

[Κύπρος]

Η Κύπρος (επίσημα Κυπριακή Δημοκρατία ή Δημοκρατία της Κύπρου όπως αναφέρεται στο Σύνταγμα) είναι νησιωτικό κράτος της ανατολικής Μεσογείου και το τρίτο μεγαλύτερο σε πληθυσμό και έκταση νησί στη Μεσόγειο. Γεωγραφικά βρίσκεται νότια της Τουρκίας, δυτικά του Λιβάνου και της Συρίας, βορειοδυτικά του Ισραήλ, βόρεια της Αιγύπτου και νοτιοανατολικά της Ελλάδας. Πρωτεύουσα και μεγαλύτερη πόλη της Κύπρου είναι η Λευκωσία και δεύτερη μεγαλύτερη πόλη η Λεμεσός.

Η Κύπρος έγινε μέλος της Ευρωπαϊκής Ένωσης το 2004 και της Ευρωζώνης το 2008. Θεωρείται ανεπτυγμένη χώρα, με υψηλό κατά κεφαλήν εισόδημα και πολύ υψηλό δείκτη ανθρώπινης ανάπτυξης, ενώ αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους τουριστικούς προορισμούς στη Μεσόγειο. Από γεωγραφικής άποψης, η Κύπρος θεωρείται συχνά ως μέρος της Μέσης Ανατολής — ως μέρος της Ευρώπης θα μπορούσε να καταταχθεί στα νησιωτικά κράτη της Μεσογείου —, ωστόσο θεωρείται ευρωπαϊκό κράτος για μία σειρά ιστορικών, πολιτικών και πολιτισμικών λόγων.

[Εκπαίδευση στην Κύπρο]

Υπεύθυνο για την εποπτεία του Εκπαιδευτικού Συστήματος στην Κύπρο είναι το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (ΥΠΠ). Η αρχική τυπική εκπαίδευση παρέχεται μέσω δημόσιων και ιδιωτικών οργανισμών προδημοτικής, δημοτικής, δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και από δημόσια ινστιτούτα μεταδευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η εκπαίδευση είναι υποχρεωτική για τις ηλικίες 4 ετών και 8 μηνών μέχρι 15 ετών. Η Δημόσια εκπαίδευση παρέχεται δωρεάν για τις ηλικίες 4 ετών και 8 μηνών μέχρι 18 ετών.

Η Προδημοτική Εκπαίδευση χωρίζεται σε δύο συστήματα ανάλογα με την ηλικία του παιδιού: Το σύστημα της προνηπιακής εκπαίδευσης περιλαμβάνει τους βρεφοκομικούς σταθμούς και νηπιαγωγεία όπου παρέχεται φροντίδα σε παιδιά κάτω των τριών ετών (υπό την ευθύνη του Υπουργείου Εργασίας, Πρόνοιας και Κοινωνικών Ασφαλίσεων, και το σύστημα της προδημοτικής εκπαίδευσης για παιδιά από 3 μέχρι 5 ετών και 8 μηνών, που περιλαμβάνει τα νηπιαγωγεία και λειτουργεί υπό την ευθύνη του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού

Η Δημοτική Εκπαίδευση είναι υποχρεωτική για όλα τα παιδιά άνω των 5 8/12 ετών και έχει διάρκεια 6 χρόνια.

Η Δευτεροβάθμια Γενική Εκπαίδευση προσφέρεται σε δύο τριετείς κύκλους, το Γυμνάσιο (Κατώτερη Μέση Εκπαίδευση) και το Λύκειο (Ανώτερη Μέση Εκπαίδευση) σε μαθητές ηλικιών μεταξύ 12 και 18 ετών. Όσον αφορά την Ανώτερη Μέση Εκπαίδευση, οι μαθητές, έχουν την επιλογή αντί να φοιτήσουν στο Λύκειο να φοιτήσουν στη Μέση Τεχνική και Επαγγελματική Εκπαίδευση, η οποία τους προετοιμάζει, παρέχοντας τους γνώσεις και δεξιότητες, για να ενταχθούν στο εργατικό δυναμικό του τόπου ή να ακολουθήσουν ανώτερες σπουδές στον τομέα που τους ενδιαφέρει.

Η Μεταλυκειακή Επαγγελματική Εκπαίδευση και Κατάρτιση προσφέρεται από τον Σεπτέμβριο του 2012 σε απόφοιτους δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στα Μεταλυκειακά Ινστιτούτα Επαγγελματικής Εκπαίδευσης και Κατάρτισης.

Ανώτερη και Ανώτατη Εκπαίδευση:

Η ανώτερη Εκπαίδευση προσφέρεται σε Πανεπιστημιακό και μη πανεπιστημιακό επίπεδο. Υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες Ιδρυμάτων Ανώτερης/Ανώτατης Εκπαίδευσης: Δημόσια Πανεπιστήμια, Ιδιωτικά Πανεπιστήμια, Δημόσιες Σχολές Ανώτερης Εκπαίδευσης και Ιδιωτικές Σχολές Ανώτερης Εκπαίδευσης.

Τα Δημόσια Πανεπιστήμια ιδρύονται ως Νομικά Πρόσωπα Δημοσίου Δικαίου και είναι ακαδημαϊκά αυτόνομοι οργανισμοί που διοικούνται από το Συμβούλιο και τη Σύγκλητο. Ιδρύονται από το Κράτος αλλά μπορούν να συγκεντρώσουν πόρους και από άλλες πηγές. Όλα τα Δημόσια Πανεπιστήμια στην Κύπρο είναι αφιερωμένα στην αριστεία στη διδασκαλία και την έρευνα. Το όραμα και η αποστολή κάθε Πανεπιστημίου ορίζονται στη νομοθεσία που διέπει την ίδρυση και λειτουργία τους.

Τα δημόσια Πανεπιστήμια προσφέρουν προγράμματα σπουδών Πτυχιακού, Μεταπτυχιακού και Διδακτορικού Επιπέδου. Το Ανοικτό Πανεπιστήμιο προσφέρει επίσης και προγράμματα βραχείας κατάρτισης. Οι επίσημες γλώσσες διδασκαλίας είναι Ελληνικά και Τουρκικά, αλλά προσφέρονται και προγράμματα στα Αγγλικά.

Τα ιδιωτικά πανεπιστήμια ιδρύονται ως ιδιωτικοί κερδοσκοπικοί ή μη κερδοσκοπικοί οργανισμοί, εγγεγραμμένοι και αναγνωρισμένοι από το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

Οι Δημόσιες Σχολές Ανώτερης Εκπαίδευσης λειτουργούν υπό την επίβλεψη διάφορων υπουργείων. Σήμερα, στην Κύπρο Λειτουργούν οι ακόλουθες Σχολές:

- Ανώτερο Ξενοδοχειακό Ινστιτούτο Κύπρου
- Αστυνομική Ακαδημία Κύπρου
- Δασικό Κολλέγιο*
- Μεσογειακό Ινστιτούτο Διεύθυνσης
- Σχολή Ξεναγών

* Σύμφωνα με απόφαση του Υπουργικού Συμβουλίου (Αρ. 79.070 – 1.7.2015) η εισδοχή νέων σπουδαστών και η προσφορά του τριετούς κύκλου σπουδών και των άλλων σχετικών κύκλων σπουδών έχει ανασταλεί

Οι Ιδιωτικές Σχολές Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης που είναι εγγεγραμμένες στο Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού προσφέρουν προγράμματα σπουδών προπτυχιακού και μεταπτυχιακού επιπέδου, καθώς και μικρότερης διάρκειας επαγγελματικά προγράμματα.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση]

Η ανώτερη ή τριτοβάθμια εκπαίδευση παρέχεται από ένα δίκτυο κρατικών και ιδιωτικών πανεπιστημίων και σχολών. Τα ιδιωτικά πανεπιστήμια πιστοποιήθηκαν για πρώτη φορά το 2005 και απαιτούν ειδική άδεια λειτουργίας και ανάθεσης πτυχίων. Αυτό καθορίστηκε στο νόμο περί ιδιωτικών πανεπιστημίων του 2005.

Σήμερα τα ακόλουθα πανεπιστήμια διαθέτουν άδεια από το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού για την έκδοση ακαδημαϊκών τίτλων:

Δημόσια πανεπιστήμια

- Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Ανοικτό Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ιδιωτικά Πανεπιστήμια

- Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Πανεπιστήμιο Frederick
- Πανεπιστήμιο Νεάπολις Πάφου

- Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

Ιδιωτικά κολέγια

- Κολλέγιο Ενότητας Πόλης Λευκωσίας
- Κολλέγιο Λήδρας Λευκωσία
- Κυπριακό Ινστιτούτο Μάρκετινγκ Λευκωσίας

[Υλη]

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί). Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα). Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης . Μελέτη συνάρτησης – Γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης. Προβλήματα.

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος. Κανόνες ολοκλήρωσης. Εφαρμογές αόριστων ολοκληρωμάτων.

ΣΥΝΟΛΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ιδιότητες πράξεων συνόλων. Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού. Αρχή Αθροίσματος. Πολλαπλασιαστική Αρχή. Μεταθέσεις. Διατάξεις. Συνδυασμοί. Η έννοια της Πιθανότητας. Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Τεταρτημόρια – Ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Συσχέτιση δύο μεταβλητών και συντελεστής συσχέτισης.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Εισαγωγή στην Στερεομετρία. Στερεά από περιστροφή.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνες του De l' Hospital. Θεώρημα Rolle. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού. Μονοτονία συνάρτησης (Ορισμοί). Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί). Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα). Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης. Ασύμπτωτες. Μελέτη – Γραφική παράσταση συνάρτησης. Προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων – Εφαρμογές.

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ανάλυση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Διαφορικό συνάρτησης. Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος. Κανόνες ολοκλήρωσης. Μέθοδοι ολοκλήρωσης. Προβλήματα αρχικών τιμών.

ΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός σειράς – Βασικές ιδιότητες. Ιδιότητες του Σ-συμβολισμού. Σύγκλιση σειράς. Ειδικά αθροίσματα.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx$.

Λύση

$$\int (x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx = \boxed{\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 5x + c}$$

A2. Δίνεται ο αριθμός των λίτρων νερού που καταναλώνουν 9 υπάλληλοι μιας εταιρείας σε μία βδομάδα:
15, 20, 15, 22, 17, 21, 18, 20, 21

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 . (3 μον.)

(β) Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων. (2 μον.)

Λύση

α) Διάταξη σε αύξουσα σειρά: 15, 15, 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22. Οπότε έχω: $Q_2 = x_5 = \boxed{20}$, $Q_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{15 + 17}{2} = \boxed{16}$, $Q_3 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \boxed{21}$

β) Εύρος $R = x_9 - x_1 = 22 - 15 = \boxed{7}$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος $I = Q_3 - Q_1 = 21 - 16 = \boxed{5}$

A3. Να υπολογίσετε πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία του συνόλου $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$, αν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

Λύση

Για την επιλογή του ψηφίου των εκατοντάδων υπάρχουν 6 διαφορετικές περιπτώσεις.

Για την επιλογή του ψηφίου των δεκάδων υπάρχουν 7 διαφορετικές περιπτώσεις.

Για την επιλογή του ψηφίου των μονάδων υπάρχουν 7 διαφορετικές περιπτώσεις.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $6 \cdot 7^2 = 294$ διαφορετικές περιπτώσεις.

Σύνολο $\boxed{294}$ διαφορετικούς αριθμούς

A4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των a και b , αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 3$ και σημείο καμπής στο $x = 1$.

Λύση

Έχω $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9$, $f''(x) = 6ax + 2b$ με $f'(3) = 0$ (Τοπικό ακρότατο) και $f''(1) = 0$ (σημείο καμπής). Άρα έχω $6a + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$ (*) και $27a + 6b = 9 \Rightarrow 27a - 18a = 9 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -3}$

A5. Το κέρδος P από την μηνιαία πώληση x τόνων ενός προϊόντος, σε χιλιάδες ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3, \quad 4 < x < 28$$

Να υπολογίσετε:

(α) την μηνιαία πώληση σε τόνους, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό, (3 μον.)

(β) το μέγιστο δυνατό κέρδος. (2 μον.)

Λύση

α) $P(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{8}{5}x - 3 \Rightarrow P'(x) = -\frac{2}{20}x + \frac{8}{5}$ και $P'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{10}x + \frac{8}{5} = 0 \Rightarrow -x + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 16}$ τόνους. Αφού $P''(16) = -\frac{2}{20} < 0$ έχω μέγιστο στο $x = 16$, που είναι ίσο με $P(16) = -\frac{1}{20}16^2 + \frac{8}{5}16 - 3 = 9,8$

β) Δηλαδή το μέγιστο κέρδος είναι $\boxed{9800\text{€}}$

A6. Γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι θα καθίσουν 10 άτομα, μεταξύ των οποίων βρίσκονται ο Μάριος, η Έλενα και η μητέρα τους Γεωργία. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 10 άτομα αν:

(α) δεν υπάρχει περιορισμός,

(β) μεταξύ του Μάριου και της Έλενας θα κάθεται η μητέρα τους Γεωργία.

Λύση

α) $(10 - 1)! = \boxed{362.880}$ τρόποι.

β) Στην πρώτη φάση η μητέρα και τα δύο παιδιά της θα κινούνται ως ένα αντικείμενο άρα θα υπάρχουν $(8 - 1)! = 5040$ τρόποι ενώ στη δεύτερη φάση τα παιδιά αλλάζουν θέση άρα υπάρχουν 2 τρόποι. Συνολικά υπάρχουν $5040 \cdot 2 = \boxed{10.080}$ τρόποι.

A7. Ένας κώνος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας διπλάσιο του εμβαδού της βάσης του. Αν το ύψος του είναι $4\sqrt{3}\text{ cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο του.

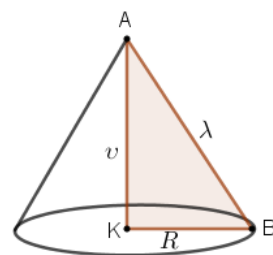
Λύση

$$\text{Έχω } E_{\kappa} = 2E_{\beta} \Rightarrow \pi R\lambda = 2\pi R^2 \Rightarrow \lambda = 2R$$

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο KAB : $v^2 + R^2 =$

$$\lambda^2 \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 + R^2 = (2R)^2 \Rightarrow R = 4\text{ cm}$$

$$\text{Άρα } V = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^3}$$



A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 20, x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε.

(3 μον.)

(β) Να βρείτε την ολικά μέγιστη και ολικά ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα $[-2, 3]$. (2 μον.)

Λύση

α) Έχω $f'(x) = -3x^2 + 6x$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x(x - 2) \Rightarrow x = 0 \Psi x = 2$ και πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[2, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0, f(0) = 20$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 2, f(2) = 24$

β) Συγκρίνω τις τιμές $f(-2) = 40, f(0) = 20, f(2) = 24, f(3) = 20$

Άρα ολικά μέγιστη τιμή στο διάστημα $[-2, 3]$ είναι $\boxed{40}$ και ολικά ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[-2, 3]$ είναι $\boxed{20}$.

A9. Δίνεται η λέξη ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (2 μον.)

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i. έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;

ii. αρχίζουν με τη λέξη ΝΕΑ και περιέχουν τη λέξη ΓΗ; (3 μον.)

Λύση

α) Η λέξη ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ έχει 10 γράμματα με το Ν να εμφανίζεται 3 φορές, το Α 2 φορές και το Η 2 φορές. Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης είναι επαναληπτικές μεταθέσεις και ισούται με $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \boxed{151.200}$

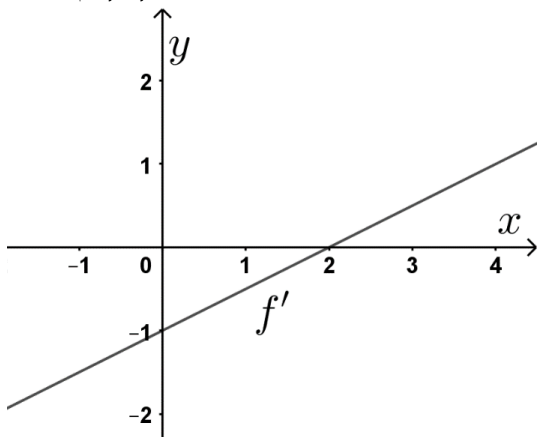
β) i. Η λέξη έχει 5 φωνήεντα και 5 σύμφωνα άρα οι μεταθέσεις των γραμμάτων θα γίνουν σε 2 φάσεις όπου στην πρώτη θα μετακινούνται τα σύμφωνα και ως ένα αντικείμενο τα φωνήεντα με

$\frac{6!}{3!} = 120$ τρόπους και στη δεύτερη φάση τα φωνήεντα μεταξύ τους με $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ τρόπους.

Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών ισούται με $120 \cdot 30 = \boxed{3.600}$

ii. . Αφού οι αναγραμματισμοί θα αρχίζουν με τη λέξη ΝΕΑ τότε θα μετακινούνται μόνο 7 γράμματα με το ΓΗ να λειτουργεί ως ένα. Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών ισούται με $\frac{6!}{2!} = \boxed{360}$

A10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται μια ευθεία που είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μιας συνάρτησης f .



(α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (2 μον.)

(β) Να βρείτε τη θέση του τοπικού ακροτάτου της f και να το χαρακτηρίσετε. (1 μον.)

(γ) Να βρείτε τον τύπο της f , αν η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{4}\right)$. (2 μον.)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ αφού εκεί έχω $f'(x) < 0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ αφού εκεί έχω $f'(x) > 0$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι έχουμε τοπικό (ολικό)ελάχιστο για $x = 2$

γ) Έχω $f'(x) = \lambda x + \beta$, με $\beta = -1$ (τομή με άξονα των τεταγμένων) $f'(2) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Άρα $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \int f'(x)dx = \int \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{4} - x + c$

Η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - 1 + c = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'

ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 μον.)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς:

i. την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 μον.)

ii. την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 μον.)

iii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 μον.)

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. (2 μον.)

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Για $y = 0$, έχω $0 = x^3 + 3x^2 = x(x^2 + 3) \Rightarrow x = 0$, άρα μοναδικό σημείο με τους άξονες η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

β) i. Έχω $f'(x) = 3x^2 + 6x$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = -2$ και πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

άρα

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$ με τοπικό ελάχιστο για $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο για $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 4$

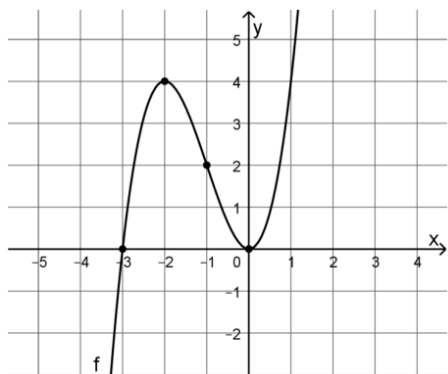
ii. Έχω $f''(x) = 6x + 6$ με $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -1$

και πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο διάστημα $[-1, +\infty)$ με σημείο καμπής για $x = -1$ και $f(-1) = 2$

iii. Έχω $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$



γ)

B2. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα χρήματα, σε ευρώ, που ξόδεψαν δύο παιδιά στις οκτώ μέρες των διακοπών τους.

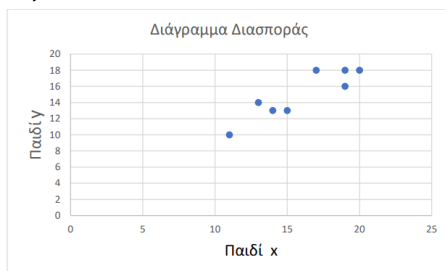
Ημέρα	Παιδί (x_i)	Παιδί (y_i)
1η	19	18
2η	19	16
3η	17	18
4η	14	13
5η	13	14
6η	20	18
7η	11	10
8η	15	13

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 μον.)

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (6 μον.)

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. (1 μον.)

Λύση



α)

β) Έχω

Ημέρα	Παιδί (x_i)	Παιδί (y_i)	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1η	19	18	342	9	9
2η	19	16	304	9	1
3η	17	18	306	1	9
4η	14	13	182	4	4
5η	13	14	182	9	1
6η	20	18	360	16	9
7η	11	10	110	25	25
8η	15	13	195	1	4
Άθροισμα	128	120	1981	74	62

$$\bar{X} = \frac{128}{8} = 16, \bar{Y} = \frac{120}{8} = 15, S_x = \sqrt{\frac{74}{8}} = 3,041, S_y = \sqrt{\frac{62}{8}} = 2,78$$

$$\text{Άρα } r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n S_x S_y} = \frac{1981 - 8 \cdot 16 \cdot 15}{8 \cdot 3,04 \cdot 2,78} = \frac{1981 - 1920}{67,61} = \boxed{0,902}$$

γ) Η συσχέτιση είναι ισχυρά γραμμική θετική, αφού το r είναι κοντά στο 1.

B3. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 20 μπάλες, αριθμημένες από το 1 μέχρι το 20.

(α) Παίρνουμε 5 μπάλες από το δοχείο, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:

i. δεν υπάρχει περιορισμός,

ii. πάρουμε μόνο μπάλες με άρτιο αριθμό,

iii. πάρουμε το πολύ 2 μπάλες με άρτιο αριθμό,

iv. πάρουμε τις μπάλες με τους αριθμούς 10 και 19 και όχι την μπάλα με τον αριθμό 1. (8 μον.)

(β) Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε 7 μπάλες από το δοχείο, 3 μπάλες με άρτιο αριθμό και 4 μπάλες με περιττό αριθμό και να τις τοποθετήσουμε σε σειρά, έτσι ώστε οι μπάλες με περιττό αριθμό και οι μπάλες με άρτιο αριθμό να είναι εναλλάξ. (2 μον)

Λύση

α) i. $\binom{20}{5} = \frac{20!}{15!5!} = 15504$

ii. $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$

iii. $\binom{10}{2}\binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{4} + \binom{10}{0}\binom{10}{5} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{10!}{3!7!} + \frac{10!}{1!9!} \cdot \frac{10!}{4!6!} + \frac{10!}{0!10!} \cdot \frac{10!}{5!5!} = 45 \cdot 120 + 10 \cdot 210 + 1 \cdot 252 = 7752$

iv. $\binom{17}{3} = \frac{17!}{3!14!} = 680$

β) Πρώτη φάση: επιλογή 3 μπάλες με άρτιο αριθμό και 4 μπάλες με περιττό αριθμό. Άρα $\binom{10}{4} \cdot \binom{10}{3}$ τρόποι.
Δεύτερη φάση: τοποθέτηση τους σε σειρά έτσι ώστε οι μπάλες με περιττό αριθμό και οι μπάλες με άρτιο αριθμό να είναι εναλλάξ. Αφού οι μπάλες με περιττό αριθμό είναι 4 τότε κάθε τοποθέτηση θα αρχίζει με μπάλα με περιττή ένδειξη.

Οι μπάλες με περιττό αριθμό τοποθετούνται σε σειρά με $4!$ τρόπους.

Οι μπάλες με άρτιο αριθμό τοποθετούνται σε σειρά με $3!$ τρόπους.

Από την αρχή της απαρίθμησης έχουμε: $\binom{10}{4} \cdot \binom{10}{3} \cdot 4! \cdot 3! = \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{10!}{3!7!} \cdot 4! \cdot 3! = \boxed{3.628.800}$ τρόποι.

B4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $ADE\Theta$. Με κέντρο το σημείο A ακτίνα $AG = 2\text{cm}$, γράφουμε τόξο $B\Gamma$ έξω από το $ADE\Theta$. Τα σημεία Γ και H είναι τα μέσα των πλευρών AD και ΘE αντίστοιχα.

Το τρίγωνο HEZ είναι ορθογώνιο με $H\hat{E}Z = 90^\circ$ και $E\hat{Z}H = 45^\circ$.

Το σκιασμένο χωρίο $(B\Gamma\Delta ZH\Theta B)$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) .

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (6 μον.)

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. (4 μον.)

Λύση

α) Από την περιστροφή του ημικυκλίου $B\Gamma$ προκύπτει ημισφαίριο με $R =$

και εμβαδόν $E_{\eta\mu\sigma\phi} = \frac{4\pi R^2}{2} = \frac{4\pi 2^2}{2} = 8\pi \text{ cm}^2$

Από την περιστροφή του τμήματος $\Gamma\Delta$ προκύπτει δακτύλιος με εμβαδόν $E_{\Delta\Lambda\Gamma\Gamma\Delta} = \pi AD^2 - \pi AG^2 = \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 2^2 = 16\pi - 4\pi = 12\pi \text{ cm}^2$

Από την περιστροφή του τμήματος ΔE προκύπτει κύλινδρος με εμβαδόν $E_{\kappa\upsilon\lambda} = 2\pi Rv = 2\pi \cdot AD \cdot \Delta Z = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 48\pi \text{ cm}^2$

Από την περιστροφή του τμήματος HZ προκύπτει κώλινδρος με εμβαδόν $E_{\kappa\omicron\lambda \kappa\omega\nu\upsilon} = \pi(R + \rho)\lambda = \pi(\Theta E + \Theta H)HZ = \pi \cdot (4 + 2) \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$

Τέλος, Από την περιστροφή του τμήματος ΘH προκύπτει κύκλος με εμβαδόν $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\upsilon} = \pi\rho^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι $E_{o\lambda} = E_{\eta\mu\sigma\phi} + E_{\Delta\Lambda\Gamma\Gamma\Delta} + E_{\kappa\upsilon\lambda} +$

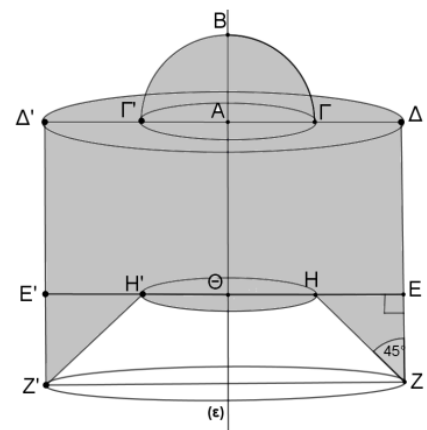
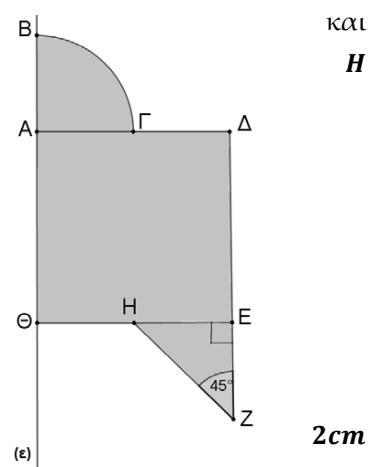
$E_{\kappa\omicron\lambda \kappa\omega\nu\upsilon} + E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\upsilon} = 8\pi + 12\pi + 48\pi + 12\sqrt{2}\pi + 4\pi =$

$\boxed{(72 + 12\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2}$

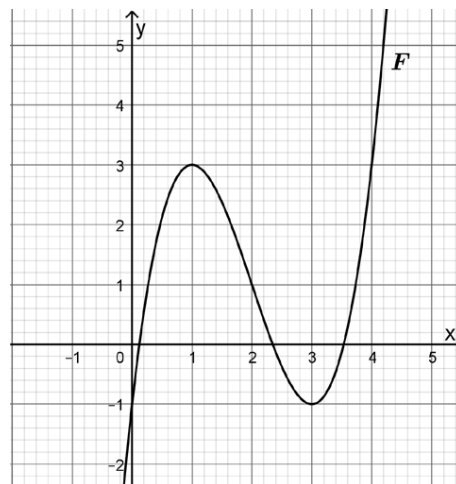
β) Έχω για το ημισφαίριο $V_{\eta\mu\sigma\phi} = \frac{4\pi R^3}{3 \cdot 2} = \frac{4\pi 2^3}{6} = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^3$, για τον κύλινδρο

$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 v = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi \text{ cm}^3$ και για τον κώλινδρο ότι $V_{\kappa\omicron\lambda \kappa\omega\nu\upsilon} = \frac{\pi v}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2) = \frac{2\pi}{3} (4^2 + 4 \cdot$

$2 + 2^2) = \frac{56\pi}{3} \text{ cm}^3$. Άρα $V_{\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\upsilon} = V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\eta\mu\sigma\phi} - V_{\kappa\omicron\lambda \kappa\omega\nu\upsilon} = 96\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{56\pi}{3} = \boxed{\frac{248\pi}{3} \text{ cm}^3}$



B5. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της τρίτου βαθμού πολυωνυμικής συνάρτησης F για την οποία ισχύει $F''(2) = 0$.



(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση F :

i. ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατά της (3 μον.)

ii. ως προς την κυρτότητα και το σημείο καμπής της. (3 μον.)

(β) Αν ισχύει ότι $\int f(x)dx = F(x) + c$,

i. να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τη θέση του τοπικού ακρότατού της και να το χαρακτηρίσετε, (3 μον.)

ii. να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την συνάρτηση f . (1 μον.)

Λύση

α) i. Η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.

Η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

Η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $(1, 3)$ και τοπικό ελάχιστο $(3, -1)$.

ii. Αφού $F''(2) = 0$, τότε σύμφωνα με τη γραφική παράσταση η συνάρτηση F είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$ και άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το $(2, 1)$.

β) i. Αφού $\int f(x)dx = F(x) + c$ τότε $f(x) = F'(x)$ και $f'(x) = F''(x)$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ οπότε $F''(x) = f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2]$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

Η συνάρτηση F είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ τότε $F''(x) = f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Αφού $F''(2) = 0$ τότε $f'(2) = 0$ κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f'

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x) = F''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	T.E	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$

ii. Η f είναι δευτέρου βαθμού άρα είναι παραβολή με ελάχιστο. Συνεπώς είναι κυρτή και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2022

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή 17/06/2022, 08:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1} \right) dx$ (3μ)

β) $\int (\varepsilon\varphi^5 x + \varepsilon\varphi^7 x) dx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ (2μ)

Λύση

α) $\int \left(e^{2x} + 4x - \frac{x^2+2}{x^2+1} \right) dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x^2 - \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x^2 - x - \text{τοξεφ} x + c$

β) $\int (\varepsilon\varphi^5 x + \varepsilon\varphi^7 x) dx = \int \varepsilon\varphi^5 x (\varepsilon\varphi^2 x + 1) dx = \int \varepsilon\varphi^5 x (\varepsilon\varphi x)' dx = \frac{\varepsilon\varphi^6 x}{6} + c$

A2. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (2μ)

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x$. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[1, e]$ και να υπολογίσετε τιμή στο διάστημα $(1, e)$ η οποία ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. (3μ)

Λύση

α) Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

(α) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

β) Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (1, e)$. Άρα από ΘΜΤ έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (1, e)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1-0}{e-1} \Rightarrow$

$\boxed{\xi = e - 1} \in (1, e)$.

A3. Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα μαθητών η οποία αποτελείται από 5 κορίτσια και 7 αγόρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή αν:

α) Η επιτροπή περιλαμβάνει 2 κορίτσια και 3 αγόρια. (2μ)

β) Δυο συγκεκριμένα αγόρια της ομάδας, ο Α και ο Β, αρνούνται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή. (3μ)

Λύση

α) Έχω $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 10 \cdot 35 = 350$ τρόποι.

β) Η επιλογή των αγοριών μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

i. Επιλέγεται ο Α ή ο Β και τέσσερα άλλα παιδιά. Αυτό γίνεται με $\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{4} = 2 \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 420$ τρόπους

ii. Δεν επιλέγονται οι Α και Β. Αυτό γίνεται με: $\binom{10}{5} = 252$ τρόπους. Σύνολο $420 + 252 = \boxed{672}$

Αλλιώς: Όλες οι περιπτώσεις εκτός από τις περιπτώσεις στις οποίες οι Α και Β βρίσκονται

ταυτόχρονα στην επιτροπή. Άρα $\binom{12}{5} - \binom{10}{3} = 792 - 120 = \boxed{672}$ τρόποι.

A4. Να υπολογίσετε τιμή του $n \in \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει

$$\sum_{\kappa=1}^v (2\kappa^2 - 4\kappa) = v(v+1)$$

Λύση

Έχω

$$\sum_{\kappa=1}^v (2\kappa^2 - 4\kappa) = 2 \sum_{\kappa=1}^v \kappa^2 - 4 \sum_{\kappa=1}^v \kappa = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot v(v+1)(2v+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot v(v+1) = v(v+1) \left[\frac{2v+1}{3} - 2 \right] = v(v+1) \left(\frac{2v-5}{3} \right).$$

$$\text{Άρα } \sum_{\kappa=1}^v (2\kappa^2 - 4\kappa) = v(v+1) \Leftrightarrow v(v+1) \left(\frac{2v-5}{3} \right) = v(v+1) \Leftrightarrow \frac{2v-5}{3} = 1 \Leftrightarrow \boxed{v=4}$$

A5. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax, a > 0$ και εστία E . Έστω $T(at^2, 2at), t \neq 0$ τυχαίο σημείο της. Αν A η προβολή του σημείου T στην διευθετούσα της παραβολής και M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AE , να αποδείξετε ότι η TM τέμνει κάθετα την AE .

Λύση

Από τον ορισμό της παραβολής έχω ότι $TA = TE$

Άρα, ATE ισοσκελές τρίγωνο και επειδή TM διάμεσος, τότε TM ύψος.

Επομένως, $TM \perp AE$

A6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x$,

Όπου $\text{τοξεφ}x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (3μ)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ ισχύει $2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2$ (2μ)

Λύση

α) έχω $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Και πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$	$f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$	$+\infty$

β) $\forall x \in (-\infty, 1]$, παρατηρώ ότι $f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow x - 2\text{τοξεφ}x \leq -1 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x - 4\text{τοξεφ}x \leq \pi - 2$

A7. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με $f(x) = -x^2 + 4$ και $g(x) = 2x + 4$

α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου T , το οποίο περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (3μ)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από των άξονα των τετμημένων. (2μ)

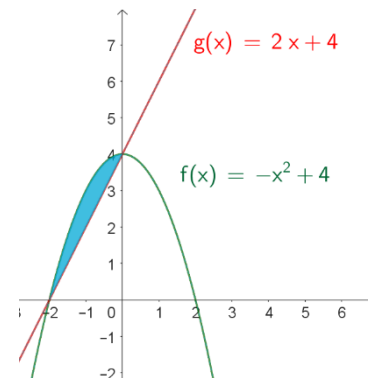
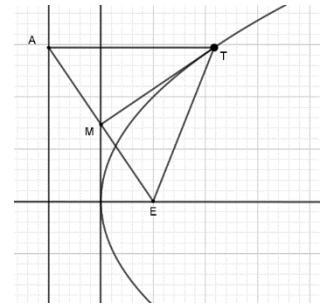
Λύση $-x^2 + 4 > 2x + 4$

$$\alpha) f(x) > g(x) \Rightarrow -x^2 + 4 > 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x < 0 \Rightarrow -2 < x < 0..$$

$$\text{Άρα } E = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^0 (-x^2 + 4 - 2x - 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^0 = -\frac{8}{3} + 4 = \boxed{\frac{4}{3} \tau. \mu.}$$

$$\beta) V = \pi \int_{-2}^0 (f^2(x) - g^2(x))dx = \pi \int_{-2}^0 ((-x^2 + 4)^2 - (2x + 4)^2)dx = \pi \int_{-2}^0 (x^4 - 12x^2 - 16x)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 - 8x^2\right]_{-2}^0 = \pi \left[\frac{32}{5} - 32 + 32\right] =$$

$$\boxed{\frac{32}{5} \pi \kappa. \mu.}$$



A8. Θεωρούμε τον κύκλο $x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0$. Να βρείτε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η ευθεία $y = 3x + 1$ τέμνει τον κύκλο σε σημεία A και B , έτσι ώστε η γωνία $\angle AOB$ να είναι ορθή, όπου O η αρχή των αξόνων.

Λύση

Ο κύκλος διέρχεται από το $(0, 0)$, άρα $0^2 + 0^2 - \lambda \cdot 0 - 2\lambda \cdot 0 + \kappa - 1 = 0 \Rightarrow \kappa - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\kappa = 1}$. Έχω $x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y + \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \lambda x - 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \frac{\lambda^2}{4} + y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \lambda^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + (y - \lambda)^2 = \frac{5\lambda^2}{4}$. Άρα ο κύκλος έχει κέντρο το $\left(\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$.

Αφού η γωνία $\angle AOB$ να είναι ορθή, το AB είναι διάμετρος και το κέντρο του κύκλου ανήκει στην ευθεία, άρα $\lambda = \frac{3\lambda}{2} + 1 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\lambda = -2}$$

A9. Δίνεται η λέξη «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (1μ)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με τη λέξη «ΑΞΙΟΣ». (2μ)

γ) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ» στους οποίους το «Α» προηγείται του «Λ» και το «Λ» προηγείται του «Σ». (2μ)

Λύση

α) Τα γράμματα «Ο» και «Η» εμφανίζονται δυο φορές άρα υπάρχουν $\frac{10!}{2! \cdot 2!} = \boxed{907.200}$ αναγραμματισμοί

β) Στο υπόλοιπο μέρος των αναγραμματισμών (μετά το «ΑΞΙΟΣ») έχουμε μεταθέσεις των 5 γραμμάτων «Λ», «Ο», «Γ», «Η», «Η», με επανάληψη, δηλαδή οι αναγραμματισμοί αυτοί είναι

$$\frac{5!}{2!} = \boxed{60}$$

γ) Σε πρώτη φάση επιλέγουμε 3 από τις 10 θέσεις κατά $\binom{10}{3}$ τρόπους και τοποθετούμε τα γράμματα Α, Λ, Σ με αυτή την διάταξη.

Σε δεύτερη φάση τοποθετούμε τα υπόλοιπα 7 γράμματα Ξ, Ι, Γ, Ο, Ο, Η, Η στις 7 θέσεις που έμειναν κατά $\frac{7!}{2! \cdot 2!}$ τρόπους

Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, οι ζητούμενοι αναγραμματισμοί είναι: $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \boxed{151.200}$

A10. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt, \text{ με } x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$I(x) = 2 - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$$

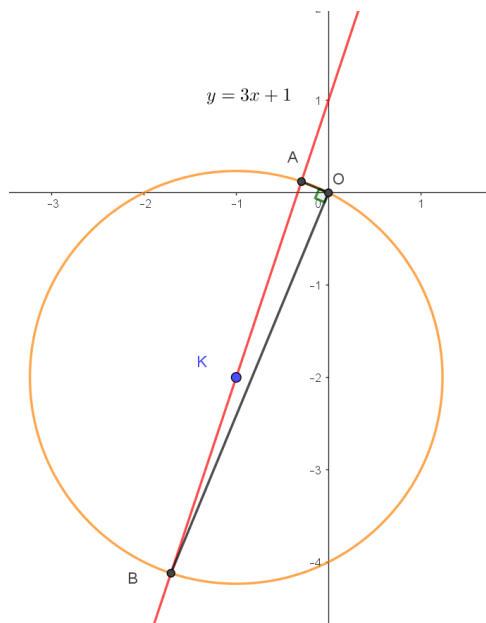
β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$

Λύση

α) Έχω $I(x) = \int_0^x t^2 \cdot e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_0^x + 2 \int_0^x t \cdot e^{-t} dt = -x^2 e^{-x} - 2[te^{-t}]_0^x + 2 \int_0^x e^{-t} dt = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2[e^{-t}]_0^x = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2 = 2 - e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 2) = 2 - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$

β) Έχω $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{e^x} = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \boxed{2}$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'



ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Έστω η πραγματική συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Έχω $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, άρα δεν τέμνει τον άξονα των y . Για την τομή με τον άξονα των x έχω: $f(x) = 0 \Rightarrow x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$. Άρα το αντίστοιχο σημείο είναι το $(\sqrt[3]{4}, 0)$.

Έχω ακόμα ότι $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3+8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -2$ και πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2) = -3$	$-\infty$	$+\infty$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.

Το $f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$ είναι τοπικό μέγιστο

Για τις ασύμπτωτες έχω: Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty.$$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $-\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

Όμοια η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στην περιοχή του $+\infty$.

B2. Δίνονται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και τα σημεία του $A(0, R)$, $B(0, -R)$ και $T(R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta)$, με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο T και είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Γ .

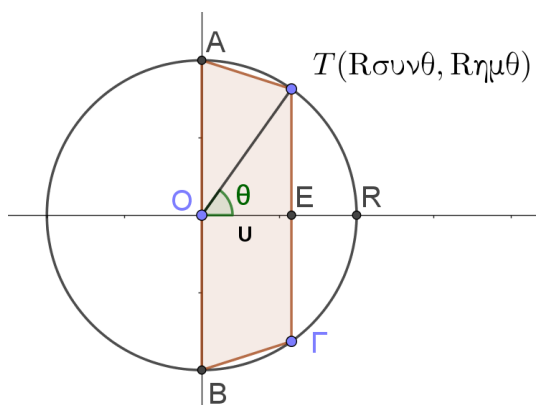
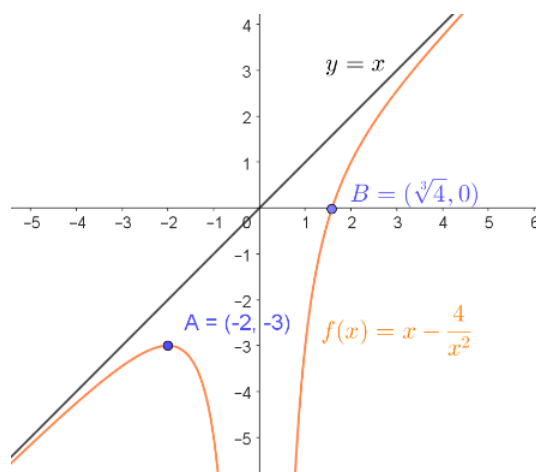
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ATGB$ είναι ίσο με $E = R^2\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \eta\mu\theta)$

β) Να βρείτε την τιμή του θ έτσι ώστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου να είναι μέγιστο.

Λύση

α) Το τετράπλευρο $ATGB$ είναι τραπέζιο $(AB // TG)$.

$\beta_1 = 2R$ και $\beta_2 = 2R\eta\mu\theta$, το ύψος του τραπεζίου EO είναι $v = R\sigma\upsilon\nu\theta$



Επομένως, το εμβαδόν είναι $E = \frac{(\beta_1 + \beta_2)v}{2} = \frac{(2R + 2R\eta\mu\theta)R\sigma\upsilon\nu\theta}{2} = R^2\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \eta\mu\theta)$.

β) Έχω για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ότι $E'(\theta) = -R^2\eta\mu\theta(1 + \eta\mu\theta) + R^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = R^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta) - R^2\eta\mu\theta = R^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta - \eta\mu\theta)$ με $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta - \eta\mu\theta = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta = \eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Rightarrow$

$$2\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow 3\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \theta = \frac{\pi}{6}$$

ή $2\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + \theta \Rightarrow \theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, αδύνατη για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Έχω ακόμα ότι $E''(\theta) = R^2(-2\eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow E''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -R^2\left(2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) < 0$, άρα α η

συνάρτηση $E(\theta)$ παίρνει μέγιστη τιμή στο $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, όταν $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

B3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx$$

(3μ)

β) Αν $g(x) = f(x) + f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx$$

(3μ)

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx$$

(4μ)

Λύση

α) Έχω $u = -x \Rightarrow dx = -du$. Άρα $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-u) du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx$

β) Έχω $f(x) + f(-x) = g(x) \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx \Rightarrow 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx$

γ) Έστω $f(x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x$

με $g(x) = f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{(-x)^3 - \eta\mu^5(-x)}{(-x)^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu(-2x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$.

Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2\sigma\upsilon\nu 2x dx = \left[\frac{\eta\mu 2x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{0}$

B4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής. (3μ)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ είναι $x - 2y - 3 = 0$. (3μ)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 16)$ ισχύει

$$x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln x^2$$

Λύση

α) Έχω $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-4 + \sqrt{x}}{4x^2}$ με $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ και πίνακα μεταβολών

x	0	16	$+\infty$	
$f''(x)$	$\parallel$	-	0	+
f	$\parallel$		ΣK	

Η f είναι κοίλη στο $(0, 16]$ και κυρτή στο $[16, +\infty)$

Το σημείο $M(16, 4\ln 2 - 4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

$$\beta) \text{ Έχω } \lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, f(1) = \ln 1 - \sqrt{1} = -1$$

$$\text{Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: } y - f(1) = \lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot (x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$$

γ) Επειδή στο διάστημα $(0, 16]$ η συνάρτηση είναι κοίλη και η ευθεία $x - 2y - 3 = 0$ είναι εφαπτομένη, για κάθε $x \in (0, 16)$, ισχύει

$$y_{\varepsilon\varphi} \geq f(x) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \geq \ln x - \sqrt{x} \Rightarrow x - 3 \geq 2\ln x - 2\sqrt{x} \Rightarrow x + 2\sqrt{x} \geq 3 + \ln x^2$$

B5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και τυχαίο σημείο της $P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο P είναι: $5x\eta\mu\theta - 3y\sigma\upsilon\nu\theta = 16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$ (3μ)

β) Η κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του PK είναι έλλειψη. (4μ)

γ) Αν E η εστία στον θετικό ημιάξονα και ε η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{EK}{EP} = \varepsilon$. (3μ)

Λύση

$$\alpha) \text{ Η εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο της } P(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta) \text{ είναι } \frac{x5\sigma\upsilon\nu\theta}{25} + \frac{y3\eta\mu\theta}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x\sigma\upsilon\nu\theta}{5} + \frac{y\eta\mu\theta}{3} = 1 \text{ με } \lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{5}}{\frac{\eta\mu\theta}{3}} = -\frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{5\eta\mu\theta} \Rightarrow \lambda_K = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

$$\text{Άρα η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο } P \text{ είναι: } y - 3\eta\mu\theta = \frac{5\eta\mu\theta}{3\sigma\upsilon\nu\theta}(x - 5\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow$$

$$3y\sigma\upsilon\nu\theta - 9\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 5x\eta\mu\theta - 25\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow 5x\eta\mu\theta - 3y\sigma\upsilon\nu\theta = 16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\beta) \text{ Για } y = 0 \text{ έχω } 5x\eta\mu\theta = 16\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow x = \frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta. \text{ Άρα } K\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta, 0\right). \text{ Το μέσο } M \text{ του } PK \text{ είναι το } \left(\frac{\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta}{2}, \frac{0 + 3\eta\mu\theta}{2}\right) = \left(\frac{41}{10}\sigma\upsilon\nu\theta, \frac{3}{2}\eta\mu\theta\right). \text{ Έχω } \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 y_M^2 + \left(\frac{10}{41}\right)^2 x_M^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{41}{10}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

1, άρα ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος PK είναι η παραπάνω έλλειψη.

$$\gamma) \text{ Έχω } \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16, \alpha = 5, \beta = 3, \gamma = 4 \text{ και } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}. \text{ Η εστία } E(\gamma, 0) = (4, 0)$$

$$\text{Έχω } \frac{EK^2}{EP^2} = \frac{\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta - 4\right)^2 + (0 - 0)^2}{(5\sigma\upsilon\nu\theta - 4)^2 + (3\eta\mu\theta - 0)^2} = \frac{\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta - 4\right)^2}{(5\sigma\upsilon\nu\theta - 4)^2 + (3\eta\mu\theta)^2} = \frac{\left(\frac{16}{5}\sigma\upsilon\nu\theta - 4\right)^2}{25\sigma\upsilon\nu^2\theta - 40\sigma\upsilon\nu\theta + 16 + 9\eta\mu^2\theta} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 (4\sigma\upsilon\nu\theta - 5)^2}{16\sigma\upsilon\nu^2\theta - 40\sigma\upsilon\nu\theta + 25} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 (4\sigma\upsilon\nu\theta - 5)^2}{(4\sigma\upsilon\nu\theta - 5)^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{EK}{EP} = \varepsilon$$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2023

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int e^x(1 + e^x)^4 dx$

Λύση

$$\int e^x(1 + e^x)^4 dx = \int (1 + e^x)'(1 + e^x)^4 dx = \frac{(1 + e^x)^5}{5} + c$$

A2. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x - x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1 . (μονάδες 2)

(β) Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά. (μονάδες 3)

Λύση

Για τα σημεία τομής ευθείας – καμπύλης έχω: $4x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

α) Άρα $E_1 = \int_0^1 [3 - (4x - x^2)] dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \left[\frac{4}{3} \right]$ τ.μ.

β) $E_2 = \int_1^3 [4x - x^2 - 3] dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^3 = 18 - 9 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3} - 3 \right) = \left[\frac{4}{3} \right] = E_1$

A3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2$$

Λύση

$$\text{Έχω } \sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2 = \sum_{\kappa=1}^{100} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^6 \kappa^2 = \frac{100 \cdot (100+1) \cdot (2 \cdot 100 + 1)}{6} - \frac{6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6 + 1)}{6} = 338.350 - 91 = \boxed{338.259}$$

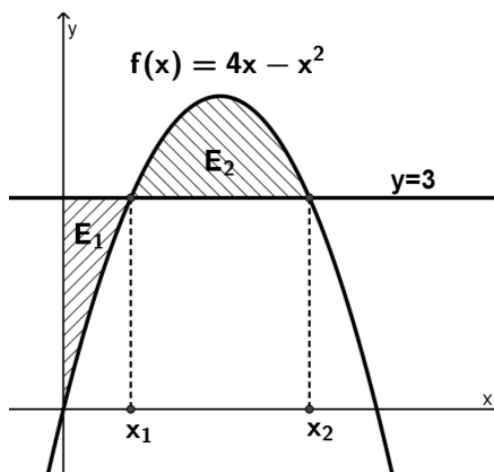
A4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa \sin x - \kappa^2 \eta \mu x + 1, \kappa \in \mathbb{R} - 0$. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(α) να βρείτε την τιμή του κ (μονάδες 2)

(β) να βρείτε τιμή ξ , για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (μονάδες 3)

Λύση

α) Για να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, θα πρέπει να ισχύει ότι $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \kappa + 1 = -\kappa^2 + 1 \Rightarrow \kappa + \kappa^2 = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = -1$. Η $\kappa = 0$ απορρίπτεται αφού $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$. Άρα δεκτή μόνο η $\boxed{\kappa = -1}$



β) Για το $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ του θεωρήματος Rolle έχω $f'(\xi) = 0$. Έχουμε για $k = -1$ ότι $f(x) = -\sigma\nu\nu x - \eta\mu x + 1$

και $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\nu\nu x$, άρα $\eta\mu\xi - \sigma\nu\nu\xi = 0 \Rightarrow \eta\mu\xi = \sigma\nu\nu\xi \xrightarrow{\xi \in (0, \frac{\pi}{2})} \boxed{\xi = \frac{\pi}{4}}$

A5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^k (1-x)^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^k dx \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x(1-x)^{10} dx$

Λύση

Έχω για $u = 1 - x$ ότι $dx = -du$. Για $x = 0 \Rightarrow u = 1$ και για $x = 1 \Rightarrow u = 0$

Άρα $\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\lambda dx = -\int_1^0 (1-u)^\kappa u^\lambda du = \int_0^1 (1-u)^\kappa u^\lambda du = \int_0^1 (1-x)^\kappa x^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^\kappa dx$

Οπότε για $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$ έχουμε ότι : $\int_0^1 x(1-x)^{10} dx = \int_0^1 x^{10}(1-x) dx = \int_0^1 x^{10} - x^{11} dx =$

$$\left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12} \right]_0^1 = \frac{1^{11}}{11} - \frac{1^{12}}{12} - 0 = \boxed{\frac{1}{132}}$$

A6. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου **ABΓΔ** ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του **A, B, Γ** και **Δ**. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Λύση

Περίπτωση 1. (Κάθε κορυφή του τριγώνου βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του τετραγώνου)

Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω τις τρεις και από κάθε πλευρά παίρνω ένα σημείο οπότε έχω

$$\binom{4}{3} \binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1} = \frac{4!}{(4-3)!3!} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4000 \text{ τριγωνα}$$

Περίπτωση 2. (Οι δύο κορυφές του τριγώνου βρίσκονται στην ίδια πλευρά του τετραγώνου ενώ η τρίτη κορυφή βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά)

Από τις 4 πλευρές του τετραγώνου επιλέγω την μια και από αυτήν επιλέγω τις 2 κορυφές του τριγώνου και στη συνέχεια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του τετραγώνου επιλέγω την μία και από αυτή επιλέγω την τρίτη κορυφή του τριγώνου.

Άρα έχω $\binom{4}{1} \binom{10}{2} \binom{3}{1} \binom{10}{1} = 4 \cdot \frac{10!}{(10-2)!2!} \cdot 3 \cdot 10 = 5400$ τριγωνα. Συνολικά έχω $4000 + 5400 = \boxed{9400}$

τριγωνα.

A7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία **O(0, 0)** και **A(2, 4)**. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 2]$,

(α) να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2]$ (μονάδες 3)

(β) να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx \leq 4$ (μονάδες 2)

Λύση

α) Αφού η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 2]$, η γραφική της παράσταση θα είναι «κάτω» από την ευθεία

OA. Η ευθεία **OA** είναι η : $y - 0 = \frac{4-0}{2-0}(x - 0) \Rightarrow y = 2x$. Άρα $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2]$

β) Από το ερώτημα α) έχω $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2] \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 2x dx = [x^2]_0^2 = 4$

A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\phi x, x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \tau\omicron\xi\epsilon\phi x dx$ (μονάδες 3,5)

Λύση

α) Έχω $f(x) = \tau\omicron\xi\epsilon\phi x \Rightarrow \epsilon\phi f(x) = x \Rightarrow f'(x)(1 + \epsilon\phi^2 f(x)) = 1 \Rightarrow f'(x)(1 + x^2) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

β) Έχω $\int \tau\omicron\xi\epsilon\phi x dx = \int x' \cdot \tau\omicron\xi\epsilon\phi x dx = x \cdot \tau\omicron\xi\epsilon\phi x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \tau\omicron\xi\epsilon\phi x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = x \cdot \tau\omicron\xi\epsilon\phi x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

A9. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 μονάδων αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. (μονάδες 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C). (μονάδες 3)

Λύση

α) Η γενική εξίσωση κύκλου είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Αφού ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ έχω $0^2 + 0^2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι της $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$. Αφού ο κύκλος αποκόπτει από τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων τμήμα μήκους 6, ο κύκλος θα περνά από το σημείο $(6, 0)$

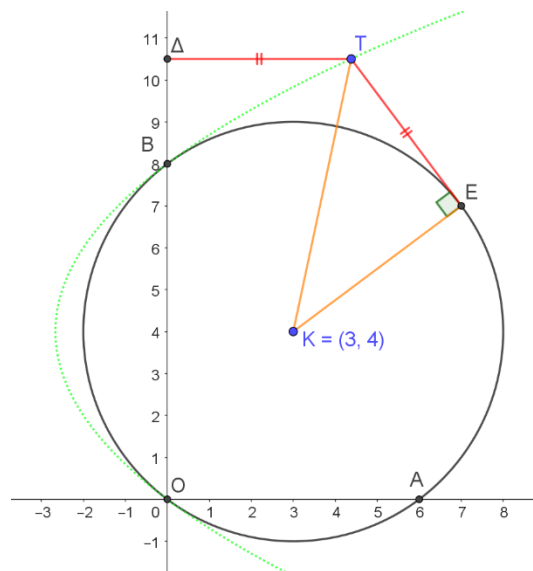
άρα έχω $6^2 + 0^2 + 6A + 0B = 0 \Rightarrow A = -6$. Όμοια αφού ο κύκλος αποκόπτει από τον θετικό ημιάξονα των τεταγμένων τμήμα μήκους 8, ο κύκλος θα περνά από το σημείο $(0, 8)$ άρα έχω $0^2 + 8^2 + 0A + 8B = 0 \Rightarrow B = -8$.

Άρα η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

β) Έχω για τον κύκλο ότι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$.

Άρα ο κύκλος έχει κέντρο $K(3, 4)$ και ακτίνα $R = 5$. Για το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος TE έχω $TE^2 = TK^2 - R^2 = (x_T - 3)^2 + (y_T - 4)^2 - 25$. Η απόσταση του σημείου T από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με $|x_T|$. Άρα έχω $TE = |x_T| \Rightarrow TE^2 = |x_T|^2 \Rightarrow (x_T - 3)^2 + (y_T - 4)^2 - 25 = x_T^2 \Rightarrow -6x_T + 9 + y_T^2 - 8y_T + 16 - 25 = 0 \Rightarrow$

$-6x_T + y_T^2 - 8y_T = 0$, που είναι η πράσινη υπερβολή του σχήματος.



A10. Δίνεται η λέξη **Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Ε Σ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(μονάδες 1)

(β) Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

- τα δύο «Ε» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «Ι» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις. (μονάδες 2)
- υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «Ε» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα. (μονάδες 2)

Λύση

α) Έχουμε 9 γράμματα από τα οποία τα δύο είναι Ε και τα δύο είναι Ι άρα το πλήθος των αναγραμματισμών είναι: $\frac{9!}{2!2!} = \boxed{90.720}$

β) i) Θα υπολογίσουμε πρώτα το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης που έχουν τα δύο Ε συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο Ε ως ένα αντικείμενο έχουμε συνολικά 8 γράμματα από τα οποία τα δύο (Ι) είναι ίδια άρα το πλήθος τους είναι $\frac{8!}{2!} = \mathbf{20.180}$. Στη συνέχεια, από τους αναγραμματισμούς που έχουν τα δύο Ε συνεχόμενα θα υπολογίσουμε αυτούς που έχουν τα δύο Ι συνεχόμενα. Θεωρώντας τα δύο Ε ως ένα αντικείμενο και τα δύο Ι ως άλλο αντικείμενο έχουμε συνολικά 7 γράμματα άρα το πλήθος τους είναι $\frac{7!}{2!} = \mathbf{5.040}$. Επομένως το σύνολο των ζητούμενων αναγραμματισμών είναι όλοι οι αναγραμματισμοί που έχουν τα δύο Ε μαζί εκτός από αυτούς που έχουν και τα δύο Ι μαζί, δηλαδή $\mathbf{20160 - 5040 = \boxed{15.120}}$

ii) Από τα 4 σύμφωνα Π, T, X, Σ επιλέγω τα 2 για να τοποθετηθούν ανάμεσα στα δύο Ε. τα οποία μπορούν να μετατεθούν με $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ τρόπους. Θεωρούμε την τετράδα αυτή ως ένα αντικείμενο και μαζί με τα υπόλοιπα 5 γράμματα από τα οποία τα δύο είναι Ι, έχουμε συνολικά 6 αντικείμενα τα οποία μετατίθενται με $\frac{6!}{2!} = 360$ τρόπους.

Άρα έχουμε συνολικά $12 \cdot 360 = 4320$ τρόπους.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α'

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (μονάδες 2)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. (μονάδες 6)

(γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f . (μονάδες 2)

Λύση

α) Προφανώς $D_f = \mathbb{R}$. Για $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \frac{\ln(0^2+1)}{0^2+1} = \frac{\ln 1}{1} = 0$. Άρα σημείο τομής με τους άξονες το $(0, 0)$

β) Έχω $f'(x) = \frac{(\ln(x^2+1))' \cdot (x^2+1) - 2x \cdot \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot (x^2+1) - 2x \cdot \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x - 2x \cdot \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x[1 - \ln(x^2+1)]}{(x^2+1)^2}$ και $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x[1 - \ln(x^2+1)]}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0$ ή $1 - \ln(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $\ln(x^2 + 1) = 1$

$$\ln(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln e \Leftrightarrow x^2 + 1 = e \Leftrightarrow x^2 = e - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e - 1}$$

Με πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	$-\sqrt{e-1}$	0	$\sqrt{e-1}$	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$			$f(-\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e}$		$f(0) = 0$		$f(\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e}$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $(-\infty, -\sqrt{e-1}]$ και $[0, \sqrt{e-1}]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα: $[-\sqrt{e-1}, 0]$ και $[\sqrt{e-1}, +\infty)$.

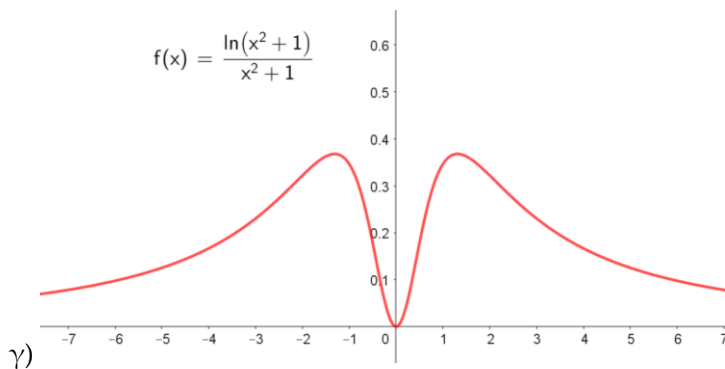
Η f παρουσιάζει $T. E.$ στο $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Η f παρουσιάζει $T. M.$ στο $x = -\sqrt{e-1}$, το $f(-\sqrt{e-1}) = \frac{\ln((- \sqrt{e-1})^2 + 1)}{(- \sqrt{e-1})^2 + 1} = \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

Η f παρουσιάζει $T. M.$ στο $x = \sqrt{e-1}$, το $f(\sqrt{e-1}) = \frac{\ln((\sqrt{e-1})^2 + 1)}{(\sqrt{e-1})^2 + 1} = \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

Ο παρονομαστής της f δεν μηδενίζεται άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, έτσι η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x^2+1)]'}{[x^2+1]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον άξονα των x . Όμοια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον άξονα των x .



B2. Δίνεται έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$, $\gamma > 0$, μεγάλο άξονα $A'A$ και μικρό άξονα $B'B$, τέτοια ώστε η γωνία $E'B'E$ είναι ορθή.

(α) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης. (μονάδες 2)

(β) Αν οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις $x = \pm 4\sqrt{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. (μονάδες 2)

(γ) Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι η $x^2 + 2y^2 = 16$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων BE , AE και της γραφικής παράστασης της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων. (μονάδες 6)

Λύση

α) Έχω από τον ορισμό της έλλειψης ότι $BE + BE' = 2a$. Λόγω συμμετρίας $BE = BE' = a$.

Αφού το τρίγωνο $E'BE$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές έχω

$$B\hat{E}E' = 45^\circ \Rightarrow \sin B\hat{E}E' = \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

β) Εξισώσεις διευθετούσων: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ άρα $\frac{a}{\varepsilon} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$

$$a = 4. \Rightarrow \gamma = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \text{ Από } a^2 = b^2 + \gamma^2 \Rightarrow 16 = b^2 + 8 \Rightarrow$$

$$b^2 = 8. \text{ Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι η } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

γ) Έχω για την νέα έλλειψη ότι $x^2 + 2y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$, άρα $a^2 = 16, b^2 = 8, \gamma^2 = a^2 - b^2 = 8 \Rightarrow \gamma = 2\sqrt{2}$.

Έχω $V = V_1 - V_{\kappaωνον}$ όπου V_1 ο όγκος τους στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του ελλειπτικού τόξου AB γύρω από τον άξονα των x και $V_{\kappaωνον}$ ο όγκος τους στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του τμήματος BE γύρω από τον άξονα των x , το οποίο είναι προφανώς κώνος.

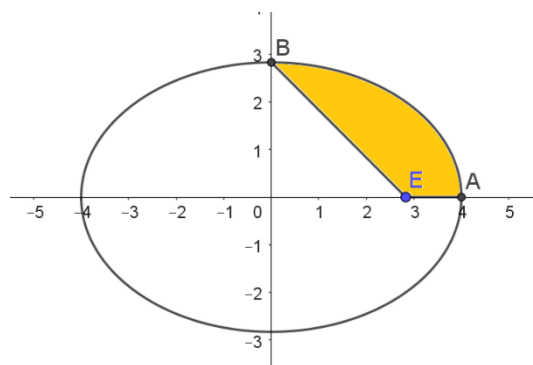
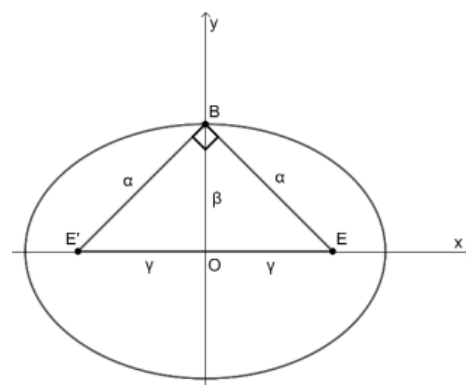
$$\text{Έχω } V_1 = \pi \int_0^4 y_{\text{έλλειψης}}^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{16-x^2}{2} \right) dx = \pi \int_0^4 \left(8 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \pi \left[8x - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = \pi \left(32 - \frac{32}{3} - 0 \right) = \frac{64}{3}\pi$$

$$\text{Ακόμα έχω } V_{\kappaωνον} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot v}{3} = \frac{\pi \cdot (OB)^2 \cdot (OE)}{3} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot (2\sqrt{2})}{3} = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Άρα τελικά έχω } V = \frac{64}{3}\pi - \frac{16\pi\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{16}{3}\pi(4 - \sqrt{2})} \text{ κ.μ.}$$

B3. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$x^2 \cdot f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t) dt, \forall x > 0$$



(α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$. (μονάδες 1)

(β) Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει: $x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$ (μονάδες 4)

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (μονάδες 5)

Λύση

α) Για $x = 1$ έχω $1^2 \cdot f(1) = 1 + \int_1^1 t \cdot f(t) dt \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow$

β) Έχω $x^2 \cdot f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t) dt \Rightarrow (x^2 \cdot f(x))' = (x + \int_1^x t \cdot f(t) dt)' \Rightarrow 2xf(x) + x^2 \cdot f'(x) = 1 + x \cdot f(x) \Rightarrow 2f(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x} + f(x) \Rightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x}$

γ) Έχω $f(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow (x \cdot f(x))' = (\ln x)' \Rightarrow x \cdot f(x) = \ln x + c \xrightarrow{f(1)=1} 1 \cdot f(1) = \ln 1 + c \Rightarrow 1 = c \Rightarrow x \cdot f(x) = \ln x + 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, \forall x > 0}$

B4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εστιακή χορδή AB όπου $A(t^2, 2t)$, $t > 0$ και $B(\rho^2, 2\rho)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι $t\rho = -1$ (μονάδες 2)

(β) Αν $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$, να δείξετε ότι $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$. (μονάδες 4)

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου t ώστε το S να ελαχιστοποιείται. (μονάδες 4)

Λύση

α) Έχω $y^2 = 4x = 2px \Rightarrow p = 2$. Άρα η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E = (\frac{p}{2}, 0) = (1, 0)$ και η διευθετούσα είναι η $x = -\frac{p}{2} = -1$. Αφού τα σημεία A, E και B είναι συνευθειακά έχω

$$\begin{aligned} \lambda_{AE} = \lambda_{EB} &\Rightarrow \frac{2t - 0}{t^2 - 1} = \frac{2\rho - 0}{\rho^2 - 1} \Rightarrow 2t(\rho^2 - 1) = 2\rho(t^2 - 1) \Rightarrow t\rho^2 - t \\ &= \rho t^2 - \rho \Rightarrow t\rho^2 - \rho t^2 = t - \rho \Rightarrow t\rho(\rho - t) = (t - \rho) \\ &\Rightarrow t\rho = -1 (t \neq \rho) \end{aligned}$$

β) Έχω $S = (A\Gamma) + (B\Delta) = |x_\Gamma - x_A| + |x_\Delta - x_B| = |-1 - t^2| + |-1 - \rho^2| = 1 + t^2 + 1 + \rho^2 = 2 + t^2 + \left(\frac{-1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$

γ) Έχω $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$ με την ισότητα για $x = 1$. Άρα $t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2, \forall t >$

0 με την ισότητα για $t = 1$. Άρα $t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \geq 2 + 2 \Rightarrow S \geq 4, \forall t > 0$. Συνεπώς το S ελαχιστοποιείται για $t = 1$ και η ελάχιστη τιμή του είναι το 4.

B5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες. (μονάδες 3)

(β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη.

(μονάδες 5)

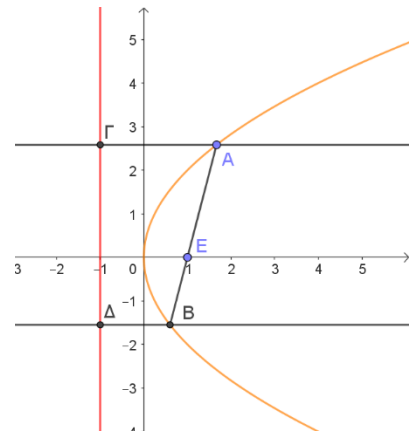
(γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη.

(μονάδες 2)

Λύση

α) Έχω Δοχείο 1: 2Α και 1Κ, Δοχείο 2: 2Α και 1Κ, Δοχείο 3: 3Α

Έστω A_i : «επιλέγουμε 2 άσπρες μπάλες» και Δi : «επιλέγουμε το Δοχείο i » $i = 1, 2, 3$



$$\text{Τότε } P(\Lambda) = P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2) + P(\Lambda \cap \Delta_3) = P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(\Lambda|\Delta_3) = \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

β) Έστω το ενδεχόμενο K : «η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε είναι κόκκινη».

$$\text{Τότε } P(K|\Lambda) = \frac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Lambda \cap \Delta_1) + P(\Lambda \cap \Delta_2)}{P(\Lambda)} = \frac{P(\Delta_1) \cdot P(\Lambda|\Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(\Lambda|\Delta_2)}{P(\Lambda)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

γ) Αποκλείεται να επιλέξαμε από το τρίτο δοχείο ακριβώς μία άσπρη μπάλα, αφού όλες του οι μπάλες είναι άσπρες. Άρα επιλέξαμε μία άσπρη μπάλα από π.χ. το πρώτο δοχείο και μια κόκκινη. Συνεπώς έμεινε στο δοχείο η Τρίτη μπάλα που είναι άσπρη. Άρα σίγουρα η τρίτη μπάλα θα είναι άσπρη. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\boxed{1}$.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

[Πηγές]

[Κύπρος - Βικιπαίδεια \(wikipedia.org\)](https://el.wikipedia.org)

Για περισσότερες πληροφορίες για την Ανώτερη και Ανώτατη Εκπαίδευση στην Κύπρο καθώς και για κατάλογο των Ιδρυμάτων Ανώτερης και Ανώτατης Εκπαίδευσης, επισκεφτείτε τη σελίδα: <http://www.highereducation.ac.cy/gr/index.html>

[Θέματα - Λύσεις \(moec.gov.cy\)](http://moec.gov.cy)