

[Η Ινδία]

Η Ινδία ή Μπαράτ (επίσημα Δημοκρατία της Ινδίας ή Δημοκρατία του Μπαράτ, ινδ: Bhārat Gaṇarājya) είναι χώρα στη Νότια Ασία. Είναι η μεγαλύτερη χώρα παγκοσμίως σε πληθυσμό ξεπερνώντας την Κίνα, με 1.387.284.855 κατοίκους, σύμφωνα με επίσημη εκτίμηση για το 2023, και η έβδομη μεγαλύτερη σε έκταση με 3.287.263 τ.χλμ..

Η Ινδία, κατά τη διάρκεια της ιστορίας υπήρξε κοιτίδα και σταυροδρόμι πολλών σημαντικών πολιτισμών και θρησκειών. Κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα σταδιακά υποτάχθηκε στο Ηνωμένο Βασίλειο, ενώ το 1947 απέκτησε την ανεξαρτησία της μετά από γενικευμένο αγώνα αυτοδιάθεσης που χαρακτηρίστηκε από μη βίαιες αντιδράσεις. Σήμερα η Ινδία είναι από τις πιο γοργά αναπτυσσόμενες οικονομίες, παρόλο που η φτώχεια παραμένει έντονο κοινωνικό φαινόμενο.

[Εκπαίδευση στην Ινδία]

Η εκπαίδευση στην Ινδία είναι μια πολύπλοκη διαδικασία που ρυθμίζεται από διάφορα διοικητικά όργανα. Εποπτεύεται από τρία εθνικά όργανα: το Συμβούλιο Τεχνικής Εκπαίδευσης της Ινδίας, την Επιτροπή Πανεπιστημιακών Επιχορηγήσεων και το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Κατάρτισης. Εκτός από αυτά, κάθε ομοσπονδία έχει το Τμήμα ή το Υπουργείο Παιδείας του, το οποίο ρυθμίζει τη σχολική εκπαίδευση εντός της δικαιοδοσίας του.

Στην Ινδία, το ποσοστό αλφαριθμητισμού για άτομα ηλικίας επτά ετών και άνω είναι 74,04%. Το ποσοστό αλφαριθμητισμού των ανδρών είναι 82,14%, ενώ το ποσοστό αλφαριθμητισμού των γυναικών είναι 65,46%. Το ακαθάριστο ποσοστό εγγραφής (GER) για την τριτοβάθμια εκπαίδευση στην Ινδία είναι 26.30%. Το GER είναι το ποσοστό των ατόμων ηλικίας 18-23 ετών που είναι εγγεγραμμένα σε ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Στην Ινδία, υπάρχουν περισσότερα από 700 πανεπιστήμια και 37000 κολέγια.

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Ινδίας στο σύνολό του δεν είναι στο ύψος των περιστάσεων. Υπάρχουν πολλά προβλήματα στο εκπαιδευτικό σύστημα. Η ποιότητα της εκπαίδευσης δεν είναι καλή. Υπάρχει μεγάλη διαφθορά στο εκπαιδευτικό σύστημα. Η κυβέρνηση δεν κάνει αρκετά για να βελτιώσει το εκπαιδευτικό σύστημα. Υπάρχουν πολλά ιδιωτικά σχολεία στην Ινδία που παρέχουν εκπαίδευση καλής ποιότητας. Αλλά τα δίδακτρα αυτών των σχολείων είναι πολύ υψηλά. Έτσι, μόνο οι πλούσιοι άνθρωποι μπορούν να αντέξουν οικονομικά να στείλουν τα παιδιά τους σε αυτά τα σχολεία. Σε πολλά δημόσια σχολεία στην Ινδία δεν παρέχεται εκπαίδευση καλής ποιότητας. Το ποσοστό εγκατάλειψης είναι πολύ υψηλό στην Ινδία. Πολλοί μαθητές εγκαταλείπουν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την εκπαίδευσή τους.

[Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ινδία - Έργο GNU - Ίδρυμα Ελεύθερου Λογισμικού]

Η Ινδία υποδιαιρείται σε 28 πολιτείες και σε 7 αποκαλούμενες "Ενωμένες Επικράτειες". Οι πολιτείες έχουν τις δικές τους εκλεγμένες κυβερνήσεις, ενώ οι Ενωμένες Επικράτειες κυβερνώνται απ' ευθείας από την Κυβέρνηση της Ινδίας (ΚτΙ), με τον Πρόεδρο της Ινδίας να διορίζει έναν διαχειριστή για την κάθε Ενωμένη Επικράτεια. Οι πολιτικές και τα προγράμματα για την σχολική εκπαίδευση προτείνονται στο εθνικό επίπεδο από την ΚτΙ, αν και οι κυβερνήσεις των πολιτειών έχουν μεγάλο βαθμό ελευθερίας στην υλοποίηση των προγραμμάτων. Η Κεντρική Συμβουλευτική Διεύθυνση Εκπαίδευσης (CABE) παίζει έναν ηγετικό ρόλο στην εξέλιξη και την παρακολούθηση των εκπαιδευτικών πολιτικών και προγραμμάτων. Υπάρχει ένας εθνικός οργανισμός που παίζει ένα ρόλο κλειδί στην ανάπτυξη πολιτικών και προγραμμάτων, που αποκαλείται Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Εκπαίδευσης (NCERT) και ο οποίος καταρτίζει ένα Εθνικό Πλαίσιο Διδακτικού Προγράμματος. Η κάθε πολιτεία έχει και τον αντίστοιχο οργανισμό, που ονομάζεται Πολιτειακό Συμβούλιο Εκπαιδευτικής Έρευνας και Εκπαίδευσης (SCERT). Αυτοί είναι οι φορείς που ουσιαστικά προτείνουν εκπαιδευτικές στρατηγικές, σχολικά

προγράμματα, παιδαγωγικά σχήματα και μεθοδολογίες αξιολόγησης προς τις πολιτειακές υπηρεσίες εκπαίδευσης. Τα SCERT γενικά ακολουθούν τις κατευθυντήριες οδηγίες που καταρτίστηκαν από το NCERT. Οι πολιτείες, όμως, έχουν σημαντική ελευθερία στην υλοποίηση του εκπαιδευτικού συστήματος. Η Εθνική Στρατηγική για την Εκπαίδευση το 1986, και το Πρόγραμμα Δράσης (POA) το 1992, προέβλεπαν την ελεύθερη και υποχρεωτική εκπαίδευση ικανοποιητικής ποιότητας για όλα τα παιδιά κάτω των 14 ετών πριν τον 21ο αιώνα. Η κυβέρνηση δεσμεύθηκε να αφιερώσει το 6% του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος (ΑΕΠ) για την εκπαίδευση, το μισό του οποίου θα επενδύονταν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οι δαπάνες στην Εκπαίδευση ως ποσοστό επί του ΑΕΠ, αυξήθηκαν επίσης από το 0,7 τοις εκατό το 1951-52 σε περίπου 3,6 τοις εκατό το 1997-98.

Συμπερασματικά, το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ινδία έχει πολύ δρόμο να διανύσει πριν μπορέσει να θεωρηθεί πραγματικά αποτελεσματικό. Ωστόσο, πολλές πρωτοβουλίες αναλαμβάνονται από την κυβέρνηση και διάφορους άλλους οργανισμούς για να προσπαθήσουν να βελτιώσουν την κατάσταση.

[Το Σχολικό σύστημα στην Ινδία]

Το σχολικό σύστημα στην Ινδία προβλέπει τέσσερα επίπεδα: το κατώτερο πρωτοβάθμιο (ηλικίες 6 ως 10), το ανώτερο πρωτοβάθμιο (11 και 12 ετών), το δευτεροβάθμιο (13 ως 15 ετών) και το ανώτερο δευτεροβάθμιο (17 και 18 ετών). Το κατώτερο πρωτοβάθμιο σχολείο υποδιαιρείται σε πέντε “τάξεις”, το ανώτερο πρωτοβάθμιο σχολείο σε δύο, το δευτεροβάθμιο σε τρία και το ανώτερο δευτεροβάθμιο σε δύο. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν, επί το πλείστον, ένα κοινό πρόγραμμα (εκτός από τις τοπικές αλλαγές στη μητρική γλώσσα) μέχρι το τέλος του δευτεροβάθμιου σχολείου. Προβλέπεται ένας κάποιος βαθμός εξειδίκευσης στο ανώτερο δευτεροβάθμιο επίπεδο. Οι μαθητές σε όλη τη χώρα πρέπει να μάθουν τρεις γλώσσες (συγκεκριμένα, Αγγλικά, Χίντι και τη μητρική τους γλώσσα) εκτός από τις περιοχές όπου τα Χίντι είναι η μητρική γλώσσα και σε μερικά άλλα σχολεία κατεύθυνσης, για τα οποία θα συζητήσουμε πιο κάτω.

Υπάρχουν, βασικά, τρεις κατευθύνσεις στο σχολικό σύστημα της Ινδίας. Οι δύο από αυτές συντονίζονται σε εθνικό επίπεδο, από τις οποίες μία υπάγεται στην Κεντρική Διεύθυνση Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (CBSE) και προοριζόταν, αρχικά, για παιδιά των υπαλλήλων της κεντρικής κυβέρνησης που μετατίθενται περιοδικά και μπορεί να χρειαστεί να μετακινηθούν σε οποιονδήποτε τόπο κατοικίας ανά τη χώρα. Μερικά “κεντρικά σχολεία” (ονομαζόμενα Kendriya Vidyalayas) ιδρύθηκαν για το σκοπό αυτό σε όλα τα μεγάλα αστικά κέντρα της χώρας, και ακολουθούν ένα κοινό πρόγραμμα, έτσι ώστε ένας μαθητής που μεταβαίνει από το ένα σχολείο στο άλλο μια οποιαδήποτε ημέρα, δεν θα διαπιστώσει σχεδόν καμία διαφορά σε εκείνα που διδάσκονται. Σε αυτά τα σχολεία, ένα μάθημα (Κοινωνικές Επιστήμες, που περιλαμβάνει Ιστορία, Γεωγραφία και Αγωγή του πολίτη) διδάσκεται πάντοτε στη γλώσσα Χίντι, ενώ τα άλλα μαθήματα διδάσκονται στα Αγγλικά. Τα σχολεία Kendriya Vidyalayas δέχονται επίσης και άλλα παιδιά, εφόσον υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις. Όλα τους χρησιμοποιούν σχολικά βιβλία που γράφτηκαν και εκδίδονται από το NCERT. Πρόσθετα σε αυτά τα κρατικά σχολεία, ένας αριθμός από ιδιωτικά σχολεία ανά την χώρα ακολουθούν το διδακτικό πρόγραμμα (syllabus) της CBSE, αν και μπορεί να χρησιμοποιούν διαφορετικά σχολικά βιβλία και να ακολουθούν διαφορετικά προγράμματα διδασκαλίας. Έχουν κάποιον βαθμό ελευθερίας σε αυτά που μπορούν να διδάσκουν στις κατώτερες τάξεις. Η CBSE διαθέτει επίσης και 141 συνδεδεμένα σχολεία σε 21 άλλες χώρες, τα οποία κυρίως εξυπηρετούν τις ανάγκες του εκεί Ινδικού πληθυσμού.

Το δεύτερο κεντρικό σχήμα είναι το Ινδικό Πιστοποιητικό Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης (ICSE). Φαίνεται ότι αυτό υιοθετήθηκε προς αντικατάσταση του Σχολικού Πιστοποιητικού Cambridge. Η ιδέα αυτή συζητήθηκε σε ένα συνέδριο που διοργανώθηκε το 1952, υπό την προεδρία του τότε Υπουργού Παιδείας, του Maulana Abul Kalam Azad. Ο βασικός στόχος του συνεδρίου ήταν η θέσπιση Παν-Ινδικών Εξετάσεων που θα αντικαθιστούσαν το προερχόμενο από το εξωτερικό Σχολικό Πιστοποιητικό Cambridge. Τον

Οκτώβριο του 1956, στη συνάντηση του Διαπολιτειακού Συμβουλίου Αγγλο-Ινδικής Εκπαίδευσης, υιοθετήθηκε μια πρόταση για την ίδρυση ενός Ινδικού Συμβουλίου που θα διαχειρίζεται τις εξετάσεις του Τοπικού Συνδικάτου Εξετάσεων του Πανεπιστημίου του Cambridge στην Ινδία, και θα συμβουλεύει το Συνδικάτο για τον βέλτιστο τρόπο προσαρμογής των εξετάσεων στις ανάγκες της χώρας. Η εναρκτήρια συνεδρία του Συμβουλίου έλαβε χώρα στις 3 Νοεμβρίου του 1958. Τον Δεκέμβριο του 1967 το Συμβούλιο θεσμοθετήθηκε ως Σωματείο, σύμφωνα με τον Νόμο περί Σωματείων (Societies Registration Act) του 1860. Το Συμβούλιο αναφερόταν στο Νόμο Σχολικής Εκπαίδευσης του Δελχί του 1973, ως ένα σώμα που θα διοργανώνει τις δημόσιες εξετάσεις. Σήμερα, πολλά σχολεία σε όλη τη χώρα έχουν διασυνδεθεί με το Συμβούλιο αυτό. Όλα αυτά είναι ιδιωτικά σχολεία και γενικά εξυπηρετούν παιδιά πλούσιων οικογενειών.

Τόσο η CBSE όσο και το Συμβούλιο ICSE διεξάγουν τις δικές τους εξετάσεις στα σχολεία ανά τη χώρα που είναι διασυνδεδεμένα μαζί τους στο τέλος των 10 ετών σχολικής εκπαίδευσης (μετά το δευτεροβάθμιο επίπεδο) και ξανά στο τέλος των 12 ετών (μετά το ανώτερο δευτεροβάθμιο επίπεδο). Η εγγραφή ενός μαθητή στην 11η τάξη βασίζεται, συνήθως, στις επιδόσεις του σε αυτές τις Παν-Ινδικές εξετάσεις. Επειδή αυτό ασκεί μεγάλη πίεση πάνω στο παιδί να αποδώσει καλά, έχουν υπάρξει προτάσεις για την κατάργηση των εξετάσεων στο τέλος των 10 ετών.

[Σημασία της εκπαίδευσης στη σύγχρονη Ινδία]

Ακριβώς όπως η εκπαίδευση θεωρήθηκε πολύ ιερή και ιερή κατά την αρχαιότητα, έχει επίσης σημασία στη σημερινή σύγχρονη Ινδία. Η εκπαίδευση στη σύγχρονη Ινδία επικεντρώνεται σε ένα καλό μείγμα ακαδημαϊκών κλάδων των μαθηματικών, της επιστήμης, του εμπορίου και των τεχνών, καθώς και στην ενίσχυση των απαραίτητων δεξιοτήτων όπως η κριτική σκέψη, η επίλυση προβλημάτων, η λήψη αποφάσεων και οι βασικές δεξιότητες ζωής. Εξασφαλίζει ότι υπάρχει διαδραστικότητα μεταξύ των μαθητών και των εκπαιδευτικών.

Η εκπαίδευση στη σύγχρονη Ινδία ξεκίνησε με τη βρετανική εποχή και ως εκ τούτου η αγγλική γλώσσα κέρδισε εξέχουσα θέση έναντι άλλων γλωσσών μάθησης. Η σύγχρονη εκπαίδευση επικεντρώνεται κυρίως στους κλάδους των Φυσικών Επιστημών και των Μαθηματικών. Επιπλέον, η σύγχρονη εκπαίδευση στην Ινδία τονίζει τις δεξιότητες ακρόασης, γραφής, οπτικοποίησης, φαντασίας και σκέψης. Περιλαμβάνει επίσης κατάλληλα γραπτές εξετάσεις για τον έλεγχο της ικανότητας και του επιπέδου κατανόησης του μαθητή. Ουσιαστικά, η σύγχρονη εκπαίδευση στην Ινδία είναι μια εξέλιξη της παραδοσιακής εκπαίδευσης που αποτελείται από συμβατική εκπαίδευση σε θέματα αξίας, τρόπων και κοινωνικών πρακτικών που είναι σημαντικές για τη βασική επιβίωση.

Επιπλέον, η εκπαίδευση στη σύγχρονη Ινδία παρέχεται μέσω διαφόρων μέσων όπως ηλεκτρονικά βίντεο, podcasts, ηλεκτρονικά βιβλία και εφαρμογές για κινητά, γεγονός που καθιστά τη μάθηση εύκολη και προσβάσιμη σε όλους. Η τεχνολογία είναι ένα πολύ ζωτικό στοιχείο που βοηθά την εκπαίδευση στη σύγχρονη Ινδία.

Τώρα, στον 21ο αιώνα, η σύγχρονη εκπαίδευση στην Ινδία προσεγγίζει τη μάθηση με διάφορους καινοτόμους τρόπους, όπως ψηφιακές πλατφόρμες μάθησης, διαδικτυακή εκπαίδευση, βραχυπρόθεσμα μαθήματα ανάπτυξης δεξιοτήτων και χρήση σύγχρονης εκπαιδευτικής τεχνολογίας.

[Τριτοβάθμια εκπαίδευση στην Ινδία]

Όσον αφορά την τριτοβάθμια εκπαίδευση, η Ινδία πρωτοπορεί. Διαθέτει περισσότερα από διακόσια πανεπιστήμια, δεκαέξι από τα οποία θεωρούνται κεντρικά. Την πρώτη θέση από άποψη κύρους κατέχει το Πανεπιστήμιο Nalanda, το οποίο ιδρύθηκε τον πέμπτο αιώνα μ.Χ. Έχει μοναδικό χρώμα και πλούσια ιστορία. Ανάμεσα στα πιο δημοφιλή και αναγνωρισμένα πανεπιστήμια είναι η Καλκούτα, η Βομβάη, το Δελχί, το Ρατζαστάν, το Πανεπιστήμιο Γκάντι, καθένα από αυτά τα πανεπιστήμια έχει 130-150 χιλιάδες

φοιτητές. Τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω της σταθερής ανάπτυξης της ινδικής οικονομίας, ο αριθμός των μηχανικών και τεχνικών πανεπιστημίων έχει αυξηθεί. Ένα από τα πιο ελκυστικά και αξια εδω είναι το Ινδικό Ινστιτούτο Τεχνολογίας και το Ινστιτούτο Διοίκησης. Επιπλέον, στους τελευταίους το 50% των φοιτητών είναι αλλοδαποί φοιτητές. Το ποσοστό των αποφοίτων ανθρωπιστικών επιστημών στην Ινδία είναι περίπου 40%. Η μεταπτυχιακή εκπαίδευση στην Ινδία μπορεί επίσης να είναι δωρεάν, καθώς και η αρχική πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Για τους σκοπούς αυτούς, τα ιδρύματα χορηγούν τακτικά επιχορηγήσεις, οι οποίες απαιτούν τουλάχιστον ένα δίπλωμα και την ίδια γνώση αγγλικών.

Τα τελευταία χρόνια, τα πανεπιστήμια με τεχνική εστίαση, τα οποία παράγουν μηχανικούς υψηλής ειδίκευσης, έχουν αποκτήσει ιδιαίτερη δημοτικότητα. Τέτοιοι ειδικοί γίνονται όλο και πιο περιζήτητοι στη χώρα, ειδικά στο πλαίσιο της αναπτυσσόμενης ινδικής οικονομίας. Όσο για το εκπαιδευτικό σύστημα στο οποίο σπουδάζουν οι μαθητές, αντιγράφει σχεδόν πλήρως τη βρετανική έκδοση. Στα ανώτερα ιδρύματα υπάρχουν τρία επίπεδα - πτυχίο, μεταπτυχιακό ή διδακτορικό επιστήμης, καθένα από τα οποία ένας φοιτητής μπορεί να κατέχει.

Οι πιο δημοφιλείς τομείς σπουδών στα ινδικά πανεπιστήμια είναι η μηχανική, η διαχείριση, η τεχνολογία πληροφοριών, η φαρμακολογία και το κόσμημα. Η διδασκαλία στα πανεπιστήμια στην Ινδία διεξάγεται, κατά κανόνα, στα αγγλικά, επομένως μια καλή γλωσσική βάση είναι μία από τις κύριες απαιτήσεις για τους υποψήφιους.

Οι άνθρωποι στην Ινδία αγωνίζονται για γνώση, σε αντίθεση με τα στερεότυπα που έχουν διαμορφωθεί για τη χώρα στις ευρωπαϊκές χώρες. Το μόνο αρνητικό είναι η φτώχεια, η οποία περιπλέκει την εκπαιδευτική διαδικασία στην Ινδία.

[Οι 10 πιο δύσκολες εξετάσεις στην Ινδία το 2023]

Η ανταγωνιστικότητα στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας είναι ζωτικής σημασίας για την ανάδειξη των καλύτερων στοιχείων ενός μαθητή. Βοηθά στην ανάπτυξη των δεξιοτήτων και της δημιουργικότητας των μαθητών. Μια ποικιλία χαρακτηριστικών, συμπεριλαμβανομένης της πνευματικής οξύτητας, της τεχνικής ικανότητας και της φυσικής κατάστασης αξιολογούνται κατά τη διάρκεια των ανταγωνιστικών εξετάσεων. Στην Ινδία, χιλιάδες εξετάσεις πραγματοποιούνται ετησίως. Η πλειοψηφία είναι εύκολο να περάσει, με μόνο έναν μικρό αριθμό να θεωρείται ιδιαίτερα δύσκολος. Η λίστα με τις 10 πιο δύσκολες εξετάσεις στην Ινδία το 2023 απεικονίζεται παρακάτω.

- UPSC
- IIT JEE
- NDA
- UGC-NET
- Indian Engineering Services (IES)
- CLAT (Common Law Admission Test)
- Chartered Accountant (CA) Exam
- NEET
- CAT: Common Admission Test
- GATE: Graduate Aptitude Test in Engineering

[IIT JEE: Ινδικό Ινστιτούτο Τεχνολογίας - Κοινή εξέταση εισόδου]

Το IIT JEE είναι μια κοινή εξέταση εισόδου σε εθνικό επίπεδο για την εισαγωγή σε διάφορα κολέγια μηχανικής, όπως IIT, NIT κ.λπ., στην Ινδία. Το NTA διεξάγει τις εξετάσεις IIT JEE. Η εξέταση IIT JEE διεξάγεται σε δύο στάδια - JEE Mains και JEE Advanced.

Το IIT JEE Mains είναι το πρώτο στάδιο των εισαγωγικών εξετάσεων δύο φορές το χρόνο (Ιανουάριος και Απρίλιος) για να προσφέρει εισαγωγές σε διάφορα κυβερνητικά και ιδιωτικά κολέγια. Η εξέταση γίνεται σε εθνικό επίπεδο στα αγγλικά διαδικτυακά και έχει διάρκεια 3 ώρες, άριστα οι 300 μονάδες.

Κριτήρια επιλεξιμότητας JEE Main 2024

Η ΝΤΑ κυκλοφόρησε διαδικτυακά τα κριτήρια επιλεξιμότητας της κύριας εξέτασης JEE 2024. Σύμφωνα με τα κριτήρια επιλεξιμότητας του JEE Mains 2024, οι υποψήφιοι που έχουν σημειώσει βαθμολογία 75% ή βρίσκονται στο κορυφαίο 20 εκατοστημόριο στην τάξη 12 οποιουδήποτε αναγνωρισμένου συμβουλίου θα είναι επιλέξιμοι για εισαγωγή στα (NITs), (IITs) και CFTIs. Για τους υποψηφίους SC / ST, η βαθμολογία πρέπει να είναι 65%. Οι υποψήφιοι πρέπει να είναι μεταξύ των κορυφαίων 2,50,000 στο NTA JEE Main Paper-1 για να είναι επιλέξιμοι για το JEE Advanced 2024.

Η Κοινή Εισαγωγική Εξέταση, JEE (Main) περιλαμβάνει δύο εργασίες. Το έγγραφο 1 διεξάγεται για εισαγωγή σε προπτυχιακά προγράμματα μηχανικής (B.E/B.Tech.) σε NITs, IITs, άλλα κεντρικά χρηματοδοτούμενα τεχνικά ιδρύματα (CFTIs) και ιδρύματα / πανεπιστήμια που χρηματοδοτούνται / αναγνωρίζονται από τις κυβερνήσεις των συμμετεχόντων κρατών. Το JEE (Main) είναι επίσης ένα τεστ επιλεξιμότητας για το JEE (Advanced), το οποίο διεξάγεται για εισαγωγή σε IIT. Η εργασία 2 διεξάγεται για την εισαγωγή σε μαθήματα B. Arch και B. Planning στη χώρα.

Το JEE (Main) – 2023 θα διεξαχθεί σε 02 (δύο) συνεδρίες για εισαγωγή στην επόμενη ακαδημαϊκή σύνοδο. Έτσι, οι υποψήφιοι θα επωφεληθούν με τους ακόλουθους τρόπους: Αυτό θα δώσει δύο ευκαιρίες στους υποψηφίους να βελτιώσουν τη βαθμολογία τους στην εξέταση, εάν δεν είναι σε θέση να δώσουν τον καλύτερό τους εαυτό σε μία προσπάθεια. Στην πρώτη προσπάθεια, οι μαθητές θα αποκτήσουν μια εμπειρία από πρώτο χέρι της συμμετοχής σε εξετάσεις και θα γνωρίζουν τα λάθη τους τα οποία μπορούν να βελτιώσουν ενώ προσπαθούν για δεύτερη φορά.

Ένας υποψήφιος δεν χρειάζεται να εμφανιστεί και στις δύο εξετάσεις. Ωστόσο, εάν ένας υποψήφιος εμφανιστεί σε περισσότερες από μία, τότε οι καλύτερες από τις Βαθμολογίες JEE (Main) θα ληφθούν υπόψη για την προετοιμασία της Λίστας Κατάταξης.

Το JEE Advanced είναι η δεύτερη και τελική φάση της εξέτασης IIT JEE. Επιλεγμένα IIT διεξάγουν τις εξετάσεις εκ περιτροπής για να προσφέρουν εισαγωγή σε 23 IIT. Θεωρείται ως η 2η πιο δύσκολη εξέταση στην Ινδία, καθώς μόνο οι κορυφαίοι υποψήφιοι 2.4- 2.5 lakh του JEE είναι επιλέξιμοι να εμφανιστούν για την εξέταση JEE Advanced.

Επισκόπηση της εξέτασης JEE Advanced Exam

Η εξέταση γίνεται σε εθνικό επίπεδο στα αγγλικά διαδικτυακά και έχει διάρκεια 3 ώρες με χρήση υπολογιστή και με χαρτί με στυλό. Ο τύπος ερωτήσεων είναι Αντικειμενικού τύπου ή ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής .

Δίνονται 4 βαθμοί για κάθε σωστή απάντηση, -1 για κάθε λάθος απάντηση και 0 για κάθε ερώτηση που δεν απαντήθηκε.

Περιλαμβάνει:

Ενότητα 1: Φυσική, Χημεία και Μαθηματικά

Ενότητα 2: Μαθηματικά, Τεστ Επάρκειας.

Συνολική βαθμολογία 360 για την Ενότητα 1 και 390 για την Ενότητα 2

[Υλη στα Μαθηματικά JEE]

Σύνολα, σχέσεις και συναρτήσεις. Μιγαδικοί αριθμοί και δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Πίνακες και ορίζουσες. Μεταθέσεις και συνδυασμοί. Διωνυμικό θεώρημα και οι εφαρμογές του. Ακολουθία και σειρές. Όριο, συνέχεια και παράγωγοι. Γραφήματα απλών συναρτήσεων. Ολοκληρωτικός λογισμός. Διαφορικές εξισώσεις. Γεωμετρία συντεταγμένων. Τρισδιάστατη γεωμετρία. Διανυσματική άλγεβρα. Στατιστική και πιθανότητες. Τριγωνομετρία.

Μέρος Α

Q.1 Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\log_{(x+1)}(x-2)}{e^{2\ln x} - (2x+3)}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι A) $\mathbb{R} - \{1, -3\}$ B) $(2, +\infty) - \{3\}$ C) $(-1, \infty) - \{3\}$ D) $\mathbb{R} - \{3\}$

Λύση

Πρέπει $x+1 > 0$, $x-2 > 0$, $x > 0$, $e^{2\ln x} - (2x+3) \neq 0$. Από τις τρεις πρώτες σχέσεις πρέπει $x > 2$. Τέλος $e^{2\ln x} - (2x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 > 2$, $x \neq -1 < 2$. Άρα B

Q.2 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$. Τότε η f είναι A) πολλά προς ένα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ B) πολλά προς ένα στο διάστημα $(1, +\infty)$ C) ένα προς ένα στο διάστημα $(1, +\infty)$ D) ένα προς ένα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Έχω $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Άρα η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ με σύνολο τιμών $(f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (0, 1)$, αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$ με σύνολο τιμών $(f(-1), f(1)) = (0, 2)$ και φθίνουσα στο διάστημα $(1, \infty)$ με σύνολο τιμών $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), f(1)) = (1, 2)$.

Άρα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ είναι 1-1 ως μονότονη, άρα όχι A, όμοια δεν ισχύει η B, ενώ ισχύει η C. Η D δεν ισχύει καθώς τα επιμέρους σύνολα τιμών επικαλύπτονται. Άρα C.

Q.3 Αν για δυο μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει ότι $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$ και $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 0$, τότε έχουμε τις παρακάτω προτάσεις. A) $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ και $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ B) $\operatorname{Im}(z_1) < 0$ και $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ C) $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ και $\operatorname{Im}(z_2) < 0$ D) $\operatorname{Im}(z_1) < 0$ και $\operatorname{Im}(z_2) < 0$. Διαλέξτε την σωστή από τις παρακάτω επιλογές. A) B και D B) B και C C) A και B D) A και C

Λύση

Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Τότε $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$. Άρα $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = y_1 y_2$. Ακόμα έχουμε $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$. Άρα $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$. Άρα $y_1 y_2 = -x_2^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) = -x_2^2 < 0$. Άρα οι αριθμοί $\operatorname{Im}(z_1), \operatorname{Im}(z_2)$ είναι ετερόσημοι, άρα ισχύουν οι προτάσεις B και C, άρα επιλέγουμε B.

Q.4 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Αν οι αριθμοί α και β είναι ρίζες της εξίσωσης $14x^2 - 31x + 3\lambda = 0$ και οι αριθμοί α και γ είναι ρίζες της εξίσωσης $35x^2 - 53x + 4\lambda = 0$, τότε οι αριθμοί $\frac{3\alpha}{\beta}$ και $\frac{4\alpha}{\gamma}$ είναι ρίζες της εξίσωσης A) $7x^2 + 245x - 250 = 0$ B) $7x^2 - 245x + 250 = 0$ C) $49x^2 - 245x + 250 = 0$ D) $49x^2 + 245x + 250 = 0$

Λύση

Έχω από τους τύπους Vieta ότι $\alpha + \beta = \frac{31}{14}$, $\alpha\beta = \frac{3\lambda}{14}$, $\alpha + \gamma = \frac{53}{35}$, $\alpha\gamma = \frac{4\lambda}{35}$.

Έχουμε $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{\frac{3\lambda}{14}}{\frac{4\lambda}{35}} = \frac{15}{8} \Rightarrow \beta = \frac{15}{8}\gamma$, άρα από $\alpha + \beta = \frac{31}{14} \Rightarrow \alpha + \frac{15}{8}\gamma = \frac{31}{14} \Rightarrow \alpha + \gamma + \frac{7}{8}\gamma = \frac{31}{14} \Rightarrow \frac{53}{35} + \frac{7}{8}\gamma = \frac{31}{14} \Rightarrow \frac{7}{8}\gamma = \frac{31}{14} - \frac{53}{35} = \frac{155-106}{70} = \frac{49}{70} = \frac{7}{10} \Rightarrow \gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = \frac{15}{8}\gamma = \frac{15 \cdot 4}{8 \cdot 5} = \frac{3}{2}$. Από $\alpha + \beta = \frac{31}{14} \Rightarrow \alpha + \frac{3}{2} = \frac{31}{14} \Rightarrow \alpha = \frac{31}{14} - \frac{3}{2} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Άρα $\frac{3\alpha}{\beta} = \frac{3 \cdot \frac{5}{7}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{7}$, $\frac{4\alpha}{\gamma} = \frac{4 \cdot \frac{5}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{7}$. Οι αριθμοί $\frac{3\alpha}{\beta} = \frac{10}{7}$ και $\frac{4\alpha}{\gamma} = \frac{25}{7}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $(x - \frac{10}{7})(x - \frac{25}{7}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{35}{7}x + \frac{250}{49} = 0 \Leftrightarrow 49x^2 - 35 \cdot 7x + 250 = 0 \Leftrightarrow 49x^2 - 245x + 250 = 0$. Άρα C

Q.5 Έστω το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων $\begin{cases} \alpha x + 2y + z = 1 \\ 2\alpha x + 3y + z = 1, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Ποια από τις παρακάτω} \\ 3x + \alpha y + 2z = \beta \end{cases}$

προτάσεις ΔΕΝ είναι αληθείς; A) Το σύστημα δεν έχει λύση αν $\alpha = -1, \beta \neq 2$ B) Το σύστημα δεν έχει λύση αν $\alpha = -1$, και για όλα τα $\beta \in \mathbb{R}$. C) Το σύστημα δεν έχει λύση αν $\alpha = 3$, και για όλα τα $\beta \neq 2$ D) Το σύστημα έχει λύση για όλα τα $\alpha \neq -1$, και $\beta = 2$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } D = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & 3 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha(6 - \alpha) - 2\alpha(4 - \alpha) + 3(2 - 3) = 6\alpha - \alpha^2 - 8\alpha + 2\alpha^2 - 3 = \alpha^2 - 2\alpha - 3 =$$

$$(\alpha - 3)(\alpha + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & \beta \end{vmatrix} = -(\beta - 2), \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 2\alpha & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \beta \end{vmatrix} = -\alpha(\beta - 2), \quad D_z = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & 3 & 1 \\ 3 & \alpha & \beta \end{vmatrix} =$$

$$\alpha(3\beta - \alpha) - 2\alpha(2\beta - \alpha) + 3(2 - 3) = 3\alpha\beta - \alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\alpha^2 - 3 = \alpha^2 - \alpha\beta - 3.$$

$$\text{Έχω } D = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -1. \quad D_x = 0 \Leftrightarrow \beta = 2. \quad D_y = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 2$$

Αν $\alpha = -1, \beta \neq 2$ τότε $D = 0, D_x \neq 0$ και το σύστημα δεν έχει λύση, άρα Α αληθής.

Αν $\alpha = -1, \beta = 2$ τότε $D = D_x = D_y = D_z = 0$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα Β ψευδής.

Αν $\alpha = 3, \beta \neq 2$ τότε $D = 0, D_x \neq 0$ και το σύστημα δεν έχει λύση, άρα C αληθής.

Αν $\alpha \neq -1, \beta = 2$ τότε $D_x = D_y = 0, D_z = \alpha^2 - 2\alpha - 3 = (\alpha - 3)(\alpha + 1)$. Αν $\alpha \neq 3$ το σύστημα έχει μια λύση ενώ αν $\alpha = 3 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα D αληθής.

Άρα μόνο η Β δεν είναι αληθής.

Q.6 Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και πίνακας $A_{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $A^2 = 3A + \alpha I$. Αν $A^4 = 21A + \beta I$, τότε Α) $\alpha = 1$ Β) $\alpha = 4$ C) $\beta = 8$ D) $\beta = -8$

Λύση

$$\text{Έχω } A^2 = 3A + \alpha I \Rightarrow A^4 = (3A + \alpha I)^2 \Rightarrow 21A + \beta I = 9A^2 + 6\alpha A + \alpha^2 I = 9(3A + \alpha I) + 6\alpha A + \alpha^2 I = (27 + 6\alpha)A + (9\alpha + \alpha^2)I \Rightarrow 21 = 27 + 6\alpha, \beta = 9\alpha + \alpha^2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -8. \text{ Άρα D}$$

$$\text{Q.7} \text{ Αν η } x = 2 \text{ είναι μια ρίζα της } x^2 + px + q = 0 \text{ και } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 - 4px + q^2 + 8q + 16)}{(x - 2p)^4} & , x \neq 2p \\ 0 & , x = 2p \end{cases} \text{ τότε το}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2p^+} [f(x)], \text{ όπου } [\dots] \text{ είναι η συνάρτηση του μεγαλύτερου ακέραιου, είναι ίσο με Α) 2 Β) 1 C) 0 D) -1}$$

Λύση

$$\text{Έχω } 4 + 2p + q = 0 \Rightarrow 2p = -q - 4 \Rightarrow (2p)^2 = (-q - 4)^2 \Rightarrow 4p^2 = q^2 + 8q + 16.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 - 4px + 4p^2)}{(x - 2p)^4} & , x \neq 2p \\ 0 & , x = 2p \end{cases} = \begin{cases} \frac{1 - \cos((x - 2p)^2)}{(x - 2p)^4} & , x \neq 2p \\ 0 & , x = 2p \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2p^+} [f(x)] \xrightarrow{\omega = x - 2p} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left[\frac{1 - \cos(\omega^2)}{(\omega)^4} \right] = \left[\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{2\omega \sin(\omega^2)}{4\omega^3} \right] = \left[\frac{2}{4} \right] = 0. \text{ Άρα C.}$$

Q.8 Έστω $f(x) = x + \frac{a}{\pi^2 - 4} \sin x + \frac{b}{\pi^2 - 4} \cos x, x \in \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί την σχέση

$$f(x) = x + \int_0^{\pi/2} \sin(x + y) f(y) dy.$$

Τότε $(\alpha + \beta)$ είναι ίσο με Α) $-\pi(\pi + 2)$ Β) $-2\pi(\pi + 2)$ C) $-2\pi(\pi - 2)$ D) $-\pi(\pi - 2)$

Λύση

$$\text{Έχω } x + \frac{a}{\pi^2 - 4} \sin x + \frac{b}{\pi^2 - 4} \cos x = x + \sin x \int_0^{\pi/2} \cos(y) f(y) dy + \cos x \int_0^{\pi/2} \sin(y) f(y) dy, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{\pi^2 - 4} = \int_0^{\pi/2} \cos(y) f(y) dy, \frac{b}{\pi^2 - 4} = \int_0^{\pi/2} \sin(y) f(y) dy \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{\pi^2 - 4} = \int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) f(y) dy =$$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) y dy + \int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) \frac{a}{\pi^2 - 4} \sin y dy + \int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) \frac{b}{\pi^2 - 4} \cos y dy =$$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) y dy + \frac{a}{\pi^2 - 4} \int_0^{\pi/2} \cos(y) \sin y + \sin^2(y) dy + \frac{b}{\pi^2 - 4} \int_0^{\pi/2} \cos^2(y) + \sin(y) \cos(y) dy.$$

$$\text{Έχω } \int_0^{\pi/2} (\cos(y) + \sin(y)) y dy = [y(\sin(y) - \cos(y))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(y) - \cos(y) dy = \frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos(y) - \sin(y)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ακόμα } \int_0^{\pi/2} \cos(y) \sin(y) dy = \left[\frac{\sin^2(y)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(y) dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2y)}{2} dy = \left[\frac{y - \frac{\sin(2y)}{2}}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(y) dy = \int_0^{\pi/2} 1 - \sin^2(y) dy = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Αρα } \frac{a+b}{\pi^2-4} = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{\pi^2-4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{b}{\pi^2-4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{a+b}{\pi^2-4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{a+b}{\pi^2-4} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{\pi^2-4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{(\pi-2)(\pi+2)} \left(\frac{2-\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a+b = -2\pi(\pi+2) \text{ Αρα } B$$

Q.9 Αν $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 2x \leq y \leq \sqrt{4 - (x-1)^2}\}$ και $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq \min\{2x, \sqrt{4 - (x-1)^2}\}\}$, τότε ο λόγος του εμβαδού της περιοχής A προς το εμβαδόν της περιοχής B είναι ίσος με A) $\frac{\pi-1}{\pi+1}$ B) $\frac{\pi}{\pi-1}$ C) $\frac{\pi}{\pi+1}$ D) $\frac{\pi+1}{\pi-1}$

Λύση

Οι περιοχές A και B φαίνονται στο σχήμα. Η περιοχή A είναι το τμήμα του ημικυκλίου $(K(1, 0), r = 2)$ που βρίσκεται πάνω απ' την ευθεία $y = 2x$, ενώ η περιοχή B είναι το υπόλοιπο του ημικυκλίου.

$$\text{Έχω } E_B = \text{εμβαδόν τριγώνου} + \text{εμβαδόν τεταρτοκυκλίου} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi + 1.$$

$$E_A = \text{εμβαδόν ημικυκλίου} - E_B = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - (\pi + 1) = \pi - 1$$

$$\text{Αρα } \frac{E_A}{E_B} = \frac{\pi-1}{\pi+1}. \text{ Αρα } A$$

Q.10 Έστω Δ το εμβαδόν της περιοχής $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 21, y^2 \leq 4x, x \geq 1\}$.

Τότε $\frac{1}{2}(\Delta - 21\sin^{-1}(\frac{2}{\sqrt{7}}))$ είναι ίσο με A) $2\sqrt{3} - \frac{1}{3}$ B) $\sqrt{3} - \frac{2}{3}$ C) $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$ D) $\sqrt{3} - \frac{4}{3}$

Λύση

Η ζητούμενη περιοχή είναι εντός του κύκλου $(O, r = \sqrt{21})$, δεξιά της ευθείας $x = 1$ και στο εσωτερικό της παραβολής $y^2 = 4x$. Η περιοχή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x'x. Αρα $\Delta = 2 \left[\int_1^3 2\sqrt{x} dx + \text{εμβαδόν κυκλικού τμήματος} \right]$

$$\text{Έχω } \int_1^3 2\sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^3 = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}.$$

$$\text{εμβαδόν κυκλικού τμήματος} = \text{εμβαδόν κυκλικού τομέα} - (OAB) =$$

$$\pi r^2 \frac{\sin^{-1}(\frac{y_A}{r})}{2\pi} - \frac{1}{2} y_A x_A = \frac{21}{2} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{21}} \right) - \frac{1}{2} 3\sqrt{12} = \frac{21}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) - 3\sqrt{3}$$

$$\text{Αρα } \Delta = 2 \left[4\sqrt{3} - \frac{4}{3} + \frac{21}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) - 3\sqrt{3} \right] = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3} + 21 \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta - 21 \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} (\Delta - 21 \sin^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right)) = \sqrt{3} - \frac{4}{3}. \text{ Αρα } D.$$

Q.11 Μια ακτίνα φωτός φεύγει από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία 30° με τον θετικό άξονα των x . Αφού ανακλαστεί στην γραμμή $x + y = 1$, τέμνει τον άξονα των x στο Q . Η τετμημένη του Q είναι

$$: A) \frac{2}{(\sqrt{3}-1)} B) \frac{2}{3+\sqrt{3}} C) \frac{2}{3-\sqrt{3}} D) \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

Λύση

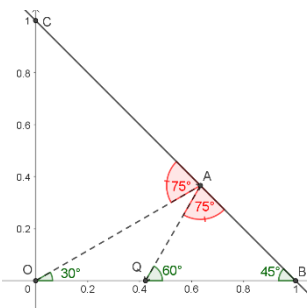
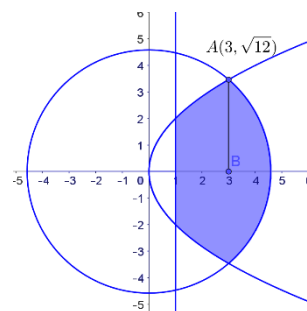
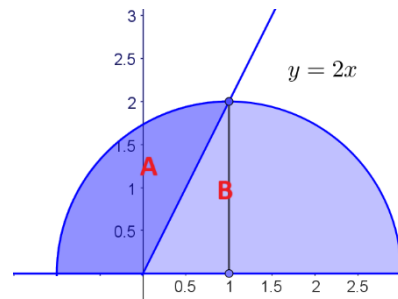
$\widehat{OAC} = \widehat{BOA} + \widehat{OBA} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$, ως εξωτερική γωνία του OAB . Ακόμα, η γωνία πρόσπτωσης $\widehat{OAC}$ είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης $\widehat{QAB}$. Αρα $\widehat{QAB} = \widehat{OAC} = 75^\circ$. Συνεπώς $\widehat{AQB} = 60^\circ$.

$$\text{Έχω } OA: y = \tan 30^\circ x = \frac{\sqrt{3}}{3} x. \text{ Αρα } x_A + \frac{\sqrt{3}}{3} x_A = 1 \Rightarrow \frac{3+\sqrt{3}}{3} x_A = 1 \Rightarrow x_A = \frac{3}{3+\sqrt{3}}, y_A = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}. \text{ Ακόμα } \lambda_{QA} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \text{ Αρα } QA: y - \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3} \left(x - \frac{3}{3+\sqrt{3}} \right).$$

$$\text{Για το σημείο } Q \text{ έχω: } 0 - \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3} \left(x_Q - \frac{3}{3+\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \sqrt{3} x_Q = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow x_Q = \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

Αρα B.

Q.12 Έστω σημεία B και C της ευθείας γραμμής $y + x = 0$ τέτοια ώστε τα B και C να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Έστω A σημείο της $y - 2x = 2$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABC να είναι ισόπλευρο. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ABC είναι ίσο με A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $8/\sqrt{3}$ D) $10/\sqrt{3}$



Λύση

Έστω $B(x_B, -x_B)$, οπότε λόγω της συμμετρίας $C(-x_B, x_B)$. Άρα $BC^2 = 8x_B^2$.

Έστω $A(x_A, 2x_A + 2)$. Αφού ισόπλευρο,

$$\acute{\epsilon}\chi\omega AB^2 = AC^2 \Rightarrow (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \Rightarrow$$

$$(x_A - x_B)^2 + (2x_A + 2 + x_B)^2 = (x_A + x_B)^2 + (2x_A + 2 - x_B)^2 \Rightarrow$$

$$(x_A - x_B)^2 - (x_A + x_B)^2 = (2x_A + 2 - x_B)^2 - (2x_A + 2 + x_B)^2 \Rightarrow$$

$$-4x_A x_B = (4x_A + 4)(-2x_B) \Rightarrow 2x_A = 4x_A + 4 \Rightarrow x_A = -2, y_A = -2$$

$$\text{Από } BC^2 = AB^2 \Rightarrow 8x_B^2 = (-2 - x_B)^2 + (-2 + x_B)^2 \Rightarrow 8x_B^2 = 8 + 2x_B^2 \Rightarrow$$

$$x_B^2 = \frac{8}{6} \Rightarrow BC^2 = 8x_B^2 = \frac{64}{6}$$

$$\text{Άρα } (ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{64}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ Άρα C.}$$

Αλλιώς. Το A βρίσκεται στην μεσοκάθετο του BC, άρα στην ευθεία $y = x \xrightarrow{y_A=2x_A+2} A(-2, -2)$

$$\text{Έχω } v_A = d(A, BC) = \frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}. \text{ Άρα } (ABC) = \frac{v_A 2v_A \epsilon\phi 30^\circ}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \text{ όπως πριν.}$$

Q.13 Αν οι εφαπτομένες στα σημεία $A(4, -11)$ και $B(8, -5)$ του κύκλου $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$, τέμνονται στο σημείο C , τότε η ακτίνα του κύκλου, του οποίου το κέντρο είναι το σημείο C και εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα BC , είναι ίση με Α) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Β) $2\sqrt{13}$ C) $\sqrt{13}$ D) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Λύση

$$\text{Έχω } \epsilon_A: xx_A + yy_A - 3\left(\frac{x+x_A}{2}\right) + 10\left(\frac{y+y_A}{2}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow 4x - 11y - 3\left(\frac{x+4}{2}\right) + 10\left(\frac{y-11}{2}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow 4x - 11y - \frac{3}{2}x - 6 + 5y - 55 - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - 6y - 76 = 0$$

$$\text{Έχω } \epsilon_B: xx_B + yy_B - 3\left(\frac{x+x_B}{2}\right) + 10\left(\frac{y+y_B}{2}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow 8x - 5y - 3\left(\frac{x+8}{2}\right) + 10\left(\frac{y-5}{2}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow 8x - 5y - \frac{3}{2}x - 12 + 5y - 25 - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{13}{2}x - 52 = 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

$$\text{Άρα για το κοινό σημείο τους C έχω } \frac{5}{2}x - 6y - 76 = 0, x = 8 \Rightarrow 20 - 6y - 76 = 0 \Rightarrow y = -\frac{56}{6} = -\frac{28}{3}. \text{ Άρα } C(8, -\frac{28}{3}).$$

$$\text{Για την ευθεία AB έχω } AB: y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y + 11 = \frac{-5+11}{8-4}(x - 4) \Rightarrow y + 11 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 3x - 2y - 34 = 0. \text{ Άρα } r = d(C, AB) = \frac{|3 \cdot 8 - 2 \cdot (-\frac{28}{3}) - 34|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|\frac{56}{3} - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{26}{3\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{3} \text{ Άρα D.}$$

Q.14 Έστω $[x]$ η συνάρτηση του μεγαλύτερου ακέραιου που είναι μικρότερος ή ίσος του x . Έστω $f(x) = \max\{x^2, 1 + [x]\}$. Τότε το $\int_0^2 f(x)dx$ είναι ίσο με Α) $\frac{5+4\sqrt{2}}{3}$ Β) $\frac{8+4\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{1+5\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{4+5\sqrt{2}}{3}$

Λύση

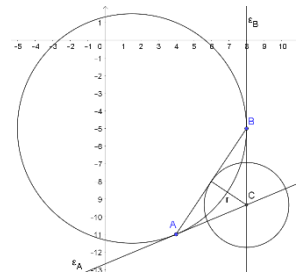
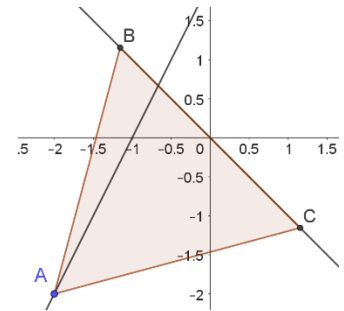
$$\text{Για } x \in [0, 1) \Rightarrow f(x) = \max\{x^2, 1\} = 1. \text{ Για } x \in (1, \sqrt{2}) \Rightarrow f(x) = \max\{x^2, 1 + 1\} = 2.$$

$$\text{Για } x \in (\sqrt{2}, 2) \Rightarrow f(x) = \max\{x^2, 1 + 1\} = x^2. \text{ Άρα } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 1dx + \int_1^{\sqrt{2}} 2dx + \int_{\sqrt{2}}^2 x^2 dx = 1 + 2(\sqrt{2} - 1) + [\frac{x^3}{3}]_{\sqrt{2}}^2 = 2\sqrt{2} - 1 + \frac{8}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{5+4\sqrt{2}}{3}. \text{ Άρα A.}$$

Q.15 Αν τα διανύσματα $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \mu\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ και $\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ είναι συνεπίπεδα και η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$ έχει μέτρο $\sqrt{54}$ μονάδες, τότε το σύνολο όλων των πιθανών τιμών του $\lambda + \mu$ είναι ίσο με Α) 0 Β) 6 C) 24 D) 18

Λύση

$$\text{Πρέπει } \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10\lambda - \mu(-2 + 4) + 4(-6 - 8) = 0 \Leftrightarrow 10\lambda - 2\mu - 56 = 0 \Leftrightarrow \mu = 5\lambda - 28.$$



Αν $\vec{u} = \pi \rho_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{u} = |\vec{\alpha}| \cos \theta \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \Rightarrow |\vec{u}| = |\vec{\alpha}| \cos \theta = |\vec{\alpha}| \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} \Rightarrow |\vec{u}| = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \Rightarrow \sqrt{54} = \frac{-2\lambda + 4\mu - 8}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} \Rightarrow \sqrt{54} \sqrt{24} = -2\lambda + 4\mu - 8 \Rightarrow \sqrt{9} \sqrt{6} \sqrt{6} \sqrt{4} = -2\lambda + 4(5\lambda - 28) - 8 \Rightarrow 36 = 18\lambda - 120 \Rightarrow \lambda = \frac{156}{18} = \frac{78}{9}$ Άρα $\mu = 5 \frac{78}{9} - 28 = \frac{390}{9} - 28$ Άρα $\lambda + \mu = \frac{78}{9} + \frac{390}{9} - 28 = \frac{468}{9} - 28 = 52 - 28 = 24$. Άρα C

Q.16 15 ποδοσφαιριστές μιας ομάδας παίρνουν 15 φανέλες με τα ονόματά τους στην πίσω πλευρά. Αν οι παίκτες πάρουν τις φανέλες κατά τυχαίο τρόπο, τότε η πιθανότητα τουλάχιστον 3 από αυτούς να πάρουν την σωστή φανέλα είναι A) 5/24 B) 2/15 C) 1/6 D) 5/36

Λύση

Το σύνολο των πιθανών κατανομών των φανελών στους 15 παίκτες είναι **15!** Το σύνολο των πιθανών διαταραχών (κανείς παίκτης δεν παίρνει την φανέλα του) δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο $d_{15} \cong \frac{15!}{e}$.

(Γενικός τύπος διαταραχών: $d_n \cong \frac{n!}{e}$). Αν μόνο ένας παίκτης από τους 15 πάρει την φανέλα του τότε αυτό συμβαίνει με **15d₁₄**, αφού στην 1^η φάση έχουμε 15 επιλογές για τον τυχερό παίκτη και **d₁₄** διαταραχές για τους υπόλοιπους 14 παίκτες. Όμοια αν μόνο 2 παίκτες πάρουν τη φανέλα τους έχουμε $\binom{15}{2} d_{13}$

τρόπους για να συμβεί αυτό. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $p = 1 - \frac{d_{15} + 15d_{14} + \binom{15}{2} d_{13}}{15!} = 1 -$

$$\frac{\frac{15!}{e} + 15 \frac{14!}{e} + \frac{15 \cdot 14}{2} \frac{13!}{e}}{15!} = 1 - \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \right) = 1 - \frac{5}{2e} \cong 0,08.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι εξεταζόμενοι γράφουν χωρίς τη χρήση ηλεκτρονικών συσκευών. Στην προκειμένη περίπτωση μάλιστα το αποτέλεσμα δεν προσεγγίζει καμία από τις 4 επιλογές που δόθηκαν! Η επιτροπή εξετάσεων έδωσε αρχικά ως σωστή λύση την C) **1/6 = 0,16**, αργότερα οι μονάδες της άσκησης χαρίστηκαν. Πάντως, όπως και να έχει, το συμπέρασμα είναι ότι οι εξεταστές δεν τα λυπούνται καθόλου αυτά τα παιδιά.

Q.17 Έστω $f(\theta) = 3(\sin^4(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \sin^4(3\pi + \theta)) - 2(1 - \sin^2 2\theta)$ και $S = \{\theta \in [0, \pi] : f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Αν $4\beta = \sum_{\theta \in S} \theta$, τότε $f(\beta)$ είναι ίσο με A) 11/8 B) 5/4 C) 9/8 D) 3/2

Λύση

Έχω $f(\theta) = 3\cos^4(\theta) + 3\sin^4(\theta) - 2\cos^2 2\theta$, άρα $f(0) = 3 - 2 = 1$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -12\sin(\theta)\cos^3(\theta) + 12\cos(\theta)\sin^3(\theta) + 8\sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 4\sin\theta\cos\theta(-3\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta) + 4\cos 2\theta) = 2\sin 2\theta(-3\cos 2\theta + 4\cos 2\theta) \\ &= 2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta \end{aligned}$$

Άρα $f(\theta) = -\frac{\cos 4\theta}{4} + c \xrightarrow{f(0)=1} 1 = -\frac{1}{4} + c \Rightarrow c = \frac{5}{4} \Rightarrow f(\theta) = \frac{5 - \cos 4\theta}{4}$

Έχω ακόμα $f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 4\theta = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow 4\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ ή $4\theta = \pi - \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ ή $\theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\theta \in [0, \pi]} \theta = \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$ ή $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$. Άρα $4\beta = \sum_{\theta \in S} \theta = \frac{5\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$

Άρα $f(\beta) = \frac{5 - \cos 4\beta}{4} = \frac{5 - \cos \frac{5\pi}{2}}{4} = \frac{5}{4}$ Άρα B

Q.18 Αν p, q και r τρεις λογικές προτάσεις, τότε ποιος από τους παρακάτω συνδυασμούς κάνει ψευδή την λογική έκφραση $\{(p \vee q) \wedge ((\sim p) \vee r)\} \rightarrow ((\sim q) \vee r)\}$

A) $p = T, q = F, r = T$ B) $p = T, q = T, r = F$ C) $p = F, q = T, r = F$ D) $p = T, q = F, r = F$

Λύση

Έχω για το

A) $\{(T \vee F) \wedge ((\sim T) \vee T)\} \rightarrow ((\sim F) \vee T)$ ή $\{T \wedge T\} \rightarrow (T \vee T)$ ή $T \rightarrow T$ ισχύει.

B) $\{(T \vee T) \wedge ((\sim T) \vee F)\} \rightarrow ((\sim T) \vee F)$ ή $\{T \wedge F\} \rightarrow (F \vee F)$ ή $F \rightarrow F$ ισχύει.

C) $\{(F \vee T) \wedge ((\sim F) \vee F)\} \rightarrow ((\sim T) \vee F)$ ή $\{T \wedge T\} \rightarrow (F \vee F)$ ή $T \rightarrow F$ δεν ισχύει.

D) $\{(T \vee F) \wedge ((\sim T) \vee F)\} \rightarrow ((\sim F) \vee F)$ ή $\{T \wedge F\} \rightarrow (T \vee F)$ ή $F \rightarrow T$ ισχύει.

Άρα C

Q.19 Τρία σάπια μήλα αναμιγνύονται με άλλα 7 ώριμα μήλα. Στη συνέχεια επιλέγονται τυχαία 4 μήλα το ένα μετά το άλλο χωρίς αντικατάσταση. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το πλήθος των

σάπιων μήλων. Αν μ, σ^2 είναι ο μέσος όρος και η διασπορά της X αντίστοιχα, τότε $10(\mu^2 + \sigma^2)$ ίσο με A) 20 B) 250 C) 25 D) 30

Λύση

Επιλέγονται 4 από 10 μήλα με $\binom{10}{4} = 210$ τρόπους.

Αν $X = 0$ σάπια μήλα, τότε επιλέξαμε 4 από τα 7 ώριμα μήλα. Αυτό γίνεται με $\binom{7}{4} = 35$ τρόπους.

Αν $X = 1$ σάπιο μήλο, τότε επιλέξαμε 3 από τα 7 ώριμα μήλα και 1 από τα 3 σάπια. Αυτό γίνεται με $\binom{7}{3}\binom{3}{1} = 105$ τρόπους.

Αν $X = 2$ σάπια μήλα, τότε επιλέξαμε 2 από τα 7 ώριμα μήλα και 2 από τα 3 σάπια. Αυτό γίνεται με $\binom{7}{2}\binom{3}{2} = 63$ τρόπους.

Αν $X = 3$ σάπια μήλα, τότε επιλέξαμε 1 από τα 7 ώριμα μήλα και όλα τα σάπια. Αυτό γίνεται με $\binom{7}{1}\binom{3}{3} = 7$ τρόπους.

Άρα $10(\mu^2 + \sigma^2) = 10E(X^2) = 10 \frac{\sum_{i=0}^3 n_i x_i^2}{\sum_{i=0}^3 n_i} = 10 \frac{35 \cdot 0^2 + 105 \cdot 1^2 + 63 \cdot 2^2 + 7 \cdot 3^2}{210} = \frac{105 + 63 \cdot 4 + 63}{21} = 5 + 12 + 3 = 20$ άρα A

Q.20 Αν η $y = f(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y(x+1)dx - x^2 dy = 0, y(1) = e$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ είναι ίσο με A) 0 B) $\frac{1}{e}$ C) e^2 D) $\frac{1}{e^2}$

Λύση

Έχω $\frac{x+1}{x^2} dx = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| - \frac{1}{x} = \ln|y| + c \xrightarrow{y(1)=e} -1 = 1 + c \Rightarrow c = -2, \ln|x| - \frac{1}{x} = \ln|y| - 2 \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| - \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow |y| = e^{\ln|x| - \frac{1}{x} + 2}$. Αφού η y είναι διαφορίσιμη, είναι και συνεχής στο $(0, +\infty)$, όπου διατηρεί το θετικό πρόσημό της ($y(1) = e > 0$). Άρα για $x > 0$, έχω $y = e^{\ln x - \frac{1}{x} + 2}$. Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x - \frac{1}{x} + 2} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x - \frac{1}{x} + 2 \right) = -\infty$. Άρα A

Μέρος Β

Q.21 Έστω ότι οι συντεταγμένες της κορυφής A του τριγώνου ABC είναι $(0, 2, \alpha)$ και οι άλλες δυο κορυφές του βρίσκονται στην ευθεία $\frac{x+\alpha}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$. Αν $(ABC) = 21$ τ.μ. και το ευθύγραμμο τμήμα BC έχει μήκος $2\sqrt{21}$ μ.μ. τότε α^2 ίσο με ____

Λύση

Έχω $\frac{x+\alpha}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3} = \lambda \Rightarrow (x, y, z) = (5\lambda - \alpha, 2\lambda + 1, 3\lambda - 4) = (-\alpha, 1, -4) + \lambda(5, 2, 3)$ Έστω σημείο $Q(-\alpha, 1, -4)$ και $\vec{d} = (5, 2, 3)$. Έχω για το τρίγωνο ABC ότι $v_\alpha = \frac{(ABC)}{\frac{BC}{2}} = \frac{21}{\frac{2\sqrt{21}}{2}} = \sqrt{21}$. Ακόμα $v_\alpha = d(A, BC) =$

$$\frac{\| \vec{QA} \times \vec{d} \|}{|\vec{d}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & 1 & \alpha+4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{5^2+2^2+3^2}} = \frac{|(3-2(\alpha+4), -(3\alpha-5(\alpha+4)), 2\alpha-5)|}{\sqrt{38}} = \frac{|(-2\alpha-5, 2\alpha+20, 2\alpha-5)|}{\sqrt{38}} \Rightarrow 21 = \frac{(-2\alpha-5)^2 + (2\alpha+20)^2 + (2\alpha-5)^2}{38} \Rightarrow 21 \cdot$$

$$38 = 4\alpha^2 + 20\alpha + 25 + 4\alpha^2 + 80\alpha + 400 + 4\alpha^2 - 20\alpha + 25 \Rightarrow 798 = 12\alpha^2 + 80\alpha + 450 \Rightarrow 12\alpha^2 +$$

$$80\alpha - 348 = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 20\alpha - 87 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(3\alpha + 29) = 0 \xrightarrow{\alpha \in \mathbb{Z}} \alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 = \boxed{9}$$

Έγινε χρήση της πρότασης: Η απόσταση ενός σημείου A από μια ευθεία με διεύθυνση $\vec{d}$ δίνεται από τον τύπο $\frac{\| \vec{QA} \times \vec{d} \|}{|\vec{d}|}$, όπου Q ένα τυχαίο σημείο της ευθείας.

Q.22 Αν η εξίσωση του επιπέδου P που περιέχει την ευθεία $(\epsilon): x + 10 = \frac{8-y}{2} = z$ είναι η $ax + by + 3z = 2(a + b)$ και η απόσταση του επιπέδου P από το σημείο $(1, 27, 7)$ είναι c τότε $a^2 + b^2 + c^2$ ίσο με ____

Λύση

Παρατηρώ ότι το σημείο $A(-10, 8, 0) \in (\epsilon) \subset P \Rightarrow -10a + 8b = 2(a + b) \Rightarrow 6b = 12a \Rightarrow b = 2a$

Παρατηρώ ότι το σημείο $B(0, -12, 10) \in (\epsilon) \subset P \Rightarrow 0a - 12b + 30 = 2(a + b) \Rightarrow -12b + 30 = 2a + 2b \Rightarrow -12b + 30 = 3b \Rightarrow b = 2, a = 1$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $x + 2y + 3z = 6$.

$$\text{Έχω ακόμα } c = \frac{|1+2 \cdot 27+3 \cdot 7-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{70}{\sqrt{14}} = 5\sqrt{14} \Rightarrow c^2 = 350 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 4 + 350 = \boxed{355}$$

Q.23 Θεωρήστε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{N}$ και $f(1) = \frac{1}{5}$. Αν $\sum_{n=1}^m \frac{f(n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{12}$, τότε m ίσο με ____

Λύση

Έχω $f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-1) + 2f(1) = f(n-2) + 3f(1) = \dots = nf(1) = \frac{n}{5}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^m \frac{\frac{n}{5}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{5} \frac{m}{2(m+2)} \Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow m =$$

10

Q.24 Έστω $a_1, a_2, a_3, \dots$ μια αύξουσα γεωμετρική πρόοδος θετικών όρων. Αν το γινόμενο του 4ου και του 6ου όρου είναι ίσο με το 9 και το άθροισμα του 5ου και του 7ου όρου είναι 24 τότε $a_1 a_9 + a_2 a_4 a_9 + a_5 + a_7$ είναι ίσο με ____

Λύση

Έχω $a_n = \lambda^{n-1} a_1, \lambda > 0, a_1 > 0$. Άρα $a_4 a_6 = 9 \Rightarrow \lambda^3 a_1 \lambda^5 a_1 = 9 \Rightarrow \lambda^4 a_1 = 3$. Ακόμα έχω $a_5 + a_7 = 24$. Άρα $a_1 a_9 + a_2 a_4 a_9 + a_5 + a_7 = a_1 \lambda^8 a_1 + \lambda a_1 \lambda^3 a_1 \lambda^8 a_1 + 24 = (\lambda^4 a_1)^2 + (\lambda^4 a_1)^3 + 24 = 3^2 + 3^3 + 24 = 9 + 27 + 24 = \boxed{60}$

Q.25 Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$ τρία μη μηδενικά μη συνεπίπεδα διανύσματα. Έστω ότι τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, C και D είναι τα $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \lambda \vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}, -\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ και $2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c}$ αντίστοιχα. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ και $\overrightarrow{AD}$ είναι συνεπίπεδα τότε το λ είναι ίσο με ____

Λύση

$$\text{Έχω } \overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}, \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}.$$

Αφού είναι συνεπίπεδα θα ισχύει ότι $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(15 - 12) + 2(-10 + 4) + 3(6 - 3) = 0 \Rightarrow 3(\lambda - 1) = 3 \Rightarrow \lambda = \boxed{2}$

Q.26 Αν όλοι οι εξαψήφιοι αριθμοί $\overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$ με $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά, τότε το άθροισμα των ψηφίων του 72ου αριθμού είναι ίσο με ____

Λύση

Οι πρώτοι στην σειρά αριθμοί του συνόλου αυτού ξεκινούν με τα ψηφία 12, είναι δηλαδή της μορφής $\overline{12x_3 x_4 x_5 x_6}$. Τα ψηφία $x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Για να βρούμε πόσοι είναι οι αριθμοί αυτής της μορφής ακολουθούμε το εξής σκεπτικό:

Θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία των 7 αριθμών $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Αν αφαιρέσουμε οποιαδήποτε 3άδα από αυτούς προκύπτει μια αύξουσα 4άδα ψηφίων $x_3 x_4 x_5 x_6$ όπως θέλαμε. Το πλήθος των τετράδων αυτών είναι $\binom{7}{3} = 35$. Συνεπώς υπάρχουν 35 αριθμοί της μορφής $\overline{12x_3 x_4 x_5 x_6}$, με $2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Στη συνέχεια έχουμε τους αριθμούς της μορφής $\overline{13x_3 x_4 x_5 x_6}$. Εδώ $x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, άρα έχουμε να αφαιρέσουμε μια δυάδα από τα 6 αυτά ψηφία. Αυτό γίνεται με $\binom{6}{2} = 15$ τρόπους. Συνεπώς υπάρχουν 15 αριθμοί της μορφής $\overline{13x_3 x_4 x_5 x_6}$, με $3 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Μετά έχουμε τους αριθμούς της μορφής $\overline{14x_3 x_4 x_5 x_6}$. Εδώ $x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, άρα έχουμε να αφαιρέσουμε ένα από τα 5 αυτά ψηφία. Αυτό γίνεται με $\binom{5}{1} = 5$ τρόπους. Συνεπώς υπάρχουν 5 αριθμοί της μορφής $\overline{14x_3 x_4 x_5 x_6}$, με $4 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Μετά ακολουθεί ο αριθμός $\overline{156789}$ που είναι ο μοναδικός της μορφής $\overline{15x_3 x_4 x_5 x_6}$ με $5 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Στη συνέχεια έχουμε τους αριθμούς της μορφής $\overline{23x_3 x_4 x_5 x_6}$. Όπως πριν, έχουμε 15 αριθμούς της μορφής $\overline{23x_3 x_4 x_5 x_6}$, με $3 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$.

Ως τώρα έχουμε διατάξει σε αύξουσα σειρά $35 + 15 + 5 + 1 + 15 = 71$ αριθμούς. Ο 72ος αριθμός θα είναι ο $\overline{245678}$ με άθροισμα ψηφίων $2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \boxed{32}$.

Q.27 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f'(0) = 2$ τότε $|f(-2)|$ ίσο με ____

Λύση

Για $x = y = 0$, έχουμε $f(0) = 1$. Έχουμε $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-1-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) =$

2. Άρα $f(x) = 2x + c \xrightarrow{f(0)=1} c = 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1 \Rightarrow |f(-2)| = |2(-2) + 1| = \boxed{3}$

Q.28 Αν ο συντελεστής του x^9 στο ανάπτυγμα του $(\alpha x^3 + \frac{1}{\beta x})^{11}$ και ο συντελεστής του x^{-9} στο ανάπτυγμα του $(\alpha x - \frac{1}{\beta x^3})^{11}$ είναι ίσοι τότε το $(\alpha\beta)^2$ είναι ίσο με ____

Λύση

Έχω $(\alpha x^3 + \frac{1}{\beta x})^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (\alpha x^3)^k (\beta^{-1} x^{-1})^{11-k}$. Για τον όρο x^9 έχω $3k + (-1)(11-k) = 9 \Rightarrow k = 5$, και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι ο $\binom{11}{5} (\alpha)^5 (\beta^{-1})^{11-5} = \binom{11}{5} \alpha^5 \beta^{-6}$

Ακόμα έχω $(\alpha x - \frac{1}{\beta x^3})^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (\alpha x)^k (-\beta^{-1} x^{-3})^{11-k}$. Για τον όρο x^{-9} έχω $k + (-3)(11-k) = -9 \Rightarrow k = 6$, και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι ο $\binom{11}{6} (\alpha)^6 (-\beta^{-1})^{11-6} = -\binom{11}{6} \alpha^6 \beta^{-5}$

Άρα έχω $\binom{11}{5} \alpha^5 \beta^{-6} = -\binom{11}{6} \alpha^6 \beta^{-5} \Rightarrow \alpha^5 \beta^{-6} = -\alpha^6 \beta^{-5} \Rightarrow \alpha\beta = -1 \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = \boxed{1}$

Q.29 Αν οι συντελεστές τριών διαδοχικών όρων του αναπτύγματος του $(1+2x)^n$ έχουν αναλογία **2:5:8**, τότε ο συντελεστής του όρου που είναι στην μέση των τριών αυτών όρων είναι ίσος με ____

Λύση

Έχω $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x)^k (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^k$. Αν α_k ο συντελεστής του x^k , τότε $\alpha_k = \binom{n}{k} 2^k$, $\alpha_{k-1} = \binom{n}{k-1} 2^{k-1}$, $\alpha_{k+1} = \binom{n}{k+1} 2^{k+1}$.

Έχω $\frac{\alpha_{k-1}}{2} = \frac{\alpha_k}{5} = \frac{\alpha_{k+1}}{8} \Rightarrow \frac{\binom{n}{k-1} 2^{k-1}}{2} = \frac{\binom{n}{k} 2^k}{5} = \frac{\binom{n}{k+1} 2^{k+1}}{8} \Rightarrow \frac{\binom{n}{k-1}}{4} = \frac{\binom{n}{k}}{5} = \frac{\binom{n}{k+1}}{4} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{4} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{5} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{4} \Rightarrow \frac{1}{4(n-k)(n-k+1)} = \frac{1}{5k(n-k)}$$

$$= \frac{1}{4k(k+1)} \Rightarrow$$

$$5k = 4(n-k+1), 4(k+1) = 5(n-k) \Rightarrow 9k = 4n+4, 9k = 5n-4 \Rightarrow n = 8, k = 4$$

Άρα $\alpha_4 = \binom{8}{4} 2^4 = 70 * 16 = \boxed{1120}$

Q.30 Οι πενταψήφιοι αριθμοί που χρησιμοποιούν τα ψηφία **1, 2, 3, 5, 7** με επανάληψη γράφονται σε φθίνουσα σειρά και παίρνουν τον αντίστοιχο σειριακό αριθμό. Για παράδειγμα ο αριθμός **77777** έχει σειριακό αριθμό **1**. Να βρεθεί ο σειριακός αριθμός του **35337**.

Λύση

Οι αριθμοί που ξεκινούν με **7** είναι της μορφής $\overline{7\alpha\beta\gamma\delta}$ και είναι $5^4 = 625$ το πλήθος αφού καθένα από τα ψηφία $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε από τις 5 τιμές του συνόλου $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ με επανάληψη. Υπάρχουν άλλοι 625 της μορφής $\overline{5\alpha\beta\gamma\delta}$. Ακολουθούν οι αριθμοί της μορφής $\overline{37\alpha\beta\gamma}$ που είναι $5^3 = 125$ στο πλήθος. Ακολουθούν οι αριθμοί της μορφής $\overline{357\alpha\beta}$ που είναι $5^2 = 25$ στο πλήθος, οι αριθμοί της μορφής $\overline{355\alpha\beta}$ που είναι $5^2 = 25$ στο πλήθος, οι αριθμοί της μορφής $\overline{3537\alpha}$ που είναι **5** στο πλήθος, οι αριθμοί της μορφής $\overline{355\alpha\beta}$ που είναι **5** στο πλήθος. Ως τώρα έχουμε $625 + 625 + 125 + 25 + 25 + 5 + 5 = 1435$ αριθμούς. Ο επόμενος στην σειρά είναι ο **35337** και έχει σειριακό αριθμό **1436**

JEE Main 11 April 2023 Morning Session

Μέρος Α

Q.1 Η τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x (\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})) dx$ είναι:

A) $\ln\left(\frac{2(2+\sqrt{5})}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})^2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\ln\left(\frac{(2+\sqrt{5})^2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\ln\left(\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{5})^2}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Λύση

Θέτω $e^x = \omega \Rightarrow de^x = d\omega \Rightarrow dx = \frac{1}{\omega} d\omega$.

Άρα $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 (\ln(\omega + \sqrt{1 + \omega^2})) d\omega = [\omega \ln(\omega + \sqrt{1 + \omega^2})]_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 \omega \frac{1 + \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}}{\omega + \sqrt{1 + \omega^2}} d\omega =$

$2\ln(2 + \sqrt{5}) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} d\omega = \ln(2 + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) - [\sqrt{1 + \omega^2}]_{\frac{1}{2}}^2 = \ln(2 + \sqrt{5})^2 -$

$\frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}\ln 2 - \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \ln\left(\frac{(2 + \sqrt{5})^2}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}\right) + \ln\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{5})^2}{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}$ άρα D

Q.2 Αν η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(-2, 3, 5)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα

$2x + 4y + 5z = 8$ και $3x - 2y + 3z = 5$, είναι η $\alpha x + \beta y + \gamma z + 97 = 0$, τότε $\alpha + \beta + \gamma =$

A) 18 B) 17 C) 16 D) 15

Λύση

Έχω $(\alpha, \beta, \gamma) \perp (2, 4, 5) \Rightarrow 2\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0$ και

$(\alpha, \beta, \gamma) \perp (3, -2, 3) \Rightarrow 3\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \Rightarrow 6\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0$

Άρα $8\alpha + 11\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{11}{8}\gamma$,

οπότε από $2\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \Rightarrow -\frac{11}{4}\gamma + 4\beta + 5\gamma = 0 \Rightarrow 4\beta = -\frac{9}{4}\gamma \Rightarrow \beta = -\frac{9}{16}\gamma$

Αφού το σημείο $(-2, 3, 5)$ ανήκει στο επίπεδο με εξίσωση $\alpha x + \beta y + \gamma z + 97 = 0$ έχουμε

$-2\alpha + 3\beta + 5\gamma + 97 = 0 \Rightarrow \frac{11}{4}\gamma - \frac{27}{16}\gamma + 5\gamma + 97 = 0 \Rightarrow \frac{44 - 27 + 80}{16}\gamma = -97 \Rightarrow$

$\gamma = -16, \beta = 9, \alpha = 22$. Άρα $\alpha + \beta + \gamma = 22 + 9 - 16 = 15$. Άρα D

Q.3 Έστω R το ορθογώνιο που σχηματίζεται από τις γραμμές $x = 0, x = 2, y = 0, y = 5$. Έστω σημεία $A(\alpha, 0), B(0, \beta), \alpha \in [0, 2], \beta \in [0, 5]$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να χωρίζει το ορθογώνιο σε λόγο 4 : 1. Τότε το μέσο του τμήματος AB βρίσκεται σε A) παραβολή B) υπερβολή C) ευθεία D) κύκλο.

Λύση

Έστω M το μέσο του τμήματος AB , άρα $M(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$. Έχω $(OAB) = \frac{1}{4}(ABKAN) \Rightarrow (OAB) = \frac{1}{5}(OKAN) \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{2 \cdot 5}{5} \Rightarrow \alpha\beta = 4 \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{2 \cdot 2} = 1 \Rightarrow x_M y_M = 1$. Άρα το σημείο M βρίσκεται στην υπερβολή $xy = 1$, άρα B

Q.4 Έστω ότι τα σύνολα A και B έχουν 5 στοιχεία το καθένα. Ο μέσος όρος των στοιχείων του A και του B είναι 5 και 8 αντίστοιχα, ενώ η διασπορά τους είναι 12 και 20 αντίστοιχα. Ένα νέο σύνολο C από 10 στοιχεία δημιουργείται αφαιρώντας 3 μονάδες από κάθε στοιχείο του A και προσθέτοντας 2 μονάδες σε κάθε στοιχείο του B . Τότε το άθροισμα του μέσου όρου και της διασποράς των στοιχείων του C είναι: A) 32 B) 38 C) 40 D) 36

Λύση

Έχω $\mu_A = 5, \mu_B = 8, Var_A = 12, Var_B = 20$,

$E(X_A^2) = Var_A + \mu_A^2 = 37, E(X_B^2) = Var_B + \mu_B^2 = 84$,

$$\mu_C = \frac{\sum_{i=1}^{10} c_i}{10} = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i - 3) + \sum_{i=1}^5 (b_i + 2)}{10} = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i) - 15 + \sum_{i=1}^5 (b_i) + 10}{10} = \frac{5\mu_A - 15 + 5\mu_B + 10}{10} = \frac{25 - 15 + 40 + 10}{10} = 6$$

$$E(X_C^2) = \frac{\sum_{i=1}^{10} c_i^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i - 3)^2 + \sum_{i=1}^5 (b_i + 2)^2}{10} = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i)^2 - 6 \sum_{i=1}^5 (a_i) + 45 + \sum_{i=1}^5 (b_i)^2 + 4 \sum_{i=1}^5 (b_i) + 20}{10}$$

$$= \frac{5E(X_A^2) - 6 * 5\mu_A + 45 + 5E(X_B^2) + 4 * 5\mu_B + 20}{10}$$

$$= \frac{5 * 37 - 6 * 5 * 5 + 45 + 5 * 84 + 4 * 5 * 8 + 20}{10} = \frac{680}{10} = 68$$

$$\text{Άρα } Var_C = E(X_C^2) - \mu_C^2 = 68 - 36 = 32$$

$$\text{Άρα } \mu_C + Var_C = 6 + 32 = 38 \text{ άρα B}$$

Q.5 Αν $f(x) = [x^2 - x] + |-x + [x]|$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και με $[x]$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x , τότε η συνάρτηση f είναι

A) συνεχής στο **0**, ασυνεχής στο **1**

B) συνεχής στο **0** και στο **1**

C) ασυνεχής στο **0** και στο **1**

D) ασυνεχής στο **0**, συνεχής στο **1**

Λύση

Έχω $f(0) = f(1) = 0$. Για $x \in (0, 1)$, έχουμε $[x] = 0, |-x + [x]| = |-x| = x$

Και επιπλέον ότι: $0 > x(x-1) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} > -1$ άρα $[x^2 - x] = -1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$. Προφανώς η f είναι ασυνεχής στο **0**, συνεχής στο **1**. Άρα D

Q.6 Το πλήθος των τριάδων (x, y, z) όπου x, y, z διακριτοί μη αρνητικοί ακέραιοι με $x + y + z = 15$ είναι

A) **80** B) **114** C) **32** D) **136**

Λύση

Μέθοδος stars and bars.

Έστω 15 αστεράκια. *****. Ένας τρόπος επιμερισμού τους σε τρία υποσύνολα (ακόμα και κενά) είναι βάζοντας 2 διαχωριστικές μπάρες ανάμεσά τους π.χ ***|*****|*****, οπότε έχω $3+6+6=15$, ***| |*****|*****, οπότε έχω $3+0+12=15$, ή |*****|*****|, οπότε έχω $0+7+8=15$. Τα 15 αστεράκια και οι 2 μπάρες καταλαμβάνουν 17 θέσεις. Άρα έχω να επιλέξω 2 θέσεις για τις μπάρες από τις 17 διαφορετικές θέσεις. Αυτό γίνεται με $\binom{17}{2} = 136$ διαφορετικούς τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις που κάποια από τα x, y, z είναι ίσα μεταξύ τους. Έστω $x = y = z$, προφανώς μόνο η τριάδα **(5, 5, 5)** ικανοποιεί την συνθήκη του προβλήματος. Έστω $x = y \neq z$, τότε έχω $2x + z = 15 \Rightarrow z = 15 - 2x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 7, x \neq 5$. Άρα προκύπτουν **7** τριάδες. Όμοια προκύπτουν άλλες **7 + 7 = 14** τριάδες για $x = z \neq y$, $z = y \neq x$ αντίστοιχα.

Άρα τελικά έχω $136 - 1 - 7 - 14 = 114$ τριάδες, άρα B.

Q.7 Για κάθε διάνυσμα $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, με $10|a_i| < 1, i = 1, 2, 3$ θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις:

(A) $\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\} \leq |\vec{a}|$, (B) $|\vec{a}| \leq 3\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$. Άρα

(A) Μόνο η B αληθής (B) Μόνο η A αληθής (C) Και οι δύο ψευδείς (D) Και οι δύο αληθείς

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ ότι $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3|$.

Άρα $\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\} = |a_3| \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} = |\vec{a}|$. Άρα η πρόταση A αληθής.

Έχω ακόμα $|\vec{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \leq \sqrt{|a_3|^2 + |a_3|^2 + |a_3|^2} = \sqrt{3|a_3|^2} \leq \sqrt{3}|a_3| \leq 3|a_3|$ άρα και η B αληθής. Άρα D

Q.8 Έστω w_1 το σημείο που προκύπτει από την περιστροφή του $z_1 = 5 + 4i$ κατά 90° ως προς την αρχή των αξόνων κατά την αντίθετη φορά του ρολογιού και w_2 το σημείο που προκύπτει από την περιστροφή του $z_2 = 3 + 5i$ κατά 90° ως προς την αρχή των αξόνων κατά την φορά του ρολογιού. Τότε το βασικό όρισμα του $w_1 - w_2$ είναι ίσο με A) $-\pi + \tan^{-1}\frac{33}{5}$ B) $-\pi - \tan^{-1}\frac{33}{5}$ C) $-\pi + \tan^{-1}\frac{8}{9}$ D) $\pi - \tan^{-1}\frac{8}{9}$

Λύση

Έχω $w_1 = z_1 i = -4 + 5i$, $w_2 = z_2(-i) = 5 - 3i$, άρα $w_1 - w_2 = -9 + 8i$. Ως γνωστόν

$$\text{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{αν } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{αν } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{αν } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0, y < 0 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{αν } x = y = 0 \end{cases}$$

Άρα $\text{Arg}(-9 + 8i) = \pi - \tan^{-1} \frac{8}{9}$ Άρα D.

Q.9 Ένας οργανισμός απονέμει 48 μετάλλια στο A γεγονός, 25 στο B γεγονός και 18 στο C γεγονός. Αν τα μετάλλια αυτά δόθηκαν σε 60 άτομα και μόνο 5 από αυτά πήραν μετάλλια και στα τρία γεγονότα, πόσοι πήραν ακριβώς 2 μετάλλια; A) 10 B) 9 C) 21 D) 15.

$$\begin{cases} a + x + y + 5 = 48 \\ b + x + z + 5 = 25 \\ c + y + z + 5 = 18 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + 2(x + y + z) = 76 \text{ και}$$

$$a + b + c + x + y + z = 60 - 5 = 55. \text{ Άρα } x + y + z = 76 - 55 = 21. \text{ Άρα C.}$$

Q.10 Έστω $S = \{M = [a_{ij}], a_{ij} \in \{0, 1, 2\}, 1 \leq i, j \leq 2\}$ ένας δειγματικός χώρος και

$A = \{M \in S: M \text{ είναι αντιστρέψιμος}\}$ ένα γεγονός. Τότε η πιθανότητα $P(A)$ είναι A) $\frac{50}{81}$ B) $\frac{47}{81}$ C) $\frac{49}{81}$ D) $\frac{16}{27}$

Λύση

Έχω $|S| = 3^{2 \times 2} = 81$ αφού καθένα από τα 2×2 στοιχεία του πίνακα M μπορεί να πάρει 3 διαφορετικές τιμές. Βρίσκω τότε ο M είναι μη αντιστρέψιμος, δηλαδή τότε $|M| = 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.

Αν τα στοιχεία του πίνακα είναι μη μηδενικά έχω 6 περιπτώσεις

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αν ένα μόνο στοιχείο είναι μηδέν, τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Αν ακριβώς 2 στοιχεία είναι μηδενικά, τότε ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος εκτός αν τα στοιχεία αυτά είναι στην ίδια διαγώνιο. Αυτό συμβαίνει με $\binom{4}{2} - 2 = 4$ τρόπους για την επιλογή των μηδενικών στοιχείων επί 2×2 για τα άλλα 2 μη μηδενικά στοιχεία, άρα με 16 τρόπους.

Αν ακριβώς 3 από τα στοιχεία του πίνακα είναι μηδέν, ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος. Αυτό συμβαίνει με 4 τρόπους για την επιλογή της θέσης του μη μηδενικού στοιχείου επί 2 για την τιμή του μη μηδενικού στοιχείου, άρα με 8 τρόπους.

Προφανώς αν $M = O$ τότε ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος.

$$\text{Άρα η πιθανότητα } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6+0+16+8+1}{81} = \frac{50}{81}. \text{ Άρα A.}$$

Q.11 Έστω οι ελλείψεις $E_k: kx^2 + ky^2 = 1, k = 1, 2, \dots, 20$. Έστω C_k κύκλος που εφάπτεται στις 4 χορδές που ενώνουν τα ακραία σημεία της έλλειψης E_k (το ένα άκρο στον μείζονα άξονα και το άλλο στον ελάσσονα άξονα). Αν r_k η ακτίνα του C_k , τότε η τιμή του $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{r_k^2}$ είναι ίση με A) 3080 B) 3210 C) 3320 D) 2870

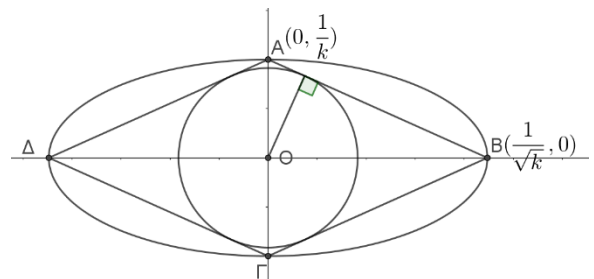
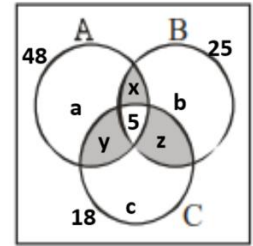
2870

Λύση

Για $x = 0, y = \pm \frac{1}{k}$ ενώ για $y = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. Άρα η ευθεία AB είναι η $\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{y}{\frac{1}{k}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k}x + ky = 1$. Η ακτίνα r_k η ακτίνα του C_k είναι ίση με την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB άρα

$$r_k = \frac{|\sqrt{k} \cdot 0 + k \cdot 0 - 1|}{\sqrt{(\sqrt{k})^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{k+k^2}} \Rightarrow r_k^2 = \frac{1}{k+k^2} \Rightarrow \frac{1}{r_k^2} = k^2 + k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{r_k^2} = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20 + 1)}{6} + \frac{20 \cdot (20+1)}{2} = 2870 + 210 = 3080. \text{ Άρα A.}$$



Q.12 Το πλήθος των ακέραιων λύσεων της ανίσωσης $\log_{x+\frac{7}{2}}\left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \geq 0$ είναι Α) 6 Β) 8 Γ) 5 Δ) 7

Λύση

$$\text{Περιορισμοί: } x + \frac{7}{2} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{2}, \left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7, 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Έχω } \log_{x+\frac{7}{2}}\left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{x+\frac{7}{2}}\left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \geq \log_{x+\frac{7}{2}} 1$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

$$\alpha) \text{ Αν } x + \frac{7}{2} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} = -2,5, \text{ τότε } \left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x-7)^2 \geq (2x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 \geq 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 40 \leq 0 \Leftrightarrow (3x-10)(x+4) \leq 0 \xrightarrow{x+4 > x+\frac{7}{2} > 0} 3x-10 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{3} = 3,333.$$

$$\text{Άρα } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\beta) \text{ Αν } x + \frac{7}{2} < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2} = -2,5, \text{ τότε } \left(\frac{x-7}{2x-3}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (3x-10)(x+4) \geq 0$$

$$\xrightarrow{3x-10 < 3 \cdot \frac{-5}{2} - 10 < 0} x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4 \text{ αλλά έχω από τους περιορισμούς ότι } x > -\frac{7}{2} \text{ και } x \text{ ακέραιος, άρα καμία ακέραια λύση.}$$

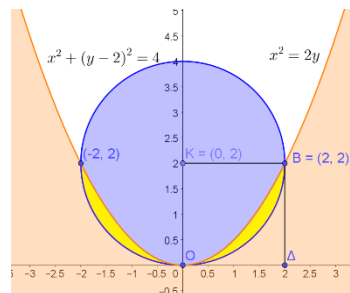
Τελικά έχω 6 ακέραιες λύσεις, άρα Α.

Q.13 Το εμβαδόν της περιοχής $\{(x,y): x^2 + (y-2)^2 \leq 4, x^2 \geq 2y\}$ είναι Α) $2\pi - \frac{16}{3}$ Β) $\pi - \frac{8}{3}$ Γ) $\pi + \frac{8}{3}$ Δ) $2\pi + \frac{16}{3}$

Λύση

Ο κύκλος και η παραβολή τέμνονται για $x^2 + (y-2)^2 = 4, x^2 = 2y \Rightarrow 2y + y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0, y = \pm 2$. Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $O(0,0)$, $B(2,2)$ και $A(-2,2)$. Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι αυτό της συμμετρικής κίτρινης περιοχής του σχήματος.

Αν E_1 είναι το εμβαδόν της πορτοκαλί περιοχής που βρίσκεται κάτω του τεταρτοκυκλίου ΒΟΚ και εντός του τετραγώνου ΚΟΔΒ, έχω $E_1 = (ΚΟΔΒ) - (ΒΟΚ) = 2 \cdot 2 - \frac{\pi 2^2}{4} = 4 - \pi$. Το εμβαδόν της δεξιάς κίτρινης περιοχής και



της E_1 δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Άρα το εμβαδόν της δεξιάς κίτρινης περιοχής είναι ίσο με $\frac{4}{3} - (4 - \pi) = \pi - \frac{8}{3}$. Τελικά η ζητούμενη περιοχή έχει εμβαδόν $2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\pi - \frac{16}{3}$. Άρα Α.

Q.14 Έστω $f: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $(x \ln x)f'(x) + (\ln x)f(x) + f(x) \geq 1, x \in [2,4]$ με $f(2) = \frac{1}{2}$ και $f(4) = \frac{1}{4}$. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις: Α) $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in [2,4]$ Β) $f(x) \geq \frac{1}{8}$, για κάθε $x \in [2,4]$. Τότε Α) μόνο η Β αληθής Β) καμία αληθής Γ) και οι δυο αληθείς Δ) μόνο η Α αληθής.

Λύση

$$\text{Έχω } (x \ln x)f'(x) + (\ln x)f(x) + f(x) \geq 1 \Leftrightarrow (x \ln x f(x))' \geq 1 = x'.$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = x \ln x f(x) - x, x \in [2,4]$ με $g(2) = 2 \ln 2 f(2) - 2 = \ln 2 - 2 < 0, g(4) = 4 \ln 4 f(4) - 4 = \ln 4 - 4 < 0$. Ακόμα $g'(x) \geq 0, x \in [2,4]$ άρα αύξουσα στο $[2,4]$. Άρα $g(2) \leq g(x) \leq g(4) < 0 \Rightarrow \ln 2 - 2 \leq x \ln x f(x) - x \leq 2(\ln 2 - 2) \Rightarrow \frac{\ln 2 - 2}{x \ln x} + \frac{1}{\ln x} \leq f(x) \leq \frac{2(\ln 2 - 2)}{x \ln x} + \frac{1}{\ln x}$

Αφού $x \geq 2$ έχω $\frac{2(\ln 2 - 2)}{x \ln x} + \frac{1}{\ln x} \leq \frac{2(\ln 2 - 2)}{2 \ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = 1 - \frac{1}{\ln 2} < 1$, άρα $f(x) < 1, x \in [2,4]$ Άρα Α αληθής.

Αφού $x \leq 4$ έχω $\frac{\ln 2 - 2}{x \ln x} + \frac{1}{\ln x} \geq \frac{\ln 2 - 2}{4 \ln 4} + \frac{1}{\ln 4} = \frac{\ln 2 - 2}{8 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{8} - \frac{2}{8 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \ln 2} > \frac{1}{8}$, άρα $f(x) > \frac{1}{8}, x \in [2,4]$

Άρα Β αληθής.

Τελικά και οι δυο προτάσεις αληθείς, άρα C.

Σημείωση: Δεν υπάρχει συνάρτηση f με τις παραπάνω ιδιότητες αφού δεν ισχύει το ΘΜΤ για την $x \ln x f(x)$???

Q.15 Έστω η συνάρτηση $y = y(x)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $(1 - x^2 y^2)dx = ydx + xdy$. Αν η ευθεία $x = 1$ τέμνει την καμπύλη $y = y(x)$ στο $y = 2$, και η ευθεία $x = 2$ τέμνει την καμπύλη $y = y(x)$ στο $y = \alpha$, τότε μια τιμή του α είναι A) $\frac{3e^2}{2(3e^2-1)}$ B) $\frac{3e^2}{2(3e^2+1)}$ C) $\frac{1-3e^2}{2(3e^2+1)}$ D) $\frac{1+3e^2}{2(3e^2-1)}$

Λύση

$$\text{Έχω } (1 - x^2 y^2)dx = ydx + xdy \Rightarrow dx = \frac{ydx + xdy}{1 - x^2 y^2} = \frac{d(xy)}{1 - (xy)^2} = \frac{d(xy)}{(1 - xy)(1 + xy)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d(xy)}{1 - xy} + \frac{d(xy)}{1 + xy} \right) \Rightarrow$$

$$2dx = d[-\ln|1 - xy| + \ln|1 + xy|] = d \left[\ln \left| \frac{1 + xy}{1 - xy} \right| \right] \Rightarrow$$

$$2x = \ln \left| \frac{1 + xy}{1 - xy} \right| + c \xrightarrow{y(1)=2} 2 = \ln \left| \frac{1 + 2}{1 - 2} \right| + c \Rightarrow c = 2 - \ln 3$$

$$\text{Άρα } 2x = \ln \left| \frac{1 + xy}{1 - xy} \right| + 2 - \ln 3 \xrightarrow{y(2)=\alpha} 4 = \ln \left| \frac{1 + 2\alpha}{1 - 2\alpha} \right| + 2 - \ln 3 \Rightarrow \ln \left| \frac{1 + 2\alpha}{1 - 2\alpha} \right| = 2 + \ln 3 = \ln(3e^2) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1 + 2\alpha}{1 - 2\alpha} \right| = 3e^2 \Rightarrow \frac{1 + 2\alpha}{1 - 2\alpha} = \pm 3e^2 \Rightarrow 1 + 2\alpha = \pm 3e^2 \mp 6\alpha e^2 \Rightarrow 2\alpha \pm 6\alpha e^2 = \pm 3e^2 - 1 \Rightarrow$$

$$2\alpha(1 \pm 3e^2) = \pm 3e^2 - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 3e^2 - 1}{2(1 \pm 3e^2)}. \text{ Οπότε μια τιμή του } \alpha \text{ είναι η } \frac{-3e^2 - 1}{2(1 - 3e^2)} = \frac{3e^2 + 1}{2(3e^2 - 1)} \text{ άρα D.}$$

Q.16 Έστω πίνακας $A_{2 \times 2}$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς τέτοιους ώστε $A^T = \alpha A + I$ όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Αν $\det(A^2 - A) = 4$, τότε το σύνολο όλων των πιθανών τιμών του α είναι ίσο με A) 0 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) 2

Λύση

$$\text{Έχω } A^T = \alpha A + I \Rightarrow (A^T)^T = \alpha A^T + I \Rightarrow A = \alpha A^T + I \Rightarrow A - I = \alpha A^T \Rightarrow A - I = \alpha^2 A + \alpha I \Rightarrow A(1 - \alpha^2) =$$

$$(\alpha + 1)I \Rightarrow A = \frac{1}{1 - \alpha^2} I, A^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2} A \Rightarrow A^2 - A = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} A \Rightarrow \det(A^2 - A) = \det\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha^2} A\right) \Rightarrow 4 = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha^2}\right)^2 \det A$$

$$\xrightarrow{A = \frac{1}{1 - \alpha^2} I} 4 = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha^2}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - \alpha^2}\right)^2 \Rightarrow 2^2 = \left(\frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{|\alpha|}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

$$\text{Αν } \alpha > 0, \text{ τότε } 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = \alpha \Rightarrow 2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \text{ με } \Delta > 0, S = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = -\alpha \Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \text{ με } \Delta < 0.$$

Άρα τελικό άθροισμα ριζών $\frac{5}{2}$, άρα C.

Q.17 Έστω $P'(\alpha, \beta, \gamma)$ η προβολή του σημείου $P(2, 3, 5)$ στο επίπεδο $2x + y - 3z = 6$. Τότε $\alpha + \beta + \gamma$ ίσο με A) 10 B) 5 C) 12 D) 9

Λύση

$$\text{Έχω } PP' = \lambda(2, 1, -3) \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } (\alpha - 2, \beta - 3, \gamma - 5) = (2\lambda, \lambda, -3\lambda) \Rightarrow \alpha = 2 + 2\lambda, \beta = 3 + \lambda, \gamma = 5 - 3\lambda. \text{ αφού } P' \text{ σημείο του επιπέδου έχω } 2\alpha + \beta - 3\gamma = 6 \Rightarrow 4 + 4\lambda + 3 + \lambda - 15 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 14\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \alpha = 4, \beta = 4, \gamma = 2, \alpha + \beta + \gamma = 10 \text{ Άρα A}$$

Q.18 Έστω $\vec{a}$ μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία τομής των 2 επιπέδων που περιγράφονται από τα διανύσματα $\hat{i} + \hat{j}, \hat{i} + \hat{k}$ και $\hat{i} - \hat{j}, \hat{j} - \hat{k}$. Αν θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6$, τότε το διατεταγμένος ζεύγος $(\theta, |\vec{a} \times \vec{\beta}|)$ είναι ίσο με A) $(\frac{\pi}{4}, 3\sqrt{6})$ B) $(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{6})$ C) $(\frac{\pi}{3}, 6)$ D) $(\frac{\pi}{4}, 6)$

Λύση

$$\text{Έστω } \vec{n}_1 \text{ το κάθετο διάνυσμα στο πρώτο επίπεδο. Έχω } \vec{n}_1 = (\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{i} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$\text{Έστω } \vec{n}_2 \text{ το κάθετο διάνυσμα στο δεύτερο επίπεδο. Έχω } \vec{n}_2 = (\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Άρα } \vec{a} // (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \Rightarrow \vec{a} = \lambda(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = \lambda \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(0, -2, 2) = (0, -2\lambda, 2\lambda).$$

$$\text{Αφού } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6 \Rightarrow (0, -2\lambda, 2\lambda)(2, -2, 1) = 6 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \vec{a} = (0, -2, 2). \text{ Άρα ξανά από την σχέση } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \theta = 6 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cos \theta = 6 \Rightarrow 2\sqrt{2} 3 \cos \theta = 6$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ και } |\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = (|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = 72 - 36 = 36 \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{\beta}| = 6. \text{ Άρα D.}$$

Q.19

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $S = \{\theta \in [0, 2\pi]: 3\cos^4 \theta - 5\cos^2 \theta - 2\sin^6 \theta + 2 = 0\}$ είναι Α) 10 Β) 8 C) 9 D) 12

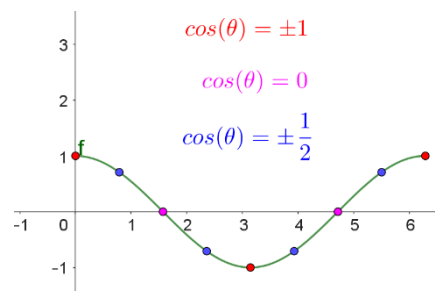
Λύση

$$\text{Έχω } 3\cos^4 \theta - 5\cos^2 \theta - 2\sin^6 \theta + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\cos^4 \theta - 5\cos^2 \theta -$$

$$2(1 - \cos^2 \theta)^3 + 2 = 0 \xLeftrightarrow{\omega = \cos^2 \theta} 3\omega^2 - 5\omega - 2(1 - \omega)^3 + 2 = 0 \Rightarrow 3\omega^2 - 3\omega - 2(1 - \omega)^3 + 2 - 2\omega = 0 \Rightarrow 3\omega(\omega - 1) + 2(\omega - 1)(1 - \omega)^2 - 2(\omega - 1) = 0 \Rightarrow (\omega - 1)[3\omega + 2(1 - \omega)^2 - 2] = 0 \Rightarrow (\omega - 1)[2\omega^2 - \omega] = 0 \Rightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = 0 \text{ ή } \omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 \text{ ή } \cos^2 \theta =$$

$$0 \text{ ή } \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = \pm 1 \text{ ή } \cos \theta = 0 \text{ ή } \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta =$$

$$0, \pi, 2\pi \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ ή } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}. \text{ Άρα 9 λύσεις άρα C}$$



Q.20 Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ αριθμητική πρόοδος με $x_1 = 2$ και μέσο όρο 200. Αν $y_i = i(x_i - i), 1 \leq i \leq 100$ τότε ο μέσος όρος των $y_1, y_2, \dots, y_{100}$ είναι Α) 10101, 50 Β) 10051, 50 C) 10049, 50 D) 10100

Λύση3

$$\text{Έχω } \bar{x} = \frac{2x_1 + 99\omega}{2} \Rightarrow 200 = \frac{2 \cdot 2 + 99\omega}{2} \Rightarrow \omega = 4, x_i = 2 + 4(i - 1) = 4i - 2 \Rightarrow y_i = i(3i - 2) = 3i^2 - 2i \Rightarrow \bar{y} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} 3i^2 - 2i}{100} = \frac{3 \frac{(100)(101)(201)}{6} - 2 \frac{(100)(101)}{2}}{100} = \frac{(101)(201)}{2} - 2 \frac{(101)}{2} = 101 \left(\frac{201}{2} - 1 \right) = 101 * \left(100 - \frac{1}{2} \right) = 10100 -$$

$$50, 50 = 10049, 50 \text{ Άρα C}$$

Μέρος Β

Q.21 Ο μέσος όρος των συντελεστών των $x, x^2, \dots, x^7$ στο ανάπτυγμα του $(2 + x)^9$ είναι ____

Λύση

$$\text{Έχω } (2 + x)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^k 2^{9-k}. \text{ Θέλω το } \frac{\sum_{k=1}^7 \binom{9}{k} 2^{9-k}}{7} = \frac{\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 2^{9-k} - \binom{9}{0} 2^9 - \binom{9}{8} 2^9 - \binom{9}{9} 2^9}{7} = \frac{(2+1)^9 - 2^9 - 18 - 1}{7} = \frac{3^9 - 2^9 - 19}{7} = \frac{(3^3 - 2^3)(3^6 + 3^3 \cdot 2^3 + 2^6) - 19}{7} = \frac{19(729 + 216 + 64) - 19}{7} = \frac{19(729 + 216 + 63)}{7} = \frac{19 \cdot 1008}{7} = 19 * 144 = \boxed{2736}$$

Q.22 Έστω $S = 109 + \frac{108}{5} + \frac{107}{5^2} + \dots + \frac{2}{5^{107}} + \frac{1}{5^{108}}$. Τότε η τιμή του $(16S - (25)^{-54})$ είναι ____

Λύση

$$\text{Έχω } \frac{S}{5} = \frac{109}{5} + \frac{108}{5^2} + \dots + \frac{2}{5^{108}} + \frac{1}{5^{109}}$$

$$\text{Άρα } s - \frac{S}{5} = 109 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{108}} + \frac{1}{5^{109}} \right) \Rightarrow \frac{4S}{5} = 109 - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{110}}}{1 - \frac{1}{5}} \Rightarrow 4S = 545 - \frac{1 - \frac{1}{5^{109}}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 4S = 545 -$$

$$\frac{5 - \frac{1}{5^{108}}}{4} \Rightarrow 16S = 2180 - 5 - \frac{1}{25^{54}} \Rightarrow 16S - 25^{-54} = \boxed{2175}$$

Q. 23 Για $m, n > 0$, έστω $\alpha(m, n) = \int_0^2 t^m (1 + 3t)^n dt$. Αν $11\alpha(10, 6) + 18\alpha(11, 5) = p \cdot 14^6$ τότε p ίσο με ____

Λύση

$$\text{Έχω } \alpha(10, 6) = \int_0^2 t^{10} (1 + 3t)^6 dt = \left[\frac{t^{11}}{11} (1 + 3t)^6 \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{t^{11}}{11} \cdot 6 \cdot 3 (1 + 3t)^5 dt = \frac{2^{11}}{11} 7^6 - \frac{18}{11} \alpha(11, 5) \Rightarrow$$

$$11\alpha(10, 6) + 18\alpha(11, 5) = 2^{11} 7^6 = 2^5 2^6 7^6 = 32 \cdot 14^6 \text{ Άρα } p = \boxed{32}$$

Q.24 Σε μια εξέταση 5 μαθητές κάθονται στις θέσεις τους ως προς τον αριθμό μητρώου τους. Το πλήθος των τρόπων όπου κανείς απ' τους μαθητές κάθεται στην προβλεπόμενη θέση του είναι ____

Λύση

Έστω d_n το πλήθος των τρόπων που n μαθητές δεν κάθονται στην θέση τους. Άρα ζητούμενο το d_5 . Έχω προφανώς, $d_1 = 0, d_2 = 1$. Για το d_3 έχω: Έστω η σωστή σειρά είναι (1,2,3), οι πιθανοί τρόποι διάταξης είναι (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), άρα $d_3 = 2$. Για το d_4 έχω: $4! - (1 \text{ στην σωστή, } 3 \text{ όχι}) - (2 \text{ στην σωστή, } 2 \text{ όχι}) - (3 \text{ στην σωστή, } 1 \text{ όχι}) - (\text{όλοι ok}) = 24 - 4d_3 - \binom{4}{2} d_2 - 4d_1 - 1 = 24 - 8 - 6 - 1 = 9$. Για το d_5 έχω: $5! - (1 \text{ στην σωστή, } 4 \text{ όχι}) - (2 \text{ στην σωστή, } 3 \text{ όχι}) -$

$$(3 \text{ στην σωστή}, 2 \text{ όχι}) - (4 \text{ στην σωστή}, 1 \text{ όχι}) - (\text{όλοι οκ}) = 120 - 5d_4 - \binom{5}{2}d_3 - \binom{5}{3}d_2 - 5d_1 - 1 = 120 - 45 - 20 - 10 - 1 = \boxed{44}$$

Β' τρόπος με χρήση των τύπων του Νεύτωνα για το πλήθος των διαταράξεων.

$$\text{Έχω } d_5 = 5! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 120 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44, \text{ όπως πριν.}$$

Σημείωση: για το πλήθος των διαταράξεων n στοιχείων ισχύουν οι εξής τύποι:

$$d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots - \frac{(-1)^n}{n!}\right), d_n = (n-1)d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \text{ και ο προσεγγιστικός τύπος } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Q.25 Έστω ευθεία l που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στις ευθείες γραμμές $l_1: \vec{r} = (\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}), \lambda \in \mathbb{R}$ και $l_2: \vec{r} = (-\hat{i} + \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}), \mu \in \mathbb{R}$. Αν P το σημείο τομής των l_1 και l_2 και $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ η ορθή προβολή του P στην l_2 τότε $9(\alpha + \beta + \gamma)$ ίσο με ____

Λύση

$$\text{Έχω } l: \vec{r} = (0, 0, 0) + v \cdot \vec{u}(a, b, c), v \in \mathbb{R}. \text{ Έχω } l \perp l_1, l_2 \Rightarrow (a, b, c)(1, 2, 3) = 0 = (a, b, c)(2, 2, 1) \Rightarrow a + 2b + 3c = 0 = 2a + 2b + c \Rightarrow a = 2c, 2c + 2b + 3c = 0 \Rightarrow b = -\frac{5c}{2} \Rightarrow \vec{u} = \rho(4, -5, 2), \rho \in \mathbb{R} \Rightarrow l: \vec{r} = (0, 0, 0) + \rho(4, -5, 2), \rho \in \mathbb{R}. \text{ Άρα για το } P \text{ έχω } (4\rho, -5\rho, 2\rho) = (1 + \lambda, -11 + 2\lambda, -7 + 3\lambda) \Rightarrow \begin{cases} 4\rho = 1 + \lambda \\ -2 * 2\rho = 2 * (-7 + 3\lambda) \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda = -14 + 6\lambda \Rightarrow \lambda = 3, \rho = 1. \text{ Άρα } P(4, -5, 2). \text{ Τώρα αφού } \vec{PQ} \perp l_2 \Rightarrow (\alpha - 4, \beta + 5, \gamma - 2)(2, 2, 1) = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0. \text{ Αφού } Q(\alpha, \beta, \gamma) \in l_2 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (2\mu - 1, 2\mu, \mu + 1). \text{ Άρα } 2(2\mu - 1) + 2(2\mu) + \mu + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{9}. \text{ Άρα } 9(\alpha + \beta + \gamma) = 9\left(\frac{2}{9} - 1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 1\right) = \boxed{5}$$

Q.26 Το πλήθος των ακέραιων συντελεστών του αναπτύγματος $\left(3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{4}}\right)^{680}$ είναι ____

Λύση

$$\text{Έχω } \left(3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{4}}\right)^{680} = \sum_{k=0}^{680} \binom{680}{k} \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^k \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{680-k} = \sum_{k=0}^{680} \alpha_k. \text{ Για να είναι } \alpha_k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 680 \text{ πρέπει } 2|k, 4|680 - k \Rightarrow 4|k, 0 \leq k \leq 680 \Rightarrow k = 0, 4, 8, \dots, 170 \text{ Άρα } \boxed{171} \text{ όροι.}$$

Q.27 Το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων των λογικών τιμών των p, q και r ώστε η λογική τιμή της πρότασης $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$ να είναι αληθής είναι ίσο με ____

Λύση

Έχω τον παρακάτω πίνακα τιμών

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	T

Άρα το ζητούμενο πλήθος τριάδων είναι ίσο με **7**

Q.28 Έστω $H_n = \frac{x^2}{1+n} - \frac{y^2}{3+n} = 1, n \in \mathbb{N}$. Έστω k η μικρότερη άρτια τιμή του n τέτοια ώστε η εκκεντρότητα του H_k να είναι ρητός αριθμός. Αν l είναι το μήκος της ορθής χορδής (locus rectum) του H_k , τότε $21l$ ίσο με ____

Λύση

Ορθή χορδή (locus rectum) μιας κωνικής τομή λέμε την χορδή που περνά από μια εστία της και είναι παράλληλη στην διευθετούσα.

$$\text{Έχω } \alpha^2 = n + 1, \beta^2 = 3 + n$$

Ακόμα έχω $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{3+n}{1+n}} = \sqrt{\frac{2n+4}{n+1}}$. Με δοκιμές προκύπτει ότι ο μικρότερος άρτιος αριθμός είναι ο **48**.

$$\text{Οπότε } \varepsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 48 + 4}{48 + 1}} = \frac{10}{7} \in \mathbb{Q}, H_{48} = \frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{51^2} = 1, y^2 = \alpha^2 +$$

$\beta^2 = 100 \Rightarrow y = 10$. Άρα η δεξιά εστία είναι η $E(10, 0)$, η κάθετη στην εστία αυτή τέμνει την υπερβολή για $\frac{10^2}{7^2} - \frac{y^2}{51^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{51}{7}$. Άρα το μήκος της ορθής χορδής λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα x είναι $l = 2 \cdot \frac{51}{7} \Rightarrow 21l = \boxed{306}$

Σημείωση: Ο γενικός τύπος για το μήκος της ορθής χορδής (locus rectum) είναι $l = \frac{2\beta^2}{\alpha}$

Q.29 Αν a και b ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x - 1 = 0$, τότε $\frac{a^{21} + b^{21} + a^{17} + b^{17}}{a^{19} + b^{19}}$ ίσο με ____

Λύση

Έχω από τύπους Vieta ότι $S = a + b = 7, P = ab = -1$. Έστω $P_i = a^i + b^i$.

Άρα

$$P_0 = 2, P_1 = S,$$

$$P_2 = a^2 + b^2 = (a + b)(a + b) - 2ab = SP_1 - PP_0$$

$$P_3 = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a^2 + b^2) - ab(a + b) = SP_2 - PP_1$$

...

$$P_i = a^i + b^i = (a + b)(a^{i-1} + b^{i-1}) - ab(a^{i-2} + b^{i-2}) \Rightarrow$$

$$\boxed{P_i = SP_{i-1} - PP_{i-2}} \text{ Τύπου του Newton για το τριώνυμο.}$$

$$\text{Άρα } P_i = 7P_{i-1} + P_{i-2}, i \geq 2$$

$$\text{Άρα } \frac{a^{21} + b^{21} + a^{17} + b^{17}}{a^{19} + b^{19}} = \frac{P_{21} + P_{17}}{P_{19}} = \frac{7P_{20} + P_{19} + P_{19} - 7P_{18}}{P_{19}} = \frac{7P_{20} + 2P_{19} - 7P_{18}}{P_{19}} = \frac{7(P_{20} - P_{18}) + 2P_{19}}{P_{19}} = \frac{49P_{19} + 2P_{19}}{P_{19}} = \boxed{51}$$

Q.30 Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix}, a, c \in \mathbb{R}$. Αν $A^3 = A$ και η θετική τιμή του α ανήκει στο διάστημα $(n - 1, n]$, όπου

$n \in \mathbb{N}$, τότε n ίσο με ____

Λύση

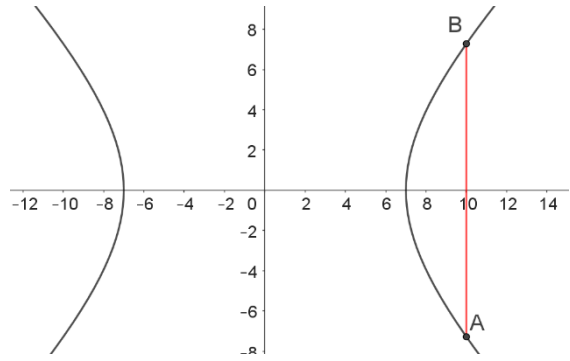
$$\text{Έχω } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2 & 2c & 3 \\ 3 & a + 3c & 2a \\ 1 & 2 + 3c & \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} a + 2 & 2c & 3 \\ 3 & a + 3c & 2a \\ 1 & 2 + 3c & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ac + 3 & a + 2 + 3c & 2a + 4 + 6c \\ a(a + 3c) + 2a & 3 + 2ac & 6 + 3a + 9c \\ a + 2 + 3c & ac + c(2 + 3c) & 2ac + 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Αφού } A^3 = A \Rightarrow 2ac + 3 = 0, a(a + 3c) + 2a = a \Rightarrow a = 0 \text{ ή } a + 3c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{-a-1}{3}$$

$$\text{Οπότε } 2a \frac{-a-1}{3} + 3 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 2a + 9 = 0, \Delta = 76(!)$$

$$\text{Άρα } a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2} \text{ με } \frac{\sqrt{19}-1}{2} > \frac{\sqrt{16}-1}{2} = \frac{3}{2} \text{ και } \frac{\sqrt{19}-1}{2} < \frac{\sqrt{25}-1}{2} = 2 \text{ άρα } \frac{\sqrt{19}-1}{2} \in (2 - 1, 2] \text{ άρα } n = \boxed{2}$$



Q.1

Έστω τα σύνολα $S = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, 4)$ και $T = \{0, 1, 2, 3\}$. Τότε ποια/ες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής/θείς;

- (A) Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις από το S στο T
 (B) Υπάρχουν άπειρες γνησίως αύξουσες συναρτήσεις από το S στο T
 (C) Το πλήθος των συνεχών συναρτήσεων από το S στο T είναι το πολύ 120
 (D) Κάθε συνεχής συνάρτηση από το S στο T είναι παραγωγίσιμη

Λύση

(A) προφανές. Π.χ. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \subseteq S \\ 1, & x \notin A \subseteq S \end{cases}$ και υπάρχουν άπειρα υποσύνολα $A \subseteq S$

(B) Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x = x_0 \\ 1, & \text{για } x = x_1 \\ 2, & \text{για } x = x_2 \\ 3, & \text{για } x = x_3 \end{cases}$ τότε αν f γνησίως αύξουσα, τότε η f γνησίως μονότονη και άρα 1-1 οπότε

για $x = x_4$, θα έχουμε $f(x_4) \notin T$, άτοπο. Άρα B Ψευδής

(C) Για να είναι συνεχής η f , θα πρέπει σε κάθε ένα από τα τρία διαστήματα του S , να αντιστοιχήσουμε μια τιμή του T , δηλαδή η f να είναι σταθερή και ίση με μια από τις 4 τιμές του T ανά ένα από τα τρία

διαστήματα. Π.χ. $f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{για } x \in (0, 1) \\ \beta, & \text{για } x \in (1, 2) \\ \gamma, & \text{για } x \in (3, 4) \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in T$. Άρα υπάρχουν $4^3 = 64 < 120$ συναχείς

συναρτήσεις από το S στο T . Άρα C αληθής.

(D) Αφού οι παραπάνω συνεχείς συναρτήσεις είναι σταθερές σε κάθε διάστημα, έχω $f'(x) = 0, x \in S$. Άρα D αληθής.

Τελικά ACD

Q.2

Έστω T_1 and T_2 δυο διακριτές κοινές εφαπτόμενες στην έλλειψη $E: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ και στην παραβολή $P: y^2 = 12x$. Υποθέστε ότι η εφαπτομένη T_1 τέμνει τις καμπύλες P και E στα σημεία A_1 και A_2 , αντίστοιχα και η εφαπτομένη T_2 τέμνει τις καμπύλες P και E στα σημεία A_4 και A_3 , αντίστοιχα. Τότε ποια/ες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής/θείς;

- (A) Το εμβαδόν του τετράπλευρου $A_1A_2A_3A_4$ είναι 35 τετραγωνικές μονάδες
 (B) Το εμβαδόν του τετράπλευρου $A_1A_2A_3A_4$ είναι 36 τετραγωνικές μονάδες
 (C) Οι εφαπτόμενες T_1 and T_2 τέμνονται στον x -άξονα στο σημείο $(-3, 0)$
 (D) Οι εφαπτόμενες T_1 and T_2 τέμνονται στον x -άξονα στο σημείο $(-6, 0)$

Λύση

Έχω $T_1: y_1 y = 6(x + x_1)$ ως εφαπτόμενη της υπερβολής ή $T_1: \frac{x_2 x}{6} + \frac{y_2 y}{3} = 1$ ως εφαπτόμενη της έλλειψης.

Άρα $T_1: y = \frac{6}{y_1}x + \frac{6}{y_1}x_1$ ή $\frac{y_2 y}{3} = 1 - \frac{x_2 x}{6} \Leftrightarrow y = \frac{3}{y_2} - \frac{x_2 y_2}{2}x$.

Άρα $\frac{6}{y_1} = -\frac{x_2 y_2}{2}, \frac{6}{y_1}x_1 = \frac{3}{y_2}$. Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη

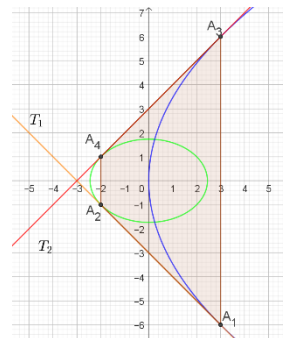
έχουμε $\frac{36}{y_1^2}x_1 = -\frac{3x_2}{2} \Rightarrow \frac{36}{12x_1}x_1 = -\frac{3x_2}{2} \Rightarrow 3 = -\frac{3x_2}{2} \Rightarrow x_2 = -2$ λόγω

συμμετρίας $x_4 = -2$. Για τις τεταγμένες έχω $\frac{(-2)^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{3} = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \pm 1$ άρα $A_2(-2, -1)$ και $A_4(-2, 1)$.

Αφού $\frac{6}{y_1} = -\frac{x_2 y_2}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-12}{x_2 y_2} = \frac{-12}{2} = -6$,

$\frac{6}{y_1}x_1 = \frac{3}{y_2} \Rightarrow \frac{6}{-6}x_1 = \frac{3}{-1} \Rightarrow x_1 = 3$ άρα $A_1(3, -6)$ και λόγω συμμετρίας $A_3(3, 6)$.

Άρα $(A_1A_2A_3A_4) = \frac{B+\beta}{2}v = \frac{A_1A_3+A_2A_4}{2}|x_1 - x_2| = \frac{12+2}{2}5 = 35$. Άρα A



Έχω $T_1: y = \frac{6}{y_1}x + \frac{6}{y_1}x_1 = -x - 3$ και λόγω συμμετρίας $T_2: y = x + 3$. Και οι δυο ευθείες τέμνουν τον x -άξονα στο σημείο $(-3, 0)$, άρα C

Τελικά AC

Q.3

Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{17}{36}$. Θεωρήστε την τετραγωνική περιοχή $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Έστω $G = \{(x, y) \in S: y > f(x)\}$ μια πράσινη περιοχή και $R = \{(x, y) \in S: y < f(x)\}$ μια κόκκινη περιοχή. Έστω $L_h = \{(x, h) \in S: x \in [0, 1]\}$ η οριζόντια γραμμή σε ύψος $h \in [0, 1]$. Τότε ποια/ες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς/θείς;

(A) Υπάρχει $h \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ τέτοιο ώστε η πράσινη περιοχή πάνω από την γραμμή L_h είναι ισοεμβαδική της πράσινης περιοχής κάτω από την γραμμή L_h

(B) Υπάρχει $h \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ τέτοιο ώστε η κόκκινη περιοχή πάνω από την γραμμή L_h είναι ισοεμβαδική της κόκκινης περιοχής κάτω από την γραμμή L_h

(C) Υπάρχει $h \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ τέτοιο ώστε η πράσινη περιοχή πάνω από την γραμμή L_h είναι ισοεμβαδική της κόκκινης περιοχής κάτω από την γραμμή L_h

(D) Υπάρχει $h \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ τέτοιο ώστε η κόκκινη περιοχή πάνω από την γραμμή L_h είναι ισοεμβαδική της πράσινης περιοχής κάτω από την γραμμή L_h

Λύση

Έχω $f'(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{9}$, $f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1) < 0$ στο $[0, 1]$, άρα f κοίλη στο $[0, 1]$. Ακόμα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{5}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 5 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(3x - 5) = 0 \xrightarrow{x \in [0, 1]} x = \frac{1}{3}$.

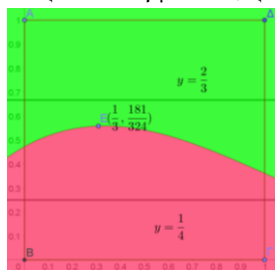
Έχω $\max(f) = f(\frac{1}{3}) = \frac{181}{324} \approx 0,558$, $f(0) = \frac{17}{36} \approx 0,472$, $f(1) = \frac{13}{36} \approx 0,361$

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{17}{36}$	$f(\frac{1}{3}) = \frac{181}{324}$	$\frac{13}{36}$

Ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος.

και η γραφική

παράσταση με τις χρωματισμένες περιοχές είναι στο επόμενο σχήμα.



Έχω $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{17}{36} \right) dx = \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{18}x^2 + \frac{17}{36}x \right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{5}{18} + \frac{17}{36} = \frac{3}{36} - \frac{12}{36} + \frac{10}{36} + \frac{17}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Άρα $R = G = \frac{1}{2}$.

Έστω $h = \frac{3}{4} = 0,75 > \max(f)$. Τότε, το εμβαδόν της περιοχής πάνω από την γραμμή L_h είναι ίσο με $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}G$ και είναι ίσο με υπόλοιπο πράσινο μισό κάτω από την γραμμή L_h . Αλλά $\frac{3}{4} \notin [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ Άρα Α Ψευδής.

Όμοια για $h = \frac{1}{4} = 0,25 < \min(f)$. Τότε, το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την γραμμή L_h είναι ίσο με $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}R$ και είναι ίσο με υπόλοιπο κόκκινο μισό πάνω από την γραμμή L_h . Αφού $\frac{1}{4} \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ η Β Αληθής.

Έστω $\varphi(x) = E_{\text{πράσινης περιοχής άνω της } L_h}(x) - E_{\text{κόκκινης περιοχής κάτω της } L_h}(x)$. Έχω $\varphi(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 0$, $\varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0$, φ συνεχής από την φύση του προβλήματος, άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $h \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$ τέτοιο ώστε $\varphi(h) = 0$, άρα C Αληθής.

Από C έχω

$$\begin{aligned} E_{\text{πράσινης περιοχής άνω της } L_h}(h) &= E_{\text{κόκκινης περιοχής κάτω της } L_h}(h) \\ \stackrel{R=G}{\implies} G - E_{\text{πράσινης περιοχής άνω της } L_h}(h) &= R - E_{\text{κόκκινης περιοχής κάτω της } L_h}(h) \implies \\ E_{\text{πράσινης περιοχής κάτω της } L_h}(h) &= E_{\text{κόκκινης περιοχής πάνω της } L_h}(h). \text{ Άρα D Αληθής} \end{aligned}$$

Τελικά BCD

Q.4

Έστω συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{n}$ if $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Έστω συνάρτηση $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < g(x) < 2\sqrt{x} \text{ για κάθε } x \in (0, 1). \text{ Τότε το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$$

(A) ΔΕΝ υπάρχει (B) είναι ίσο με 1 (C) είναι ίσο με 2 (D) είναι ίσο με 3

Λύση

Για $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, έχω $x < \frac{1}{n} \implies \sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ακόμα έχω $x > \frac{1}{n+1} \implies n+1 > \frac{1}{x} \implies n > \frac{1-x}{x} \implies \sqrt{n} >$

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}. \text{ Οπότε } \sqrt{\frac{1-x}{x}} < \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Άρα } \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < g(x) < 2\sqrt{x} \implies \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < \sqrt{n}g(x) < 2\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} \implies$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < f(x)g(x) < 2 \text{ για } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$$

$$\text{Για το ολοκλήρωμα, θέτω } u = \sqrt{\frac{1-t}{t}} \implies u^2 = \frac{1-t}{t} \implies \frac{1}{t} = u^2 + 1$$

$$du = \frac{d(\frac{1-t}{t})}{2\sqrt{\frac{1-t}{t}}} = \frac{\frac{-t-(1-t)}{t^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{t}}} dt = \frac{\frac{-1}{t^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{t}}} dt \implies dt = 2 \frac{u}{-(u^2+1)^2} du$$

$$\text{Άρα } \int \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt = \int -2 \frac{u^2}{(u^2+1)^2} du = - \int \frac{ud(u^2+1)}{(u^2+1)^2} = \int u d\left(\frac{1}{u^2+1}\right) = u \frac{1}{u^2+1} - \int \frac{1}{u^2+1} du = \sqrt{\frac{1-t}{t}} t - \arctan u =$$

$$\sqrt{(1-t)t} - \arctan \sqrt{\frac{1-t}{t}} = \sqrt{(1-t)t} - \arccos \sqrt{t}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt &= \sqrt{(1-x)x} - \arccos \sqrt{x} - \sqrt{(1-x^2)x^2} + \arccos \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{(1-x)x} - \arccos \sqrt{x} - x\sqrt{1-x^2} + \arccos x \end{aligned}$$

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1-x}{x}} (\sqrt{(1-x)x} - x\sqrt{1-x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} ((1-x) - \sqrt{x}\sqrt{(1-x)}\sqrt{1-x^2}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1-x}{x}} (-\arccos \sqrt{x} + \arccos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\arccos \sqrt{x} + \arccos x)}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\arccos \sqrt{x} + \arccos x)}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\arccos \sqrt{x} + \arccos x)'}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

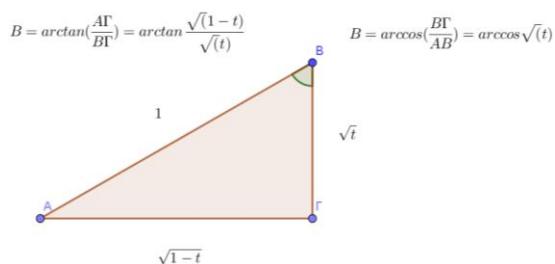
$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1-x}{x}} (\sqrt{(1-x)x} - \arccos \sqrt{x} - x\sqrt{1-x^2} + \arccos x) = 1 + 1 = 2$$

Από κριτήριο παρεμβολής έχω $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 2$ Άρα C

Έγινε χρήση των τύπων.

$$\frac{d}{dx} [\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ οπότε } \frac{d}{dx} [\arccos(\sqrt{x})] = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

Και $\arctan \sqrt{\frac{1-t}{t}} = \arccos \sqrt{t}$ απόδειξη στο σχήμα κάτω



Q.5

Έστω κύβος $\mathbf{Q}$ με το σύνολο κορυφών του το $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}\}$. Έστω $\mathbf{F}$ το σύνολο όλων των 12 γραμμών που περιέχουν τις διαγώνιους των 6 εδρών του κύβου $\mathbf{Q}$. Έστω $\mathbf{S}$ το σύνολο όλων των 4 γραμμών που περιέχουν τις κύριες διαγώνιους του κύβου $\mathbf{Q}$. Για παράδειγμα, η γραμμή που περνά από τις κορυφές $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$ ανήκει στο σύνολο $\mathbf{S}$. Για τις γραμμές $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$, έστω $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ η μικρότερη απόσταση μεταξύ τους. Τότε η μέγιστη τιμή του $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, με $\mathbf{p}_1 \in \mathbf{F}$ και $\mathbf{p}_2 \in \mathbf{S}$, είναι (A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

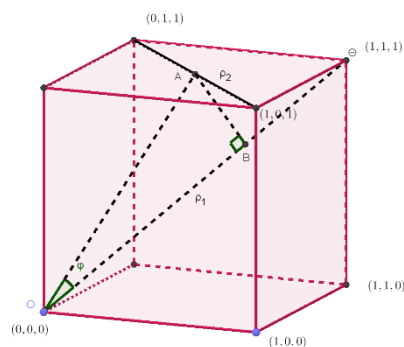
Λύση

Αν οι $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ τέμνονται, τότε $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$. Παίρνω την $\mathbf{p}_2 \in \mathbf{F}$ του σχήματος. Ψάχνουμε την απόσταση της διαγώνιου αυτής από μια κύρια διαγώνιο του κύβου που δεν την τέμνει, έστω την $\mathbf{p}_1 \in \mathbf{S}$ του σχήματος. Η μικρότερη απόσταση των δυο αυτών τμημάτων προκύπτει αν πάρω το μέσο της $\mathbf{p}_2$, A, και φέρω κάθετο τμήμα, AB, στην $\mathbf{p}_1$.

$$\text{Έχω } \cos \varphi = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| |\overline{OB}|} = \frac{(1/2, 1/2, 1) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin \varphi =$$

$$\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } AB = OA \sin \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{6}}. \text{ Άρα A}$$



Q.6

Έστω $\mathbf{X} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{20} < 1 \text{ και } y^2 < 5x\}$. Τρία ξεχωριστά σημεία $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$ επιλέγονται τυχαία από το σύνολο $\mathbf{X}$. Τότε η πιθανότητα τα σημεία $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$ να σχηματίζουν τρίγωνο του οποίου το εμβαδόν είναι θετικός ακέραιος, είναι (A) $\frac{71}{220}$ (B) $\frac{73}{220}$ (C) $\frac{79}{220}$ (D) $\frac{83}{220}$

Λύση

$$\text{Λύνω το σύστημα } \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{20} = 1 \\ y^2 = 5x, x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{5x}{20} = 1 \\ y^2 = 5x, x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ y^2 = 5x, x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ y^2 = 5x, x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -4 \text{ ή } x = 2 \\ y^2 = 5x, x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm\sqrt{10} \end{cases}. \text{ Τα σημεία του συνόλου } X \text{ είναι με ακέραιες συντεταγμένες, άρα } X =$$

$\{(1, 0), (1, \pm 1), (1, \pm 2), (1, \pm 3), (2, 0), (2, \pm 1), (2, \pm 2), (2, \pm 3)\}$, τα δώδεκα σημεία του σχήματος. Τα πέντε είναι στην ευθεία $x = 1$ και τα υπόλοιπα επτά στην ευθεία $x = 2$. Το πλήθος των τριάδων σημείων P,Q,R

είναι $\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$. Για να σχηματίζουν τρίγωνο, θα πρέπει το

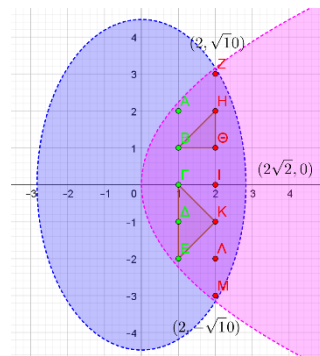
ένα από τα τρία σημεία, P, να είναι στην ευθεία $x = 1$ και τα άλλα δύο, Q και R, στην ευθεία $x = 2$, ή το ανάποδο. Επιπλέον, για να έχει το τρίγωνο ακέραιο

εμβαδόν θα πρέπει $|y_Q - y_R| = 2, 4$ ή 6 . Διακρίνω περιπτώσεις. Αν $x_P = 1, |y_Q - y_R| = 2$, έχω $5 \cdot 5$ επιλογές, αν $x_P = 1, |y_Q - y_R| = 4$, έχω $5 \cdot 3$ επιλογές,

αν $x_P = 1, |y_Q - y_R| = 6$, έχω $5 \cdot 1$ επιλογές, αν $x_P = 2, |y_Q - y_R| = 2$, έχω $7 \cdot 3$ επιλογές, αν $x_P = 2, |y_Q - y_R| = 4$, έχω $7 \cdot 1$ επιλογές, αν $x_P = 2, |y_Q - y_R| = 6$,

έχω $7 \cdot 0$ επιλογές, συνολικά έχω $5 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 1 =$

73 ευνοϊκές περιπτώσεις. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{73}{220}$ άρα B.

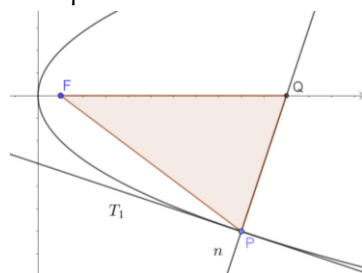


Q.7

Έστω P σημείο της παραβολής $y^2 = 4ax$, όπου $a > 0$. Η κανονική(normal) ευθεία της παραβολής στο σημείο P τέμνει τον x -άξονα στο σημείο Q . Το εμβαδόν του τριγώνου PFQ , όπου F είναι η εστία της παραβολής, είναι ίσο με 120. Αν η κλίση m της κανονικής ευθείας και το a είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε το ζεύγος (a, m) είναι το

(A) (2, 3) (B) (1, 3) (C) (2, 4) (D) (3, 4)

Λύση



Έστω $P(x_1, y_1)$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι: $T_1: yy_1 = 2a(x + x_1)$, με κλίση

$\lambda_{T_1} = \frac{2a}{y_1}$, οπότε η κλίση της κανονικής ευθείας, n , είναι $m = -\frac{1}{\lambda_{T_1}} = -\frac{y_1}{2a} \Rightarrow y_1 = -2ma$. Άρα η εξίσωση

της κανονικής στο σημείο αυτό είναι: $n: y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$. Στο σημείο Q , έχω $y = 0$, άρα $0 - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x_Q - x_1) \Rightarrow x_Q = x_1 + 2a$. Έχω εστία το σημείο $F(a, 0)$, άρα έχω $|x_Q - x_F| = |x_1 + a|$. Άρα $(PFQ) =$

$$\frac{1}{2} FQ \cdot d(P, x'x) = \frac{1}{2} |x_1 + a| \cdot |y_1| \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} \left| \frac{y_1^2}{4a} + a \right| \cdot |-2ma| = \left| \frac{4m^2a^2}{4a} + a \right| \cdot |ma| = |m^3a^2 + ma^2| =$$

$$m^3a^2 + ma^2 = ma^2(m^2 + 1). \text{ Αλλά } 120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3(1 + 3^2). \text{ Άρα το } (a, m) = (2, 3) \text{ είναι η ζητούμενη}$$

λύση, άρα A.

Q.8

Έστω $\tan^{-1}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, για $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

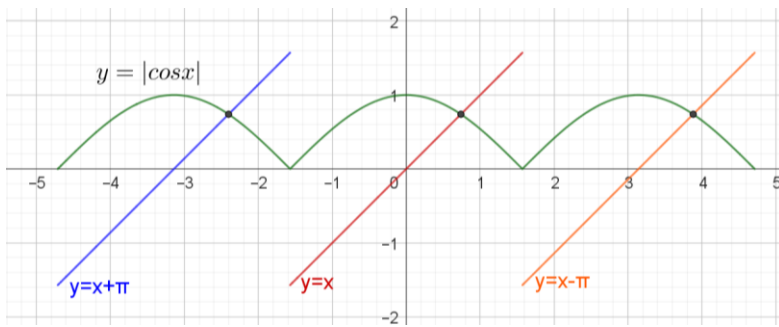
$$\sqrt{1 + \cos(2x)} = \sqrt{2} \tan^{-1}(\tan x) \text{ για } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Λύση

$$\text{Έχω } \sqrt{1 + \cos(2x)} = \sqrt{2} \tan^{-1}(\tan x) \Leftrightarrow \sqrt{2} |\cos x| = \sqrt{2} \tan^{-1}(\tan x) \Leftrightarrow |\cos x| = \tan^{-1}(\tan x)$$

$$\Leftrightarrow |\cos x| = x + k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right). \text{ Από το παρακάτω γράφημα προκύπτει ότι}$$

έχουμε **3** ρίζες.



Q.9

Έστω $n \geq 2$ φυσικός αριθμός και συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} n(1 - 2nx) & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(2nx - 1) & \text{if } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{3}{4n} \\ 4n(1 - nx) & \text{if } \frac{3}{4n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1}(nx - 1) & \text{if } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Αν n τέτοιο ώστε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις γραμμές $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ and $y = f(x)$ είναι ίσο με 4, τότε η μέγιστη τιμή της f είναι _____

Λύση

Από το σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης έχουμε ότι:

$$E = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n} \times n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n} \times n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{n-1}{2} \Rightarrow 4 = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 8.$$

Άρα $\max f(x) = \boxed{8}$

Q. 10

Έστω $\overbrace{75 \dots 57}^r$ ο $(r+2)$ -ψήφιος αριθμός που το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο είναι το 7 και τα υπόλοιπα r ψηφία του είναι το 5. Θεωρήστε το άθροισμα $S = 77 + 757 + 7557 + \dots + \overbrace{75 \dots 57}^{98}$. Αν $S = \frac{99}{75 \dots 57 + m}$, όπου m και n είναι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 3000, τότε η τιμή του $m + n$ είναι _____

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Έστω } c &= \overbrace{1 \dots 1}^{99 \text{ ψηφία}}. \text{ Έχω } S = 77 + 757 + 7557 + \dots + \overbrace{75 \dots 57}^{98} = \overbrace{7 + 7 \dots 7}^{99 \text{ όροι}} + \overbrace{77 \dots 770}^{99 \text{ επτάδια}} + 50 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111 \dots 111}^{98 \text{ ψηφία}} \right) \\ \Rightarrow S &= 99 * 7 + 70c + \frac{50}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{999 \dots 999}^{98 \text{ ψηφία}} \right) = 693 + 70c + \frac{50}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + \dots + 10^{98} - 1) \\ &= 693 + 70c + \frac{50}{9} \left(\overbrace{111 \dots 10}^{98 \text{ ψηφία}} - 98 \right) = 693 + 70c + \frac{50}{9} \left(\overbrace{111 \dots 11}^{98 \text{ ψηφία}} - 1 - 98 \right) = \\ 693 + 70c + \frac{50}{9} (c - 99) &= \frac{6237 + 630c + 50c - 4950}{9} = \frac{1287 + 680c}{9} (1). \text{ Έχω τώρα ότι } \overbrace{75 \dots 57}^{99} = \overbrace{7000 \dots 00}^{100 \text{ ψηφία}} + 7 + \\ \overbrace{555 \dots 5550}^{99 \text{ ψηφία}} &= 7 \left(1 + \overbrace{999 \dots 999}^{100 \text{ ψηφία}} \right) + 7 + 50c = 7 + 7 * (90c + 9) + 7 + 50c = 77 + 680c \Rightarrow 680c = \\ \overbrace{75 \dots 57}^{99} - 77. \text{ Άρα } (1) \Rightarrow S &= \frac{1287 + \overbrace{75 \dots 57}^{99} - 77}{9} = \frac{1210 + \overbrace{75 \dots 57}^{99}}{9} \Rightarrow \\ m &= 1210, n = 9, m + n = \boxed{1219} \end{aligned}$$

Αλλιώς

$$S = 77 + 757 + 7557 + \dots + 75 \dots 57$$

$$10S = 770 + 7570 + \dots + 75 \dots 70 + 75 \dots 70$$

Άρα, με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$9S = -77 + \overbrace{13 + 13 + \dots + 13}^{98 \text{ όροι}} + \frac{98}{75 \dots 570} = -77 + 13 * 98 + 13 + \frac{99}{75 \dots 57} = 1210 + \frac{99}{75 \dots 57} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1210 + \frac{99}{75 \dots 57}}{9}, \text{ όπως πριν.}$$

Q.11

Έστω $A = \left\{ \frac{1967 + 1686i \sin \theta}{7 - 3i \cos \theta} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$. Αν το σύνολο A περιέχει ακριβώς έναν θετικό ακέραιο n , να βρεθεί ο n .

Λύση

$$\text{Αν } n \in A \text{ έχω } \frac{1967 + 1686i \sin \theta}{7 - 3i \cos \theta} = n \Leftrightarrow 1967 + 1686i \sin \theta = n(7 - 3i \cos \theta) \Leftrightarrow 1967 = 7n, 1686 \sin \theta = -3n \cos \theta \Leftrightarrow n = 281, 1686 \tan \theta = -843 \Leftrightarrow \boxed{n = 281}, \tan \theta = -1/2$$

Q. 12

Έστω P σημείο του επιπέδου $\sqrt{3}x + 2y + 3z = 16$ και $S = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} : a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ και η απόσταση των σημείων } (a, b, c) \text{ από το επίπεδο } P \text{ is } \frac{7}{2}\}$. Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ και $\vec{w}$ τρία διακριτά διανύσματα του συνόλου S τέτοια ώστε $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{w} - \vec{u}|$. Έστω V ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ και $\vec{w}$. Τότε η τιμή του $\frac{80}{\sqrt{3}}V$ είναι _____

Λύση

Τα σημεία (a, b, c) του συνόλου S είναι κατ' αρχήν πάνω στην μοναδιαία σφαίρα, αφού $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Επειδή η απόσταση των σημείων αυτών από το επίπεδο P είναι σταθερή, έπεται ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε κάποιο επίπεδο, P' , παράλληλο του P , άρα σε κύκλο (c) της σφαίρας. Αφού $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{w} - \vec{u}|$, έπεται ότι τα πέρατα U, V και W των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ και $\vec{w}$ αντίστοιχα, βρίσκονται στον κύκλο c και σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Έχω $d(O, P) =$

$$\frac{|\sqrt{3} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 16|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{16}{4} = 4 > \frac{7}{2}, \text{ άρα το επίπεδο } P \text{ είναι εκτός της σφαίρας και συνεπώς } d(O, P') = d(O, P) -$$

$\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$. Άρα το $OUVW$ είναι τετράεδρη πυραμίδα με ύψος $h = 1/2$. Αν A είναι η κάθετη προβολή του O στο

επίπεδο P' , τότε από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο AUO έχω $AU^2 = OU^2 - OA^2 = R^2 - h^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow AU = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Επειδή το A είναι το βαρύκεντρο του UVW η διάμεσος $\mu_U = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\text{Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου έχει μήκος } UV = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sin 60} = \frac{3}{2}$$

άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου $(UVW) = \frac{\sqrt{3}}{4} UV^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}$ ο όγκος της πυραμίδας είναι ίσος με

$$\frac{1}{3} (UVW) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{32} \Rightarrow \text{ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που}$$

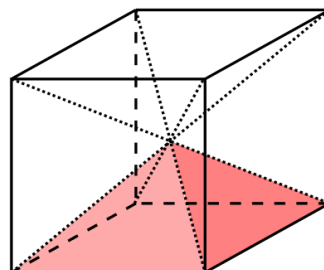
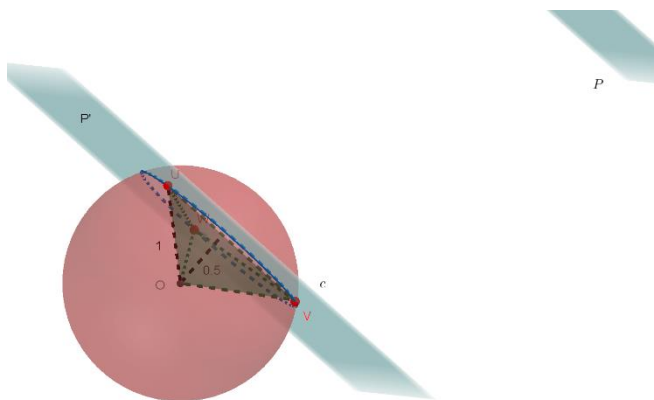
ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι 6πλάσιος του όγκου της

$$\text{πυραμίδας, άρα } V = 6 \frac{3\sqrt{3}}{32} = \frac{9\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \frac{80}{\sqrt{3}} V = \frac{80}{\sqrt{3}} \frac{9\sqrt{3}}{16} = \boxed{45}$$

Αλλιώς.

$$\text{Έχω } |\vec{u} - \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\vec{v} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + 1 - 2\vec{u}\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\vec{v} = -\frac{1}{8} (= \vec{u}\vec{w} =$$

$$\vec{v}\vec{w}, \text{ όμοια}). \text{ Άρα } V = \|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})^T} =$$



$$\sqrt{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} \overline{u^2} & \overline{u\vec{v}} & \overline{u\vec{w}} \\ \overline{v\vec{u}} & \overline{v^2} & \overline{v\vec{w}} \\ \overline{w\vec{u}} & \overline{w\vec{v}} & \overline{w^2} \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1 & -1/8 \\ -1/8 & -1/8 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1/8 \\ -1/8 & 1 \end{vmatrix} + 1/8 \begin{vmatrix} -1/8 & -1/8 \\ -1/8 & 1 \end{vmatrix} + -1/8 \begin{vmatrix} -1/8 & 1 \\ -1/8 & -1/8 \end{vmatrix}} =$$

$$\sqrt{63/64 + 1/8(-1/8 - 1/64) - 1/8(1/64 + 1/8)} = \sqrt{63/64 + 1/8(-9/64) - 1/8(9/64)} = \sqrt{243/256} = 9\sqrt{3}/16, \text{ όπως πριν.}$$

Q. 13

Έστω $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ δυο μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν ο συντελεστής του $\mathbf{x}^5$ στο ανάπτυγμα του $(\mathbf{ax}^2 + \frac{70}{27b\mathbf{x}})^4$ είναι ίσος με αυτόν του $\mathbf{x}^{-5}$ στο ανάπτυγμα του $(\mathbf{ax} - \frac{1}{b\mathbf{x}^2})^7$, τότε η τιμή του $2\mathbf{b}$ είναι _____

Λύση

Ως γνωστόν έχω $(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$. Ακόμα έχω $\mathbf{x}^5 = (\mathbf{x}^2)^k \left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)^{4-k} = \mathbf{x}^{2k+k-4} \Rightarrow k = 3$, άρα $\mathbf{x}^5 = (\mathbf{x}^2)^3 \left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)^{4-3}$, άρα ο συντελεστής του $\mathbf{x}^5$ θα είναι ο $\binom{4}{3} \alpha^3 \left(\frac{70}{27b}\right)^{4-3} = \frac{4\alpha^3 70}{27b}$

Ακόμα έχω $\mathbf{x}^{-5} = \mathbf{x}^k \left(\frac{1}{\mathbf{x}^2}\right)^{7-k} = \mathbf{x}^{k+2k-14} \Rightarrow k = 3$, άρα $\mathbf{x}^{-5} = \mathbf{x}^3 \left(\frac{1}{\mathbf{x}^2}\right)^{7-3}$, άρα ο συντελεστής του $\mathbf{x}^{-5}$ θα είναι ο $\binom{7}{3} \alpha^3 \left(\frac{1}{b}\right)^{7-3} = \frac{35\alpha^3}{b^4}$. Άρα $\frac{4\alpha^3 70}{27b} = \frac{35\alpha^3}{b^4} \Rightarrow 280b^4 = 27 * 35b \Rightarrow b^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{2b = 3}$

Q.14

Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ και $\mathbf{y}$ πραγματικοί αριθμοί και το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{z} = 7$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{az} = 11$$

$$2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{bz} = \mathbf{y}$$

Βρείτε τις αντιστοιχίες της στήλης-I με της επιλογές της στήλης-II.

Στήλη-I	Στήλη-II
(P) Αν $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(7\mathbf{a} - 3)$ και $\mathbf{y} = 28$, τότε το σύστημα έχει	(1) μοναδική λύση
(Q) Αν $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(7\mathbf{a} - 3)$ και $\mathbf{y} \neq 28$, τότε το σύστημα έχει	(2) καμία λύση
(R) Αν $\mathbf{b} \neq \frac{1}{2}(7\mathbf{a} - 3)$ όπου $\mathbf{a} = 1$ και $\mathbf{y} \neq 28$, τότε το σύστημα έχει	(3) άπειρες λύσεις
(S) Αν $\mathbf{b} \neq \frac{1}{2}(7\mathbf{a} - 3)$ όπου $\mathbf{a} = 1$ και $\mathbf{y} = 28$, τότε το σύστημα έχει	(4) $\mathbf{x} = 11, \mathbf{y} = -2$ και $\mathbf{z} = 0$
	(5) $\mathbf{x} = -15, \mathbf{y} = 4$ και $\mathbf{z} = 0$

Η σωστή επιλογή είναι:

(A) (p) $\rightarrow$ (3) (Q) $\rightarrow$ (2) (R) $\rightarrow$ (1) (S) $\rightarrow$ (4)

(B) (p) $\rightarrow$ (3) (Q) $\rightarrow$ (2) (R) $\rightarrow$ (5) (S) $\rightarrow$ (4)

(C) (p) $\rightarrow$ (2) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (4) (S) $\rightarrow$ (5)

(D) (p) $\rightarrow$ (2) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (1) (S) $\rightarrow$ (3)

Λύση

Έχω $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{a} \\ 2 & -3 & \mathbf{b} \end{vmatrix} = 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3, \mathbf{D}_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 11 \\ 2 & -3 & \mathbf{y} \end{vmatrix} = 56 - 2\mathbf{y}$. Έχω $\mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{2}(7\mathbf{a} - 3)$. Ακόμα $\mathbf{D}_z = 0 \Leftrightarrow 56 - 2\mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} = 28$.

Άρα (P) $\Leftrightarrow \mathbf{D} = 0$ και $\mathbf{D}_z = 0 \Rightarrow$ άπειρες λύσεις(3)

(Q) $\Leftrightarrow \mathbf{D} = 0$ και $\mathbf{D}_z \neq 0 \Rightarrow$ καμία λύση (2)

(R) $\Leftrightarrow \mathbf{D} \neq 0$ και $\mathbf{D}_z \neq 0 \Rightarrow$ μία λύση, $\mathbf{z} \neq 0$ (1)

(S) $\Leftrightarrow \mathbf{D} \neq 0$ και $\mathbf{D}_z = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = 0, \mathbf{x} = 11, \mathbf{y} = -2$ (4)

Αρα Α

Q. 15

Έστω ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων

x_i	3	8	11	10	5	4
f_i	5	2	3	2	4	4

Βρείτε τις αντιστοιχίες της στήλης-I με της επιλογές της στήλης-II.

Στήλη-I	Στήλη-II
(P) Ο μέσος όρος των παραπάνω δεδομένων είναι	(1) 2.5
(Q) Η διάμεσος των παραπάνω δεδομένων είναι	(2) 5
(R) Η μέση απόκλιση από τον μέσο όρο των παραπάνω δεδομένων είναι	(3) 6
(S) Η μέση απόκλιση από τη διάμεσο των παραπάνω δεδομένων είναι	(4) 2.7
	(5) 2.4

Η σωστή επιλογή είναι:

(A) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (4) (S) → (5)

(B) (P) → (3) (Q) → (2) (R) → (1) (S) → (5)

(C) (P) → (2) (Q) → (3) (R) → (4) (S) → (1)

(D) (P) → (3) (Q) → (3) (R) → (5) (S) → (5)

Λύση

$$\text{Έχω } \mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{120}{20} = 6, \text{ άρα (P) } \rightarrow (3)$$

Ταξινομώ τον πίνακα

x_i	3	4	5	8	10	11
f_i	5	4	4	2	2	3

$$\text{Έχω } \delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5 \text{ άρα (Q) } \rightarrow (2)$$

$ x_i - \mu $	3	2	1	2	4	5
f_i	5	4	4	2	2	3

$$\text{Έχω } \sigma_\mu = \frac{\sum |x_i - \mu| \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{54}{20} = 2,7 \text{ άρα (R) } \rightarrow (4)$$

$ x_i - \delta $	2	1	0	3	5	6
f_i	5	4	4	2	2	3

$$\text{Έχω } \sigma_\delta = \frac{\sum |x_i - \delta| \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{48}{20} = 2,4 \text{ άρα (S) } \rightarrow (5)$$

Αρα Α

Q.16

Έστω $\mathbf{l}_1$ και $\mathbf{l}_2$ οι ευθείες $\vec{r}_1 = \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ και $\vec{r}_2 = (\hat{j} - \hat{k}) + \mu(\hat{i} + \hat{k})$, αντίστοιχα. Έστω $\mathbf{X}$ το σύνολο όλων των επιπέδων $\mathbf{H}$ που περιέχουν την ευθεία $\mathbf{l}_1$. Για το επίπεδο $\mathbf{H}$, ας συμβολίσουμε ως $\mathbf{d}(\mathbf{H})$ την μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ των σημείων της ευθείας $\mathbf{l}_2$ και του $\mathbf{H}$. Έστω $\mathbf{H}_0$ το επίπεδο του $\mathbf{X}$ για το οποίο $\mathbf{d}(\mathbf{H}_0)$ είναι η μέγιστη τιμή του $\mathbf{d}(\mathbf{H})$ για $\mathbf{H} \in \mathbf{X}$.

Βρείτε τις αντιστοιχίες της στήλης-I με της επιλογές της στήλης-II.

Στήλη-I	Στήλη-II
(P) Η τιμή του $\mathbf{d}(\mathbf{H}_0)$ είναι	(1) $\sqrt{3}$
(Q) Η απόσταση του σημείου $(0, 1, 2)$ από το επίπεδο $\mathbf{H}_0$ είναι	(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(R) Η απόσταση της αρχής των αξόνων από το $\mathbf{H}_0$ είναι	(3) 0

(S) Η απόσταση της αρχής των αξόνων από το σημείο τομής των επιπέδων $y = z$, $x = 1$ και H_0 είναι	(4) $\sqrt{2}$
	(5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Η σωστή επιλογή είναι:

- (A) (P) $\rightarrow$ (2) (Q) $\rightarrow$ (4) (R) $\rightarrow$ (5) (S) $\rightarrow$ (1)
 (B) (P) $\rightarrow$ (5) (Q) $\rightarrow$ (4) (R) $\rightarrow$ (3) (S) $\rightarrow$ (1)
 (c) (P) $\rightarrow$ (2) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (3) (S) $\rightarrow$ (2)
 (D) (P) $\rightarrow$ (5) (Q) $\rightarrow$ (1) (R) $\rightarrow$ (4) (S) $\rightarrow$ (2)

Λύση

Αν η ευθεία l_2 τέμνει το επίπεδο H , τότε $d(H) = 0$, ενώ αν $l_2 // H$, τότε $d(H) = d(l_2, H) > 0$. Άρα το επίπεδο H_0 είναι το επίπεδο που είναι παράλληλο στην l_2 και οι ευθείες l_1 και l_2 είναι ασύμβατες. Έχω $\vec{r}_1 = \vec{a}_1 + \lambda \vec{u}$, με $\vec{a}_1 = (0, 0, 0)$, $\vec{u} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = (1, 1, 1)$ και $\vec{r}_2 = \vec{a}_2 + \mu \vec{v}$, με $\vec{a}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (\hat{i} + \hat{k}) = (1, 0, 1)$

Το τυχόν σημείο της ευθείας l_1 είναι το $A(\lambda, \lambda, \lambda)$ και της l_2 το $B(\mu, 1, \mu - 1)$. Άρα $\vec{AB} = (\mu - \lambda, 1 - \lambda, \mu - 1 - \lambda)$. Το $\vec{AB}$ θα είναι το κάθετο τμήμα στις δυο ασύμβατες

ευθείες, αν $\vec{AB} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \mu - \lambda + \mu - 1 - \lambda = 0, \mu - \lambda + 1 - \lambda + \mu - 1 - \lambda - 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \mu = 3/2$.

Άρα $\vec{AB} = (1/2, 0, -1/2) \Rightarrow d = |\vec{AB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα (P) $\rightarrow$ (5)

Έστω $\Gamma(x, y, z)$ σημείο του H_0 , τότε αφού το σημείο $A(1, 1, 1)$ είναι σημείο του H_0 και $\vec{AB}$ κάθετο στο επίπεδο H_0 , $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = 0 \Rightarrow 1/2(x - 1) - 1/2(z - 1) = 0 \Rightarrow H_0: x - z = 0$. Άρα η απόσταση του σημείου $(0, 1, 2)$ από το επίπεδο H_0 είναι $d((0, 1, 2), H_0) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Άρα (Q) $\rightarrow$ (4)

Το $(0, 0, 0)$ είναι σημείο του H_0 , άρα η απόσταση της αρχής των αξόνων από το επίπεδο H_0 είναι 0. Άρα (R) $\rightarrow$ (3)

Η τομή των επιπέδων $y = z$, $x = 1$ και $H_0: x - z = 0$ είναι το σημείο $(1, 1, 1)$. Άρα η απόσταση της αρχής των αξόνων από το σημείο αυτό είναι $d = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Άρα (S) $\rightarrow$ (1). Τελικά Β.

Αλλιώς το (P).

Η ελάχιστη απόσταση δυο ασύμβατων ευθειών δίνεται από τον τύπο $d = \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u} \times \vec{v})}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$. Έχω $\|\vec{u} \times \vec{v}\| =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |\vec{i} - \vec{k}| = \sqrt{2}, (\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1. \text{ Άρα } d = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ όπως πριν.}$$

Q.17

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός με $|z|^3 + 2z^2 + 4\bar{z} - 8 = 0$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής μιγαδικός του z . Έστω ότι το φανταστικό μέρος του z δεν είναι μηδέν.

Βρείτε τις αντιστοιχίες της στήλης-I με της επιλογές της στήλης-II.

Στήλη-I	Στήλη-II
(P) $ z ^2$ είναι ίσο με	(1) 12
(Q) $ z - \bar{z} ^2$ είναι ίσο με	(2) 4
(R) $ z ^2 + z + \bar{z} ^2$ είναι ίσο με	(3) 8
(S) $ z + 1 ^2$ είναι ίσο με	(4) 10

Η σωστή επιλογή είναι:

- (A) $(P) \rightarrow (1) (Q) \rightarrow (3) (R) \rightarrow (5) (S) \rightarrow (4)$
 (B) $(P) \rightarrow (2) (Q) \rightarrow (1) (R) \rightarrow (3) (S) \rightarrow (5)$
 (C) $(P) \rightarrow (2) (Q) \rightarrow (4) (R) \rightarrow (5) (S) \rightarrow (1)$
 (D) $(P) \rightarrow (2) (Q) \rightarrow (3) (R) \rightarrow (5) (S) \rightarrow (4)$

Λύση

Έχω $|z|^3 + 2z^2 + 4\bar{z} - 8 = 0$. Παίρνοντας τα συζυγή έχω $|z|^3 + 2\bar{z}^2 + 4z - 8 = 0$.

Με αφαίρεση κατά μέλη έχω $2(z^2 - \bar{z}^2) + 4(\bar{z} - z) = 0 \Rightarrow 2(z - \bar{z})(z + \bar{z}) - 4(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow 2(z - \bar{z})(z + \bar{z} - 2) = 0 \Rightarrow (z - \bar{z}) = 0$ ή $z + \bar{z} - 2 = 0 \Rightarrow$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ απορρίπτεται αφού το φανταστικό μέρος του z είναι διαφορετικό του 0.

Η $z + \bar{z} = 2$. Τότε, αν $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow z = 1 + yi$.

Με αντικατάσταση στην αρχική εξίσωση έχω: $(1 + y^2)^{3/2} + 2(1 - y^2 + 2iy) + 4(1 - iy) - 8 = 0 \Rightarrow (1 + y^2)^{3/2} = 2(1 + y^2) \Rightarrow \sqrt{1 + y^2} = 2 = |z|$. Άρα $|z|^2 = 4$. Άρα $(P) \rightarrow (2)$

Έχω $\sqrt{1 + y^2} = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow z = 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow z - \bar{z} = \pm 2i\sqrt{3} \Rightarrow |z - \bar{z}| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |z - \bar{z}|^2 = 12$. Άρα $(Q) \rightarrow (1)$

Έχω $|z|^2 + |z + \bar{z}|^2 = 4 + 2^2 = 8$. Άρα $(R) \rightarrow (3)$

Τέλος, $|z + 1|^2 = |2 + \pm\sqrt{3}i|^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 = 7$. Άρα $(S) \rightarrow (5)$. Τελικά B

END OF THE QUESTION PAPER

JEE(Advanced) 2023 Paper 2 Mathematics

Q.1 Έστω $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(1) = \frac{1}{3}$ και $3 \int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{x^3}{3}, x \in [1, \infty)$. Έστω e η βάση του φυσικού λογαρίθμου. Τότε η τιμή του $f(e)$ είναι

- (A) $\frac{e^2+4}{3}$ (B) $\frac{\log_e 4+e}{3}$ (C) $\frac{4e^2}{3}$ (D) $\frac{e^2-4}{3}$

Λύση

Έχω μετά από παραγώγιση ότι $3f(x) = f(x) + xf'(x) - x^2 \Rightarrow 2f(x) - xf'(x) = -x^2 \Rightarrow -2\frac{f(x)}{x^3} + \frac{f'(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = (\ln x)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c \xrightarrow{f(1)=1/3} c = 1/3 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \ln x + 1/3 \Rightarrow \frac{f(e)}{e^2} = \ln e + 1/3 = 4/3 \Rightarrow f(e) = \frac{4e^2}{3}$. Άρα C.

Q.2 Σκεφτείτε ένα πείραμα επαναλαμβανόμενης ρίψης ενός νομίσματος μέχρι τα αποτελέσματα δύο διαδοχικών ρίψεων να είναι ίδια. Εάν η πιθανότητα ρίψης κορώνας είναι $\frac{1}{3}$, τότε, η πιθανότητα να σταματήσει το πείραμα με κορώνα είναι

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{21}$ (C) $\frac{4}{21}$ (D) $\frac{2}{7}$

Λύση

Έστω P_n η πιθανότητα να σταματήσει το πείραμα μετά από n συνολικά ρίψεις (με τις δύο τελευταίες ρίψεις να είναι κορώνα).

Έχω $P_2 = P(KK) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_4 = P(K\Gamma KK) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_6 = P(K\Gamma K\Gamma KK) = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_{2n} = P(K\Gamma K\Gamma \dots K\Gamma KK) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Όμοια $P_3 = P(\Gamma KK) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_5 = P(\Gamma K\Gamma KK) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_7 = P(\Gamma K\Gamma K\Gamma KK) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P_{2n+1} = P(\Gamma K\Gamma K\Gamma \dots K\Gamma KK) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Άρα η συνολική πιθανότητα είναι

$$p = \sum_{n=\text{άρτιος}} P_n + \sum_{n=\text{περιττός}} P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$$
. Άρα B

Q.3 Για $y \in \mathbb{R}$, έστω $\cot^{-1}(y) \in (0, \pi)$ και $\tan^{-1}(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Τότε το άθροισμα όλων των ριζών της εξίσωσης $\tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{9-y^2}{6y}\right) = \frac{2\pi}{3}$ για $0 < |y| < 3$, είναι ίσο με

- (A) $2\sqrt{3} - 3$ (B) $3 - 2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3} - 6$ (D) $6 - 4\sqrt{3}$

Λύση

Ισχύει ότι $\cot^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right), y > 0$ και $\cot^{-1}(y) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{y}\right), y < 0$

Άρα για $0 < y < 3$, η εξίσωση γίνεται $2 \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Άρα $\frac{6y}{9-y^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}y^2 + 6y - 9\sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ ή $y = -3\sqrt{3}$ απορρίπτεται.

Άρα για $-3 < y < 0$, η εξίσωση γίνεται $2 \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) + \pi = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{6y}{9-y^2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Άρα $\frac{6y}{9-y^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y^2 - 6\sqrt{3}y - 9 = 0 \Rightarrow y = 3\sqrt{3} \pm 6 \xrightarrow{y < 0} y = 3\sqrt{3} - 6$

Άρα το άθροισμα των ριζών είναι $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6 = 4\sqrt{3} - 6$ Άρα C

Q.4 Έστω τα διανύσματα θέσης των σημείων P, Q, R και S είναι $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{c} = \frac{17}{5}\hat{i} + \frac{16}{5}\hat{j} + 7\hat{k}$ και $\vec{d} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, αντίστοιχα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

(A) Τα σημεία P, Q, R και S ΔΕΝ είναι συνεπίπεδα

(B) $\frac{\vec{b}+2\vec{d}}{3}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου που διαιρεί εσωτερικά το τμήμα PR με λόγο 5: 4

(C) $\frac{\vec{b}+2\vec{d}}{3}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου που διαιρεί εξωτερικά το τμήμα PR με λόγο 5: 4

(D) Το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος $\vec{b} \times \vec{d}$ ισούται με 95

Λύση

$$\text{Έχω } \overrightarrow{PQ} = (2, 4, 8), \overrightarrow{PR} = (2, 4, 1, 2, 1, 2), \overrightarrow{PS} = (1, -1, 6).$$

$$\text{Έχω } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2.4 & 1.2 & 12 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1.2 & 12 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2.4 & 12 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 32 * 1.2 - 8 * 1.2 - 24 * 1.2 = 0, \text{ άρα}$$

τα σημεία P, Q, R και S είναι συνεπίπεδα άρα Α ψευδής.

$$\text{Έστω } \vec{e} = \frac{\vec{b}+2\vec{d}}{3} = \frac{7\vec{i}+8\vec{j}+5\vec{k}}{3}.$$

$$\text{Έχω ότι } \overrightarrow{PE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{ER} \Leftrightarrow (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{20}{3}) = \frac{5}{4}(\frac{17}{5} - \frac{7}{3}, \frac{16}{5} - \frac{8}{3}, 7 - \frac{5}{3}) \Leftrightarrow (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{20}{3}) = \frac{5}{4}(\frac{16}{15}, \frac{8}{15}, \frac{16}{3}) \text{ ισχύει. Άρα Β και όχι C.}$$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow \|\vec{b} \times \vec{d}\|^2 = 3^2 + 3^2 + 9^2 = 99. \text{ άρα όχι D. Τελικά Β.}$$

Αλλιώς το D,

$$\|\vec{b} \times \vec{d}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 \|\vec{d}\|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{d})^2 = (9 + 36 + 9)(4 + 1 + 1) - (6 + 6 + 3)^2 = 54 \times 6 - (15)^2 = 324 - 225 = 99 \text{ όπως πριν.}$$

Q.5 Έστω $M = (a_{ij})$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, ένας 3×3 πίνακας τέτοιος ώστε $a_{ij} = 1$ αν ο $j + 1$ διαιρείται από τον i , αλλιώς $a_{ij} = 0$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής/θεις;

(A) M είναι αντιστρέψιμος

(B) Υπάρχει μη μηδενικός πίνακας στήλη $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε $M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

(C) Το σύνολο $\{X \in \mathbb{R}^3 : MX = 0\} \neq \{0\}$, όπου $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) Ο πίνακας $(M - 2I)$ αντιστρέφεται, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3

Λύση

$$\text{Έχω } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ με } |M| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ Άρα μη αντιστρέψιμος. Α Ψευδής.}$$

$$\text{Έχω } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -a_3 \text{ άρα υπάρχουν άπειροι μη}$$

μηδενικοί πίνακες της μορφής $a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 \neq 0$. Β αληθής.

$$\text{Έχω } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = 0, a_1 = -a_3 \text{ άρα υπάρχουν άπειροι πίνακες της}$$

μορφής $a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 \neq 0$. C αληθής.

$$\text{Έχω } M - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ με } |M - 2I| = 0 \text{ άρα όχι D.}$$

Άρα Β, C.

Q.6 Έστω $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(x) = [4x] \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$, όπου $[x]$ συμβολίζει τον μέγιστο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με x . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής/θεις;

(A) Η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ακριβώς ένα σημείο στο διάστημα $(0, 1)$

(B) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο στο $(0, 1)$ όπου η συνάρτηση f είναι συνεχής αλλά ΟΧΙ παραγωγίσιμη

(C) Η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη σε παραπάνω από τρία σημεία του $(0, 1)$

(D) Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $-\frac{1}{512}$

Λύση

$$\text{Έχω } [4x] = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < x < \frac{1}{4} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 3 & \text{αν } \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{άρα } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < x < \frac{1}{4} \\ (x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 3(x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} f(x) = f(\frac{1}{4}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = f(\frac{1}{2}) = 0, \quad \text{ενώ } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} f(x) = \frac{1}{8} \neq \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} f(x) = \frac{3}{16}.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι ασυνεχής μόνο στο $x = \frac{3}{4}$. Άρα Α αληθής.

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{0}{x - \frac{1}{4}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{(x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{4}} = 0, \quad \text{άρα στο } x = \frac{1}{4} \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη.

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{16}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2(x - \frac{1}{4})^2(x - \frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}, \quad \text{άρα στο } x =$$

$\frac{1}{2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη, αν και συνεχής. Άρα Β αληθής.

Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x = \frac{3}{4}$ (λόγω ασυνέχειας) και $x = \frac{1}{2}$ (όπως ήδη δείξαμε).

Στο σημείο $x = \frac{1}{4}$ είναι παραγωγίσιμη όπως ήδη δείξαμε και στα υπόλοιπα σημεία είναι παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυωνυμική. Άρα C ψευδής.

Έχω

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 2(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{4})^2 & \text{αν } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 4(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 2(x - \frac{1}{4})^2 & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ 6(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 3(x - \frac{1}{4})^2 & \text{αν } \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ (x - \frac{1}{4})[2x - 1 + x - \frac{1}{4}] & \text{αν } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 4(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 2(x - \frac{1}{4})^2 & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ 6(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 3(x - \frac{1}{4})^2 & \text{αν } \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{αν } 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 3(x - \frac{1}{4})[x - \frac{5}{12}] & \text{αν } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 4(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 2(x - \frac{1}{4})^2 > 0 & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \\ 6(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2}) + 3(x - \frac{1}{4})^2 > 0 & \text{αν } \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases} \quad \text{Άρα ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος:}$$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f'(x)$		0	-	0	+	+
$f(x)$		0	$-\frac{1}{432}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$

T.E.

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο την $f(\frac{5}{12}) = -\frac{1}{432}$. Άρα D ψευδής.

Άρα Α,Β.

Q.7 Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο των δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων f από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\frac{d^2f}{dx^2}(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Για $f \in \mathcal{S}$, έστω X_f το πλήθος των σημείων $x \in (-1, 1)$ για τα οποία $f(x) = x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής/θείς;

- (A) Υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{S}$ τέτοια ώστε $X_f = 0$
 (B) Για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{S}$, έχουμε $X_f \leq 2$
 (C) Υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{S}$ τέτοια ώστε $X_f = 2$
 (D) Δεν υπάρχει συνάρτηση f στο $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε $X_f = 1$

Λύση

Έχω $\frac{d^2f}{dx^2}(x) > 0$ άρα f κυρτή.

Έστω $f(x) = e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x \in (-1, 1)$. Οπότε η $f(x) = x$ είναι αδύνατη, άρα $X_f = 0$. Άρα Η Α αληθής.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει 3 διαφορετικές ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, με $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$, $g'(x) = f'(x) - 1$, $g''(x) = f''(x) > 0$. Από θεώρημα Rolle στα διαστήματα (x_1, x_2) , (x_2, x_3) υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 < x_2 < \xi_2$ με $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ και συνεπώς στο διάστημα (ξ_1, ξ_2) υπάρχει ξ με $g''(\xi) = 0$ άτοπο. Άρα υπάρχουν το πολύ 2 ρίζες. Β αληθές.

Γ αληθής. Π.χ $f(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ με $f''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$

Δ ψευδής. $f(x) = e^x - x - 1$ με $f''(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και μοναδική ρίζα η $x = 0$. Άρα Α, Β, Γ.

Q.8 Για $x \in \mathbb{R}$, έστω $\tan^{-1}(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Τότε το ελάχιστο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) =$

$$\int_0^{x \tan^{-1} x} \frac{e^{(t - \cos t)}}{1 + t^{2023}} dt \text{ είναι } \underline{\hspace{2cm}}$$

Λύση

Έχω $x \tan^{-1} x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως γινόμενο ομόσημων.

$$\text{Ακόμα } f'(x) = \frac{e^{x \tan^{-1} x - \cos(x \tan^{-1} x)}}{1 + (x \tan^{-1} x)^{2023}} \cdot (x \tan^{-1} x)' = \frac{e^{x \tan^{-1} x - \cos(x \tan^{-1} x)}}{1 + (x \tan^{-1} x)^{2023}} \cdot \left(\frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x \right).$$

Με $e^{x \tan^{-1} x - \cos(x \tan^{-1} x)} > 0$ ως εκθετική, $1 + (x \tan^{-1} x)^{2023} > 0$ αφού $x \tan^{-1} x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x = \begin{cases} > 0 & \text{αν } x > 0 \\ < 0 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Άρα η $f \downarrow (-\infty, 0]$ και $f \uparrow [0, +\infty)$ δηλαδή έχει ελάχιστο το $\boxed{f(0) = 0}$.

Q.9 Για $x \in \mathbb{R}$, έστω $y(x)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $(x^2 - 5) \frac{dy}{dx} - 2xy = -2x(x^2 - 5)^2$ τέτοια ώστε $y(2) = 7$.

Τότε το μέγιστο της συνάρτησης $y(x)$ είναι _____

Λύση

$$\text{Έχω } (x^2 - 5) \frac{dy}{dx} - 2xy = -2x(x^2 - 5)^2 \Rightarrow \frac{(x^2 - 5)y' - 2xy}{(x^2 - 5)^2} = -2x \Rightarrow \left(\frac{y}{(x^2 - 5)} \right)' = (-x^2)' \Rightarrow \frac{y}{(x^2 - 5)} = -x^2 + c$$

$$\xrightarrow{y(2)=7} \frac{7}{-1} = -4 + c \Rightarrow c = -3. \text{ Άρα } \frac{y}{(x^2 - 5)} = -x^2 - 3 \Rightarrow y = (-x^2 - 3)(x^2 - 5) \xrightarrow{\theta \acute{\epsilon}\tau\omega \omega = x^2} y = -(\omega + 3)(\omega - 5)$$

παραβολή με μέγιστο για $\omega = \frac{-3+5}{2} = 1$ άρα $\max(y) = -(1+3)(1-5) \Rightarrow \boxed{\max(y) = 16}$ όταν $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Q.10 Έστω X το σύνολο όλων των 5-ψηφίων αριθμών που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 2, 2, 4, 4, 0. Για παράδειγμα, ο 22240 ανήκει στο X ενώ οι 00244 και 44422 δεν ανήκουν στο X . Υποθέστε ότι κάθε στοιχείο του X είναι ισοπίθανο να επιλεγθεί. Έστω p η δεσμευμένη πιθανότητα ένα στοιχείο που επιλέγεται τυχαία να είναι πολλαπλάσιο του 20 δεδομένου ότι είναι πολλαπλάσιο του 5. Τότε η τιμή του $38p$ ισούται με _____

Λύση

Αν ο επιλεγμένος αριθμός είναι πολλαπλάσιος του 5 τότε το ψηφίο των μονάδων του είναι αναγκαστικά το 0, αφού το ψηφίο 5 δεν χρησιμοποιείται. Αν είναι πολλαπλάσιο του 20, τότε τα τελευταία δύο ψηφία είναι 20 ή 40. Για το πλήθος των διακριτών αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 5, έχω να επιλέξω 4 ψηφία από τα 6 ψηφία (1,2,2,2,4,4) Άρα έχω

- αν πάρω τα ψηφία (1,2,2,2) έχω $\frac{4!}{3!1!} = 4$ συνδυασμούς,
- αν πάρω τα ψηφία (1,2,2,4) έχω $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ συνδυασμούς,
- αν πάρω τα ψηφία (1,2,4,4) έχω $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ συνδυασμούς,
- αν πάρω τα ψηφία (2,2,2,4) έχω $\frac{4!}{3!1!} = 4$ συνδυασμούς,
- αν πάρω τα ψηφία (2,2,4,4) έχω $\frac{4!}{2!2!} = 6$ συνδυασμούς, σύνολο $4 + 12 + 12 + 4 + 6 = 38$ συνδυασμούς.

Αν τα δυο τελευταία ψηφία είναι 10 τότε ο επιλεγμένος αριθμός δεν είναι πολλαπλάσιο του 20. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχω να επιλέξω 3 από τα εξής 5 ψηφία (2,2,2,4,4) με τους εξής συνδυασμούς: (2,2,2) με έναν τρόπο, (2,2,4) με τρεις τρόπους, (2,4,4) με τρεις τρόπους, σύνολο 7 περιπτώσεις που ο αριθμός τελειώνει σε 10. Οι υπόλοιποι $38 - 7 = 31$ συνδυασμοί δίνουν πολλαπλάσιο του 20, άρα $38p = 38 \frac{31}{38} =$

31

Q.11 Έστω $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ οι κορυφές ενός κανονικού οκταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 2. Έστω P ένα σημείο του κύκλου και έστω PA_i οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων P και A_i με $i = 1, 2, \dots, 8$. Αν το P κινείται στον κύκλο, τότε η μέγιστη τιμή του γινομένου $PA_1 \cdot PA_2 \cdot \dots \cdot PA_8$, είναι _____

Λύση

Από νόμο συνημιτόνων έχω

$$PA_1^2 = OA_1^2 + PO^2 - 2OA_1PO \cos \varphi = 8 - 8 \cos \varphi.$$

$$PA_2^2 = OA_2^2 + PO^2 - 2OA_2PO \cos(\varphi + 45^\circ) = 8 - 8 \cos(\varphi + 45^\circ).$$

Όμοια

$$PA_k^2 = OA_k^2 + PO^2 - 2OA_kPO \cos(\varphi + 45^\circ(k-1)) = 8 - 8 \cos(\varphi + 45^\circ(k-1)), k = 1, 2, \dots, 8$$

Άρα

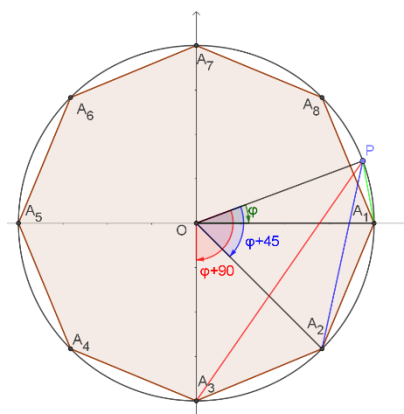
$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^8 PA_k^2 &= \prod_{k=1}^8 [8 - 8 \cos(\varphi + 45^\circ(k-1))] = \\ &= 8^8 (1 - \cos \varphi)(1 - \cos(\varphi + 45^\circ))(1 - \cos(\varphi + 90^\circ))(1 - \cos(\varphi + 135^\circ)) \\ &\quad (1 - \cos(\varphi + 180^\circ))(1 - \cos(\varphi + 225^\circ))(1 - \cos(\varphi + 270^\circ))(1 - \cos(\varphi + 315^\circ)) = \\ &= 8^8 (1 - \cos \varphi)(1 - \cos(\varphi + 45^\circ))(1 + \sin \varphi)(1 + \sin(\varphi + 45^\circ)) \\ &\quad (1 + \cos \varphi)(1 + \cos(\varphi + 45^\circ))(1 - \sin \varphi)(1 - \sin(\varphi + 45^\circ)) = \\ &= 8^8 (1 - \cos^2 \varphi)(1 - \cos^2(\varphi + 45^\circ))(1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2(\varphi + 45^\circ)) = \\ &= 8^8 (\sin^2 \varphi)(\sin^2(\varphi + 45^\circ))(\cos^2 \varphi)(\cos^2(\varphi + 45^\circ)) = \\ &= 8^8 \frac{(\sin^2 2\varphi)}{4} \frac{(\sin^2(2\varphi + 90^\circ))}{4} = \end{aligned}$$

$$8^8 \frac{(\sin^2 2\varphi)}{4} \frac{(\cos^2 2\varphi)}{4} = 8^8 \frac{\sin^2 4\varphi}{16} = 8^8 \frac{\sin^2 4\varphi}{64} = 8^6 \sin^2 4\varphi \leq 8^6 \text{ με την ισότητα να ισχύει για } \varphi = 45^\circ, \text{ άρα } \prod_{k=1}^8 PA_k \leq \sqrt{8^6} = 8^3 = \boxed{512}$$

Q.12 Έστω $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3 & b \\ c & 2 & d \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \right\}$. Τότε το πλήθος των αντιστρέψιμων

πινάκων του R είναι _____

Λύση



Έχω $|R| = 5(ad - bc)$. Για να είναι αντιστρέψιμος πρέπει $|R| \neq 0 \Leftrightarrow ad \neq bc$

Για καθένα από τα στοιχεία a, b, c, d έχω 8 επιλογές, άρα συνολικά έχω $8^4 = 2^{12} = 4096$ διαφορετικούς πίνακες R .

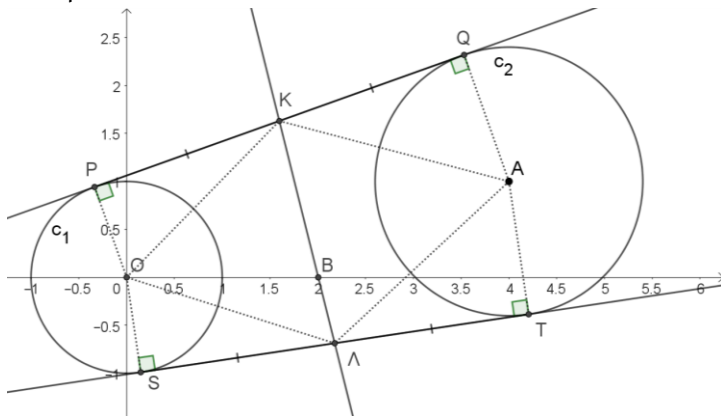
Θ' αφαιρέσω τους μη αντιστρέψιμους πίνακες, δηλαδή όσους έχουν $|R| = 0$.

- Αν $a = b = c = d = 0$, έχω 1 συνδυασμό.
- Αν ακριβώς τρία από τα στοιχεία a, b, c, d είναι μηδέν, τότε έχω 7 επιλογές για το μη μηδενικό στοιχείο επί $\binom{4}{3} = 4$ επιλογές για τα μηδενικά στοιχεία, δηλαδή 28 συνδυασμούς.
- Αν ένα ακριβώς στοιχείο από τα δυο μέλη της ισότητας $ad = bc$ είναι μηδέν (π.χ. $a = b = 0$ ή $a = c = 0$), έχω $7 \times 7 = 49$ επιλογές. Άρα συνολικά $\binom{2}{1}\binom{2}{2} \times 49 = 4 \times 49 = 196$ συνδυασμούς.
- Αν δεν έχω μηδενικά, τότε για να έχω $ad = bc$ θα πρέπει είτε $a = b = c = d \neq 0$ (7 συνδυασμοί) ή $a = b \neq c = d$ ($7 \times 6 = 42$ συνδυασμοί) ή $a = c \neq d = b$ ($7 \times 6 = 42$ συνδυασμοί), συνολικά $7 + 42 + 42 = 91$ συνδυασμοί.

Άρα έχουμε $4096 - 1 - 28 - 196 - 91 = \boxed{3780}$ αντιστρέψιμους πίνακες.

Q.13 Έστω C_1 κύκλος ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων. Έστω C_2 κύκλος ακτίνας r με κέντρο το σημείο $A = (4, 1)$, όπου $1 < r < 3$. Δυο διακριτές κοινές εφαπτομένες PQ και ST των C_1 και C_2 σχεδιάζονται. Η εφαπτόμενη PQ εφάπτεται στον C_1 στο P και στον C_2 στο Q . Η εφαπτόμενη ST εφάπτεται στον C_1 στο S και στον C_2 στο T . Τα μέσα των τμημάτων PQ και ST βρίσκονται σε μια ευθεία που τέμνει τον x -άξονα στο σημείο B . Αν $AB = \sqrt{5}$, τότε η τιμή του r^2 είναι ____

Λύση



Έχω $AB = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(4 - x_B)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (4 - x_B)^2 + 1 = 5 \Rightarrow x_B = 2$ ή $x_B = 6$ απορρίπτεται.

Έχω $PK = KQ \Rightarrow PK^2 = KQ^2 \Rightarrow KO^2 - OP^2 = KA^2 - AQ^2 \Rightarrow KO^2 - 1 = KA^2 - r^2 \Rightarrow$

$(x_K - x_O)^2 + (y_K - y_O)^2 - 1 = (x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2 - r^2$. Όμοια για το Λ έχω

$$(x_\Lambda - x_O)^2 + (y_\Lambda - y_O)^2 - 1 = (x_\Lambda - x_A)^2 + (y_\Lambda - y_A)^2 - r^2$$

Άρα

η

ευθεία(!!!)

$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 - 1 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 - r^2$ περνά από τα σημεία K, Λ . (είναι εξίσωση ευθείας, καθώς οι δευτεροβάθμιοι όροι x^2, y^2 απαλείφονται).

Αφού η ευθεία περνά από το $B(2, 0)$ έχω $2^2 + 0^2 - 1 = (2 - 4)^2 + (0 - 1)^2 - r^2 \Rightarrow \boxed{r^2 = 2}$

Σημείωση: Η ευθεία $K\Lambda$ είναι ο ριζικός άξονας των δύο κύκλων, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των σημείων από τα οποία φέρουμε ίσα εφαπτόμενα τμήματα στους 2 κύκλους. Ο ριζικός άξονας περνά από τα μέσα των 4 κοινών εφαπτόμενων τμημάτων των δυο κύκλων και είναι κάθετος στη διάκεντρο των κύκλων. Η εξίσωση του ριζικού άξονα προκύπτει από την αφαίρεση των εξισώσεων των 2 κύκλων! Δηλαδή $K\Lambda: c_1 - c_2 = 0$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ "Γ",

Θεωρήστε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC στο οποίο η διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης γωνίας is $\frac{\pi}{2}$ και των οποίων οι πλευρές βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές αυτού του τριγώνου βρίσκονται σε έναν κύκλο ακτίνας 1.

(Υπάρχουν δύο ερωτήσεις που βασίζονται στην ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ "I", η ερώτηση που δίνεται παρακάτω είναι μία από αυτές)

Q.14 Έστω a το εμβαδόν του τριγώνου ABC Τότε η τιμή του $(64a)^2$ είναι ____

Λύση

Έστω $\hat{A}$ η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου και $\hat{B}$ η μικρότερη οπότε $\hat{A} = \hat{B} + \frac{\pi}{2}$ άρα $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B} = \frac{\pi}{2} - 2\hat{B}$. Αν O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου έχω από νόμο συνημιτόνων ότι $a^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos \widehat{BOC} = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos(2\hat{A}) = 2R^2(1 - \cos(2\hat{A})) = 4R^2 \sin^2(\hat{A}) \Rightarrow \boxed{a = 2R \sin(\hat{A})} = 2 \sin(\hat{A})$, όμοια $b = 2 \sin(\hat{B})$, $c = 2 \sin(\hat{C})$. Άρα $a = 2 \sin(\hat{A}) = 2 \sin(\hat{B} + \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(\hat{B})$, $c = 2 \sin(\frac{\pi}{2} - 2\hat{B}) = 2 \cos(2\hat{B})$. Αφού οι πλευρές $a > c > b$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει ότι $2c = a + b \Rightarrow 4 \cos(2\hat{B}) = 2 \cos(\hat{B}) + 2 \sin(\hat{B}) \Rightarrow 2(\cos(\hat{B}) + \sin(\hat{B}))(\cos(\hat{B}) - \sin(\hat{B})) = \cos(\hat{B}) + \sin(\hat{B})$
 $\xrightarrow{\cos(\hat{B}) + \sin(\hat{B}) > 0, \text{βοξεία}} 2(\cos(\hat{B}) - \sin(\hat{B})) = 1 \xrightarrow{\text{με ύψωση στο τετράγωνο}} 4(1 - 2\cos(\hat{B})\sin(\hat{B})) = 1 \Rightarrow \sin(2\hat{B}) = \frac{3}{4}$.

Οπότε $a = (ABC) = \frac{abc}{4R} = \frac{2\cos(\hat{B})2\sin(\hat{B})2\cos(2\hat{B})}{4R} = 2\cos(\hat{B})\sin(\hat{B})\cos(2\hat{B}) = \sin(2\hat{B})\cos(2\hat{B}) = \frac{3}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{4 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{7}}{16}$ Άρα $(64a)^2 = (12\sqrt{7})^2 = 144 \cdot 7 = \boxed{1008}$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ "I",

Θεωρήστε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ABC στο οποίο η διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης γωνίας is $\frac{\pi}{2}$ και των οποίων οι πλευρές βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές αυτού του τριγώνου βρίσκονται σε έναν κύκλο ακτίνας 1.

(Υπάρχουν δύο ερωτήσεις που βασίζονται στην ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ "I", η ερώτηση που δίνεται παρακάτω είναι μία από αυτές)

Q.15 Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC είναι ____

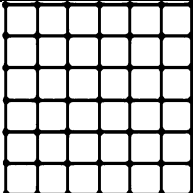
Λύση

Έχω χρησιμοποιώντας τις κόκκινες σχέσεις από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$\rho = \frac{(ABC)}{\tau} = \frac{\sin(2\hat{B})\cos(2\hat{B})}{\cos(\hat{B}) + \sin(\hat{B}) + \cos(2\hat{B})} = \frac{\sin(2\hat{B})\cos(2\hat{B})}{3\cos(2\hat{B})} = \frac{\sin(2\hat{B})}{3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ "II"

Έστω το 6×6 τετράγωνο του σχήματος. Έστω $A_1, A_2, \dots, A_{49}$ τα σημεία τομής (τελίτσες στην εικόνα) με κάποια σειρά. Θα λέμε ότι τα σημεία A_i και A_j είναι φιλικά εάν είναι δίπλα κατά μήκος μιας σειράς ή κατά μήκος μιας στήλης. Ας υποθέσουμε ότι κάθε σημείο A_i έχει ίσες πιθανότητες επιλογής.



(Υπάρχουν δύο ερωτήσεις που βασίζονται στην ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ "II", η ερώτηση που δίνεται παρακάτω είναι μία από αυτές)

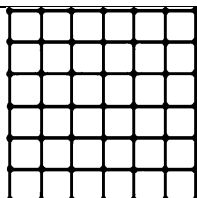
Q.16 Έστω p_i η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο να έχει i φίλους, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε για $i = 0, 1, 2, 3, 4$, η πιθανότητα $P(X = i) = p_i$. Τότε η τιμή του $7E(X)$ είναι ____

Λύση

Έχουμε $7 \times 7 = 49$ σημεία στο τετράγωνο. Τα $5 \times 5 = 25$ εσωτερικά σημεία έχουν από 4 φίλους, ενώ τα 4 γωνιακά σημεία από 2 φίλους. Τα υπόλοιπα 20 πλευρικά σημεία έχουν από 3 φίλους. Άρα $E(x) = \sum_{i=0}^4 x_i P_i = 0 + 0 + \frac{2 \cdot 4}{49} + \frac{3 \cdot 20}{49} + \frac{4 \cdot 25}{49} = \frac{168}{49}$. Άρα $7E(X) = \frac{168}{7} = \boxed{24}$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ "II"

Έστω το 6×6 τετράγωνο του σχήματος. Έστω $A_1, A_2, \dots, A_{49}$ τα σημεία τομής (τελίτσες στην εικόνα) με κάποια σειρά. Θα λέμε ότι τα σημεία A_i και A_j είναι φιλικά εάν είναι δίπλα κατά μήκος μιας σειράς ή κατά μήκος μιας στήλης. Ας υποθέσουμε ότι κάθε σημείο A_i έχει ίσες πιθανότητες επιλογής.



(Υπάρχουν δύο ερωτήσεις που βασίζονται στην ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ "II", η ερώτηση που δίνεται παρακάτω είναι μία από αυτές)

Q.17 Δυο διακριτά σημεία επιλέγονται τυχαία από τα σημεία $A_1, A_2, \dots, A_{49}$. Έστω p η πιθανότητα να είναι φιλικά. Τότε η τιμή του $7p$ είναι ____

Λύση

Έχω

$$\begin{aligned}
 p &= \text{πιθανότητα το πρώτο να είναι γωνιακό και το δεύτερο φίλος του} \\
 &+ \text{πιθανότητα το πρώτο να είναι πλευρικό και το δεύτερο φίλος του} \\
 &+ \text{πιθανότητα το πρώτο να είναι εσωτερικό και το δεύτερο φίλος του} \\
 &= \frac{4}{49} \frac{2}{48} + \frac{20}{49} \frac{3}{48} + \frac{25}{49} \frac{4}{48} = \frac{168}{49 \cdot 48} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8}{49 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{1}{14} \Rightarrow 7p = \boxed{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

[Πηγές]

[Ινδία - Βικιπαίδεια \(wikipedia.org\)](https://el.wikipedia.org)

[Education in India: A Detailed Analysis \(unacademy.com\)](https://unacademy.com/content/bank-exam/study-material/general-awareness/education-in-india-a-detailed-analysis/)

<https://unacademy.com/content/bank-exam/study-material/general-awareness/education-in-india-a-detailed-analysis/>

<https://www.gnu.org/education/edu-system-india.el.html>

[Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ινδία - Έργο GNU - Ίδρυμα Ελεύθερου Λογισμικού](https://www.gnu.org/education/edu-system-india.el.html)

<https://www.gnu.org/education/edu-system-india.el.html>

[Importance of Education in India | Leverage Edu](https://leverageedu.com/blog/importance-of-education-in-india/)

<https://leverageedu.com/blog/importance-of-education-in-india/>

[Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ινδία εν συντομία. Εκπαιδευτικό σύστημα στην Ινδία \(goaravetisyan.ru\)](https://goaravetisyan.ru/education-in-india/)

[JEE Main Exam 2024 - Dates \(Out\), Registration \(Started\), Syllabus, Exam Pattern, Preparation, Question Paper, Eligibility, Admission Process \(careers360.com\)](https://careers360.com/exams/jeemain/)

<https://engineering.careers360.com/exams/jeemain/>