπάρχουν πανεπιστημιακές σχολές χωρίς δίδακτρα και άλλες υψηλού κύρους με λίγο μεγαλύτερα από τα προαναφερθέντα (πχ η Ιατρική στα τελευταία έτη διαφοροποιείται με ετήσια δίδακτρα 512 €). Με αυτόν τον τρόπο τα νοικοκυριά καλύπτουν το 9,5 % της χρηματοδότησης της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, το 10,7% καλύπτει η τοπική αυτοδιοίκηση, το 8,8% οι επιχειρήσεις και το μεγάλο ποσοστό καλύπτει το κράτος που εξακολουθεί να είναι ο κύριος χρηματοδότης παρέχοντας το 67,9% της συνολικής χρηματοδότησης.

[Τα καλύτερα δημόσια πανεπιστήμια στη Γαλλία]

1. Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου
2. Πανεπιστήμιο της Σορβόννης
3. Πανεπιστήμιο του Μονπελιέ
4. Ècole Normale Supérieure de Lyon
5. Πανεπιστήμιο Paris Cité
6. Université Paris-Saclay
7. Université de Bordeaux
8. Πανεπιστήμιο της Λιλ
9. Πολυτεχνική Σχολή
10. Πανεπιστήμιο Aix-Marseille
11. Πανεπιστήμιο της Βουργουνδίας
12. Paris Sciences et Lettres Université
13. Telecom Παρίσι
14. Πανεπιστήμιο της Γκρενόμπλ Άλπεις
15. Πανεπιστήμιο Claude Bernard Lyon 1.

[Ύλη]

Το τεστ εισαγωγής στα μαθηματικά βασίζεται στο πρόγραμμα French Baccalaureate (Επίπεδο 2, ειδικότητα μαθηματικών). Το πρόγραμμα περιλαμβάνει τέσσερα κύρια θέματα: άλγεβρα και γεωμετρία, ανάλυση, θεωρία πιθανοτήτων και αλγόριθμοι.
Άλγεβρα και Γεωμετρία
Συνδυαστική και καταμέτρηση. Προσθετικές και πολλαπλασιαστικές αρχές. Καρτεσιανό γινόμενο. Καταμέτρηση k-πλειάδων από μια συλλογή διακριτών ή μη διακριτών στοιχείων. Παραλλαγές. Καταμέτρηση συνδυασμών. Το τρίγωνο του Πασκάλ και ο κανόνας του Πασκάλ. Γεωμετρία στο διάστημα Βάσεις και συστήματα συντεταγμένων στο διάστημα. Διανυσματικός λογισμός στο χώρο: γραμμικοί συνδυασμοί. Συστήματα παραμετρικών εξισώσεων γραμμών και επιπέδων. Ορθογωνικότητα στο χώρο και υπολογισμός αποστάσεων. Βαθμωτό γινόμενο και ιδιότητες. Διάνυσμα κανονικό σε ένα επίπεδο. Καρτεσιανή εξίσωση ενός επιπέδου. Ορθογώνια προβολή. Σύνολα και λογική Ιδιότητα μέλους,

σύνολα, στοιχεία, συμπερίληψη. Ένωση, τομή. Ισοδυναμία και αντίστροφο μιας πρότασης. Διαχωρισμός υποθέσεων. Reductio ad absurdum (εις άτοπον απαγωγή).

Ανάλυση

Ακολουθίες και επαγωγή Μαθηματική επαγωγή (Αρχή συλλογισμού με επαγωγή). Ορισμός της σύγκλισης και απόκλισης μιας ακολουθίας. Υπολογισμός ορίων, όρια συναρτήσεων. Συναρτήσεις: όριο, συνέχεια, παράγωγοι. Όριο μιας συνάρτησης. Συνέχεια μιας συνάρτησης. Εικόνα ενός διαστήματος. Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Παράγωγος μιας σύνθετης συνάρτησης. Δεύτερη παράγωγος. Κυρτότητα. Σημείο καμπής. Αύξουσες/φθίνουσες συναρτήσεις. Ορισμός συνάρτησης λογαρίθμου. Ιδιότητες και χαρακτηριστικές σχέσεις Όρια και παράγωγοι. Μελέτη συναρτήσεων που περιλαμβάνουν εκθετικούς και λογαρίθμους. Συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου Εξισώσεις του τύπου $\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$; Ανισώσεις του τύπου $\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{\alpha}$. Μελέτη τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Παράγωγοι, διακυμάνσεις, αντιπροσωπευτικές καμπύλες. Διαφορικές εξισώσεις Διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}$ όπου $\boldsymbol{f}$ είναι μια δεδομένη συνάρτηση. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ($\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{ay}$ και $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{ay} + \boldsymbol{b}$). Ολοκληρωτικός λογισμός Ορισμός του ολοκληρώματος. Τύπος $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$. Υπολογισμός ολοκληρωμάτων. Ιδιότητες ολοκληρωμάτων (γραμμικότητα, ολοκλήρωση ανισότητας, σχέση Chasles και ποικίλα θεωρήματα). Ολοκλήρωση κατά μέρη. Μέση τιμή μιας συνάρτησης.

Θεωρία Πιθανοτήτων

Διακριτές πιθανότητες Διαδοχή ανεξάρτητων δοκιμών. Διαδικασία Bernoulli. Διωνυμική κατανομή. Τυχαίες μεταβλητές, μέση τιμή, Άθροισμα τυχαίων μεταβλητών. Μέση τιμή, διακύμανση, τυπική απόκλιση. Γραμμικότητα της μέσης τιμής. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{aX}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})$. Προσδοκία και διακύμανση της διωνυμικής κατανομής. Συγκέντρωση, ο νόμος των μεγάλων αριθμών ανισότητα Bienayme-Chebyshev. Ανισότητα συγκέντρωσης Νόμος μεγάλων αριθμών.

Αλγόριθμοι και αλγόριθμοι λογικής σκέψης

Η έννοια των μεταβλητών, οι τύποι μεταβλητών, η ανάθεση, οι υπό όρους οδηγίες, οι βρόχοι, η έννοια των λιστών (π.χ. προσθήκη ή διαγραφή στοιχείων, επαναληπτικές μέθοδοι), ... Λογική σκέψη Πάρτε αποφάσεις και αιτιολογήστε με συνεκτικό τρόπο. Γενικές δεξιότητες λογικού συλλογισμού: Παραγωγικός, απαγωγικός και επαγωγικός συλλογισμός.

BACCALAUREAT GENERAL - Métropole 1
SESSION 2023
MATHEMATIQUES
Δευτέρα 20 Μαρτίου 2023
Διάρκεια δοκιμής: 4 ώρες
Η χρήση της αριθμομηχανής σε λειτουργία εξέτασης επιτρέπεται. Επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής «κολεγιακού τύπου» χωρίς μνήμη.
Ο υποψήφιος πρέπει να ολοκληρώσει τις τέσσερις ασκήσεις που προτείνονται.

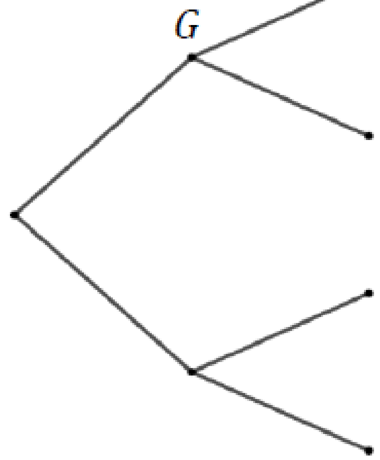
Άσκηση 1 (5 βαθμοί)

Αυτή η άσκηση είναι ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών.
Για κάθε ερώτηση, μόνο μία από τις τέσσερις απαντήσεις που προτείνονται είναι σωστή. Ο υποψήφιος θα αναφέρει στο χαρτί του τον αριθμό της ερώτησης και την απάντηση που έχει επιλέξει. Δεν ζητείται αιτιολόγηση.
Δεν αφαιρούνται βαθμοί σε περίπτωση μη απάντησης ή σε περίπτωση ανακριβούς απάντησης. Οι ερωτήσεις είναι ανεξάρτητες.

Ένας τεχνικός ελέγχει τα μηχανήματα που εξοπλίζουν μια μεγάλη εταιρεία. Όλα αυτά τα μηχανήματα είναι πανομοιότυπα.
Ξέρουμε ότι:
- Το 20% των μηχανών είναι υπό εγγύηση.
- Το 0,2% των μηχανών είναι ελαττωματικά και υπό εγγύηση.
- Το 8,2% των μηχανημάτων είναι ελαττωματικά.

Ο τεχνικός δοκιμάζει ένα μηχάνημα τυχαία.
Λαμβάνουμε υπόψη τα ακόλουθα γεγονότα:
- $\boldsymbol{G}$: "Το μηχάνημα είναι υπό εγγύηση" (garantie)
- $\boldsymbol{D}$: "Το μηχάνημα είναι ελαττωματικό" (défectueuse)
- $\overline{\boldsymbol{G}}, \overline{\boldsymbol{D}}$ οι αρνήσεις των γεγονότων $\boldsymbol{G}$ και $\boldsymbol{D}$, αντίστοιχα.

Για να απαντήσουμε στις ερωτήσεις 1 έως 3, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το δέντρο που φαίνεται.



1. Η πιθανότητα $\boldsymbol{p_G(D)}$ να συμβεί το γεγονός $\boldsymbol{D}$ δεδομένου ότι έχει συμβεί το $\boldsymbol{G}$ είναι ίση με:
   a. 0,002 b. 0,01 c. 0,024 d. 0,2
2. Η πιθανότητα $\boldsymbol{p(\overline{G} \cap D)}$ είναι ίση με:
   a. 0,01 b. 0,08 c. 0,1 d. 0,21
3. Το μηχάνημα είναι ελαττωματικό. Η πιθανότητα να είναι υπό εγγύηση είναι περίπου ίση, με ακρίβεια $\boldsymbol{10^{-3}}$, με:
   a. 0,01 b. 0,024 c. 0,082 d. 0,1

Για τις ερωτήσεις 4 και 5 επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα $\boldsymbol{n}$ μηχανήματα της εταιρείας, όπου $\boldsymbol{n}$ δηλώνει μη μηδενικό φυσικό αριθμό. Κάνουμε αυτήν την επιλογή με αντικατάσταση και προσδιορίζουμε με την τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ που συσχετίζει με κάθε παρτίδα $\boldsymbol{n}$ μηχανών τον αριθμό των ελαττωματικών μηχανών σε αυτήν την παρτίδα.
Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{p = 0,082}$.

4. Σε αυτήν την ερώτηση, παίρνουμε $\boldsymbol{n = 50}$.
   Η τιμή της πιθανότητας $\boldsymbol{p(X > 2)}$, στρογγυλοποιημένη στο πλησιέστερο χιλιοστό, είναι:
   a. 0,136 b. 0,789 c. 0,864 d. 0,924
5. Θεωρούμε έναν ακέραιο $\boldsymbol{n}$ για τον οποίο η πιθανότητα να λειτουργούν σωστά όλα τα $\boldsymbol{n}$ μηχανήματα σε μέγεθος παρτίδας είναι μεγαλύτερη από $\boldsymbol{0,4}$. Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{n}$ είναι ίση με:
   a. 5 b. 6 c. 10 d. 11

Λύση

Έχω ότι $\boldsymbol{p(G) = 0,2}$ $\boldsymbol{p(G \cap D) = 0,002}$, $\boldsymbol{p(D) = 0,082, X \sim \mathcal{B}(n;p) \Longrightarrow (X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

1. Έχω $\boldsymbol{p_G(D) = \frac{p(G\cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01}$. Άρα b
2. $\boldsymbol{p(\overline{G} \cap D) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08}$. Άρα b.
3. Έχω $\boldsymbol{p_D(G) = \frac{p(G\cap D)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} = 0,0244 \cong 0,024}$. Άρα b
4. Έχω $\boldsymbol{p(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - (1 - 0,082)^{50} - 50 \times 0,082 \times (1 - 0,082)^{49} - \frac{50\times 49}{2} 0,082^2 \times (1 - 0,082)^{48} = 1 - 0.0138 - 0,0619 - 0,1355 = 0,7888 \simeq 0,789}$. Άρα b
5. Έχω $\boldsymbol{P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,082^0 \times (1 - 0,082)^n = (1 - 0,082)^n}$. Θέλω $\boldsymbol{P(X = 0) > 0,4 \Leftrightarrow (1 - 0,082)^n > 0,4 \Leftrightarrow n\log(1 - 0,082) > \log(0,4) \Leftrightarrow n\log(0,918) > \log(0,4) \Leftrightarrow n < \frac{\log(0,4)}{\log(0,918)} \simeq 10,7 \Longrightarrow n \leq 10}$. Άρα c

Άσκηση 2 (5 βαθμοί)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ που ορίζεται στο $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ με $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 8\ln(x)}$, οπού το $\boldsymbol{ln}$ δηλώνει τη συνάρτηση φυσικού λογάριθμου.

Παραδεχόμαστε ότι η $\boldsymbol{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{(0,+\infty)}$, σημειώνουμε με $\boldsymbol{f'}$ την παράγωγο συνάρτησή της.

1. Προσδιορίστε το $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x)}$
2. Παραδεχόμαστε ότι, για τα $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{f(x) = x^2\left(1 - 8\frac{ln(x)}{x^2}\right)}$. Βρείτε το όριο: $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$
3. Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό του $\boldsymbol{(0,+\infty)}$, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x}}$
4. Μελετήστε τις μεταβολές της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ και συντάξτε τον πίνακα μεταβολών της. Καθορίστε την ακριβή τιμή του ελάχιστου της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{(0,+\infty)}$.
5. Να αποδείξετε ότι, στο διάστημα $\boldsymbol{(0,2]}$, η εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$ δέχεται μια λύση μοναδική $\boldsymbol{\alpha}$ (δεν θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$).
6. Παραδεχόμαστε ότι, στο διάστημα $\boldsymbol{[2,+\infty)}$, η εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$ δέχεται μια λύση μοναδική $\boldsymbol{\beta}$ (δεν θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την τιμή του $\boldsymbol{\beta}$). Συναγάγετε το πρόσημο της $\boldsymbol{f}$ στο διάστημα $\boldsymbol{(0,+\infty)}$.
7. Για οπουδήποτε πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{k}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{g_k}$ που ορίζεται στο $\boldsymbol{(0,+\infty)}$ από: $\boldsymbol{g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k}$
   Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μεταβολών της $\boldsymbol{f}$, προσδιορίστε τη μικρότερη τιμή του οποίου $\boldsymbol{k}$, ώστε η συνάρτηση $\boldsymbol{g_k}$να είναι θετική στο διάστημα $\boldsymbol{(0,+\infty)}$.

Λύση

1. Έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 8 \times (-\infty) = \boxed{+\infty}}$
2. Έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - 8\frac{ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \times (1 - 8 \times 0) = \boxed{+\infty}}$, αφού $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0}$
3. Έχω $\boldsymbol{f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2-8}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}}$
4. Έχω τον παρακάτω πίνακα μεταβολών.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(2) = 4 - 8ln2$	↗	$+\infty$

5. Γνωρίζουμε ότι:
   — η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{(0,2]}$
   — η $\boldsymbol{f}$ είναι φθίνουσα στο $\boldsymbol{(0,2]}$, άρα 1-1 στο $\boldsymbol{(0,2]}$
   — $\boldsymbol{[f(2), f(0))= [4 - 8ln(2), +\infty)}$ με $\boldsymbol{4 - 8ln(2) = 4(1 - 2ln2) = 4(lne - ln4) < 0}$ και επομένως $\boldsymbol{0 \in [f(2), f(0))}$. Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, η εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$ δέχεται μία μόνο λύση, $\boldsymbol{\alpha}$, στο $\boldsymbol{(0,2]}$.
6. Γνωρίζουμε ότι:

— η $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $[\mathbf{2}, +\infty)$

— η $\boldsymbol{f}$ είναι αύξουσα στο $[\mathbf{2}, +\infty)$, άρα 1-1 στο $[\mathbf{2}, +\infty)$

— $\left[\boldsymbol{f}(\mathbf{2}), \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) = [\mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}), +\infty)$ με $\mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) < \mathbf{0}$ και επομένως $\mathbf{0} \in \left[\boldsymbol{f}(\mathbf{2}), \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, η εξίσωση $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ δέχεται μία μόνο λύση, $\boldsymbol{\beta}$, στο $[\mathbf{2}, +\infty)$.

Άρα ο πίνακας προσήμων της f είναι

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Έχω ότι στο διάστημα $(\mathbf{0}, +\infty)$, ισχύει $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2})$. Άρα $\boldsymbol{g_k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k} \geq \mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) + \boldsymbol{k}$. Άρα η $\boldsymbol{g_k}$ έχει ελάχιστο το $\mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) + \boldsymbol{k}$ που θέλω να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Δηλαδή, $\mathbf{4} - \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) + \boldsymbol{k} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{k} \geq \mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) - \mathbf{4}$. Άρα η μικρότερη τιμή του k που απαιτείται είναι η $\boxed{\mathbf{8}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}) - \mathbf{4}}$

Άσκηση 3 (5 βαθμοί)

Μία εταιρεία έχει δημιουργήσει ένα ερωτηματολόγιο FAQ («Συχνές Ερωτήσεις») στον ιστότοπό της. Μελετάμε τον αριθμό των ερωτήσεων που γίνονται κάθε μήνα.

Μέρος Α: Πρώτη μοντελοποίηση

Σε αυτό το μέρος, υποθέτουμε ότι, κάθε μήνα:

- Το 90% των ερωτήσεων που τέθηκαν ήδη τον προηγούμενο μήνα διατηρούνται στις Συχνές Ερωτήσεις.
- 130 νέες ερωτήσεις προστίθενται στις Συχνές Ερωτήσεις.

Τον πρώτο μήνα έγιναν 300 ερωτήσεις.

Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των ερωτήσεων, σε εκατοντάδες, που υπάρχουν στις Συχνές Ερωτήσεις τον $\boldsymbol{n}$-οστό μήνα, μοντελοποιούμε την παραπάνω κατάσταση χρησιμοποιώντας την ακολουθία $(\boldsymbol{u_n})$ που ορίζεται ως εξής: $\boldsymbol{u_1 = 3}$ και, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 1, u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3}$.

1. Υπολογίστε τους όρους $\boldsymbol{u_2}$ και $\boldsymbol{u_3}$ και προτείνετε μία ερμηνεία στο πλαίσιο της άσκησης.
2. Δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 1}$: $\boldsymbol{u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n}$
3. Να συμπεράνετε ότι η ακολουθία $(\boldsymbol{u_n})$ είναι αύξουσα.
4. Σκεφτείτε το πρόγραμμα απέναντι, γραμμένο σε Python. Προσδιορίστε την τιμή που επιστρέφεται από την seuil(8.5) και ερμηνεύστε την στο πλαίσιο της άσκησης.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Μέρος Β: Άλλο μια μοντελοποίηση

Σε αυτό το μέρος, εξετάζουμε μια δεύτερη μοντελοποίηση χρησιμοποιώντας μια νέα ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ που ορίζεται για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 1}$: $\boldsymbol{v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19\times(n-1)}}$

Ο όρος $\boldsymbol{v_n}$ είναι μια εκτίμηση του αριθμού των ερωτήσεων, σε εκατοντάδες, που υπάρχουν στο n-οστό μήνα στις Συχνές Ερωτήσεις.

1. Καθορίστε τιμές $\boldsymbol{v_1}$ και $\boldsymbol{v_2}$ στρογγυλεμένες στο εκατοστό.
2. Προσδιορίστε, αιτιολογώντας την απάντηση, τη μικρότερη τιμή του $\boldsymbol{n}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{v_n > 8,5}$

Μέρος Γ: Σύγκριση των δύο μοντέλων

1. Η εταιρεία θεωρεί ότι πρέπει να τροποποιήσει την παρουσίαση του site της όταν υπάρχουν περισσότερες από 850 ερωτήσεις στο FAQ. Μεταξύ αυτών των δύο μοντέλων, ποιο οδηγεί νωρίτερα σ' αυτή την τροποποίηση;
   Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Αιτιολογώντας την απάντηση, για ποια μοντελοποίηση υπάρχει ο μεγαλύτερος αριθμός ερωτήσεων σχετικά με τις μακροπρόθεσμες συχνές ερωτήσεις;

Λύση

Μέρος Α

1. Έχω $\boldsymbol{u_1 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4}$ και $\boldsymbol{u_2 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 4,9}$. Στον 2ο μήνα, το μοντέλο προβλέπει **400** ερωτήσεις ενώ στον 3ο μήνα προβλέπει **490**.
2. Για $\boldsymbol{n = 1}$, έχω $\boldsymbol{u_1 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9 = 13 - 10 = 3}$ ισχύει.
   Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k}$, οπότε έχω $\boldsymbol{u_k = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^k}$
   Θα δείξω ότι ισχύει και για $\boldsymbol{n = k + 1}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{u_{k+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{k+1}}$. Πράγματι, έχω $\boldsymbol{u_{k+1} = 0,9u_k + 1,3 = 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^k\right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{k+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{k+1}}$.
   Από το νόμο της επαγωγής δείξαμε για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n \geq 1}$ ισχύει: $\boldsymbol{u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n}$
3. Έχω $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = -\frac{100}{9} \times (0,9^{n+1} - 0,9^n) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \frac{10}{9} \times 0,9^n = 0,9^{n-1} \geq 0}$. Άρα αύξουσα.

4. Το πρόγραμμα επιστρέφει τον πρώτο ακέραιο αριθμό με την ιδιότητα $\boldsymbol{u_n > p}$. Στην περίπτωση αυτή, $\boldsymbol{u_n > 8.5 \Leftrightarrow 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \Leftrightarrow \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \Leftrightarrow 0,9^n < 4,5 \times 0,09 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,405 \Leftrightarrow n\log(0,9) < \log(0,405) \Leftrightarrow n > \frac{\log(0,405)}{\log(0,9)} \Leftrightarrow n > 8,57}$. Άρα επιστρέφει τον αριθμό $\boxed{\boldsymbol{n = 9}}$

Μέρος Β

1. Έχω $\boldsymbol{v_1 = 9 - 6 =} \boxed{\boldsymbol{3,00}}$ και $\boldsymbol{v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq} \boxed{\boldsymbol{4,04}}$.
2. Έχω $\boldsymbol{9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \Leftrightarrow e^{-0,19(n-1)} > \frac{0,5}{6} \Leftrightarrow -0,19(n-1) > \ln(12) \Leftrightarrow n > 1 + \frac{\ln(12)}{0,19} \simeq 14,078}$. Άρα η μικρότερη τιμή του $\boldsymbol{n}$ είναι η $\boxed{\boldsymbol{n = 15}}$

Μέρος Γ

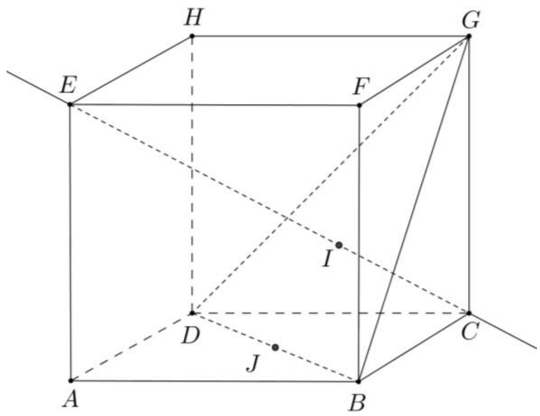
1. Από τις ερωτήσεις Α.4 και Β.2 προκύπτει ότι το πρώτο μοντέλο υπερβαίνει τις 850 ερωτήσεις τον 9ο μήνα, ενώ το δεύτερο τις υπερβαίνει τον 15ο μήνα. Επομένως, η πρώτη μοντελοποίηση οδηγεί στην πιο γρήγορη αλλαγή του site.
2. Έχω $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0 = 13}$, αφού για $\boldsymbol{-1 < q < 1}$, $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} q^n = 0}$. Από την άλλη έχω $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n = 9 - 6 \times 0 = 9}$, αφού $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0}$. Άρα η 1η μοντελοποίηση προβλέπει ότι μακροπρόθεσμα οι περισσότερες ερωτήσεις να είναι το πολύ $\boxed{\boldsymbol{1300}}$, ενώ η 2η μοντελοποίηση προβλέπει μόνο $\boxed{\boldsymbol{900}}$.

Άσκηση 4 (5 βαθμοί)

Θεωρούμε τον κύβο $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ με ακμή 1.

Ονομάζουμε $\boldsymbol{I}$ το σημείο τομής του επιπέδου $(\boldsymbol{GBD})$ με την ευθεία $(\boldsymbol{EC})$.

Ο χώρος σχετίζεται με το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $\left(\boldsymbol{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\right)$.



1. Δώστε ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς τις συντεταγμένες των σημείων $\boldsymbol{E, C, G}$.
2. Προσδιορίστε μια παραμετρική παράσταση της ευθείας $(\boldsymbol{EC})$.
3. Αποδείξτε ότι η γραμμή $(\boldsymbol{EC})$ είναι κάθετη στο επίπεδο $(\boldsymbol{GBD})$.
4. α. Να δικαιολογήσετε ότι η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου $(\boldsymbol{GBD})$ είναι: $\boldsymbol{x + y - z - 1 = 0}$.
   b. Δείξτε ότι το σημείο $\boldsymbol{I}$ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$
   c. Να συμπεράνετε ότι η απόσταση από το σημείο $\boldsymbol{E}$ στο επίπεδο $(\boldsymbol{GBD})$ είναι ίση με $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
5. α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\boldsymbol{GBD}$ είναι ισόπλευρο.
   b. Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{GBD}$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σημείο $\boldsymbol{J}$, στη μέση του τμήματος $\boldsymbol{BD}$
6. Να δικαιολογήσετε ότι ο όγκος του τετραέδρου $\boldsymbol{EGBD}$ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$
   Υπενθυμίζουμε ότι ο όγκος ενός τετραέδρου δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h}$ όπου $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ είναι το εμβαδόν μιας βάσης του τετραέδρου και $\boldsymbol{h}$ είναι το ύψος σε σχέση με αυτή τη βάση.

Λύση

1. Έχω $\boldsymbol{E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$
2. Η ευθεία περνά από το σημείο $\boldsymbol{E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης το $\overrightarrow{\boldsymbol{EC}}\boldsymbol{\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}$. Άρα
   $\boldsymbol{\begin{cases}x = 0 + 1t\\ y = 0 + 1t\\ z = 1 - 1t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = t\\ y = t\\ z = 1 - t\end{cases}}$, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

3. Έχω $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{EC}=1\times 0-1\times 1+(-1)\times(-1)=0\Rightarrow \overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{EC}=1\times(-1)+0\times 1+(-1)\times(-1)=0\Rightarrow\overrightarrow{GD}\perp\overrightarrow{EC}$. Άρα η γραμμή (EC) είναι κάθετη στο επίπεδο (GBD).

4. a. Αφού $\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ είναι κάθετο στο επίπεδο (GBD), η εξίσωση του επιπέδου αυτού είναι της μορφής $1x+1y-1z+d=0$. Αφού $B\in(BDG)\Rightarrow x_B+y_B-z_B+d=0\Rightarrow 1+0+0+d=0\Rightarrow d=-1$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου (GBD) είναι η $\boxed{x+y-z-1=0}$.

   b. Έχω ότι το σημείο I είναι η τομή του (BDG) και της ευθείας (EC). Άρα η συντεταγμένες του επαληθεύουν τόσο την καρτεσιανή εξίσωση του (BDG) όσο και την παραμετρική εξίσωση του (EC). Συνεπώς

$$\begin{cases}x_I+y_I-z_I-1 &=0\\x_I &=t_I\\y_I &=t_I\\z_I &=1-t_I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_I+t_I+t_I-1-1 &=0\\x_I &=t_I\\y_I &=t_I\\z_I &=1-t_I\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3t_I &=2\\x_I &=t_I\\y_I &=t_I\\z_I &=1-t_I\end{cases}\Rightarrow t_I=\frac{2}{3}$$

   Άρα $I\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

   c. έχω $d(E,GBD)=\left|\overrightarrow{EI}\right|$ με $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}2/3-0\\2/3-0\\1/3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$. Άρα $d(E,GBD)=\sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. a. Οι τρεις πλευρές του τριγώνου GBD είναι διαγώνιοι τετραγώνων πλευράς 1. Άρα $GB=BD=DG=\sqrt{2}$. Συνεπώς το τρίγωνο GBD είναι ισόπλευρο πλευράς $\alpha=\sqrt{2}$

   b. Έχω για το ισόπλευρο GBD ότι $(GBD)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

6. Το τετράεδρο EGBD έχει για βάση το BDG και σχετικό ύψος EI. Άρα, $V_{EGBD}=\frac{1}{3}(GBD)\times EI=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{1}{3}}$

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL Métropole 2
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
SESSION 2023
MATHÉMATIQUES
Τρίτη 21 Μαρτίου 2023
Διάρκεια: 4 ώρες

Άσκηση 1 (5 βαθμοί)
Αυτή η άσκηση είναι ένα ερωτηματολόγιο πολλαπλών επιλογών.
Για κάθε ερώτηση, μόνο μία από τις τέσσερις απαντήσεις που προτείνονται είναι σωστή. Ο υποψήφιος θα αναφέρει στο χαρτί του τον αριθμό της ερώτησης και την απάντηση που έχει επιλέξει. Δεν ζητείται αιτιολόγηση.
Δεν αφαιρούνται βαθμοί σε περίπτωση μη απάντησης ή σε περίπτωση ανακριβούς απάντησης.
Ένα βιντεοπαιχνίδι έχει μια μεγάλη διαδικτυακή κοινότητα παικτών. Πριν ξεκινήσει ένα παιχνίδι, ο παίκτης πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο «κόσμους»: είτε τον κόσμο A είτε τον κόσμο B.
Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία από την κοινότητα τυχερών παιχνιδιών. Όταν παίζουμε ένα παιχνίδι, υποθέτουμε ότι:
• η πιθανότητα ο παίκτης να επιλέξει τον κόσμο A είναι ίση με $\frac{2}{5}$
• εάν ο παίκτης επιλέξει τον κόσμο A, η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι είναι $\frac{7}{10}$
• η πιθανότητα ο παίκτης να κερδίσει το παιχνίδι είναι $\frac{12}{25}$

Λαμβάνουμε υπόψη τα ακόλουθα γεγονότα:
- A : "Ο παίκτης επιλέγει τον κόσμο A";
- B : "Ο παίκτης επιλέγει τον κόσμο B";
- G : «Ο παίκτης κερδίζει το παιχνίδι».

1. Η πιθανότητα ο παίκτης να επιλέξει τον κόσμο A και να κερδίσει το παιχνίδι είναι ίση με:
   a. $\frac{7}{10}$ b. $\frac{3}{25}$ c. $\frac{7}{25}$ d. $\frac{24}{125}$
2. Η πιθανότητα $P_B(G)$ του γεγονότος G δεδομένου ότι έχει συμβεί το $\mathbf{B}$ είναι ίση με:
   a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{7}{15}$ d. $\frac{5}{12}$

Στην υπόλοιπη άσκηση, ένας παίκτης παίζει **10** διαδοχικά παιχνίδια. Συγκρίνουμε αυτήν την κατάσταση με ένα τυχαίο σχέδιο με αντικατάσταση. Να θυμάστε ότι η πιθανότητα να κερδίσετε ένα παιχνίδι είναι $\frac{12}{25}$.

3. Η πιθανότητα, στρογγυλοποιημένη στο χιλιοστό, ο παίκτης να κερδίσει ακριβώς 6 παιχνίδια ισούται με:
   a. 0,859 b. 0,671 c. 0,188 d. 0,187
4. Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο η πιθανότητα, στρογγυλοποιημένη στο χιλιοστό, ότι ο παίκτης να κερδίσει το πολύ n παιχνίδια, είναι 0,207. Τότε:
   a. $n = 2$ b. $n = 3$ c. $n = 4$ d. $n = 5$
5. Η πιθανότητα ο παίκτης να κερδίσει τουλάχιστον ένα παιχνίδι ισούται με:
   a. $1-\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ b. $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ c. $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ d. $1-\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

Λύση
Έχω $P(A)=\frac{2}{5}, P_A(G)=\frac{7}{10}, P(G)=\frac{12}{25}$

1. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A\cap G)=P(A)\times P_A(G)=\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}=\frac{14}{50}=\frac{7}{25}$ άρα c
2. Έχω $P_B(G)=\frac{P(B\cap G)}{P(B)}=\frac{P(B\cap G)}{1-P(A)}$ με $P(B\cap G)=P(G)-P(A\cap G)=\frac{12}{25}-\frac{7}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$. Άρα $P_B(G)=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{3}$ άρα b.

Έστω ότι το X είναι η τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των επιτυχιών (τον αριθμό των κερδισμένων παιχνιδιών). Έτσι το X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\boldsymbol{X \sim \mathcal{B}(n; p) \Longrightarrow (X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$, με παραμέτρους $\boldsymbol{n = 10, p = \frac{12}{25}}$.

3. Έχω $\boldsymbol{P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 = 210 \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0,188}$ άρα c
4. Η συνάρτηση BinomialCD (X,10, 12, 25) προγραμματίζεται στην αριθμομηχανή . Σύμφωνα με την αριθμομηχανή, $\boldsymbol{P(X \leq 3) \approx 0.207}$. Έτσι, ο φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n}$ για τον οποίο η πιθανότητα, στρογγυλοποιημένη στο πλησιέστερο χιλιοστό, να κερδίσει ο παίκτης το πολύ $\boldsymbol{n}$ παιχνίδια να είναι ίση με 0,207, είναι 3. Άρα b.
5. Έχω $\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{12}{25}\right)^0 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10}}$.

   Άρα $\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - 1 \times 1 \times \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}}$, άρα d.

Άσκηση 2 (5 βαθμοί)

Οι βιολόγοι μελετούν την εξέλιξη ενός πληθυσμού εντόμων σε έναν βοτανικό κήπο.

Στην αρχή της μελέτης ο πληθυσμός ήταν 100.000 έντομα.

Για τη διατήρηση της ισορροπίας του φυσικού περιβάλλοντος, ο αριθμός των εντόμων δεν πρέπει να υπερβαίνει τις 400.000.

Μέρος A: Μελέτη ενός πρώτου μοντέλου στο εργαστήριο

Η παρατήρηση της εξέλιξης αυτών των πληθυσμών εντόμων στο εργαστήριο, ελλείψει οποιοσδήποτε αρπακτικού, δείχνει ότι ο αριθμός των εντόμων αυξάνεται κατά 60% κάθε μήνα.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση, οι βιολόγοι μοντελοποιούν την εξέλιξη του πληθυσμού των εντόμων χρησιμοποιώντας μια ακολουθία $(\boldsymbol{u_n})$ όπου, για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$, το $\boldsymbol{u_n}$ μοντελοποιεί τον αριθμό εντόμων, εκφρασμένο σε εκατομμύρια, στο τέλος των $\boldsymbol{n}$ μηνών. Έχουμε λοιπόν $\boldsymbol{u_0 = 0,1}$.

1. Να αιτιολογήσετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n = 0,1 \times 1,6^n}$.
2. Προσδιορίστε το όριο της ακολουθίας $(\boldsymbol{u_n})$.
3. Προσδιορίστε τον μικρότερο φυσικό αριθμό για τον οποίο $\boldsymbol{u_n > 0,4}$.
4. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, θα διατηρούνταν η ισορροπία του φυσικού περιβάλλοντος; Να αιτιολογήσετε την απάντηση.

Μέρος B: Μελέτη δεύτερου μοντέλου

Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς του φυσικού περιβάλλοντος στο οποίο εξελίσσονται τα έντομα, οι βιολόγοι επιλέγουν ένα νέο μοντέλο.

Μοντελοποιούν τον αριθμό των εντόμων χρησιμοποιώντας την ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$, που ορίζεται $\boldsymbol{v_0 = 0,1}$ και, για όλους τους φυσικούς αριθμούς $\boldsymbol{n, v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2}$, όπου $\boldsymbol{n}$ είναι ο αριθμός των εντόμων σε εκατομμύρια, στο τέλος των $\boldsymbol{n}$ μηνών.

1. Προσδιορίστε τον αριθμό των εντόμων μετά από ένα μήνα.
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ που ορίζεται στο διάστημα $\boldsymbol{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$ με $\boldsymbol{f(x) = 1,6x - 1,6x^2}$.
   a. Λύστε την εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = x}$
   b. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\boldsymbol{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$
3.
   a. Δείξτε επαγωγικά ότι, για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$
   b. Δείξτε ότι η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ είναι συγκλίνουσα.

   Σημειώνουμε με $\boldsymbol{l}$ την τιμή του ορίου του. Παραδεχόμαστε ότι το $\boldsymbol{l}$ είναι λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) = x}$

c. Προσδιορίστε την τιμή του $\boldsymbol{l}$. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, θα διατηρηθεί η ισορροπία του φυσικού περιβάλλοντος; Να αιτιολογήσετε την απάντηση.

4. Παρακάτω είναι η συνάρτηση seuil, γραμμένη σε Python.

a. Τι παρατηρούμε αν εισάγουμε seuil (0,4);

b. Προσδιορίστε την τιμή που επιστρέφεται εισάγοντας το seuil (0,35).

Ερμηνεύστε αυτή την τιμή στο πλαίσιο της άσκησης.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

Λύση

Μέρος Α

1. Κάθε μήνα, ο πληθυσμός των εντόμων στον βοτανικό κήπο αυξάνεται κατά 60%, επομένως πολλαπλασιάζεται επί 1,6. Έτσι, για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = 1,6 \times u_n}$. Έτσι, η ακολουθία $(\boldsymbol{u_n})$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\boldsymbol{\lambda = 1,6}$ και $\boldsymbol{u_0 = 0,1}$. Έτσι, για κάθε φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_n = 0,1 \times 1,6^n}$.
2. Έχω $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{1,6^n} = +\infty$ αφού $\boldsymbol{1,6 > 1}$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty$
3. Έχω $\boldsymbol{u_n > 0,4 \Leftrightarrow 0,1 \times 1,6^n > 0,4 \Leftrightarrow 1,6^n > 4 \Leftrightarrow \ln 1,6^n > \ln 4 \Leftrightarrow n\ln 1,6 > \ln 4 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 4}{\ln 1,6}} \approx \boldsymbol{2,95}$ άρα $\boldsymbol{n \geq 3}$. Έτσι, ο μικρότερος φυσικός αριθμός $\boldsymbol{n}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{u_n > 0,4}$ είναι ο $\boldsymbol{n = 3}$.
4. Σύμφωνα με την προηγούμενη ερώτηση, ο πληθυσμός των εντόμων στον βοτανικό κήπο θα ξεπεράσει τα 0,4 εκατομμύρια έντομα ή 400.000 έντομα μετά από 3 μήνες. Έτσι, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, ΔΕΝ θα διατηρηθεί η ισορροπία του φυσικού περιβάλλοντος.

Μέρος Β

1. Έχω $\boldsymbol{v_1 = 1,6v_0 - 1,6v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144}$ άρα, στο τέλος του πρώτου μήνα, θα υπάρχουν στον βοτανικό κήπο, $\boldsymbol{0,144}$ εκατομμύρια ή $\boldsymbol{144.000}$ έντομα.
2.
   a. Έχω για κάθε $\boldsymbol{x \in \left[0;\frac{1}{2}\right], f(x) = x \Leftrightarrow 1,6x - 1,6x^2 - x = 0 \Leftrightarrow 0,6x - 1,6x^2 = 0 \Leftrightarrow x(0,6 - 1,6x) = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ ή $\boldsymbol{0,6 - 1,6x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}}$ ή $\boxed{\boldsymbol{x = 0,375}}$
   b. Έχω για κάθε $\boldsymbol{x \in \left[0;\frac{1}{2}\right], f'(x) = 1,6 - 3,2x = 3,2\left(\frac{1}{2} - x\right) \geq 0}$. Άρα η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left[\boldsymbol{0,\frac{1}{2}}\right]$
3.
   a. Έχω $\boldsymbol{v_0 = 0,1}$ και $\boldsymbol{v_1 = 0,144}$ και $\boldsymbol{0 \leq 0,1 \leq 0,144 \leq \frac{1}{2}}$ άρα $\boldsymbol{0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}}$. Άρα η σχέση $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$ ισχύει για $\boldsymbol{n = 0}$.
   Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2}}$
   Θα δείξω ότι ισχύει και για $\boldsymbol{n = k + 1}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq \frac{1}{2}}$
   Έχω $\boldsymbol{0 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq \frac{1}{2} \xRightarrow{f\uparrow\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(0) \leq f(v_k) \leq f(v_{k+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow}$
   $\boldsymbol{0 \leq v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 0,4 \leq \frac{1}{2}}$, όπως θέλαμε.
   Άρα η $\boldsymbol{0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}}$ ισχύει για κάθε $\boldsymbol{n \geq 0}$
   b. Σύμφωνα με την προηγούμενη ερώτηση, η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκλισης των μονοτονικών ακολουθιών, η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ συγκλίνει σε αριθμό $\boldsymbol{l \leq \frac{1}{2}}$.
   c. Γνωρίζουμε ότι το $\boldsymbol{l}$ είναι η λύση της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) = x}$. Έτσι, σύμφωνα με την ερώτηση 2-α, έχουμε $\boldsymbol{l = 0}$ ή $\boldsymbol{l = 0,375}$. Τώρα, η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ είναι αύξουσα και $\boldsymbol{v_0 = 0,1 > 0}$, οπότε το $\boldsymbol{l}$ δεν μπορεί να είναι ίσο με 0. Έτσι, το όριο $\boldsymbol{l}$ της ακολουθίας $(\boldsymbol{v_n})$ είναι $\boldsymbol{0,375}$. Έτσι, μακροπρόθεσμα, ο πληθυσμός των εντόμων στον βοτανικό κήπο θα προσεγγίσει τα 0,375 εκατομμύρια άτομα ή 375.000 έντομα και, καθώς η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ αυξάνεται, δεν θα τα υπερβεί. Έτσι, αυτός ο πληθυσμός δεν θα φτάσει ποτέ τα 400.000 έντομα. Επομένως, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, θα τηρηθεί η ισορροπία του φυσικού περιβάλλοντος.

4.

a. Αυτός ο αλγόριθμος επιστρέφει τον μικρότερο φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{v_n \geq a}$. Ωστόσο, σύμφωνα με την προηγούμενη ερώτηση, η ακολουθία $(\boldsymbol{v_n})$ δεν υπερβαίνει ποτέ την τιμή του $\mathbf{0,4}$. Έτσι, ο αλγόριθμος δεν τερματίζει ποτέ και έτσι εισάγοντας "seuil (0,4)" δεν επιστρέφει τίποτα.

b. Εισάγοντας " seuil (0,35)" επιστρέφει τον μικρότερο φυσικό αριθμό $\boldsymbol{n}$ έτσι ώστε $\boldsymbol{v_n \geq 0,35}$. Σύμφωνα με την αριθμομηχανή, το $\boldsymbol{v_5 < 0,35}$ και το $\boldsymbol{v_6 > 0,35}$. Επομένως, εισάγοντας " seuil (0,35)" επιστρέφει την τιμή $\mathbf{6}$. Έτσι, ο πληθυσμός των εντόμων θα ξεπεράσει τα 0,35 εκατομμύρια άτομα ή 350.000 έντομα μέχρι το τέλος του έκτου μήνα.

Άσκηση 3 (5 βαθμοί)

Στο χώρο ορίζεται ένα ορθοκανονικό πλαίσιο αναφοράς $(\boldsymbol{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\boldsymbol{k}})$ Έστω:

• το επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ με καρτεσιανή εξίσωση $\boldsymbol{2x + y - z + 2 = 0}$

• το επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{B(1; 1; 2)}$ και του οποίου το κανονικό διάνυσμα είναι $\vec{\boldsymbol{n}}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

1.

a. Δώστε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ κάθετο στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$.

b. Υπενθυμίζουμε ότι δυο επίπεδα είναι κάθετα εάν ένα διάνυσμα είναι κάθετο σε ένα από τα επίπεδα και κάθετο σε ένα διάνυσμα κάθετο στο άλλο επίπεδο. Δείξτε ότι τα επίπεδα $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ και $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ είναι κάθετα.

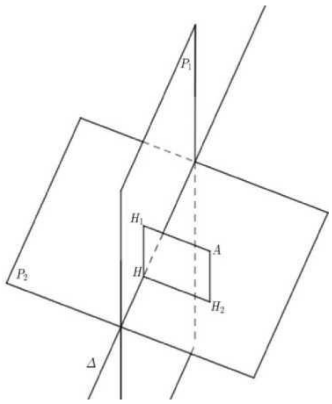
2.

a. Να προσδιορίσετε μια καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$

b. Έστω $\boldsymbol{\Delta}$ η ευθεία της οποίας η παραμετρική εξίσωση είναι η: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = -2 + t}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}$. Δείξτε ότι η ευθεία $\boldsymbol{\Delta}$ είναι η τομή των επιπέδων $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ και $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$.

Θεωρούμε το σημείο $\boldsymbol{A(1; 1; 1)}$ που δεν ανήκει ούτε στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ ούτε στο $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$. Έστω $\boldsymbol{H}$ η ορθογώνια προβολή του σημείου $\boldsymbol{A}$ στην ευθεία Δ.

3. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την ερώτηση 2.b, η ευθεία $\boldsymbol{\Delta}$ είναι το σύνολο των σημείων $\boldsymbol{M_t}$ με συντεταγμένες $(\mathbf{0}; \boldsymbol{-2 + t}; \boldsymbol{t})$, όπου $\boldsymbol{t}$ δηλώνει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.
   a. Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό t, $\boldsymbol{AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$
   b. Να δείξετε ότι $\boldsymbol{AH = \sqrt{3}}$.
4. Έστω $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$ η ευθεία η κάθετη στο επίπεδο του $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ που περνά από το σημείο $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{H_1}$ η ορθογώνια προβολή του σημείου $\boldsymbol{A}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$.
   a. Να προσδιορίσετε μια παραμετρική παράσταση της ευθείας $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$.
   b. Να δείξετε ότι το σημείο $\boldsymbol{H_1}$ έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$.
5. Έστω $\boldsymbol{H_2}$ η ορθογώνια προβολή του **A** στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$. Δεχόμαστε ότι το $\boldsymbol{H_2}$ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$ και το $\boldsymbol{H}$ έχει συντεταγμένες $(\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{2})$. Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα επίπεδα $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ και $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$, καθώς και τα σημεία $\boldsymbol{IA, H_1, H_2, H}$. Δείξτε ότι το $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ είναι ένα ορθογώνιο.



Λύση

1.

a. Έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{-1})$

b. Έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}.\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \mathbf{2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0}$ άρα $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$. Συνεπώς $\boldsymbol{\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2}$

2.

a. Αφού το $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}(\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{1}) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ η καρτεσιανή εξίσωση του $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ είναι της μορφής $\boldsymbol{1x - 1y + 1z + d = 0}$. Αφού $\boldsymbol{B(1; 1; 2) \in P_2}$, έχω $\boldsymbol{1 - 1 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2}$. Άρα η εξίσωση του $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$ είναι $\boldsymbol{x - y + z - 2 = 0}$.

b. Οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $\boldsymbol{M(0,-2+t,t)}$ της ευθείας $\boldsymbol{\Delta}$ επαληθεύουν την εξίσωση του επιπέδου $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$, αφού $\boldsymbol{2x_M + y_M - z_M + 2 = 2 \times 0 + (-2) + t - t + 2 = 0}$. Ομοίως, οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $\boldsymbol{M(0,-2+t,t)}$ της ευθείας $\boldsymbol{\Delta}$ επαληθεύουν την εξίσωση του επιπέδου $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$, αφού $\boldsymbol{x_M - y_M + z_M - 2 = 0 - (-2+t) + t - 2 = 2 - t + t - 2 = 0}$. Έτσι, η γραμμή Δ περιλαμβάνεται στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$ και στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$. Άρα, η γραμμή Δ είναι η ευθεία τομής των δυο επιπέδων.

3.

a. Έχω $\boldsymbol{AM_t = \sqrt{(0-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (t-1)^2} =}$
$$\boldsymbol{\sqrt{(-1)^2 + (t-3)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{1 + t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1} = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$$

b. 1ος τρόπος. Έχω από πυθαγόρειο θεώρημα ότι $\boldsymbol{AH = \sqrt{AH_1{}^2 + AH_2{}^2}}$ με $\boldsymbol{AH_1 = d(A,\mathcal{P}_1) = \frac{|2\times1+1\times1-1\times1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}}$ και $\boldsymbol{AH_2 = d(A,\mathcal{P}_2) = \frac{|1\times1-1\times1+1\times1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$. Άρα $\boldsymbol{AH = \sqrt{AH_1{}^2 + AH_2{}^2} = \sqrt{\frac{16}{6} + \frac{1}{3}} = \sqrt{3}}$

2ος τρόπος. Αφού το σημείο $\boldsymbol{H}$ είναι η ορθογώνια προβολή του σημείου $\boldsymbol{A}$ στην ευθεία $\boldsymbol{\Delta}$, το $\boldsymbol{H}$ είναι το σημείο της Δ έτσι ώστε η απόσταση $\boldsymbol{AM_t}$ να είναι ελάχιστη. Επομένως, αρκεί να βρω το ελάχιστο της $\boldsymbol{\sqrt{2t^2 - 8t + 11}}$ ή πιο απλά της παραβολής $\boldsymbol{2t^2 - 8t + 11}$. Η παραβολή αυτή έχει ελάχιστο για $\boldsymbol{t = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2}$, με τιμή ίση με $\boldsymbol{2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 3}$. Άρα $\boldsymbol{AH = \sqrt{3}}$

4.

a. Η ευθεία $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$ είναι κάθετη προς το επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$, έτσι έχει ως διάνυσμα κατεύθυνσης ένα διάνυσμα κανονικό στο επίπεδο $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$. Έτσι, το διάνυσμα $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)}$ είναι ένα διάνυσμα κατεύθυνσης της ευθείας $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$ που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{A(1;1;1)}$. Άρα μια παραμετρική παράσταση της ευθείας $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$ είναι η $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 2k} \\ \boldsymbol{y = 1 + k} \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}. \\ \boldsymbol{z = 1 - k} \end{cases}$

b. Το $\boldsymbol{H_1}$ είναι σημείο τομής της $\boldsymbol{\mathcal{D}_1}$ και του $\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$, άρα έχω $\boldsymbol{2(1+2k) + 1 + k - (1-k) + 2 = 0 \Rightarrow 6\kappa + 4 = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}}$, $\boldsymbol{x = 1 + 2k = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{y = 1 + k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{z = 1 - k = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}}$. Άρα $\boldsymbol{H_1\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)}$.

5. Έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{HH_1}(x_{H_1} - x_H; y_{H_1} - y_H; z_{H_1} - z_H) = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)}$ και $\boldsymbol{\overrightarrow{H_2A}(x_A - x_{H_2}; y_A - y_{H_2}; z_A - z_{H_2}) = \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) = \overrightarrow{HH_1}}$. Άρα το τετράπλευρο $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ είναι ένα παραλληλόγραμμο.

Ακόμα έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{AH_1}(x_{H_1} - x_A; y_{H_1} - y_A; z_{H_1} - z_A) = \left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)}$ και $\boldsymbol{\overrightarrow{AH_1}.\overrightarrow{H_2A} = -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AH_1} \perp \overrightarrow{H_2A}}$

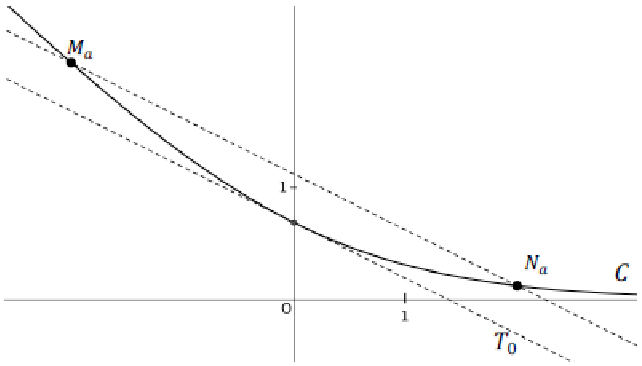
Άρα το παραλληλόγραμμο μας έχει δύο διαδοχικές κάθετες πλευρές, οπότε το παραλληλόγραμμο $\boldsymbol{AH_1HH_2}$ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 4 (5 βαθμοί.)

Θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται στο $\boldsymbol{R}$ από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + e^{-x})}$, όπου το $\mathbf{ln}$ υποδηλώνει τη συνάρτηση φυσικού λογάριθμου.

Σημειώνουμε με $\boldsymbol{C}$ την αντιπροσωπευτική της καμπύλη σε ένα ορθοκανονικό πλαίσιο αναφοράς $(\boldsymbol{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Η καμπύλη απεικονίζεται παρακάτω.



1.
   a. Να προσδιορίσετε το όριο της συνάρτησης f στο $-\infty$.
   b. Προσδιορίστε το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$. Ερμηνεύστε αυτό το αποτέλεσμα γραφικά.
   c. Παραδεχόμαστε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{R}$ και σημειώνουμε με f' την παράγωγη συνάρτησή της. Υπολογίστε την f' και μετά δείξτε ότι, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x, $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$
   d. Σχεδιάστε τον πλήρη πίνακα μεταβολών της συνάρτησης στο $\boldsymbol{R}$.
2. Σημειώνουμε με T_0 την εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο της με τετμημένη 0.
   a. Προσδιορίστε μια εξίσωση για την εφαπτομένη T_0
   b. Δείξτε ότι η συνάρτηση είναι κυρτή στο $\boldsymbol{R}$.
   c. Να συμπεράνουμε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x, έχουμε: $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.
3. Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α διαφορετικό από το 0, σημειώνουμε με M_a και N_a τα σημεία της καμπύλης με αντίστοιχη τετμημένη $-\alpha$ και α. Επομένως έχουμε: $M_a(-a; f(-a))$ και $N_a(a; f(a))$
   a. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x, έχουμε: $f(x) - f(-x) = -x$
   b. Να δείξετε ότι οι γραμμές T_0 και $(M_a N_a)$ είναι παράλληλες.

Λύση

1.
   a. Έχω $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = \lim_{u\to\infty} \ln(1+e^{u}) = +\infty$.
   b. Έχω $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = 0$. Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον άξονα των x.
   c. Έχω $f'(x) = \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-1}{1+e^{x}}$
   d. Έχω $f'(x) = \frac{-1}{1+e^{x}} < 0$ για κάθε x στο $\boldsymbol{R}$, άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο $\boldsymbol{R}$. Έχω τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

2.
   a. Έχω $f(0) = \ln(1+e^{-0}) = \ln 2$ και $f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = \frac{-1}{2}$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης T_0 είναι η $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$.

b. Έχω για κάθε $\boldsymbol{x}$, ότι $\boldsymbol{f''(x)} = -\frac{-(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ άρα η $\boldsymbol{f}$ είναι κυρτή συνάρτηση στο $\boldsymbol{R}$.

c. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι κυρτή είναι άρα η καμπύλη $\boldsymbol{C}$ να είναι πάνω από τις εφαπτομένες της, και συγκεκριμένα την $\boldsymbol{T_0}$. Έτσι, για κάθε πραγματικό $\boldsymbol{x}$, θα ισχύει ότι $\boldsymbol{f(x)} \geq -\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \ln(2)$

3.

a. Έχω για κάθε πραγματικό $\boldsymbol{x}$, ότι $\boldsymbol{f(x) - f(-x)} = \ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x}(e^x+1)}{1+e^x}\right) = \ln e^{-x} = -x$

b. Έχω για κάθε πραγματικό α, ότι η κλίση της ευθείας $\boldsymbol{M_a N_a}$είναι ίση με $\boldsymbol{\lambda_{M_a N_a}} = \frac{y_{Na}-y_{Ma}}{x_{Na}-x_{Ma}} = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} = \boldsymbol{\lambda_{T_0}}$ άρα $\boldsymbol{M_a N_a // T_0}$

[Πηγές]

Γαλλία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)
Το εκπαιδευτικό σύστημα της Γαλλίας - xenesglosses.eu
Γαλλία – Αξιολόγηση εκπαιδευτικών συστημάτων (sch.gr)
mathematics_test_program_bsc_aidams_0.pdf (centralesupelec.fr)
Baccalaureate 2023: τα μαθήματα των γραπτών εξετάσεων | Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Νεολαίας (education.gouv.fr)