[Εισαγωγή]

Η Ιαπωνία (日本 Nihon) είναι συνταγματική μοναρχία με κοινοβουλευτική κυβέρνηση. Έχει έναν αυτοκράτορα που ενεργεί αποτελεσματικά ως αρχηγός κράτους και η πρωτεύουσά της είναι το Τόκιο. Η Ιαπωνία αποτελείται από περίπου 3.900 νησιά και χωρίζεται σε 47 νομούς που υποδιαιρούνται σε πόλεις και χωριά.

[Το ιαπωνικό εκπαιδευτικό σύστημα]

Το ιαπωνικό εκπαιδευτικό σύστημα επηρεάστηκε τόσο από το γερμανικό εκπαιδευτικό σύστημα (σχολές) όσο και από το σύστημα των ΗΠΑ (ευρεία γενική εκπαίδευση στα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης). Από τη δεκαετία του 1980, η Ιαπωνία έχει επικεντρωθεί στη διεθνοποίηση της τριτοβάθμιας εκπαίδευσής της. Οι διεθνείς φοιτητές που σπουδάζουν στην Ιαπωνία έπρεπε προηγουμένως να ολοκληρώσουν ένα τεστ ιαπωνικής γλώσσας, καθώς όλη η εκπαίδευση παρεχόταν αποκλειστικά στα ιαπωνικά. Η κατάσταση αυτή αλλάζει επί του παρόντος, με έναν σταδιακά αυξανόμενο αριθμό προγραμμάτων σπουδών που προσφέρονται στα αγγλικά, λόγω των πρόσφατων στρατηγικών διεθνοποίησης τόσο σε κυβερνητικό όσο και σε πανεπιστημιακό επίπεδο.

[Secondary education]

Η πρωτοβάθμια εκπαίδευση ακολουθείται από τις 3 χαμηλότερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (κατώτερη εκπαίδευση) στα κατώτερα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (中学校 chugakko, επίσης γνωστό ως γυμνάσιο). Το πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από τα ακόλουθα μαθήματα: ιαπωνικά, κοινωνικές σπουδές, μαθηματικά, επιστήμη, μουσική, τέχνες, φυσική αγωγή, βιομηχανικές τέχνες και οικιακή εργασία, ξένη γλώσσα, μαθήματα επιλογής και ηθική εκπαίδευση. Αυτή είναι μια σημαντική περίοδος για τους Ιάπωνες μαθητές, καθώς τα σχολικά τους αποτελέσματα καθορίζουν εάν θα γίνουν δεκτοί σε ένα καλό λύκειο στις 3 ανώτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (高等学校 kotogakko). Μετά την ολοκλήρωση του Γυμνασίου, οι μαθητές έχουν ολοκληρώσει την 9ετή υποχρεωτική εκπαίδευσή τους και λαμβάνουν το Απολυτήριο Γυμνασίου. Στη συνέχεια, οι περισσότεροι μαθητές επιλέγουν να δώσουν εισαγωγικές εξετάσεις στο γυμνάσιο. Όσον αφορά τις εξετάσεις νομαρχιακού / δημοτικού λυκείου, το περιεχόμενο αυτής της εξέτασης διεξάγεται από το νομαρχιακό / δημοτικό συμβούλιο εκπαίδευσης στο οποίο το δημόσιο ανώτερο γυμνάσιο υπάγεται.

Οι μαθητές δίνουν τελικές εξετάσεις σε 5 μαθήματα: ιαπωνικά, μαθηματικά, κοινωνικές σπουδές, θετικές επιστήμες και αγγλικά. Όσο υψηλότερη είναι η τελική βαθμολογία τους, τόσο περισσότερες πιθανότητες έχουν να γίνουν δεκτοί σε ένα καλό λύκειο και στη συνέχεια να γίνουν δεκτοί σε ένα καλό πανεπιστήμιο. Οι 3 ανώτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ή ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θεωρούνται γενικά ως η πιο επίπονη σχολική περίοδος (ηλικιακή κατηγορία 15 έως 18) και παρέχονται από γυμνάσια (高等学校 kotogakko). Το πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από τα ακόλουθα μαθήματα: ιαπωνικά, γεωγραφία και ιστορία, πολιτική, μαθηματικά, επιστήμη (συμπεριλαμβανομένης της φυσικής, της χημείας, της βιολογίας και της επιστήμης της γης), υγεία, τέχνες, ξένη γλώσσα (αγγλικά), νοικοκυριό, τεχνολογία πληροφοριών και γενικές σπουδές. Για να ολοκληρώσει τις ανώτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ένας μαθητής πρέπει να αποκτήσει τουλάχιστον 74 μονάδες, μετά τις οποίες θα λάβει το Πιστοποιητικό Αποφοίτησης (卒業証明書 Sotsugyoshomeisho). Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, οι περισσότεροι μαθητές παρακολουθούν ένα σχολείο cram (juku), όπου λαμβάνουν πρόσθετα μαθήματα σχετικά με το διδακτικό υλικό που εξετάζουν. Το juku χρησιμεύει επίσης ως προετοιμασία για τις εισαγωγικές εξετάσεις τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτές οι εξετάσεις διεξάγονται γενικά από τον Ιανουάριο έως τον Μάρτιο. Η επιτυχής ολοκλήρωση προσφέρει την ευκαιρία εισαγωγής στα πιο αναγνωρισμένα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Ιαπωνίας. Οι εισαγωγικές εξετάσεις έχουν σχεδιαστεί κυρίως για να αξιολογήσουν το γενικό ακαδημαϊκό επίπεδο των μαθητών κατά τη διαδικασία ολοκλήρωσης των τελικών ανώτερων τάξεων.

[EJU - Εξετάσεις για την εισαγωγή στο ιαπωνικό πανεπιστήμιο για διεθνείς φοιτητές]

Το EJU περιλαμβάνει τις ακόλουθες θεματικές εξετάσεις: Ιαπωνικά ως ξένη γλώσσα, Επιστήμη (Φυσική, Χημεία και Βιολογία), Ιαπωνία και Κόσμος και Μαθηματικά. Οι υποψήφιοι επιλέγουν ποιες θεματικές εξετάσεις θα λάβουν με βάση τις απαιτήσεις του ιαπωνικού πανεπιστημίου στο οποίο επιθυμούν να εισέλθουν. Η εξέταση είναι διαθέσιμη στα ιαπωνικά ή στα αγγλικά και οι υποψήφιοι μπορούν να ορίσουν, κατά τη στιγμή της αίτησης, τη γλώσσα εξέτασης που επιθυμούν να λάβουν μέρος (η εξέταση ιαπωνικά ως ξένη γλώσσα διεξάγεται μόνο στα ιαπωνικά). Σημειώστε ότι υπάρχουν ορισμένα πανεπιστήμια που βασίζουν την επιλογή των διεθνών φοιτητών κυρίως στις βαθμολογίες EJU. Δεν απαιτούν από τους διεθνείς φοιτητές να λάβουν μέρος στις εισαγωγικές εξετάσεις που διαχειρίζονται ο καθένας και αντ' αυτού προσφέρουν εισδοχή με βάση τις βαθμολογίες EJU, τους βαθμούς γυμνασίου και άλλα τέτοια κριτήρια. Σύμφωνα με αυτό το σύστημα, οι διεθνείς φοιτητές μπορούν να γίνουν δεκτοί για εισαγωγή στο πανεπιστήμιο της επιλογής τους χωρίς να χρειάζεται να ταξιδέψουν στην Ιαπωνία.

Η εξέταση για την εισαγωγή στα ιαπωνικά πανεπιστήμια για διεθνείς φοιτητές (EJU) χρησιμοποιείται για να αξιολογήσει εάν οι διεθνείς φοιτητές που επιθυμούν να σπουδάσουν σε προπτυχιακό επίπεδο σε πανεπιστήμια ή άλλα τέτοια ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα στην Ιαπωνία διαθέτουν τις δεξιότητες ιαπωνικής γλώσσας και τις βασικές ακαδημαϊκές ικανότητες που απαιτούνται για σπουδές σε αυτά τα ιδρύματα. Από το 2002, η EJU διεξάγεται δύο φορές το χρόνο (Ιούνιο και Νοέμβριο) στην Ιαπωνία και σε άλλες χώρες και περιοχές.

[Σκοπός της εξέτασης στα μαθηματικά]

Σκοπός αυτής της εξέτασης είναι να ελεγχθεί εάν οι μαθητές από άλλες χώρες έχουν τη βασική σχολική ικανότητα στα μαθηματικά που θεωρείται απαραίτητη για σπουδές σε προπτυχιακό επίπεδο σε ιαπωνικό πανεπιστήμιο.

[Ημερομηνίες εξετάσεων.]

Οι εξετάσεις διεξάγονται δύο φορές το χρόνο, τον Ιούνιο και τον Νοέμβριο, αρχής γενομένης από το 2002.

[Ταξινόμηση της εξέτασης]

Υπάρχουν δύο μαθήματα. Το μάθημα 1 απευθύνεται σε προπτυχιακές σχολές και τμήματα για τα οποία οι βασικές γνώσεις μαθηματικών θεωρούνται επαρκείς. Το μάθημα 2 είναι για προπτυχιακές σχολές και τμήματα για τα οποία τα μαθηματικά είναι πολύ σημαντικά.

[Scope of Questions]

Τα θέματα που καλύπτονται από την εξέταση είναι τα ακόλουθα.

・Η εξέταση του Μαθήματος 1(Βασικό) καλύπτει μόνο τις ενότητες 1 έως 6.

・Η εξέταση του Μαθήματος 2(Προχωρημένο) καλύπτει και τις 18 ενότητες.

Τα κεφάλαια καλύπτονται από τα εγχειρίδια που χρησιμοποιούνται στα ιαπωνικά γυμνάσια. Επιπλέον, θεωρείται ότι έχει κατακτηθεί το υλικό που καλύπτεται στα ιαπωνικά δημοτικά και γυμνάσια.

- Θεματικές Ενότητες

---

1. Αριθμοί και εξισώσεις-ανισώσεις
2. Συναρτήσεις δευτέρου βαθμού
3. Τριγωνομετρία
4. Συνδυαστική -πιθανότητες
5. Θεωρία αριθμών
6. Γεωμετρία – Στερεομετρία
7. Πολυωνυμικές εξισώσεις μιγαδικοί
8. Αναλυτική γεωμετρία γεωμετρικοί τόποι
9. Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
10. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
11. Οι έννοιες της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης
12. Ακολουθίες αριθμών – επαγωγή
13. Διανύσματα
14. Μιγαδικό επίπεδο
15. Τετραγωνικές Καμπύλες στο επίπεδο
16. Όρια
17. Διαφορικός λογισμός
18. Ολοκληρωτικός λογισμός

Εξετάσεις 2018 για την εισαγωγή στο ιαπωνικό πανεπιστήμιο για διεθνείς φοιτητές Mathematics (80 λεπτά.) [Course 1 (Basic), Course 2(Advanced)]

Το μάθημα- Course 1 βρίσκεται στις σελίδες 1-13 και το μάθημα- Course-2 βρίσκεται στις σελίδες 15-27.

Οδηγίες για το πώς να απαντήσετε στις ερωτήσεις

1. Πρέπει να σημειώσετε τις απαντήσεις σας στο φύλλο απαντήσεων με ένα μολύβι HB.

2. Κάθε γράμμα A, B, C, στις ερωτήσεις αντιπροσωπεύει έναν αριθμό (από το 0 έως το 9) ή το σύμβολο μείον (-) . Όταν σημειώνετε τις απαντήσεις σας, συμπληρώστε πλήρως το οβάλ για κάθε γράμμα στην αντίστοιχη σειρά του φύλλου απαντήσεων.

3. Μερικές φορές μια απάντηση όπως $\boxed{A}$ ή $\boxed{BC}$ χρησιμοποιούνται αργότερα στην ερώτηση. Σε μια τέτοια περίπτωση, το σύμβολο σκιάζεται όταν χρησιμοποιείται αργότερα, όπως $\boxed{A}$ or $\boxed{BC}$. Σημειώστε τα εξής:

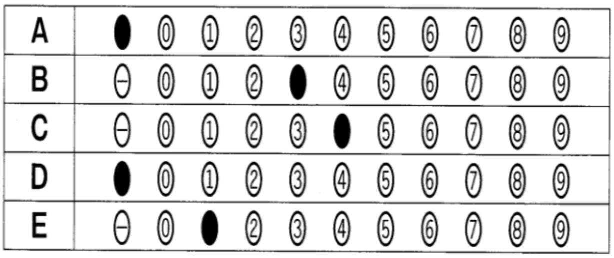
(1) Απλοποιήστε τις τετραγωνικές ρίζες ($\sqrt{}$) όσο γίνεται περισσότερο. (Παράδειγμα: Εκφράστε το $\sqrt{32}$ ως $4\sqrt{2}$, και όχι ως $2\sqrt{8}$ ή $\sqrt{32}$.)

(2) Για κλάσματα, βάλτε το σύμβολο μείον στον αριθμητή και ανάγετε το κλάσμα στους μικρότερους το δυνατόν όρους του. Παράδειγμα : Γράψτε το $\frac{1}{3}$ ως $\frac{2}{6}$ Απλοποιήστε επίσης ως εξής: $-\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{-2\sqrt{6}}{6} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$

και δώστε το $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ ως την απάντησή σας

(3) Αν η απάντηση στο $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ είναι $\frac{-\sqrt{3}}{4}$, σημειώστε όπως φαίνεται παρακάτω.

(4) Αν η απάντηση στο $\boxed{DE}$ είναι -1 , σημειώστε όπως φαίνεται παρακάτω



Mathematics Course 1

(Basic Course)

Q1 Ας εξετάσουμε την τετραγωνική συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a - 1)x + a},$$

όπου $\boldsymbol{a}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

(1) Οι συντεταγμένες της κορυφής του γραφήματος $\boldsymbol{y = f(x)}$ είναι $(\boxed{A}\,\boldsymbol{a} - \boxed{B}, -\boxed{C}\,\boldsymbol{a^2} + \boxed{D}\,\boldsymbol{a} - \boxed{E})$.

(2) Οι τιμές του $\boldsymbol{a}$ ώστε το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$ και ο άξονας των $\boldsymbol{x}$ να τέμνονται σε δυο διαφορετικά σημεία, Α και **B**, είναι $\boldsymbol{a} < \frac{\boxed{F}}{\boxed{G}}$ ή $\boxed{H} < \boldsymbol{a}$.

(3) Οι τιμές του $\boldsymbol{a}$ ώστε οι τετμημένες $\boldsymbol{x}$ και των δύο σημείων Α και **B** του (2) είναι μεγαλύτερες ή ίσες του **0** και μικρότερες του 6 είναι $\boxed{I} < \boldsymbol{a} \le \frac{\boxed{JK}}{\boxed{LM}}$.

ΛΥΣΗ

1) Έχουμε $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2}x - (2a - 1)}$ με ρίζα το $\boldsymbol{x_0 = 4\alpha - 2}$ και $\boldsymbol{f(x_0) = \frac{1}{4}(4\alpha - 2)^2 - (2a - 1)(4\alpha - 2) + a = -(2\alpha - 1)^2 + a = -4\alpha^2 + 5\alpha - 1}$ άρα οι συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής είναι $(\boxed{4}\,\boldsymbol{a} - \boxed{2}, -\boxed{4}\,\boldsymbol{a^2} + \boxed{5}\,\boldsymbol{a} - \boxed{1})$. $\boxed{ABCDE} = \boldsymbol{42451}$

2) Αρκεί $\boldsymbol{\Delta > 0 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}\alpha > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 5\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow (4\alpha - 1)(\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow \alpha <} \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$ ή $\boxed{1} < \boldsymbol{a}$

3) Πρέπει επιπλέον της συνθήκης του ερωτήματος (2) να ισχύει ότι $\boldsymbol{0 < \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1}}{2 \cdot \frac{1}{4}} \le 6 \Leftrightarrow 0 < 4\alpha - 2 \pm 2\sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1} \le 6 \Leftrightarrow 0 < 2\alpha - 1 - \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1} \le 2\alpha - 1 + \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1} \le 3}$

Από την πρώτη ανισότητα έχουμε: $\boldsymbol{2\alpha - 1 > \sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1} > 0 \overset{\alpha > \frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 > 4\alpha^2 - 5\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha > 0}$

Από την δεύτερη ανισότητα έχουμε: $\boldsymbol{\sqrt{4\alpha^2 - 5\alpha + 1} \le 4 - 2\alpha \overset{\alpha < 2}{\Longleftrightarrow} 4\alpha^2 - 5\alpha + 1 \le 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 \Leftrightarrow 11\alpha < 15 \Leftrightarrow \alpha < \frac{15}{11}}$

Τελικά έχουμε $\boxed{1} < \boldsymbol{a} \le \frac{\boxed{15}}{\boxed{11}}$

Q2 Έχουμε τέσσερις κάρτες διαφορετικών μεγεθών. Πρέπει να βάψουμε κάθε κάρτα κόκκινη, μαύρη, μπλε ή κίτρινη. Ωστόσο, μπορούμε να ζωγραφίσουμε περισσότερες από μία κάρτες με το ίδιο χρώμα.

(1) Υπάρχουν συνολικά $\boxed{NOP}$ τρόποι βαφής των καρτών.

(2) Υπάρχουν $\boxed{QR}$ τρόποι να βάψετε τις 4 κάρτες, χρησιμοποιώντας και τα τέσσερα χρώματα.

(3) Υπάρχουν τρόποι $\boxed{ST}$ για να βάψετε δύο κάρτες κόκκινες, μία κάρτα μαύρη και μία κάρτα μπλε. (4)

Υπάρχουν τρόποι $\boxed{UVW}$ για να βάψετε τις τέσσερις κάρτες χρησιμοποιώντας τρία χρώματα.
(5) Υπάρχουν $\boxed{XY}$ τρόποι για να βάψετε τις τέσσερις κάρτες χρησιμοποιώντας δύο χρώματα.
ΛΥΣΗ
1) Έχουμε 4 επιλογές βαφής για κάθε κάρτα, άρα από την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης έχουμε $\mathbf{4^4} = \boxed{\mathbf{256}}$ τρόπους βαφής των καρτών
2) Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάθε χρώμα από μία φορά. Οπότε, έχουμε 4 επιλογές βαφής για την πρώτη κάρτα, απομένουν 3 επιλογές βαφής για την δεύτερη κάρτα, 2 για την 3η και μία για την 4η. Άρα $\mathbf{4!} = \boxed{\mathbf{24}}$ τρόποι βαφής των καρτών, χρησιμοποιώντας και τα τέσσερα χρώματα.

3) Σε πρώτη φάση επιλέγουμε ποιες 2 από τις 4 κάρτες θα βάψουμε κόκκινες. Αυτό γίνεται με $\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{6}$ τρόπους. Σε δεύτερη φάση έχουμε να βάψουμε τις άλλες δυο κάρτες. Αυτό γίνεται με δυο τρόπους μαύρη-μπλε ή μπλε-μαύρη. Συνολικά έχουμε $\mathbf{6 \cdot 2} = \boxed{\mathbf{12}}$ τρόπους βαφής.
4) Σε πρώτη φάση επιλέγουμε 3 από τα 4 χρώματα με τα οποία θα βάψουμε τις κάρτες. Αυτό γίνεται με $\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = \mathbf{4}$ τρόπους. Επειδή θα βάψουμε τις 4 κάρτες με τρία χρώματα αναγκαστικά από αρχή του περιστερώνα θα βάψουμε δυο κάρτες με το ίδιο χρώμα. Στη δεύτερη φάση λοιπόν έχουμε να επιλέξουμε με ποιο από τα 3 αυτά χρώματα θα βάψουμε τις δυο κάρτες με το ίδιο χρώμα. Αυτό γίνεται με 3 τρόπους. Η τελική φάση είναι όπως στο ερώτημα (3) και γίνεται με 12 τρόπους. Συνολικά έχουμε $\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 12} = \boxed{\mathbf{144}}$ τρόπους βαφής χρησιμοποιώντας τρία χρώματα.
5) Για να βρούμε με πόσους τρόπούς μπορούμε να βάψουμε τις τέσσερις κάρτες χρησιμοποιώντας δύο χρώματα, θα αφαιρέσουμε από το συνολικό αριθμό τρόπων βαφής με οποιοδήποτε τρόπο (ερώτημα 1), τον αριθμό τρόπων βαφής με τέσσερα (ερώτημα 2), τρία (ερώτημα4), ή ένα χρώμα. Για να βάψουμε όλες τις κάρτες με ένα από τα τέσσερα χρώματα έχουμε προφανώς 4 τρόπους. Άρα για να βάψουμε τις τέσσερις κάρτες χρησιμοποιώντας δύο χρώματα έχουμε $\mathbf{256 - 24 - 144 - 4} = \boxed{\mathbf{84}}$ τρόπους.

Μέρος ΙΙ

Q1

Πρέπει να βρούμε τον θετικό αριθμό α που ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{a^3 = 9 + \sqrt{80}}$.
Ας εξετάσουμε τον θετικό αριθμό b που ικανοποιεί τη σχέση $\boldsymbol{b^3 = 9 - \sqrt{80}}$. Τότε ισχύουν οι

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^3 + b^3} = \boxed{\mathrm{AB}} & (\mathbf{1}) \\ \boldsymbol{ab} = \boxed{\mathrm{C}} & (\mathbf{2}) \end{cases}.$$

Αρχικά , μα χρήση των $(\mathbf{2})$, η $(\mathbf{1})$ γίνεται $(\boldsymbol{a+b})^3 - \boxed{\mathrm{D}}\ (\boldsymbol{a+b}) = \boxed{\mathrm{AB}}$
Τότε, θέτοντας $\boldsymbol{x = a + b}$, έχουμε

$$\boldsymbol{x^3} - \boxed{\mathrm{D}}\,\boldsymbol{x} = \boxed{\mathrm{AB}}$$

Μετατρέποντας αυτή την εξίσωση, λαμβάνουμε $\boldsymbol{x^3 - 27} = \boxed{D}\left(\boldsymbol{x} - \boxed{\mathrm{E}}\right)$, που μας δίνει

$$\left(\boldsymbol{x} - \boxed{\mathrm{F}}\right)\left(\boldsymbol{x^2} + \boxed{\mathrm{G}}\,\boldsymbol{x} + \boxed{\mathrm{H}}\right) = \mathbf{0}.$$

Από αυτό έχουμε ότι $\boldsymbol{x} = \boxed{\mathrm{I}}$ και κατά συνέπεια
$\boldsymbol{a + b} = \boxed{\mathrm{I}}$ (3)

Έτσι, από $(\mathbf{2})$, $(\mathbf{3})$ και το ότι $\boldsymbol{a > b}$, έχουμε $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boxed{\mathrm{J}} + \sqrt{\boxed{\mathrm{K}}}}{\boxed{\mathrm{L}}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $\boldsymbol{a^3+b^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}=\boxed{18}}$.

$\boldsymbol{a^3\cdot b^3=(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})=81-80=1\Rightarrow ab=\boxed{1}}$ (2)

Ισχύει ότι $\boldsymbol{(\alpha+b)^3=a^3+b^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$ άρα $\boldsymbol{(\alpha+b)^3-3\alpha b(\alpha+b)=a^3+b^3\Rightarrow(\alpha+b)^3-3\alpha b(\alpha+b)=a^3+b^3\Rightarrow(\alpha+b)^3-3(\alpha+b)=18}$

Τότε, θέτοντας $\boldsymbol{x=a+b}$, έχουμε

$\boldsymbol{x^3-\boxed{3}\,x=\boxed{18}\Rightarrow x^3-27=3\,x-9\Rightarrow x^3-3^3=\boxed{3}\,(x-\boxed{3})\Rightarrow(x-3)(x^2+3x+9-3(x-3))=0}$

$\boldsymbol{\Rightarrow(x-\boxed{3})(x^2+\boxed{3}x+\boxed{6})=0\Rightarrow x=3}$ ή $\boldsymbol{x^2+3x+6=0}$

Άρα $\boldsymbol{x=\boxed{3}}$ αφού η δεύτερη εξίσωση αδύνατη ($\boldsymbol{\Delta<0}$) και κατά συνέπεια $\boldsymbol{a+b=\boxed{3}}$ (3)

Έτσι, από (**2**), (**3**) και το ότι $\boldsymbol{a>b}$, έχουμε ότι τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{b}$ είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$\boldsymbol{x^2-Sx+P=0}$ ή $\boldsymbol{x^2-(a+b)x+ab=0\Leftrightarrow x^2-3x+1=0}$ άρα $\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

Αφού $\boldsymbol{a>b}$ παίρνουμε για το $\boldsymbol{\alpha}$ τη μεγαλύτερη ρίζα άρα $\boldsymbol{\alpha=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}}$

Q2 Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ μια σταθερά διαφορετική από 0. Έστω

$$\boldsymbol{f(x)=x^2+2ax-4a-12,}$$

$$\boldsymbol{g(x)=ax^2+2x-4a+4.}$$

(1) Αν συμπίπτουν οι ρίζες των εξισώσεων $\boldsymbol{f(x)=0}$ και $\boldsymbol{g(x)=0}$, το $\boldsymbol{a}$ είναι ίσο με $\boxed{\mathbf{MN}}$ και οι κοινές ρίζες τους είναι οι $\boldsymbol{x=}\boxed{\mathbf{OP}}$ and $\boldsymbol{x=}\boxed{\mathbf{Q}}$.

(2) Η εξίσωση $\boldsymbol{g(x)=0}$ έχει μία μοναδική ρίζα όταν $\boldsymbol{a=\frac{\boxed{R}}{\boxed{S}}}$, και σ' αυτήν την περίπτωση είναι ίση με

$$\boldsymbol{x=}\boxed{\mathbf{TU}}$$

(3) Οι τιμές του $\boldsymbol{a}$ για τις οποίες $\boldsymbol{f(x)<g(x)}$ για κάθε $\boldsymbol{x}$ είναι

$\boxed{\boldsymbol{V}}\leqq\boldsymbol{a}<\boxed{\boldsymbol{WX}}$

ΛΥΣΗ

1) Αφού συμπίπτουν οι ρίζες των δυο δευτεροβάθμιων πολυωνυμικών συναρτήσεων, θα συμπίπτουν και τα αθροίσματα των ριζών τους, άρα $\boldsymbol{-\frac{2\alpha}{2}=-\frac{2}{\alpha}\overset{\alpha\neq0}{\Longleftrightarrow}\alpha^2=1\Leftrightarrow\alpha=\pm1}$

Για $\boldsymbol{\alpha=1}$ έχουμε $\boldsymbol{f(x)=x^2+2x-16}$, $\boldsymbol{g(x)=x^2+2x}$, που εύκολα προκύπτει ότι δεν έχουν κοινές ρίζες.

Για $\boldsymbol{\alpha=\boxed{-1}}$ έχουμε $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x-8}$, $\boldsymbol{g(x)=-x^2+2x+8=-f(x)}$ που προφανώς έχουν κοινές ρίζες. Αφού $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)}$, οι ζητούμενες κοινές ρίζες είναι οι $\boldsymbol{x=\boxed{-2}}$, $\boldsymbol{x=\boxed{4}}$.

2) $\boldsymbol{\Delta=4-4\alpha(-4\alpha+4)=16\alpha^2-16\alpha+4=(4\alpha-2)^2}$ άρα η $\boldsymbol{\Delta=0\Leftrightarrow4\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}}$ οπότε

η μοναδικά ρίζα της $\boldsymbol{g}$ είναι η $\boldsymbol{x=-\frac{2}{2\cdot\frac{1}{2}}=\boxed{-2}}$

3) $\boldsymbol{f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2+2ax-4a-12<\ ax^2+2x-4a+4\Leftrightarrow x^2+2ax-4a-12-\ ax^2-2x+4a-4<0\Leftrightarrow(1-\alpha)x^2+2(a-1)x-16<0}$

Αν $\boldsymbol{\alpha = 1}$ τότε η παραπάνω ανίσωση γίνεται $\boldsymbol{-16 < 0}$ που ισχύει.

Αν $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$ τότε για να ισχύει η ανίσωση για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, πρέπει $\boldsymbol{1 - \alpha < 0}$ και $\boldsymbol{\Delta \leq 0}$

άρα $\boldsymbol{\alpha > 1}$ και $\boldsymbol{4(\alpha - 1)^2 - 4(1 - \alpha)(-16) \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 1 - 16) \leq 0 \overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow} \alpha < 17}$

Συνεπώς, οι τιμές του $\boldsymbol{\alpha}$ για τις οποίες $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$ για κάθε $\boldsymbol{x}$ είναι

$\boxed{\mathbf{1}} \leq \boldsymbol{\alpha} < \boxed{\mathbf{17}}$

Μέρος III

Έστω $\boldsymbol{n}$ ένας διψήφιος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\boldsymbol{n^3}$ με το 66 είναι ο $\boldsymbol{n}$. Πρέπει να βρούμε το πλήθος αυτών των αριθμών n και να βρούμε μεταξύ αυτών τους πρώτους αριθμούς.

Από τις συνθήκες που έχουμε $\boldsymbol{n^3} = \boxed{\boldsymbol{AB}}\,\boldsymbol{p + n}$ $\boldsymbol{(0 < n} \leqq \boxed{\boldsymbol{CD}}$),

όπου $\boldsymbol{p}$ είναι το ακέραιο πηλίκο της διαίρεσης του $\boldsymbol{n^3}$ με το 66. Αυτό μπορεί να μετατραπεί σε

$\boldsymbol{n(n-1)(n+1)} = \boxed{\mathbf{AB}}\,\boldsymbol{p}$.

Αφού ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$ ή $\boldsymbol{n}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{E}}$ και ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$, $\boldsymbol{n}$ ή $\boldsymbol{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο $\boxed{\mathbf{F}}$, αλλά και επιπλέον $\boxed{\mathbf{E}}$ και $\boxed{\mathbf{F}}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι ο $\boldsymbol{n(n-1)(n+1)}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{G}}$ (Γράψτε τις απαντήσεις στην σειρά $\mathbf{1 < E < F < G}$).

Συνεπώς ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$, $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\boldsymbol{HI}}$

Έτσι, αφού $\boldsymbol{n} \leqq \boxed{\boldsymbol{CD}}$, το πλήθος των αριθμών $\boldsymbol{n}$ που το $\boldsymbol{n-1}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{HI}}$ είναι $\boxed{\mathbf{J}}$, το πλήθος των αριθμών $\boldsymbol{n}$ που το $\boldsymbol{n}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{HI}}$ είναι $\boxed{\mathbf{K}}$, και το πλήθος των αριθμών που το $\boldsymbol{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{HI}}$ είναι $\boxed{\mathbf{L}}$

Άρα, το πλήθος των αριθμών $\boldsymbol{n}$ είναι $\boxed{\mathbf{MN}}$ και οι πρώτοι αριθμοί ανάμεσα σ' αυτούς είναι οι $\boxed{\boldsymbol{O}\mathbf{P}}$, $\boxed{\mathbf{QR}}$ και $\boxed{\boldsymbol{ST}}$, σε αύξουσα σειρά.

ΛΥΣΗ

Από την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε $\boldsymbol{n^3} = \boxed{\mathbf{66}}\boldsymbol{p + n}$ $\boldsymbol{(0 < n} \leqq \boxed{\boldsymbol{CD}}$), άρα $\boldsymbol{n^3 - n = 66p \Leftrightarrow n(n^2 - 1) = 66p \Leftrightarrow n(n-1)(n+1) = 66p}$. Αφού ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$ ή $\boldsymbol{n}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{2}}$ και ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$, $\boldsymbol{n}$ ή $\boldsymbol{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο $\boxed{\mathbf{3}}$, αλλά και επιπλέον $\boxed{\mathbf{2}}$ και $\boxed{\mathbf{3}}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι ο $\boldsymbol{n(n-1)(n+1)}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{6}}$

Συνεπώς ένα από τα $\boldsymbol{n-1}$, $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του $\boxed{\mathbf{11}}$

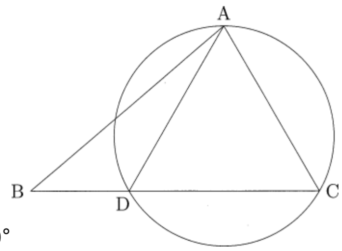
Για το πλήθος των $\boldsymbol{n}$ όπου το $\boldsymbol{n - 1 = 11k}$, για κάποιον φυσικό k, έχουμε $\boldsymbol{n = 1 + 11k \leq 65 \Leftrightarrow 11k \leq 64 \Leftrightarrow k \leq \frac{65}{11} \Leftrightarrow k \leq 5 \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4}$ ή $\mathbf{5}$. Άρα έχουμε τους αριθμούς $\boldsymbol{n = 12, 23, 34, 45, 56}$

Για το πλήθος των $\boldsymbol{n}$ όπου το $\boldsymbol{n = 11k}$, για κάποιον φυσικό k, έχουμε $\boldsymbol{n = 11k \leq 65 \Leftrightarrow k \leq \frac{64}{11} \Leftrightarrow k \leq 5 \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4}$ ή $\mathbf{5}$. Άρα έχουμε τους αριθμούς $\boldsymbol{n = 11, 22, 33, 44, 55}$

Για το πλήθος των $\boldsymbol{n}$ όπου το $\boldsymbol{n + 1 = 11k}$, για κάποιον φυσικό k, έχουμε $\boldsymbol{n = -1 + 11k \leq 65 \Leftrightarrow 11k \leq 66 \Leftrightarrow k \leq 6 \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5}$ ή $\mathbf{6}$. Άρα έχουμε τους αριθμούς $\boldsymbol{n = 10, 21, 32, 43, 54, 65}$

Άρα, το πλήθος των αριθμών $\boldsymbol{n}$ είναι $\boxed{\mathbf{5}} + \boxed{\mathbf{5}} + \boxed{\mathbf{6}} = \boxed{\mathbf{16}}$ και οι πρώτοι αριθμοί ανάμεσα σ' αυτούς είναι οι $\boxed{\mathbf{11}}$, $\boxed{\mathbf{23}}$ και $\boxed{\mathbf{43}}$, σε αύξουσα σειρά.

Μέρος IV



Για το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ στο σχήμα ισχύουν ότι $\boldsymbol{AB} = \mathbf{4}, \boldsymbol{AC} = \mathbf{3}$ και $\angle \mathbf{B} = \mathbf{30}°$

Το **D** είναι το σημείο της πλευράς BC τέτοιο, ώστε **AC = AD**. Ας θεωρήσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (O) του τριγώνου ACD.

(1) Αφού $\sin \boldsymbol{B} = \frac{\boxed{A}}{\boxed{B}}$, έχουμε $\sin \boldsymbol{C} = \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}}$.

Εξ ου και η ακτίνα του κύκλου (O) είναι $\frac{\boxed{E}}{\boxed{F}}$.

(2) Έχουμε

$\boldsymbol{BC} = \boxed{G}\sqrt{\boxed{H}} + \sqrt{\boxed{I}}$ και

$\boldsymbol{BD} = \boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}}$.

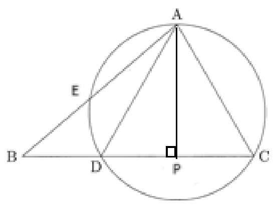
Έστω ότι η τομή της πλευράς AB και του κύκλου (**O**) είναι το σημείο Ε. Τότε

$\boldsymbol{BE} = \frac{\boxed{M}}{\boxed{N}}$.

Συνεπώς οι σχέσεις μεταξύ των εμβαδών των τριγώνων BDE, ADE και ACD είναι

$$\triangle \mathbf{BDE} : \triangle \mathbf{ADE} = \boxed{O} : \boxed{P} ,$$

$$\triangle \mathbf{BDE} : \triangle \mathbf{ACD} = \boxed{Q}\left(\boxed{J}\sqrt{\boxed{K}} - \sqrt{\boxed{L}}\right) : \boxed{RS}\sqrt{\mathbf{T}} .$$



ΛΥΣΗ

1) $\sin \boldsymbol{B} = \boldsymbol{sin30}° = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, από νόμο ημιτόνων στο $\triangle \boldsymbol{ABC}$ έχουμε $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{sin\widehat{C}}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{sin\widehat{B}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{sin\widehat{C}} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AC}}\boldsymbol{sin\widehat{B}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$

Άρα από νόμο ημιτόνων στο $\triangle \boldsymbol{ADC}$ έχουμε $\mathbf{2}\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{sin\widehat{C}}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{sin\widehat{C}}} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2} \cdot \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}} = \frac{\boxed{9}}{\boxed{4}}$

2) Έστω $\boldsymbol{AP}$ το ύψος του ισοσκελούς $\triangle \boldsymbol{ADC}$, άρα το $\boldsymbol{AP}$ είναι και διάμεσος στο $\triangle \boldsymbol{ADC}$.

Έχουμε $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{BP} + \boldsymbol{PC} = \boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{cos\widehat{B}} + \boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{cos\widehat{C}} = \frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}} = \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}} + \sqrt{\boxed{5}}$

$\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{BV} - \mathbf{2}\boldsymbol{PC} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{AC} \cdot \boldsymbol{cos\widehat{C}} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} + \sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}} = \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}} - \sqrt{\boxed{5}}$

Απ' τη δύναμη του σημείου $\boldsymbol{B}$ στον κύκλο έχουμε $\boldsymbol{BE}\cdot\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BD}\cdot\boldsymbol{BC}\Rightarrow\boldsymbol{BE}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{4}}$

Συνεπώς οι σχέσεις μεταξύ των εμβαδών των τριγώνων $\triangle\,\mathbf{BDE}\,:\,\triangle\,\boldsymbol{ADE}=\boldsymbol{BE}:\boldsymbol{AE}=\frac{\boldsymbol{BE}}{\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BE}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}$

Αφού λοιπόν $\triangle\,\mathbf{BDE}\,:\,\triangle\,\boldsymbol{ADE}=\frac{7}{9}$ έχουμε ότι $\triangle\,\mathbf{BDE}\,:\,\triangle\,\boldsymbol{ABD}=\frac{7}{16}$ οπότε αφού $\triangle\,\mathbf{ABD}\,:\,\triangle\,\boldsymbol{ACD}=\boldsymbol{BD}:\boldsymbol{CD}\Rightarrow\triangle\,\mathbf{BDE}\,:\,\triangle\,\boldsymbol{ACD}=\frac{7}{16}\cdot\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\mathbf{7}\cdot\left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)\cdot\frac{1}{32\sqrt{5}}=\boxed{7}\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right):\boxed{32}\sqrt{\boxed{5}}$

Mathematics Course 2

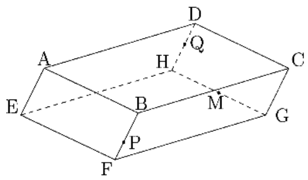
(Advanced Course)

Μέρος I

Q1 και **Q2** όπως Course 1

Μέρος II

Q1 Για το παραλληλεπίπεδο του σχήματος ισχύουν ότι



AB $= \mathbf{2}$, AD $= \mathbf{3}$, AE $= \mathbf{1}$,

$\angle\mathbf{BAD} = \mathbf{60°}$, $\angle\mathbf{BAE} = \mathbf{90°}$, $\angle\mathbf{DAE} = \mathbf{120^o}$,

Και το **M** είναι το μέσο της πλευράς **GH.**

Έστω τα σημεία **P** και **Q** στις πλευρές $\boldsymbol{B\Gamma}$ και DH, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα 4 σημεία **A**, **P**, **M**, και **Q** να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Πρέπει να βρούμε τα σημεία **P** και **Q** που μεγιστοποιούν το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PQ.

(1) Θέτουμε $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\mathbf{AD}}$ και $\vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{\mathbf{AE}}$, τα εσωτερικά γινόμενα τους είναι

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{A}, \vec{b}\cdot\vec{c} = -\frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}, \vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{D}\ .$$

(2) Έστω $\boldsymbol{s}$ και $\boldsymbol{t}$ με $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{s} \leqq \mathbf{1}$, $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{t} \leqq \mathbf{1}$, και set $\mathbf{BP}:\mathbf{P}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{s}:(\mathbf{1}-\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{DQ}:\boldsymbol{QH} = \boldsymbol{t}:(\mathbf{1}-\boldsymbol{t})$. Επειδή τα 4 σημεία **A**, **P**, **M** και **Q** είναι συνεπίπεδα, υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{AP}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{AQ}}.$$

Άρα $\boldsymbol{s} = \boxed{E}\left(\boxed{F} - \boldsymbol{t}\right)$.

Τότε το $|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|$ ως προς $\boldsymbol{t}$ γίνεται $|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|^2 = \boxed{G}\,\boldsymbol{t}^2 - \boxed{HI}\,\boldsymbol{t} + \boxed{JK}$

Άρα το μήκος του τμήματος PQ γίνεται μέγιστο όταν $\boxed{L}$ Εδώ, για το $\boxed{L}$ επιλέξτε τη σωστή απάντηση μεταξύ επιλογών $(\mathbf{0}) \sim (\mathbf{5})$ πιο κάτω.

$$(0)\ s = 0, t = 1 \qquad (1)\ s = 0, t = \frac{1}{2} \qquad (2)\ s = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}$$
$$(3)\ s = \frac{2}{3}, t = \frac{2}{3} \qquad (4)\ s = 1, t = \frac{1}{2} \qquad (5)\ s = 1, t = \frac{2}{3}$$

ΛΥΣΗ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{BAD}) = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \boxed{3},$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot -\frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}\cos(\widehat{EAD}) = 3\cdot 1\cdot cos120^o = -\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}},$$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{0}$, αφού $\vec{c}\perp\vec{a}$

Επειδή τα 4 σημεία **A**, **P**, **M** και **Q** είναι συνεπίπεδα, υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ τέτοιοι ώστε

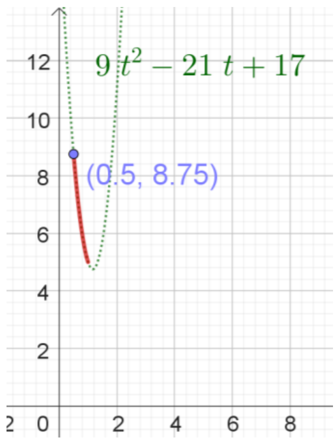
$$\overrightarrow{\mathbf{AM}} = \boldsymbol{\alpha}\overrightarrow{\mathbf{AP}} + \boldsymbol{\beta}\overrightarrow{\mathbf{AQ}} \Rightarrow \vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{\alpha} = \alpha(\vec{\alpha} + s\vec{c}) + \beta(\vec{b} + t\vec{c}) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = as + bt \\ 1 = b \\ \frac{1}{2} = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}s + t \Rightarrow s = \boxed{2}(\boxed{1} - t)$$

Έχουμε $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \overrightarrow{\mathbf{AQ}} - \overrightarrow{\mathbf{AP}} = \vec{b} + t\vec{c} - (\vec{\alpha} + s\vec{c}) = \vec{b} - \vec{\alpha} + (t-s)\vec{c} \Rightarrow$

$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \vec{b} - \vec{\alpha} + (t - 2(1-t))\vec{c} = \vec{b} - \vec{\alpha} + (3t-2)\vec{c} \Rightarrow$

$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|^2 = |\vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathrm{a}}|^2 + (3t-2)^2|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{\alpha} - 2\cdot(3t-2)\vec{b}\cdot\vec{c} + 2(3t-2)\vec{b}\cdot\vec{c} \Rightarrow$

$$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|^2 = 3^2 + 2^2 + (9t^2 2 - 12t + 4)\cdot 1^2 - 2\cdot 3 - 2\cdot(3t-2)\cdot(-\frac{3}{2}) + 0 \Rightarrow$$



$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|^2 = 3^2 + 2^2 + (9t^2 - 12t + 4)\cdot 1^2 - 2\cdot 3 - 2\cdot(3t-2)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 0 \Rightarrow$

$|\overrightarrow{\mathbf{PQ}}|^2 = \boxed{9}t^2 - \boxed{21}t + \boxed{17}$

Έχουμε $0 \leqq s \leqq 1 \xLeftrightarrow{s=2(1-t)} 0 \leqq 2(1-t) \leqq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$

Παρατηρούμε ότι η παραβολή $9t^2 - 21t + 17$ έχει ελάχιστο για $t = \frac{21}{2\cdot 9} = \frac{7}{6}$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{7}{6}\right)$ άρα και στο $[\frac{1}{2}, 1]$ άρα

παρουσιάζει μέγιστο για $t = \frac{1}{2} \xRightarrow{s=2(1-t)} s = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$

Άρα σωστή η επιλογή ($\boxed{4}$)

Q2 Για κάθε x και y με $x > 0$ και $y > 0$, έστω m η μεγαλύτερη τιμή μεταξύ των $\frac{y}{x}$, x και $\frac{8}{y}$.

Έστω, ακόμα, ότι A είναι το σύνολο των σημείων (x, y) όπου $m = \frac{y}{x}$, και B το σύνολο των σημείων

(x, y) wόπου $m = \frac{8}{y}$.

(1) Για τα $\mathbf{M} \sim \mathbf{S}$ επιλέξτε τη σωστή απάντηση μεταξύ επιλογών $(\mathbf{0}) \sim (\mathbf{7})$ πιο κάτω.

Τα σύνολα A και B μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$A = \left\{(x, y) \mid \boxed{M} \leqq \boxed{N}, \boxed{\mathrm{O}} \leqq 8\boxed{\mathrm{P}}\right\},$$
$$B = \left\{(x, y) \mid 8\boxed{\mathrm{Q}} \leqq \boxed{R}, 8 \leqq \boxed{\mathrm{S}}\right\}.$$

$(\mathbf{0})\ x$ $\quad$ $(\mathbf{1})\ y$ $\quad$ $(\mathbf{2})\ x + y$ $\quad$ $(\mathbf{3})\ x - y$

$(\mathbf{4})\ x^2$ $\quad$ $(\mathbf{5})\ xy$ $\quad$ $(\mathbf{6})\ y^2$ $\quad$ $(\mathbf{7})\ x^2 + y^2$

(2) Για τα $\mathbf{T} \sim U$ επιλέξτε τη σωστή απάντηση μεταξύ επιλογών $(\mathbf{0}) \sim (\mathbf{8})$ πιο κάτω.

Αν σχεδιαστούν τα σύνολα A και B στο καρτεσιανό επίπεδο xy, το σύνολο A είναι η σκιασμένη περιοχή $\boxed{\mathrm{T}}$ και το σύνολο B είναι η σκιασμένη περιοχή $\boxed{U}$. Σημειώστε ότι οι άξονες x και y δεν περιλαμβάνονται στα σκιασμένα τμήματα.

(3) Θα βρούμε τη μέγιστη τιμή του m όταν ένα σημείο $P(x, y)$ κινείται μέσα στο σύνολο $A \cup B$

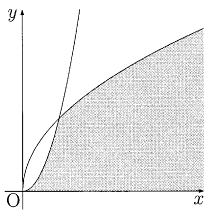
Αν $\mathrm{P}(x, y) \in A$, τότε $y = mx$, άρα αρκεί να βρούμε το σημείο P που μεγιστοποιεί την κλίση της ευθείας γραμμής που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathbf{O}$ και το σημείο P.

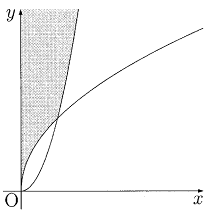
Ακόμα, αν $\mathrm{P}(x, y) \in B$, τότε $m = \frac{8}{y}$, άρα αρκεί να βρούμε το σημείο P όπου η τεταγμένη y του σημείου

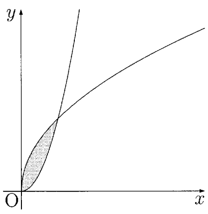
$\mathbf{P}$ ελαχιστοποιείται.

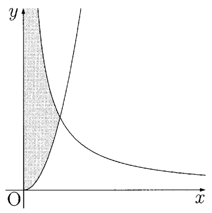
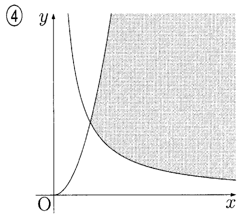
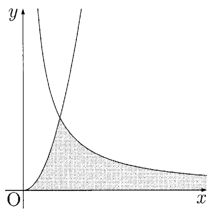
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο σημείο $(x, y) = (\boxed{\mathrm{V}}, \boxed{\mathrm{W}})$, ο αριθμός m παίρνει την μέγιστη τιμή $\boxed{X}$

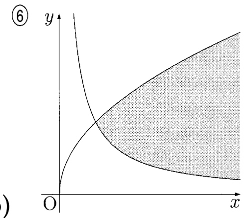
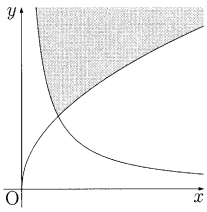
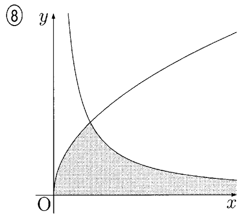
[Οι επιλογές για το (2)]

$(\mathbf{0})$ 

(1) 

(2) 

(3) 
(4) 
(5) 

(6) 
(7) 
(8) 

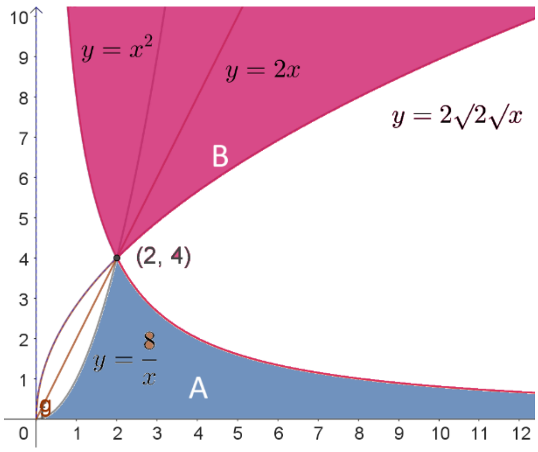
ΛΥΣΗ

1)

$$A=\left\{(x,y)\middle|\frac{y}{x}<x,\frac{y}{x}<\frac{8}{y}\right\}=\{(x,y)|y<x^2,y^2<8x\}=\{(x,y)|\boxed{1}<\boxed{4},\boxed{6}<8\boxed{0}\}$$

$$=\{(x,y)|y<x^2,y<2\sqrt{2}\sqrt{x}\}$$

$$B=\left\{(x,y)\middle|\frac{8}{y}<\frac{y}{x},\frac{8}{y}<x\right\}=\{(x,y)|8x<y^2,8<xy\}=\{(x,y)|8\boxed{0}<\boxed{6},8<\boxed{5}\}=\left\{(x,y)\middle|y>2\sqrt{2}\sqrt{x},y>\frac{8}{x}\right\}$$



2) Η περιοχή Α περιλαμβάνει τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την παραβολή $y=x^2$ και κάτω από την υπερβολή $y=2\sqrt{2}\sqrt{x}$. Οι δυο αυτές γραμμές τέμνονται στο σημείο $(2,4)$. Άρα σωστή επιλογή η $\boxed{0}$

Η περιοχή Β περιλαμβάνει τα σημεία που βρίσκονται πάνω από την υπερβολή $y=2\sqrt{2}\sqrt{x}$ και κάτω από την υπερβολή $y=\frac{8}{x}$ Οι δυο αυτές γραμμές τέμνονται και πάλι στο σημείο $(2,4)$. Άρα σωστή επιλογή η $\boxed{7}$

3) Όλες οι γραμμές περνούν από το $P(2,4)$, που είναι και η τομή των περιοχών Α και Β.

Θα βρούμε τη μέγιστη τιμή του m όταν ένα σημείο $P(x,y)$ κινείται μέσα στο σύνολο $A\cup B$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο $P(2,4)\in A$, μεγιστοποιεί την κλίση της ευθείας γραμμής $y=mx$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O και το τυχαίο σημείο $P(x,y)$ του Α.

Ακόμα, επειδή το σημείο $P(2,4)\in B$, και $m=\frac{8}{y}$, και επειδή το ζητούμενο σημείο $P(x,y)$ του Β είναι αυτό όπου η τεταγμένη y ελαχιστοποιείται, προκύπτει ότι στο σημείο $P(x,y)=(\boxed{2},\boxed{4})$ ο αριθμός m παίρνει την μέγιστη τιμή $m=\frac{y}{x}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$.

Μέρος ΙΙΙ

Πρέπει να βρούμε τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές της συνάρτησης

$$f(x)=4\sin^3 x+4\cos^3 x-8\sin 2x-7,$$

όπου $0\leqq x\leqq\pi$.

Έστω $\boldsymbol{t = \sin x + \cos x}$. Αφού

$\boldsymbol{\sin x + \cos x = \sqrt{\boxed{A}}\sin\left(x + \frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}\pi\right)}$, (σημείωση: $\mathbf{B < C}$) το σύνολο τιμών του $\boldsymbol{t}$ είναι $-\boxed{\mathbf{D}} \leqq \boldsymbol{t} \leqq \sqrt{\mathbf{E}}$.

Στη συνέχεια, αφού

$$\boldsymbol{\sin 2x = t^2 - \boxed{F}}$$

και

$$\boldsymbol{4\sin^3 x + 4\cos^3 x = -\boxed{G}\,t^3 + \boxed{H}\,t,}$$

έχουμε

$$\boldsymbol{f(x) = -\boxed{G}\,t^3 - \boxed{I}\,t^2 + \boxed{H}\,t + \boxed{J}} \quad (1)$$

Θέτουμε το δεξί μέλος $(\mathbf{1})$ ως $\boldsymbol{g(t)}$, παραγωγίζουμε ως προς $\boldsymbol{t}$, και έχουμε

$$\boldsymbol{g'(t) = -\boxed{K}\left(\boxed{L}\,t - \boxed{M}\right)\left(t + \boxed{N}\right)} \ .$$

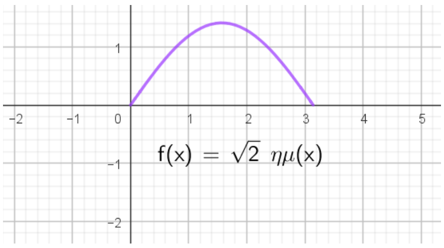
Άρα στο $\boldsymbol{t = \frac{\boxed{O}}{\boxed{P}}}$, η $\boldsymbol{g(t)(= f(x))}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή $\frac{\boxed{\mathbf{OR}}}{\boxed{\mathbf{ST}}}$, και στο

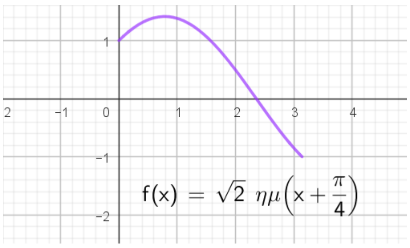
$\boldsymbol{t = \sqrt{\boxed{U}}}$, παίρνει την ελάχιστη τιμή $\boxed{\boldsymbol{V}}\sqrt{\boxed{\mathbf{W}}} - \boxed{\boldsymbol{XY}}$

ΛΥΣΗ

Έχω $\boldsymbol{\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Από την μετατόπιση του γραφήματος $\boldsymbol{y = \sin x}$ προς τα αριστερά κατά $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$, με $\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \pi}$, όπως βλέπουμε παρακάτω





προκύπτει ότι : $\boldsymbol{-1 < \sqrt{2}\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}}$. Άρα $\boldsymbol{-\boxed{1} < t < \sqrt{\boxed{2}}}$

Έχουμε $\boldsymbol{t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + sin2x}$

Άρα $\boldsymbol{sin2x = t^2 - \boxed{1}}$.

Από την γνωστή ταυτότητα $\boldsymbol{(\alpha + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \xRightarrow{t = \sin x + \cos x}}$

$\boldsymbol{t^3 = sin^3x + cos^3x + 3sinxcosx \cdot t \Rightarrow}$

$\boldsymbol{4sin^3x + 4cos^3x = 4t^3 - 12t\cdot sinxcosx = 4t^3 - 6t\cdot 2sinxcosx = 4t^3 - 6t\cdot sin2x = 4t^3 - 6t\cdot(t^2 - 1)}$

$\boldsymbol{= -\boxed{2}t^3 + \boxed{6}t}$

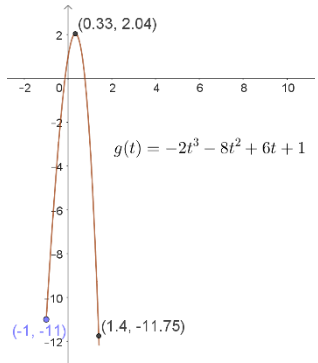
Άρα $\boldsymbol{f(x) = -2t^3 + 6t - 8(t^2 - 1) - 7 = -\boxed{2}\,t^3 - \boxed{8}\,t^2 + \boxed{6}\,t + \boxed{1} = g(t)}$

Έχουμε $\boldsymbol{g'(t) = -6t^2 - 16t + 6 = -2(3t^2 + 8t - 3) = -\boxed{2}\left(\boxed{3}\,t - \boxed{1}\right)\left(t + \boxed{3}\right)}$

$\boldsymbol{g'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-3, \frac{1}{3})}$ και $\boldsymbol{g'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)}$

Άρα αφού επιπλέον έχουμε $\boldsymbol{-1 < t < \sqrt{2}}$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{g'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-1, \frac{1}{3})}$

και $g'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in\cup\, (\frac{1}{3}, \sqrt{2})$, δηλαδή η $g(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \frac{1}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, \sqrt{2})$, παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ την τιμή



$$g\left(\frac{1}{3}\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6\cdot\frac{1}{3} + 1 = -\frac{2}{27} - \frac{8}{9} + 3 = \frac{\boxed{55}}{\boxed{27}}$$

και ελάχιστο την τιμή

$$g(\sqrt{2}) = -2\cdot(\sqrt{2})^3 - 8\cdot(\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2} + 1 = \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}} - \boxed{15}$$

$$< g(-1) = -2\cdot(-1)^3 - 8\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) + 1 = -11$$

t	$-\infty$	-3	-1		$\frac{1}{3}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(t)$		0		$+$	0	$-$		
$g(t)$			-11	$\nearrow$	$\frac{55}{27}$ T.M.	$\searrow$	$2\sqrt{2}-15$	

Μέρος IV

Έστω

$$a_n = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \ .$$

Πρέπει να βρούμε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

(1) Αρχικά, ας βρούμε τα a_0 και a_1. Δεδομένου ότι το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 1 είναι π, βλέπουμε ότι

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{A}} \ .$$

Στη συνέχεια, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το a_1 έχουμε

$$a_1 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}\left[x(1-x^2)^{\frac{\boxed{D}}{\boxed{E}}}\right]_0^1 + \frac{-\boxed{F}}{\boxed{G}}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{H}}{\boxed{I}}}\,dx$$

$$= \frac{\boxed{J}}{\boxed{K}}\left\{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{L}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}.$$

Έτσι έχουμε

$$a_1 = \frac{\pi}{\text{MN}} \ .$$

(2) Για τα $O \sim U$ επιλέξτε τη σωστή απάντηση μεταξύ επιλογών $(0) \sim (9)$ πιο κάτω.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το a_n με τον ίδιο τρόπο όπως για το a_1, έχουμε

$$a_n = \frac{\boxed{O}}{\boxed{P}}\left\{\int_0^1 x^{\boxed{Q}}\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{R}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \ (n = 1, 2, 3,) \ .$$

Ως εκ τούτου, έχουμε

$$(\boxed{S})a_n = (\ \boxed{T}\ )a_{n-1},$$

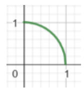
και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{U}$$

(0) $\mathbf{0}$	(1) 1	(2) 2	(3) 3	(4) 4
(5) $2n-2$	(6) $2n-1$	(7) $2n$	(8) $2n+1$	(9) $2n+2$

ΛΥΣΗ

Δεδομένου ότι το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 1 είναι π, βλέπουμε ότι

$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{4}}$ αφού πρόκειται για το εμβαδόν του 1ου τεταρτοκυκλίου. 

Για το a_1 έχουμε

$$a_1 = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x\cdot\left(\frac{1-x^2}{-2}\right)'(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 x\cdot\left((1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'dx$$

$$= -\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\left\{\left[x\cdot(1-x^2)^{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}\right]_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{0 - 0 - \int_0^1 (1-x^2)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\}$$

$$= \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^{\boxed{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{3}a_1$$

Άρα $a_1 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}a_0 \Leftrightarrow 4a_1 = a_0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4}a_0 = \frac{\pi}{\boxed{16}}$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το a_n με τον ίδιο τρόπο όπως για το a_1, έχουμε

$$a_n = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x^{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x^2}{-2}\right)'(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n-1}\cdot\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{2n-1}\cdot\left((1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{\left[x^{2n-1}\cdot(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 (2n-1)x^{2n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{0 - 0 - (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}(1-x^2)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\}$$

$$= \frac{\boxed{2n-1}}{3}\left\{\int_0^1 x^{\boxed{2n-2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\boxed{2n}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx\right\} =$$

$$= \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}{\mathbf{3}} \{\boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}} - \boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}\}$$

$$= \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}} - \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}$$

Άρα $\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}}$

$(\mathbf{2}\boldsymbol{n} + \mathbf{2})\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}} = (\mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}}$

$\boxed{\mathbf{9}}\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}} = \boxed{\mathbf{6}}\boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}}$

Τελικά έχουμε

$\frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}}{\boldsymbol{a}_{\mathbf{n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{2}} = \boxed{\mathbf{1}}$

[Πηγές]

[Examination for Japanese University Admission for International Students(EJU) | JASSO]

https://maa.org/sites/default/files/pdf/programs/JUEEDocument.pdf

https://www.jasso.go.jp/en/ryugaku/eju/examinee/pastpaper_sample/index.html

https://www.dnc.ac.jp/kyotsu/shiken_jouhou/r6/

https://edu.chunichi.co.jp/pages/kyotsu2022/

https://www.studyinjapan.go.jp/en/planning/scholarship/application/examination/

A look at the 2021 University of Tokyo mathematics entrance exam. I have translated the questions into English.

Original questions (in Japanese):

https://www.u-tokyo.ac.jp/content/400160388.pdf

Solutions to all questions (in Japanese) from Kawaijuku Educational Institution: https://kaisoku.kawai-juku.ac.jp/nyus...

Can a robot pass a university entrance exam? | Noriko Arai:

- Can a robot pass a university entranc...

Video solutions to each problem (in Japanese) on this channel:

- 2021 年 東大理系数学 第 2 問　複素数平面

Huge library of past problems (in Japanese): http://server-test.net/math/tokyo/