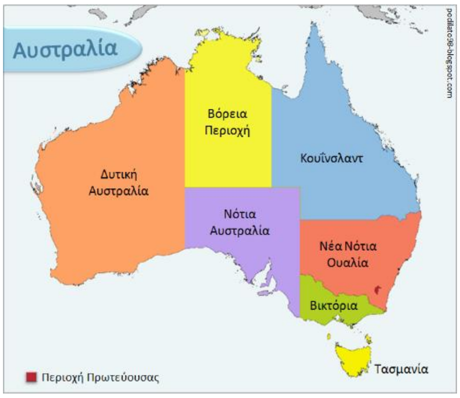
[Αυστραλία]

Η Αυστραλία (επίσημο όνομα: Κοινοπολιτεία της Αυστραλίας, στα αγγλικά: Commonwealth of Australia) είναι χώρα του νοτίου ημισφαιρίου της Γης, η οποία έχει περίπου 26,3 εκατομμύρια κατοίκους και είναι αραιά κατοικημένη. Με επιφάνεια μεγαλύτερη των 7,6 εκατομμυρίων τ.χλμ. καταλαμβάνει την έκτη θέση σε έκταση στον κόσμο. Η πρωτεύουσα είναι η Καμπέρα, ενώ μεγαλύτερη πόλη είναι η μητρόπολη της Μελβούρνης. Άλλες σημαντικές αστικές περιοχές είναι η Σίδνεϊ, Μπρίσμπεϊν, Περθ, η Αδελαΐδα και η Χρυσή Ακτή.



Η Αυστραλία είναι μία εκ των πλουσιότερων χωρών του κόσμου και κατέλαβε το 2021 την πέμπτη θέση μεταξύ 191 κρατών στον δείκτη ανθρώπινης ανάπτυξης. Η χώρα έχει μια υπερσύγχρονη οικονομία υπηρεσιών και τριτογενούς τομέα και σημαντικά αποθέματα πρώτων υλών.

Το Αυστραλιανό εκπαιδευτικό σύστημα, είναι βασικά αρμοδιότητα των 6 πολιτειών της (Βικτώριας, Δυτικής Αυστραλίας, Νέας Νότιας Ουαλίας, Νότιας Αυστραλίας, Κουΐνσλαντ, νησιωτικής Τασμανίας) και των 2 επικρατειών της (Βόρειας Επικράτειας και Επικράτειας Πρωτεύουσας Αυστραλίας). Κάθε πολιτεία χρηματοδοτεί και ρυθμίζει τόσο τα κρατικά όσο και τα ιδιωτικά σχολεία της διοικητικής περιοχής που καλύπτει.

Το σχολείο αρχίζει την 1η Φεβρουαρίου και τελειώνει στις 22 Δεκεμβρίου. Η χρονιά χωρίζεται σε 3 τρίμηνα. Για κάθε τρίμηνο υπάρχουν 2 εβδομάδες διακοπές. Οι Χριστουγεννιάτικες και οι καλοκαιρινές διακοπές διαρκούν 5 εβδομάδες. Το 20% των μαθητών της Αυστραλίας έχουν γεννηθεί σε άλλες χώρες. Λόγω του γεγονότος ότι 23, μιλιούνται 263 διάλεκτοι και γλώσσες στην Αυστραλία, η Αυστραλιανή Κυβέρνηση αποφάσισε να στηρίξει την εκμάθηση ξένων γλωσσών. Οι πιο δημοφιλείς γλώσσες είναι 10 και ανάμεσα στη δεύτερη και στη τρίτη θέση βρίσκεται η ελληνική! Περίπου 125.000 παιδιά μιλάνε ελληνικά με έναν Έλληνα γονιό ή με κανέναν.

[Πρωτοβάθμια & Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση]

Το 85,7% των παιδιών πηγαίνουν κατευθείαν στο νηπιαγωγείο, δηλαδή έναν χρόνο πριν το δημοτικό. Η σχολική εκπαίδευση στην Αυστραλία είναι υποχρεωτική μεταξύ των ηλικιών 5 – 6 ετών έως 15 – 16 ετών, ανάλογα με την πολιτεία και την ημερομηνία γέννησης. Υποχρεωτική είναι και η στολή ένδυσης και υπόδησης των μαθητών ακόμα και για τα αθλητικά ρούχα, με εξαιρέσεις ελαχίστων σχολείων που έχει καταργηθεί.

Το γεγονός ύπαρξης πολλών θρησκειών έχει κάνει την Αυστραλιανή κυβέρνηση να δημιουργήσει δύο σχολές, τις Ρωμαιοκαθολικές σχολές για τους καθαρά Αυστραλούς και τα κανονικά σχολεία για τις υπόλοιπες θρησκείες. Και στις δύο βαθμίδες της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, υπάρχουν τεράστιες βιβλιοθήκες με βιβλιοθηκονόμους και βιβλιοθηκάριους, όπου η κάθε τάξη και ο κάθε μαθητής ατομικά δανείζεται ό, τι θα χρειαστεί για τα μαθήματα της εβδομάδας. Το κάθε παιδί έχει δικό του αρχείο όπου καταγράφονται οι τίτλοι που έχει διαβάσει. Τέλος, τα γυμνάσια διαθέτουν αίθουσες Θετικών Επιστημών στα πλαίσια των μαθημάτων της Φυσικής και της Χημείας, με εξειδικευμένους βοηθούς.

Η εκπαίδευση στην Αυστραλία διαρκεί 13 χρόνια και περιλαμβάνει τρία μέρη:

1. Δημοτικό σχολείο – Αποτελείται από επτά ή οκτώ χρόνια διδασκαλίας. Ξεκινώντας από το Νηπιαγωγείο/Προπαρασκευαστικό και τελειώνοντας το 6ο ή 7ο έτος.
2. Δευτεροβάθμιο σχολείο – Αποτελείται από τρία ή τέσσερα χρόνια σπουδών, από Έτη 7 έως 10 ή Έτη 8 έως 10.
3. Γυμνάσιο – Τα έτη 11 και 12 είναι τα δύο έτη της ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

[Τριτοβάθμια Εκπαίδευση]

Για την εισαγωγή στο Πανεπιστήμιο, κάθε παιδί πρέπει να συγκεντρώσει βαθμούς κατά την διάρκεια της τελευταίας σχολικής χρονιάς (12η τάξη). Έχει βέβαια την δυνατότητα, να συγκεντρώσει βαθμούς και στην 11η τάξη σε ορισμένα μαθήματα. Η βαθμολογία που συγκέντρωσε το κάθε παιδί, ανακοινώνεται στις 15 Δεκεμβρίου, σε ποια σχολή εισήχθη στις 15 Ιανουαρίου και η έναρξη του ακαδημαϊκού έτους ορίζεται τέλη Φεβρουαρίου με αρχές Μαρτίου. Τα Πανεπιστήμια στην Αυστραλία είναι εντελώς αυτοδιοικούμενα. Σε όλα τα Πανεπιστήμια οι φοιτητές, καταβάλλουν δίδακτρα ύψους 15.000 – 25.000$ το ακαδημαϊκό έτος. Για τους υπηκόους Αυστραλούς, τα παραπάνω ποσά τα χορηγεί το κράτος υπό μορφή δανείου, το οποίο όταν αποφοιτήσουν αποπληρώνουν, εφόσον εργάζονται και το εισόδημά τους ξεπερνά το ποσό των 45.000$ το χρόνο.

Η Αυστραλία διαθέτει ένα εξαιρετικό σύστημα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και υπάρχει πληθώρα Ακαδημαϊκών Ιδρυμάτων, Ιδιωτικών ή Δημόσιων, καθώς και μεγάλη ποικιλία εξειδικευμένων σπουδών. Συγκεκριμένα, υπάρχουν 43 Πανεπιστήμια - 40 Αυστραλιανά Πανεπιστήμια, 2 Διεθνή πανεπιστήμια, και 1 Ιδιωτικό Πανεπιστήμιο Ειδικότητας. Το παλαιότερο Πανεπιστήμιο της Αυστραλίας είναι το Πανεπιστήμιο του Σίδνεϊ, το οποίο ιδρύθηκε το 1851. Η κύρια γλώσσα διδασκαλίας είναι η Αγγλική , όμως πολλά Εκπαιδευτικά Ιδρύματα προσφέρουν δίγλωσσα προγράμματα σπουδών ή προγράμματα σε άλλες επικρατέστερες γλώσσες όπως η Γαλλική κ.ά. Ως εκ τούτου, πολλά Πανεπιστήμια προσφέρουν μαθήματα Αγγλικής γλώσσας για τους διεθνείς φοιτητές των οποίων η Αγγλική δεν είναι η μητρική τους γλώσσα.

[Τα καλύτερα πανεπιστήμια στην Αυστραλία]

1. Πανεπιστήμιο της Μελβούρνης

Το Πανεπιστήμιο της Μελβούρνης είναι ένα από τα παλαιότερα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης της χώρας. Το Πανεπιστήμιο της Μελβούρνης έχει δημιουργήσει περισσότερους ηγέτες αυστραλιανής κυβέρνησης. Και βραβευμένοι με Νόμπελ από οποιοδήποτε άλλο αυστραλιανό ίδρυμα από το 1853.

2. Πανεπιστήμιο του Σίδνεϊ (USYD / Sydney Uni)

Το Πανεπιστήμιο του Σίδνεϊ είναι το πρώτο πανεπιστήμιο στην Αυστραλία. Βρίσκεται στα δυτικά προάστια της χώρας. Θεωρείται ως μια από τις πιο όμορφες πανεπιστημιουπόλεις στον κόσμο. Περιλαμβάνει οκτώ σχολές με θεματικές ενότητες που κατατάσσονται μεταξύ των κορυφαίων 50 παγκοσμίως. Αυτοί οι κλάδοι περιλαμβάνουν τις Τέχνες και τις Ανθρωπιστικές Επιστήμες, τις Επιστήμες της Ζωής και την Ιατρική και τη Μηχανική & Τεχνολογία.

3. Εθνικό Πανεπιστήμιο της Αυστραλίας (ANU)

Το Εθνικό Πανεπιστήμιο της Αυστραλίας ιδρύθηκε το 1946. Είναι παγκόσμιος ηγέτης στη διδασκαλία και την έρευνα σε ένα ευρύ φάσμα τομέων. Το ANU έχει επτά κολέγια που διανέμονται στην τεράστια πανεπιστημιούπολη του στην Καμπέρα, που αναγνωρίστηκε δύο φορές για την περιβαλλοντική της διαχείριση. Στη γεωλογία, τη φιλοσοφία, την πολιτική, την κοινωνιολογία και τις αναπτυξιακές σπουδές, το πανεπιστήμιο είναι υψηλά σεβαστός. Έχει επίσης υψηλό ποσοστό απασχόλησης πτυχιούχων.

4. Το Πανεπιστήμιο του Queensland (UQ)

Το Πανεπιστήμιο του Κουίνσλαντ, είναι ένα από τα καλύτερα ιδρύματα της Αυστραλίας για διεθνείς φοιτητές. Είναι ένα δημόσιο πανεπιστήμιο γνωστό για την ερευνητική του ικανότητα και τα επιστημονικά του επιτεύγματα. Κατατάσσεται κορυφαία στην κατάταξη θεμάτων της Ασίας-Ειρηνικού για τη Διοίκηση Επιχειρήσεων. Οι κλάδοι της μηχανικής, οι τομείς που σχετίζονται με τον αθλητισμό και η προστασία της βιοποικιλότητας είναι επίσης γνωστοί.

5. Πανεπιστήμιο Monash

Το Monash University είναι ένα δημόσιο πανεπιστήμιο με έδρα τη Μελβούρνη που ειδικεύεται στην ιατρική έρευνα. Το Πανεπιστήμιο Monash έχει οκτώ σχολές και περισσότερα από 200 ερευνητικά ινστιτούτα. Οι πιο γνωστές θεματικές του περιοχές είναι η εκπαίδευση, η φαρμακευτική και η νοσηλευτική.

6. Αυστραλιανό Εθνικό Πανεπιστήμιο

Το 1946, το Εθνικό Πανεπιστήμιο της Αυστραλίας καθιερώθηκε. Η Καμπέρα, η πρωτεύουσα του έθνους, φιλοξενεί την κύρια πανεπιστημιούπολη Acton του δημόσιου πανεπιστημίου. Επτά ακαδημαϊκά κολέγια του ANU φιλοξενούν πολλά ερευνητικά κέντρα που επικεντρώνονται σε μια ποικιλία θεμάτων. Όλα τα οποία είναι σημαντικά, αλλά μερικά είναι αποκλειστικά για την Αυστραλία και την περιοχή μας.

7. Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας

Το Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας είναι με συνέπεια στο κορυφαίο 1% των πανεπιστημίων του κόσμου. Το Πανεπιστήμιο της Αδελαΐδας καταχωρήθηκε ως το 66ο καλύτερο πανεπιστήμιο στον κόσμο από τα US News το 2022.

8. Πανεπιστήμιο Τεχνολογίας Σίδνεϊ

Το UTS είναι δημόσιο πανεπιστήμιο. Περισσότερα από 130 προπτυχιακά και 210 μεταπτυχιακά προγράμματα είναι διαθέσιμα στο UTS. Περιλαμβάνει: νομική, μαιευτική, νοσηλευτική, φαρμακείο, διεθνείς σπουδές, αρχιτεκτονική, δομημένο περιβάλλον, επιχειρήσεις, επικοινωνία, σχεδιασμός, εκπαίδευση, μηχανική, τεχνολογία πληροφοριών και επιστήμη.

9. Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κουίνσλαντ

Βραβευμένη διδασκαλία, έρευνα σχετική με την κοινότητα, αφοσίωση στην επιχειρηματικότητα και τη δημιουργικότητα.

10. Πανεπιστήμιο Curtin

Το Curtin συγκαταλέγεται στο 1% των κορυφαίων πανεπιστημίων στον κόσμο.

[Το Πιστοποιητικό Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης ή HSC]

Οι μαθητές στη Νέα Νότια Ουαλία εργάζονται γενικά για το Πιστοποιητικό Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης ή HSC στα έτη 11 και 12.

Μαθήματα

Οι φοιτητές πρέπει να ολοκληρώσουν τουλάχιστον 12 μονάδες προκαταρκτικών μαθημάτων και 10 μονάδες μαθημάτων HSC, συμπεριλαμβανομένων των αγγλικών, για να λάβουν το HSC. Τα τρία πιο δημοφιλή μαθήματα επιλογής είναι τα Μαθηματικά, η Βιολογία και οι Επιχειρηματικές Σπουδές. Τα γαλλικά, τα ιαπωνικά και τα κινέζικα είναι οι πιο δημοφιλείς γλώσσες που μελετήθηκαν.

[Εξετάσεις]

Οι πρώτες εξετάσεις HSC έγιναν το 1966. Περισσότεροι από 60.000 μαθητές θα συμμετάσχουν σε υποχρεωτική εξέταση αγγλικών. Περίπου 350 μαθητές θα δώσουν εξετάσεις στο εξωτερικό. Για να αποκτήσετε το Πιστοποιητικό Ανώτερης Σχολής (HSC), πρέπει να ολοκληρώσετε τουλάχιστον 12 μονάδες προκαταρκτικών μαθημάτων και 10 μονάδες μαθημάτων HSC, συμπεριλαμβανομένων των αγγλικών. Τα περισσότερα μαθήματα HSC αξίζουν 2 μονάδες. Πρέπει να ολοκληρώσετε ικανοποιητικά το προκαταρκτικό μάθημα (συνήθως στο έτος 11) πριν μπορέσετε να ξεκινήσετε το αντίστοιχο μάθημα HSC (συνήθως στο έτος 12).

Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι μαθημάτων HSC: Board Developed Courses και Board Approved Courses.

Η NESA αναπτύσσει μαθήματα που αναπτύσσονται από το διοικητικό συμβούλιο. Το επίτευγμά σας σε αυτά μπορεί να μετρήσει στην Κατάταξη εισαγωγής στην Αυστραλιανή Τριτοβάθμια Εκπαίδευση (ATAR).

Τα μαθήματα που αναπτύχθηκαν από το διοικητικό συμβούλιο καλύπτουν:

1. Αγγλικά
2. Μαθηματικά
3. Επιστήμη
4. Τεχνολογία
5. Δημιουργικές Τέχνες
6. Προσωπική Ανάπτυξη, Υγεία και Φυσική Αγωγή (PDHPE)
7. Η Ανθρώπινη Κοινωνία και το Περιβάλλον της (ΕΝΑΕ)
8. Γλώσσες
9. Πλαίσια προγραμμάτων σπουδών επαγγελματικής εκπαίδευσης και κατάρτισης (ΕΕΚ).

[Κατανόηση των επιλογών σας στα Μαθηματικά]

Τα μαθήματα μαθηματικών που μπορούν να συμβάλουν σε ένα ATAR είναι τα Προχωρημένα Μαθηματικά (Extension 1 και 2) και τα Τυπικά Μαθηματικά (Standard 1 και 2).

Το Mathematics Standard 1 είναι ένα μάθημα που αναπτύσσει και βελτιώνει τις δεξιότητες και τις γνώσεις των μαθητών στα μαθηματικά και εδραιώνει τις δεξιότητές τους στον αριθμητισμό. Είναι ένα μάθημα για μαθητές που σκοπεύουν να προχωρήσουν από το σχολείο με κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο για να εισέλθουν στο εργατικό δυναμικό ή / και να αναλάβουν περαιτέρω εκπαίδευση στην κοινότητα και στο χώρο εργασίας.

Το Mathematics Standard 2 εξυπηρετεί ένα ευρύ φάσμα μαθητών. Αναπτύσσει και βελτιώνει τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες των μαθητών σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένων των στατιστικών, των οικονομικών, της μέτρησης και της άλγεβρας για την ενίσχυση των προσωπικών, κοινωνικών και επαγγελματικών ευκαιριών τους.

Τα Advanced Mathematics είναι μια προϋπόθεση ή συν-προϋπόθεση για τα μαθήματα Mathematics Extension 1 και 2. Το Mathematics Extension 2 είναι το μάθημα μαθηματικών υψηλότερου επιπέδου για μαθητές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ικανότητα στα μαθηματικά. Η Επέκταση Μαθηματικών 1 μπορεί να μελετηθεί ταυτόχρονα ή διαδοχικά με την Επέκταση Μαθηματικών 2.

[Ύλη]

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Standard 1 Year 11 περιλαμβάνει :

- Τύποι και εξισώσεις
- Γραμμικές σχέσεις
- Εφαρμογές μέτρησης
- Εργασία με το χρόνο
- Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά
- Στατιστική Ανάλυση
- Ανάλυση δεδομένων
- Σχετική συχνότητα και πιθανότητα

Μάθημα έτους 12

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Standard 1 Year 12 περιλαμβάνει

- Τύποι και εξισώσεις
- Ορθογώνια τρίγωνα
- Ποσοστά
- Σχέδια υπό κλίμακα
- Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά
- Επένδυση
- Αποσβέσεις και δάνεια
- Στατιστική Ανάλυση
- Περαιτέρω στατιστική ανάλυση
- Δίκτυα και διαδρομές
- Τυχαίες μεταβλητές

Mathematics Advanced

Περιλαμβάνει

- Αλγεβρικές τεχνικές
- Ρίζες και δυνάμεις
- Εξισώσεις
- Γραμμικές σχέσεις
- Τριγωνομετρία και θεώρημα του Πυθαγόρα
- Ανάλυση δεδομένων μίας μεταβλητής

- Μη γραμμικές σχέσεις
- Ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων.

Μάθημα έτους 11

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Advanced Year 11 περιλαμβάνει:

- Συναρτήσεις
- Τριγωνομετρία και μέτρο γωνιών
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και ταυτότητες
- Απειροστικός λογισμός
- Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
- Στατιστική Ανάλυση
- Κατανομές Πιθανοτήτων και Διακριτές Κατανομές Πιθανοτήτων

Μάθημα έτους 12

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Advanced Year 12 περιλαμβάνει :

- Συναρτήσεις
- Γράφημα
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και γραφήματα
- Απειροστικός λογισμός
- Διαφορικός Λογισμός
- Ολοκληρωτικός λογισμός
- Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά
- Μοντελοποίηση Χρηματοοικονομικών Καταστάσεων
- Στατιστική Ανάλυση
- Περιγραφική Στατιστική και Διμεταβλητή Ανάλυση Δεδομένων
- Τυχαίες μεταβλητές

Μάθημα έτους 11

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Extension 1 Year 11 αποτελείται από :

- Περαιτέρω εργασία με συναρτήσεις
- Πολυώνυμα
- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Περαιτέρω τριγωνομετρικές ταυτότητες
- Ποσοστά μεταβολής
- Εργασία με τη Συνδυαστική

Μάθημα έτους 12

Το περιεχόμενο του μαθήματος Mathematics Extension 1 Year 12 περιλαμβάνει τα Θέματα 'Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις' και 'Λογισμός' που συνεχίστηκαν από το Έτος 11 και :

- Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή
- Εισαγωγή στα Διανύσματα
- Τριγωνομετρικές Εξισώσεις
- Περαιτέρω δεξιότητες λογισμού
- Εφαρμογές του Λογισμού

- Η διωνυμική κατανομή

Μάθημα έτους 12

Το μάθημα Mathematics Extension 2 περιλαμβάνει :

- Απόδειξη
- Περαιτέρω απόδειξη με μαθηματική επαγωγή
- Περαιτέρω εργασία με διανύσματα
- Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς
- Απειροστικός λογισμός
- Εφαρμογές του Λογισμού στη Μηχανική

2023 HIGHER SCHOOL CERTIFICATE EXAMINATION

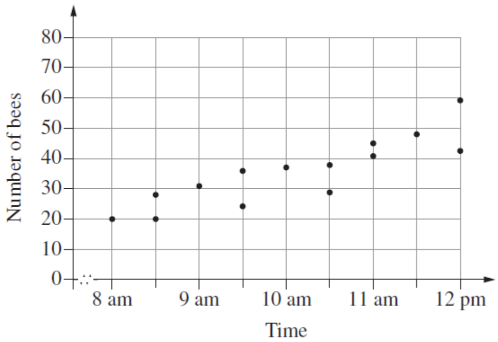
Mathematics Advanced

Ενότητα I

10 βαθμοί συνολικά για τις Ερωτήσεις 1–10

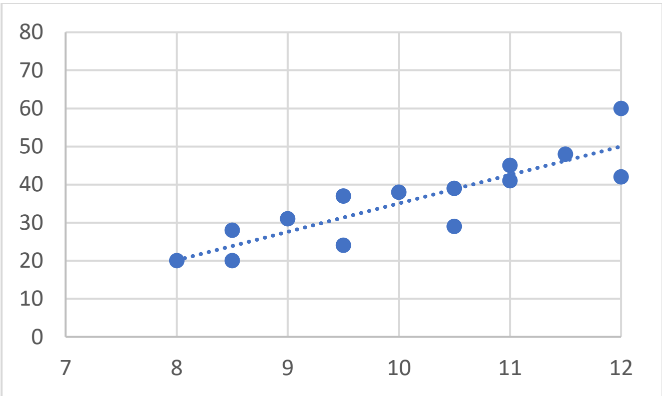
Περίπου 15 λεπτά για αυτήν την ενότητα

1. Ο αριθμός των μελισσών που εγκατέλειψαν μια κυψέλη παρατηρήθηκε και καταγράφηκε σε 14 ημέρες σε διαφορετικές ώρες της ημέρας.



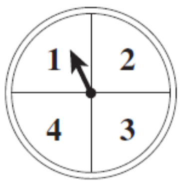
Ποιος συντελεστής συσχέτισης Pearson περιγράφει καλύτερα τις παρατηρήσεις; A. −0.8 B. −0.2 C. 0.2 D. 0.8

Λύση



Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ της ώρας και του πλήθους των μελισσών άρα ο συντελεστής συσχέτισης Pearson

2. Ένα παιχνίδι περιλαμβάνει τη ρίψη ενός ζαριού και την περιστροφή ενός σπίνερ.



Το άθροισμα των δύο αριθμών που λαμβάνονται είναι η βαθμολογία. Ο παρακάτω πίνακας βαθμολογιών συμπληρώνεται εν μέρει.

		SPINNER			
		1	2	3	4
DIE	1	2	3	4	
	2	3	4	5	
	3		5	6	
	4			7	
	5				
	6				

Ποια είναι η πιθανότητα να πάρεις βαθμολογία 7 ή περισσότερο;

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{5}{12}$

Λύση

Έχουμε, αφού συμπληρώσουμε τον πίνακα, ότι $\boldsymbol{P} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Άρα D.

		ΣΠΙΝΕΡ			
		1	2	3	4
ΖΑΡΙ	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8
	5	6	7	8	9
	6	7	8	9	10

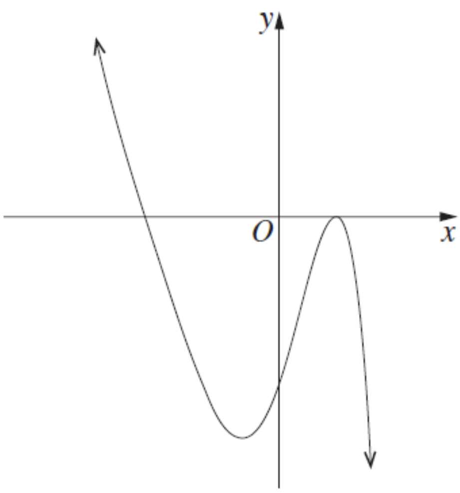
3. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

A. $\mathbf{x < 1}$ B. $\boldsymbol{x \leq 1}$ C. $\mathbf{x > 1}$ D. $\boldsymbol{x \geq 1}$

Λύση

Πρέπει $\boldsymbol{1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1}$. Άρα A

4. Στο σχήμα παρακάτω έχουμε το γράφημα μιας πολυωνυμικής.



Ποια γραμμή του παρακάτω πίνακα είναι σωστή;

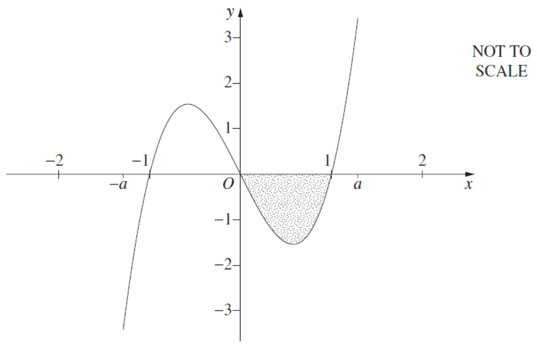
	Εξίσωση	Τιμή του b	Τιμή του c
A.	$\boldsymbol{y = -(x-b)(x-c)^2}$	$\boldsymbol{b > 0}$	$\boldsymbol{c < 0}$

B.	$y = -(x-b)(x-c)^2$	$b < 0$	$c > 0$
C.	$y = -x(x-b)(x-c)$	$b > 0$	$c < 0$
D.	$y = -x(x-b)(x-c)$	$b < 0$	$c > 0$

Λύση

Οι C και D απορρίπτονται γιατί έχουν από τρεις διακριτές ρίζες, ενώ στο γράφημα έχουμε μόνο δύο. Η δεξιά ρίζα είναι μάλιστα διπλή, αφού εκεί το γράφημα εφάπτεται του άξονα των x, άρα B.

5. Το σχήμα παρακάτω δίνει το γράφημα της $\boldsymbol{f(x)}$, όπου $\boldsymbol{f}$ μια περιττή συνάρτηση.
Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 1 τ.μ. Ο αριθμός α, όπου α>1, είναι τέτοιος ώστε $\int_0^a f(x)dx = 0$.



Ποια είναι η τιμή του $\int_{-a}^{1} f(x)dx$;

A. −1 B. 0 C. 1 D. 3

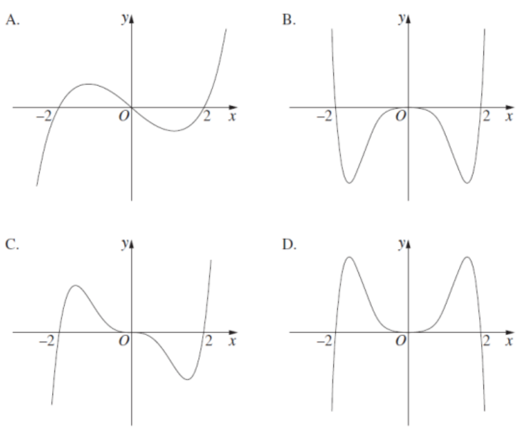
Λύση

Έχω $\int_{-a}^{1} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{0}^{\alpha} f(x)dx - 1 = 0 - 1 = -1$. Άρα A

6. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα πρόσημα της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της $\boldsymbol{y = f(x)}$ για τις διάφορες τιμές του $\boldsymbol{x}$.

x	−2	0	2
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	−	0	+

Ποιο από τα παρακάτω είναι ένα πιθανό γράφημα της $\boldsymbol{f}$;



Λύση

Στο $\boldsymbol{x = -2}$ η συνάρτηση θα είναι αύξουσα και κοίλη, στο $\boldsymbol{x = 0}$ έχω κρίσιμο σημείο και πιθανό σημείο καμπής, ενώ στο $\boldsymbol{x = 2}$ η συνάρτηση θα είναι αύξουσα και κυρτή. Αυτό συμβαίνει στο γράφημα C. Άρα C.

7. Δίνεται ότι $\boldsymbol{y = f(g(x))}$, με $\boldsymbol{f(1) = 3, f'(1) = -4, g(5) = 1}$ και $\boldsymbol{g'(5) = 2.}$ Ποια είναι η τιμή της $\boldsymbol{y'}$ για $\boldsymbol{x = 5}$.

   A. −8 B. −4 C. 3 D. 6

   Λύση

   Έχω $\boldsymbol{y'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))}$. Άρα $\boldsymbol{y'(5) = g'(5) \cdot f'(g(5)) = 2 \cdot f'(1) = 2 \cdot (-4) = -8}$. Άρα A

8. Ποια είναι η ρίζα της εξίσωσης $\boldsymbol{\log_a x^3 = b}$, όπου α και β θετικές σταθερές.

   A. $\boldsymbol{x = b^{\frac{a}{3}}}$ B. $\boldsymbol{x = a^{\frac{b}{3}}}$ C. $\boldsymbol{x = \frac{b^a}{3}}$ D. $\boldsymbol{x = \frac{a^b}{3}}$

   Λύση

   Έχω $\boldsymbol{\log_a x^3 = b \Leftrightarrow x^3 = \alpha^b \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\alpha^b} \Leftrightarrow x = \alpha^{\frac{b}{3}}}$. Άρα B.

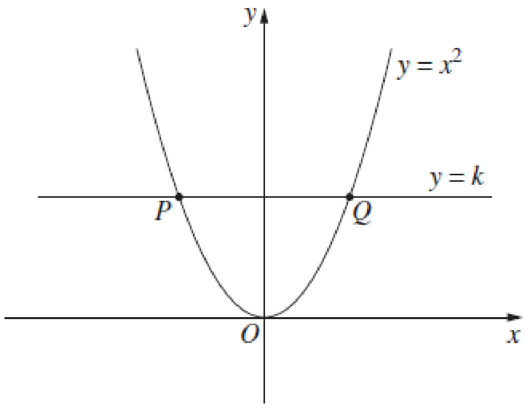
9. Έστω $\boldsymbol{f(x)}$ οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Ποια από τις παρακάτω είναι άρτια συνάρτηση, ανεξάρτητα από ποια συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ επιλέξουμε;

   A. $\boldsymbol{2f(x)}$ B. $\boldsymbol{f(f(x))}$ C. $\boldsymbol{(f(-x))^2}$ D. $\boldsymbol{f(x)f(-x)}$

   Λύση

   Η $\boldsymbol{g(x) = f(x)f(-x)}$ είναι άρτια, αφού $\boldsymbol{g(-x) = f(-x)f(x) = f(x)f(-x) = g(x)}$. Άρα D

10. Το γράφημα της $\boldsymbol{y = x^2}$ τέμνει την ευθεία $\boldsymbol{y = k}$ (όπου $\boldsymbol{k > 0}$) στα σημεία P και Q του σχήματος. Το μήκος του τμήματος $\boldsymbol{PQ}$ είναι $\boldsymbol{L}$. Έστω α ένας θετικός αριθμός. Το γράφημα $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{a^2}}$ τέμνει την ευθεία $\boldsymbol{y = k}$ στα σημεία S και T. Ποιο είναι το μήκος του $\boldsymbol{ST}$;



   A. $\boldsymbol{\frac{L}{a}}$ B. $\boldsymbol{\frac{L}{a^2}}$ C. $\boldsymbol{aL}$ D. $\boldsymbol{a^2L}$

   Λύση

   Έχω $\boldsymbol{L = PQ = |x_P - x_Q| = 2|x_Q| = 2|\sqrt{y_Q}| = 2\sqrt{k}}$ και $\boldsymbol{ST = |x_S - x_T| = 2|x_T| = 2|\alpha\sqrt{y_T}| = 2\alpha\sqrt{k} = aL}$ Άρα C.

HIGHER SCHOOL CERTIFICATE EXAMINATION

Mathematics Advanced

Μέρος II

90 Βαθμοί συνολικά για τις ερωτήσεις 11–32

Περίπου 2 ώρες και 45 λεπτά για αυτήν την ενότητα

Ερώτηση 11 (2 βαθμοί)

Οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου είναι 3, 7 και 11. Βρείτε τον 15ο όρο.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\alpha_1 = 3, \omega = 7 - 3 = 11 - 7 = 4}$

Έχω $\boldsymbol{\alpha_{15} = \alpha_1 + (15 - 1)\omega = 3 + 14 \times 4 = \boxed{59}}$

Ερώτηση 12 (3 βαθμοί)

Ο πίνακας δείχνει την κατανομή πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

$\boldsymbol{X}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{P(X = x)}$	0	0.3	0.5	0.1	0.1

(α) Δείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή $\boldsymbol{E(X) = 2}$. (βαθμός 1)

(β) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση, με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου. (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{E(X) = \sum_{x=0}^{4} x \cdot P(X = x) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) = 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.1 = \boxed{2}}$

(β) Έχω $\boldsymbol{\text{Var}\,(X)\& = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot P(X = x) - \left(E(X)\right)^2 = 0 \times 0 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.1 - 4 = 0.8}$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{0.8} = 0.8944 \ldots = \boxed{0.9}}$ (με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου)

Ερώτηση 13 (2 βαθμοί)

Έστω $\boldsymbol{P(t)}$ μια συνάρτηση με $\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = 3000e^{2t}}$.

Όταν $\boldsymbol{t = 0, P = 4000}$.

Βρείτε μια έκφραση της $\boldsymbol{P(t)}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = 3000e^{2t} \Leftrightarrow P(t) = \int 3000e^{2t}dt = 1500e^{2t} + c}$. Για $\boldsymbol{t = 0}$, έχω $\boldsymbol{4000 = 1500e^0 + c \Leftrightarrow c = 2500}$. Άρα $\boldsymbol{\boxed{P(t) = 1500e^{2t} + 2500}}$

Ερώτηση 14 (3 βαθμοί)

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη $\boldsymbol{y = (2x + 1)^3}$ στο σημείο $\boldsymbol{(0, 1)}$.

Λύση

Έχω $y'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$. Άρα $y'(0) = 6$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(0,1)$ είναι η $y - 1 = 6(x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y = 6x + 1}$

Ερώτηση 15 (5 βαθμοί)

Παρακάτω εμφανίζεται ένας πίνακας συντελεστών επιτοκίου μελλοντικής αξίας για ετήσια πρόσοδο 1 $.

Περίοδος \ επιτόκιο	1.5%	3%	4.5%	6%
5	5.152	5.309	5.471	5.637
10	10.703	11.464	12.288	13.181
20	23.124	26.870	31.371	36.786
40	54.268	75.401	107.030	154.762

(α) Ο Μίκυ θέλει να εξοικονομήσει 450000 $ για τα επόμενα 10 χρόνια. Εάν το επιτόκιο είναι 6% ετησίως, πόσο θα πρέπει να συνεισφέρει ο Μίκυ κάθε χρόνο; Δώστε την απάντησή σας στο πλησιέστερο δολάριο. (βαθμοί 2)

(β) Τελικά, ο Micky αποφασίζει να συνεισφέρει 8535 $ κάθε τρεις μήνες για 10 χρόνια σε πρόσοδο που καταβάλλει 6% ετησίως, ανατοκίζοντας ανά τρίμηνο. Πόσα θα έχει ο Μίκυ στο τέλος των 10 ετών; (βαθμοί 3)

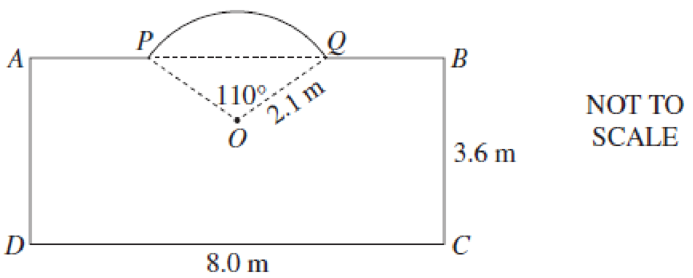
Λύση

(α) Προφανώς $\frac{450000}{13.181} = 341400.5007 = \boxed{\$34140}$ (στο πλησιέστερο δολάριο).

(β) Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με αυτό που θα πάρει σε 40 χρόνια, αλλά με επιτόκιο 1.5%. άρα στο τέλος θα έχει $8535 \cdot 54.268 = \boxed{463177.38\$}$

Ερώτηση 16 (4 βαθμοί)

Το διάγραμμα δείχνει ένα σχήμα $APQBCD$. Το σχήμα αποτελείται από ένα ορθογώνιο $ABCD$ με τόξο PQ στην πλευρά AB και με μήκη πλευρών $BC = 3,6\,m$ και $CD = 8,0\,m$. Το τόξο PQ είναι τόξο κύκλου με κέντρο O και ακτίνα $2,1\,m$ και $P\hat{O}Q = 110°$.



Ποια είναι η περίμετρος του $APQBCD$; Δώστε την απάντησή σας με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

Λύση

Το τόξο PQ έχει μήκος $\frac{110}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2.1 = 4.03171$

Το ευθύγραμμο τμήμα PQ προκύπτει από το νόμο συνημιτόνων ότι έχει μήκος $\sqrt{2.1^2 + 2.1^2 - 2 \cdot 2.1 \cdot 2.1 \cdot \cos\,110°} = 3.4404$

Άρα η περίμετρος του σχήματος $APQBCD$ είναι

$$(3.6 \cdot 2) + 8.0 + (8.0 - 3.4404) + 4.0317 = 23.7913 = \boxed{23.8\,m}$$

Ερώτηση 17 (2 βαθμοί)

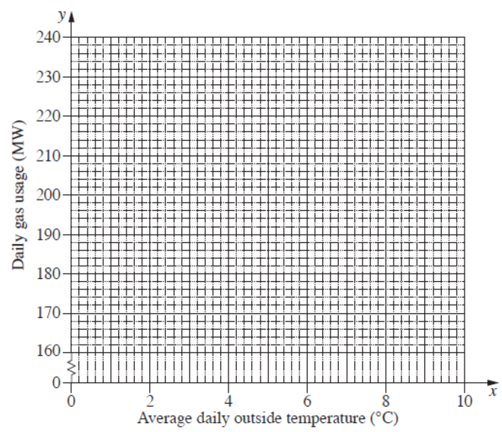
Βρείτε το $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

Λύση

Έχω $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \int \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + c = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$

Ερώτηση 18 (6 βαθμοί)

Ένα πανεπιστήμιο χρησιμοποιεί αέριο για τη θέρμανση των κτιρίων του. Σε μια περίοδο 10 εργάσιμων ημερών κατά τη διάρκεια του χειμώνα, το αέριο που χρησιμοποιήθηκε κάθε μέρα μετρήθηκε σε μεγαβάτ (MW) και η μέση εξωτερική θερμοκρασία κάθε μέρα καταγράφηκε σε βαθμούς Κελσίου (°C). Χρησιμοποιώντας το $\boldsymbol{x}$ ως τη μέση ημερήσια εξωτερική θερμοκρασία και το $\boldsymbol{y}$ ως τη συνολική ημερήσια χρήση αερίου, βρέθηκε η εξίσωση της γραμμής παλινδρόμησης των ελαχίστων τετραγώνων. Η εξίσωση της γραμμής παλινδρόμησης προβλέπει ότι όταν η θερμοκρασία είναι 0°C, η καθημερινή χρήση αερίου είναι 236 MW. Οι δέκα θερμοκρασίες που μετρήθηκαν ήταν: 0°, 0°, 0°, 2°, 5°, 7°, 8°, 9°, 9°, 10°. Η συνολική κατανάλωση αερίου για τις δέκα εργάσιμες ημέρες ήταν 1840 MW. Σε οποιοδήποτε σύνολο δεδομένων διμεταβλητών, η γραμμή παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων διέρχεται από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, όπου $\bar{x}$ είναι ο μέσος όρος του δείγματος των x-τιμών και $\bar{y}$ είναι ο μέσος όρος του δείγματος των y-τιμών.

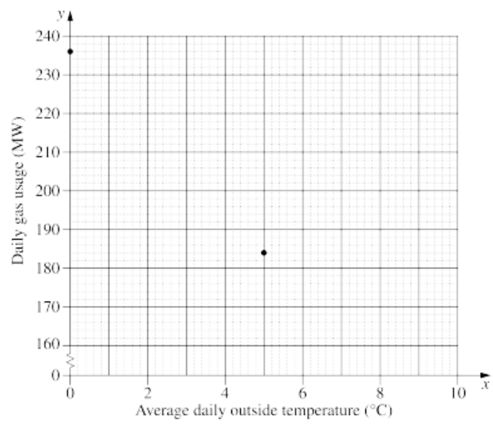


(α) Χρησιμοποιώντας τις παρεχόμενες πληροφορίες, σχεδιάστε το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ και την τομή της γραμμής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων με τον άξονα y στο πλέγμα. (Βαθμοί 3)

(β) Ποια είναι η εξίσωση της γραμμής παλινδρόμησης; (Βαθμοί 2)

(γ) Στο πλαίσιο του συνόλου δεδομένων, εντοπίστε ΕΝΑ πρόβλημα με τη χρήση της γραμμής παλινδρόμησης για την πρόβλεψη της χρήσης αερίου όταν η μέση εξωτερική θερμοκρασία είναι 23°C. (βαθμός 1)

Λύση



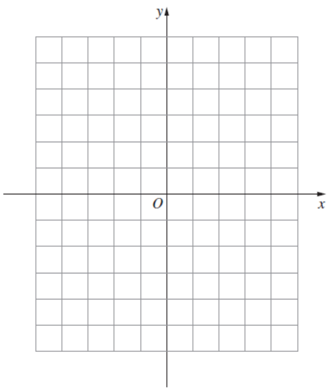
(α) Έχω $\bar{x} = \frac{0+0+0+2+5+7+8+9+9+10}{10} = 5$ και $\bar{y} = \frac{1840}{10} = 184$. Άρα $(\bar{x}, \bar{y}) = (5, 184)$. Αφού όταν η θερμοκρασία είναι 0°C, η καθημερινή χρήση αερίου είναι 236 MW, έχω ότι η γραμμή παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων τέμνει τον άξονα y στο $(0, 236)$.

(β) Η γραμμή παλινδρόμησης θα περνά από τα δυο σημεία του ερωτήματος (α) άρα η εξίσωσή της θα είναι η $y - 184 = \frac{236-184}{0-5}(x-5) \Leftrightarrow y - 184 = -10.4x + 52 \Leftrightarrow \boxed{y = -10.4x + 236}$

(γ) Όταν η θερμοκρασία είναι 23°C, η εξίσωση παλινδρόμησης δίνει μια αρνητική απάντηση, η οποία δεν είναι φυσικά δυνατή (αρνητική χρήση αερίου!).

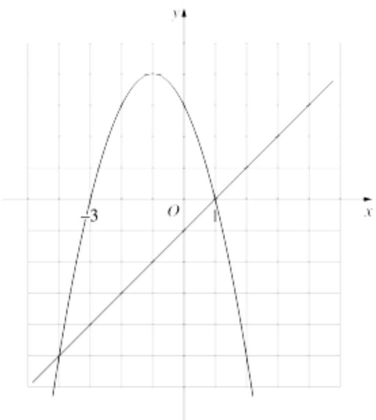
Ερώτηση 19 (4 βαθμοί)

(α) Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων $\boldsymbol{f(x) = x - 1}$ και $\boldsymbol{g(x) = (1 - x)(3 + x)}$ δείχνοντας τις τομές τους με τον άξονα των x. (βαθμοί 2)



(β) Συνεπώς, λύστε την ανίσωση $\boldsymbol{x - 1 < (1 - x)(3 + x)}$. (βαθμοί 2)

Λύση



(α) Η $\boldsymbol{f}$ είναι ευθεία γραμμή, ενώ η $\boldsymbol{g}$ παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω που τέμνει τον άξονα των x στο $\boldsymbol{-3}$ και $\boldsymbol{1}$.

(β) Οι δυο γραμμές τέμνονται για $\boldsymbol{x - 1 = (1 - x)(3 + x) \Leftrightarrow x - 1 - (1 - x)(3 + x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + (x - 1)(3 + x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(1 + 3 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 1}$ ή $\boldsymbol{x = -4}$.

Άρα από το γράφημα έχω ότι $\boldsymbol{x - 1 < (1 - x)(3 + x)}$ όταν $\boxed{\boldsymbol{-4 < x < 1}}$

Ερώτηση 20 (βαθμοί 3)

Βρείτε όλες τις τιμές του $\boldsymbol{\theta}$, όπου $\boldsymbol{0° \leq \theta \leq 360°}$, τέτοιες ώστε $\boldsymbol{\sin(\theta - 60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\sin(\theta - 60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin(60°) = \sin(180° + 60°) = \sin(240°) \Rightarrow}$

$\boldsymbol{\theta - 60° = 360°k + 240°}$ ή $\boldsymbol{\theta - 60° = 360°k + 180° - 240° \Rightarrow}$

$\boldsymbol{\theta = 360°k + 300° \xRightarrow{0° \leq \theta \leq 360°} \boxed{\theta = 300°}}$ ή $\boldsymbol{\theta = 360°k \xRightarrow{0° \leq \theta \leq 360°} \boxed{\theta = 0° \text{ ή } \theta = 360°}}$

Ερώτηση 21 (3 βαθμοί)

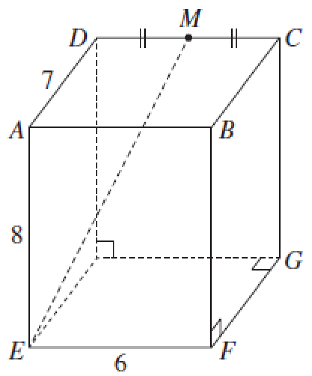
Ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 48. Ο όγδοος όρος της ίδιας ακολουθίας είναι $\frac{3}{16}$. Βρείτε τις πιθανές τιμές του λόγου της προόδου και του αντίστοιχου πρώτου όρου.

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\alpha_4 = 48}$, $\boldsymbol{\alpha_8 = \frac{3}{16}}$. Άρα $\boldsymbol{\alpha_1 \cdot \lambda^3 = 48}$, $\boldsymbol{\alpha_1 \cdot \lambda^7 = \frac{3}{16}}$. Με διαίρεση κατά μέλη έχω: $\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^7}{\alpha_1 \cdot \lambda^3} = \frac{\frac{3}{16}}{48} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda^4 = \frac{1}{256}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = \pm\frac{1}{4}}$. Αν $\boxed{\lambda = \frac{1}{4}}$, τότε $\boldsymbol{\alpha_1 \cdot \lambda^3 = 48} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 48} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = 3072}$. Αν $\boxed{\lambda = -\frac{1}{4}}$, όμοια έχω $\boxed{\alpha_1 = -3072}$

Ερώτηση 22 (3 βαθμοί)

Στο ορθογώνιο πρίσμα που φαίνεται, $\boldsymbol{AD = 7\ cm, AE = 8\ cm, EF = 6\ cm}$. Το σημείο $\boldsymbol{M}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{CD}$.



NOT TO SCALE

Βρείτε την γωνία $\boldsymbol{A\hat{E}M}$, στην πλησιέστερη μοίρα.

Λύση

Από Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{ADM}$ έχω : $\boldsymbol{AM^2 = DM^2 + DA^2 = 3^2 + 7^2 = 58}$, άρα $\boldsymbol{AM = \sqrt{58}}$

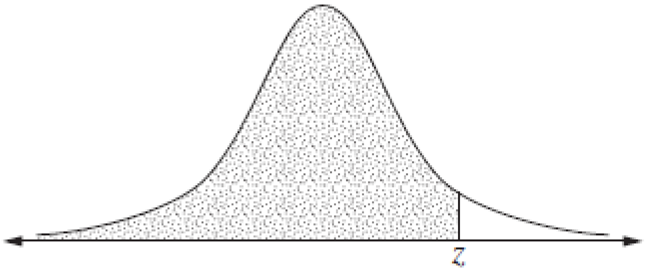
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{AEM}$ έχω : $\tan\boldsymbol{A\hat{E}M} = \frac{AM}{AE} = \frac{\sqrt{58}}{8} \Longrightarrow \boldsymbol{A\hat{E}M = 43.59^\circ} \cong \boxed{44^\circ}$ (πλησιέστερη μοίρα)

Ερώτηση 23 (4 βαθμοί)

Μια τυχαία μεταβλητή κατανέμεται κανονικά με μέσο όρο **0** και τυπική απόκλιση **1**. Ο πίνακας δίνει την πιθανότητα αυτή η τυχαία μεταβλητή να βρίσκεται κάτω από το $\boldsymbol{z}$ για ορισμένες θετικές τιμές του $\boldsymbol{z}$.

z	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	1.37	1.38	1.39
Πιθανότητα	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Οι τιμές πιθανότητας που δίνονται στον πίνακα αντιπροσωπεύονται από τη σκιασμένη περιοχή στο παρακάτω διάγραμμα.



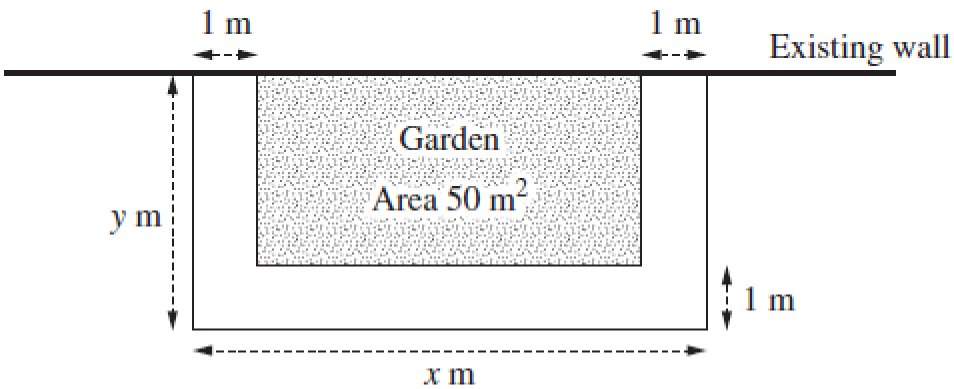
Τα βάρη των ενήλικων αρσενικών κοάλα σχηματίζουν κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{m} = \mathbf{10,40}\ \boldsymbol{kg}$ και τυπική απόκλιση $\boldsymbol{s} = \mathbf{1,15}\ \boldsymbol{kg}$. Σε μια ομάδα **400** ενήλικων αρσενικών κοάλα, πόσα αναμένεται να ζυγίζουν περισσότερο από **11,93** κιλά;

Λύση

Έχω $\boldsymbol{z} = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{11{,}93-10{,}40}{1{,}15} = \mathbf{1,33} \xRightarrow{\text{από πίνακα}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{z} < \mathbf{1,33}) = \mathbf{0,9082}$. Άρα η πιθανότητα ένα κοάλα να ζυγίζει περισσότερο από **11,93** κιλά είναι $\mathbf{1 - 0,9082 = 0,0918}$. Οπότε σε μια ομάδα **400** ενήλικων αρσενικών κοάλα, αναμένεται να ζυγίζουν περισσότερο από **11,93** κιλά, $\mathbf{0,0918 \cdot 400 = 36,72} \cong \boxed{\mathbf{36}}$ κοάλα. (δεκτό και το $\boxed{\mathbf{37}}$)

Ερώτηση 24 (5 βαθμοί)

Ένας κηπουρός θέλει να χτίσει έναν ορθογώνιο κήπο έκτασης $\mathbf{50}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}$ αντίκρυ σε έναν υπάρχοντα τοίχο που φαίνεται στο διάγραμμα. Ένα τσιμεντένιο μονοπάτι πλάτους 1 μέτρου πρόκειται να κατασκευαστεί γύρω από τις άλλες τρεις πλευρές του κήπου.



Έστω x και y οι διαστάσεις σε μέτρα του εξωτερικού ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Δείξτε ότι $\boldsymbol{y} = \frac{50}{x-2} + \mathbf{1}$ (βαθμός 1)

(β) Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ έτσι ώστε το εμβαδόν του τσιμεντένιου μονοπατιού να είναι ελάχιστο. Δείξτε ότι η απάντησή σας δίνει μια ελάχιστη τιμή. (βαθμοί 4)

Λύση

(α) Οι διαστάσεις του ορθογώνιο κήπου είναι $\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ και $\boldsymbol{y} - \mathbf{1}$. Άρα $(\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) \cdot (\boldsymbol{y} - \mathbf{1}) = \mathbf{50} \Rightarrow \frac{50}{x-2} \& = \boldsymbol{y} - \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{50}{x-2} + \mathbf{1}$

(β) Το εμβαδόν του μονοπατιού είναι $\boldsymbol{E = 2y + x - 2 = 2\left(\frac{50}{x-2}+1\right) + x - 2 = \frac{100}{x-2} + x}$ με $\boldsymbol{E'(x) = -\frac{100}{(x-2)^2} + 1}$. Για το ακρότατο έχω $\boldsymbol{E'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{100}{(x-2)^2} + 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 100 \Rightarrow x - 2 = \pm 10 \Rightarrow \boxed{x = 12}}$ ή $\boldsymbol{x = -8}$, απορρίπτεται. Έχω $\boldsymbol{E''(x) = \frac{200}{(x-2)^3}}$, άρα $\boldsymbol{E''(12) > 0}$ και το ακρότατο είναι ελάχιστο.

Ερώτηση 25 (6 βαθμοί)

Την πρώτη ημέρα του Νοεμβρίου, η Jia καταθέτει 10.000 \$ σε έναν νέο λογαριασμό που δίνει 0,4% επιτόκιο μηνιαίως, σε μηνιαία βάση. Στο τέλος κάθε μήνα, αφού προστεθεί το επιτόκιο στο λογαριασμό, η Jia σκοπεύει να κάνει ανάληψη \$M από τον λογαριασμό. Έστω $\boldsymbol{A_n}$ το ποσό (σε δολάρια) στον λογαριασμό της Jia στο τέλος των $\boldsymbol{n}$ μηνών.

(α) Να δείξετε ότι $\boldsymbol{A_2 = 10000(1.004)^2 - M(1.004) - M}$. (βαθμός 1)

(β) Να δείξετε ότι $\boldsymbol{A_n = (10000 - 250M)(1.004)^n + 250M}$ (βαθμοί 3)

(γ) Η Jia θέλει να μπορεί να κάνει τουλάχιστον 100 αναλήψεις. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του M που θα επιτρέψει στην Jia να το κάνει αυτό; (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{A_1 = 10\,000\ (1.004) - M}$ και

$$\boldsymbol{\begin{aligned} A_2 = A_1(1.004) - M &= (10\,000\ (1.004) - M)(1.004) - M \\ &= 10\,000\ (1.004)^2 - M(1.004) - M \end{aligned}}$$

(β) Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή: Για $\boldsymbol{n = 1}$, έχω $\boldsymbol{A_1 = (10000 - 250M)(1.004)^1 + 250M = 10\,000\ (1.004) - 251M + 250M = 10\,000\ (1.004) - M}$ που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{A_k = (10000 - 250M)(1.004)^k + 250M}$. Θα δείξω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k + 1}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{A_{k+1} = (10000 - 250M)(1.004)^{k+1} + 250M}$. Πράγματι, έχω

$\boldsymbol{A_{k+1} = A_k(1.004) - M = ((10000 - 250M)(1.004)^k + 250M)(1.004) - M =}$

$\boldsymbol{(10000 - 250M)(1.004)^{k+1} + 251M - M = (10000 - 250M)(1.004)^{k+1} + 250M}$, όπως θέλαμε.

(γ) Θέλω $\boldsymbol{A_{100} > 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} (10000 - 250M)(1.004)^{100} + 250M > 0 \Leftrightarrow 10000(1.004)^{100} - 250M(1.004)^{100} + 250M > 0 \Leftrightarrow 10000(1.004)^{100} > 250M((1.004)^{100} - 1) \Leftrightarrow \frac{10000(1.004)^{100}}{(1.004)^{100}-1} > 250M \Leftrightarrow \frac{40(1.004)^{100}}{(1.004)^{100}-1} > M \Leftrightarrow 121.527 > M}$. Άρα το μεγαλύτερο ποσό είναι $\boxed{\$\boldsymbol{121.52}}$

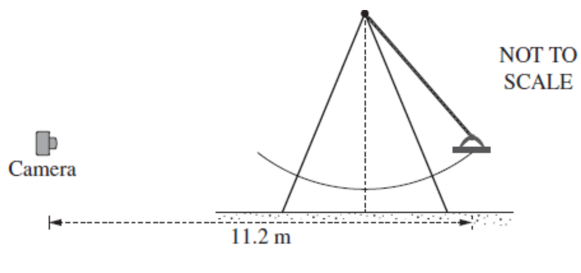
Ερώτηση 26 (4 βαθμοί)

Μια κάμερα κινηματογραφεί την κίνηση μιας κούνιας σε ένα πάρκο. Έστω $\boldsymbol{x(t)}$ η οριζόντια απόσταση, σε μέτρα, από την κάμερα μέχρι τη θέση της κούνιας στο $\boldsymbol{t}$ δευτερόλεπτο. Το κάθισμα αφήνεται από την ηρεμία σε οριζόντια απόσταση $\boldsymbol{11,2\ m}$ από την κάμερα.

(α) Ο ρυθμός μεταβολής του x μπορεί να μοντελοποιηθεί με την εξίσωση

$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = -1.5\pi \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right)}$.

Βρείτε έναν τύπο για το $\boldsymbol{x(t)}$. (βαθμοί 2)



(β) Πόσες φορές φτάνει η κούνια στο πλησιέστερο σημείο στην κάμερα κατά την διάρκεια των πρώτων 10 δευτερολέπτων; (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έχω με ολοκλήρωση ότι $\boldsymbol{x(t) = \int -1.5\pi \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right)dt = \frac{-1.5\pi}{\frac{5\pi}{4}} \cdot \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right)\right) + k =}$ $\boldsymbol{\frac{6}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right) + k = 1.2\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right) + k}$. Αφού $\boldsymbol{x(0) = 11,2 \Rightarrow 11.2 = 1.2cos(0) + k \Rightarrow k = 10}$.

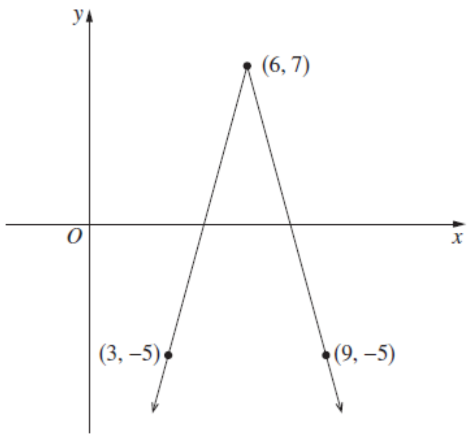
Άρα $\boxed{\boldsymbol{x(t) = 1.2\cos\left(\frac{5\pi}{4}t\right) + 10}}$

(β) Έχω $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{4}} = \frac{8}{5}}$. Ο αριθμός των ταλαντώσεων είναι στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα είναι

$\boldsymbol{\frac{t}{T} = \frac{10}{\frac{8}{5}} = \frac{50}{8} = 6,25}$, άρα θα η κούνια θα φτάσει στην κάμερα $\boxed{\boldsymbol{6}}$ φορές.

Ερώτηση 27 (5 βαθμοί)

Το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$, όπου $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a|x - b| + c}$, περνά από τα σημεία $\boldsymbol{(3, -5), (6, 7)}$ και $\boldsymbol{(9, -5)}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(α) Βρείτε τις τιμές των $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$. (βαθμοί 3)

(β) Η γραμμή $\boldsymbol{y = mx}$ τέμνει το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$ σε δυο διακριτά σημεία. Βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του $\boldsymbol{m}$. (βαθμοί 2)

Λύση

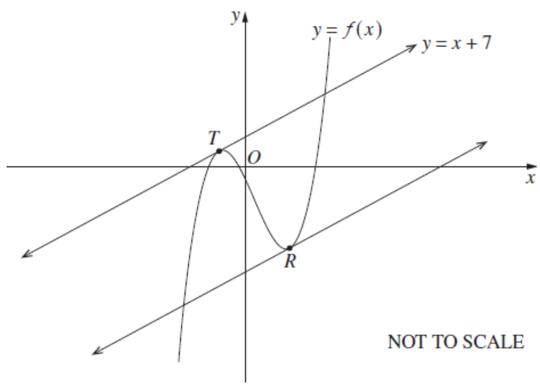
(α) Το γράφημα της $\boldsymbol{f}$ είναι μετατόπιση της $\boldsymbol{a|x|}$ κατά $\boxed{\boldsymbol{b = 6}}$ μονάδες δεξιά και $\boxed{\boldsymbol{c = 7}}$ μονάδες προς τα πάνω. Έχω ακόμα $\boldsymbol{f(3) = -5 \Rightarrow a|3 - 6| + 7 = -5 \Rightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{\alpha = -4}}$

(β) Η ευθεία γραμμή που ενώνει το σημείο $\boldsymbol{(6, 7)}$ με την αρχή των αξόνων έχει κλίση $\boldsymbol{\frac{7}{6}}$. Το $\boldsymbol{m}$ πρέπει να είναι μικρότερο από $\boldsymbol{\frac{7}{6}}$ για να τέμνει το γράφημα σε δύο σημεία. Η κλίση της δεξιάς πλευράς του γραφήματος είναι $\boldsymbol{-4}$, (δηλαδή το $\boldsymbol{\alpha}$) οπότε το $\boldsymbol{m}$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο από $\boldsymbol{-4}$ διαφορετικά θα τέμνει το γράφημα μόνο μία φορά. Επομένως $\boxed{\boldsymbol{-4 < m < \frac{7}{6}}}$.

Ερώτηση 28 (4 βαθμοί)

Η καμπύλη $\boldsymbol{y = f(x)}$ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $\boldsymbol{T(-1, 6)}$ είναι $\boldsymbol{y = x + 7}$. Στο σημείο $\boldsymbol{R}$, μια άλλη εφαπτομένη παράλληλη στην εφαπτομένη στο σημείο $\boldsymbol{T}$ σχεδιάζεται.

Η παράγωγος συνάρτηση της καμπύλης δίνεται από την $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 8}$. Βρείτε τις συντεταγμένες του $\boldsymbol{R}$.



Λύση

Έχω $\boldsymbol{f'(x_R) = \lambda = 1 \Rightarrow 3{x_R}^2 - 6x_R - 8 = 1 \Rightarrow 3{x_R}^2 - 6x_R - 9 = 0 \Rightarrow {x_R}^2 - 2x_R - 3 = 0 \Rightarrow (x_R - 3)(x_R + 1) = 0 \xRightarrow{x_R \neq x_{T=-1}} x_R = 3}$.

Ακόμα έχω $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 8 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 - 8x + k \xRightarrow{x_{T=-1}, y_{T=6}} 6 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 8(-1) + k \Rightarrow 6 = -1 - 3 + 8 + k \Rightarrow k = 2}$. Άρα $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 2 \Rightarrow f(x_R = 3) = 3^3 - 33^2 - 8 \cdot 3 + 2 = -22}$

Άρα το σημείο $\boldsymbol{R} = \boxed{(\boldsymbol{3, -22})}$

Ερώτηση 29 (βαθμοί 6)

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\boldsymbol{f(x)}$ που δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{για άλλες τιμές του } x \end{cases}}$

(α) Βρείτε την επικρατούσα τιμή (mode) της Χ (βαθμοί 2)

(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής από την δεδομένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (βαθμοί 2)

(γ) Χωρίς να υπολογίσετε τον μέσο όρο, να δείξετε ότι η επικρατούσα τιμή είναι μεγαλύτερη της διαμέσου (median). (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Η επικρατούσα τιμή θα είναι στο μέγιστο της $\boldsymbol{f(x)}$. Έχω $\boldsymbol{f'(x) = 24x - 36x^2 = 12x(2 - 3x)}$ **για** $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1}$ και $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ για $\boldsymbol{x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$. Έχω $\boldsymbol{f(0) = 0}$ και $\boldsymbol{f\left(\frac{2}{3}\right) = 12\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{48}{9}}$. $\boldsymbol{f''(x) = 24 - 72x}$ με $\boldsymbol{f''\left(\frac{2}{3}\right) = 24 - 72 \cdot \frac{2}{3} = -24 < 0}$, άρα στο $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ έχω μέγιστο. Άρα η επικρατούσα τιμή της Χ θα είναι $\boxed{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}$.

(β) Έχω $\boldsymbol{F(x) = \int_0^x 12t^2(1-t)dt = \int_0^x 12t^2 - 12t^3dt = [4t^3 - 3t^4]_0^x = \boxed{4x^3 - 3x^4}}$

(γ) Έχουμε ότι $\boldsymbol{F\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{27} - \frac{16}{27} = \frac{16}{27} > 0,5}$. Η πιθανότητα η μεταβλητή Χ να είναι μικρότερη από $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ είναι μεγαλύτερη από $\boldsymbol{0,5}$, επομένως η επικρατούσα τιμή είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσο.

Ερώτηση 30 (βαθμοί 5)

Έστω $\boldsymbol{f(x) = e^{-x}\sin x}$

(α) Βρείτε τις συντεταγμένες των κρίσιμων σημείων της $\boldsymbol{f(x)}$ για $\boldsymbol{0 \leq x \leq 2\pi}$. ΔΕΝ απαιτείται να δείξετε την φύση των σημείων αυτών. (βαθμοί 3)

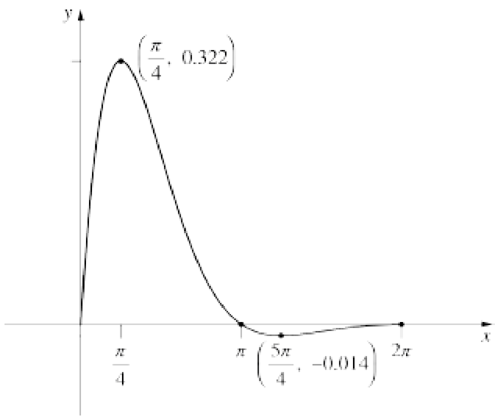
(β) Χωρίς την χρήση περισσότερης ανάλυσης, σχεδιάστε το γράφημα της $\boldsymbol{y = f(x)}$ για $\boldsymbol{0 \leq x \leq 2\pi}$, δείξτε τα κρίσιμα σημεία και τις τομές με τους άξονες. (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)}$

Για τα κρίσιμα σημεία αρκεί $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \overset{0\le x\le 2\pi}{\Longrightarrow} x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$ με $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\frac{\pi}{4}=e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{-\frac{5\pi}{4}}\sin\frac{5\pi}{4}=-e^{-\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα $\boxed{\left(\frac{\pi}{4},\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)}$ και $\boxed{\left(\frac{5\pi}{4},\frac{-e^{-\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)}$

(β) Έχω $f(x)=0$ όταν $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi, 2\pi$. Οπότε το διάγραμμα θα είναι



Ερώτηση 31 (5 μονάδες)

Τέσσερεις τελειόφοιτοι μαθητές θέλουν να οργανώσουν ένα πάρτι αποφοίτησης. Και οι τέσσερις μαθητές έχουν την ίδια πιθανότητα, $P(F)$, να είναι διαθέσιμοι την επόμενη Παρασκευή. Και οι τέσσερις μαθητές έχουν την ίδια πιθανότητα, $P(S)$, να είναι διαθέσιμοι το επόμενο Σάββατο. Δίνεται ότι $P(F)=\frac{3}{10}, P(S|F)=\frac{1}{3}$ και $P(F|S)=\frac{1}{8}$. Ο Kim είναι ένας από αυτούς τους μαθητές.

(α) Είναι η διαθεσιμότητα του Kim την επόμενη Παρασκευή ανεξάρτητη από την διαθεσιμότητα του το επόμενο Σάββατο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (βαθμός 1)

(β) Δείξτε ότι η πιθανότητα ο Kim να είναι διαθέσιμος το επόμενο Σάββατο είναι $\frac{4}{5}$. (βαθμοί 2)

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένας από τους 4 μαθητές να ΜΗΝ είναι διαθέσιμος το επόμενο Σάββατο; (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Όχι, αφού έχω $P(F|S) \neq P(F)$

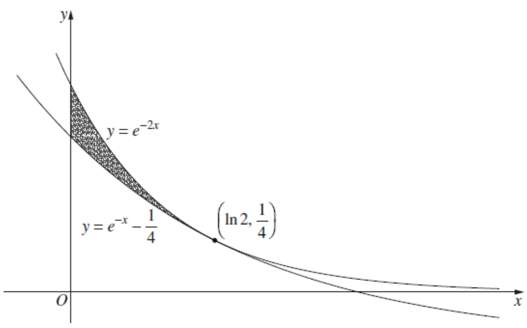
(β) Έχω $P(S|F)=\frac{P(S\cap F)}{P(F)} \Longrightarrow \frac{1}{3}=\frac{P(S\cap F)}{\frac{3}{10}} \Longrightarrow P(S\cap F)=\frac{1}{10}$

Ακόμα έχω $P(F|S)=\frac{P(S\cap F)}{P(S)} \Longrightarrow \frac{1}{8}=\frac{\frac{1}{10}}{P(S)} \Longrightarrow P(S)=\frac{8}{10}=\boxed{\frac{4}{5}}$

(γ) Είναι ίση με 1 μείον την πιθανότητα και οι 4 να είναι διαθέσιμοι άρα $1-\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1-\frac{256}{625}=\frac{369}{625}=\boxed{0.5904}$

Ερώτηση 32 (6 μονάδες)

Οι καμπύλες $y=e^{-2x}$ και $y=e^{-x}-\frac{1}{4}$ τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες $\left(\ln 2, \frac{1}{4}\right)$. (ΜΗΝ το δείξετε αυτό)



(α) Δείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των δυο καμπυλών και του άξονα των y, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, είναι ίσο με $\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{8}$ (βαθμοί 3) (β) Βρείτε τις τιμές του $\boldsymbol{k}$ για τις οποίες οι καμπύλες $\boldsymbol{y=e^{-2x}}$ και $\boldsymbol{y=e^{-x}+k}$ τέμνονται σε δύο σημεία. (βαθμοί 3)

Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{E=\int_0^{\ln 2} e^{-2x}-\left(e^{-x}-\frac{1}{4}\right)dx=\int_0^{\ln 2} e^{-2x}-e^{-x}+\frac{1}{4}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+e^{-x}+\frac{1}{4}x\right]_0^{\ln 2}}$

$$\boldsymbol{=\left(-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}+e^{-\ln 2}+\frac{1}{4}\ln 2\right)-\left(-\frac{1}{2}+1+0\right)=-\frac{1}{2}e^{\ln(2^{-2})}+e^{\ln(2^{-1})}+\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{8}}$$

(β) Θέλω η εξίσωση $\boldsymbol{e^{-2x}=e^{-x}+k}$ να έχει 2 ρίζες. Έχω ισοδύναμα $\boldsymbol{e^{-2x}-e^{-x}-k=0\Leftrightarrow(e^{-x})^2-(e^{-x})-k=0}$. Έχω λοιπόν ότι $\boldsymbol{e^{-x}=\frac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}}$, εφόσον $\boldsymbol{1+4k>0}$ και $\boldsymbol{1-\sqrt{1+4k}>0}$ αφού $\boldsymbol{e^{-x}>0}$.

Άρα πρέπει ταυτόχρονα να ισχύουν οι σχέσεις : $\boldsymbol{1+4k>0\ \textit{και}\ 1-\sqrt{1+4k}>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{4}\ \textit{και}\ 1>\sqrt{1+4k}\Leftrightarrow k>-\frac{1}{4}\ \textit{και}\ 1>1+4k\Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{4}<k<0}}$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Measurement

Length $\boldsymbol{l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r}$

Area

$$\boldsymbol{A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2}$$
$$\boldsymbol{A = \frac{h}{2}(a + b)}$$

Surface area

$$\boldsymbol{A = 2\pi r^2 + 2\pi r h,\ A = 4\pi r^2}$$

Volume

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}Ah}$$
$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Financial Mathematics

$$\boldsymbol{A = P(1 + r)^n}$$

Ακολουθίες – Σειρές

$$\boldsymbol{T_r = a + (n - 1)d}$$
$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(a + l)}$$
$$\boldsymbol{T_n = ar^{n-1}}$$
$$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1}$$
$$\boldsymbol{S = \frac{a}{1 - r}, |r| < 1}$$

Συναρτήσεις

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

For $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}}$$
$$\boldsymbol{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}}$$
$$\boldsymbol{\text{and} \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}}$$

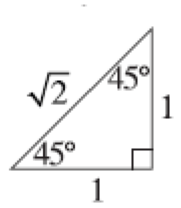
Σχέσεις

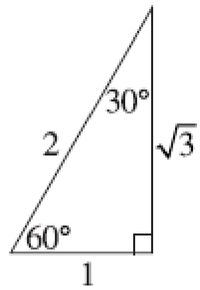
$$\boldsymbol{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις

$$\boldsymbol{\log_a a^x = x = a^{\log_a x}}$$
$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$
$$\boldsymbol{a^x = e^{x \ln a}}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις





$$\boldsymbol{\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

$$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

$$\boldsymbol{l = r\theta}$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\boldsymbol{\sec A = \frac{1}{\cos A}, \cos A \neq 0}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}, \sin A \neq 0}$$
$$\boldsymbol{\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \sin A \neq 0}$$
$$\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\boldsymbol{\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B}$$

$$\boldsymbol{\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B}$$

$$\boldsymbol{\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}}$$

if $\boldsymbol{t = \tan\frac{A}{2}}$ then $\boldsymbol{\sin A = \frac{2t}{1 + t^2}}$, $\boldsymbol{\cos A = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$, $\boldsymbol{\tan A = \frac{2t}{1 - t^2}}$

$$\boldsymbol{\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]}$$
$$\boldsymbol{\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]}$$
$$\boldsymbol{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]}$$
$$\boldsymbol{\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) - \sin(A - B)]}$$
$$\boldsymbol{\sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)}$$
$$\boldsymbol{\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)}$$

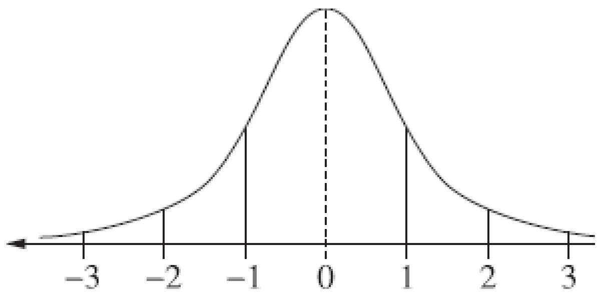
Statistical Analysis

$$\boldsymbol{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

An outlier is a score less than $\boldsymbol{Q_1 - 1.5 \times IQR}$

Or more than $\boldsymbol{Q_3 + 1.5 \times IQR}$

Normal Distribution



Approximately 68% of scores have z-scores between -1 and 1

Approximately 95% of scores have z-scores between -2 and 2

Approximately 99,7% of scores have z-scores between -3 and 3P

$\boldsymbol{E(X) = \mu}$
$\textbf{Var}\ (\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2}$

Probability

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0}$

Continuous random variables

$\boldsymbol{P(X \leq r) = \int_a^r f(x)dx}$

$\boldsymbol{P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx}$

Binomial distribution

$\boldsymbol{P(X = r) = {}^nC_r p^r (1-p)^{n-r}}$
$\boldsymbol{X \sim \textbf{Bin}(n, p)}$
$\boldsymbol{\to P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n}$

$\boldsymbol{E(X) = np}$
$\textbf{Var}\ (\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{np(1-p)}$

Combinatorics

$\boldsymbol{{}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$
$\binom{n}{r} = \boldsymbol{{}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$
$\boldsymbol{(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}a^r + \cdots + a^n}$

Vectors

$\boldsymbol{|u| = |xi + yj| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$\boldsymbol{u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2,}$
where $\boldsymbol{u = x_1 i + y_1 j}$
and $\boldsymbol{v = x_2 i + y_2 j}$

$\boldsymbol{r = a + \lambda b}$

Complex Numbers

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z = a + ib} &= \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \boldsymbol{re^{i\theta}} \\ \boldsymbol{[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n} &= \boldsymbol{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \\ &= \boldsymbol{r^n e^{in\theta}} \end{aligned}$$

Mechanics

$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}v^2)}$
$\boldsymbol{x = a\cos(nt + \alpha) + c}$
$\boldsymbol{x = a\sin(nt + \alpha) + c}$
$\boldsymbol{\ddot{x} = -n^2(x - c)}$

Differential Calculus

Function	Derivative
$y = f(x)^n$	$\frac{dy}{dx} = nf'(x)[f(x)]^{n-1}$
$y = uv$	$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
$y = g(u)$ where $u = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
$y = \frac{u}{v}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
$y = \sin f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\cos f(x)$
$y = \cos f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -f'(x)\sin f(x)$
$y = \tan f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\sec^2 f(x)$
$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$
$y = \ln f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = (\ln a)f'(x)a^{f(x)}$
$y = \log_a f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{(\ln a)f(x)}$
$y = \sin^{-1} f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \cos^{-1} f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \tan^{-1} f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Integral Calculus

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$$

where $n \neq -1$

$$\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x)\sec^2 f(x)\,dx = \tan f(x) + c$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x)a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}dx = \sin^{-1}\frac{f(x)}{a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{f(x)}{a} + c$$

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + f(b) + 2\left[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]\right\}$$

where $a = x_0$ and $b = x_n$

2023 HIGHER SCHOOL CERTIFICATE EXAMINATION

Mathematics Extension 1

Μέρος I

10 βαθμοί

Περίπου 15 λεπτά για αυτήν την ενότητα

1. Η θερμοκρασία $\boldsymbol{T(t)}°\boldsymbol{C}$ ενός αντικειμένου τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ (σε δευτερόλεπτα) μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας το νόμο του Νεύτωνα της ψύξης, $\boldsymbol{T(t) = 15 + 4e^{-3t}}$. Ποια είναι η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου;

   A. −3 B. 4 C. 15 D. 19

   Λύση

   Έχω $\boldsymbol{T(0) = 15 + 4e^{0}} = \boldsymbol{19}$, άρα D.

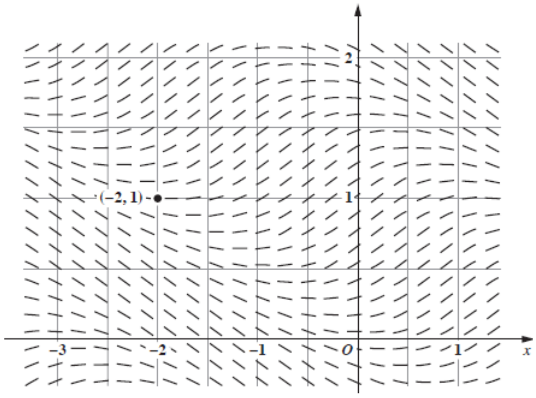
2. Ένα τυπικό ζάρι έξι όψεων ρίχνεται 12 φορές. Έστω $\boldsymbol{\hat{p}}$ η πιθανότητα να έχει το ζάρι αποτέλεσμα 2. Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 9 από τις ζαριές να έχουν αποτέλεσμα 2;

   A. $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \geq \frac{3}{4}\right)$ B. $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \geq \frac{1}{6}\right)$ C. $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \leq \frac{3}{4}\right)$ D. $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \leq \frac{1}{6}\right)$

   Λύση

   Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \geq \frac{9}{12}\right) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\hat{p}} \geq \frac{3}{4}\right)$, άρα A.

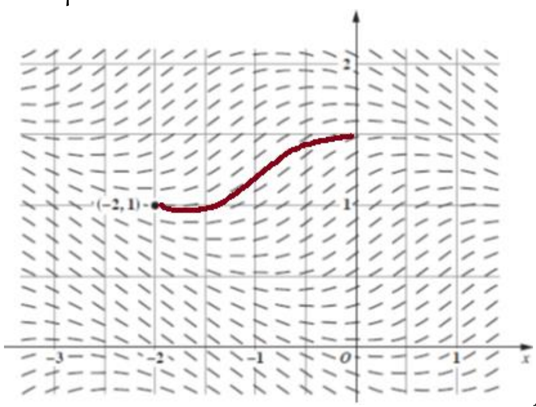
3. Το διάγραμμα δείχνει το πεδίο κατεύθυνσης μιας διαφορικής εξίσωσης. Μια ιδιαίτερη λύση για η διαφορική εξίσωση διέρχεται από το σημείο (−2, 1).



   Πού τέμνει τον άξονα y η λύση που διέρχεται από το σημείο (−2, 1);

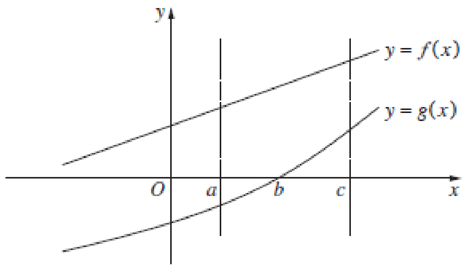
   A. y = 1.12 B. y = 1. 34 C. y = 1. 56 D. y = 1.78

   Λύση



   Άρα C.

4. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τα γραφήματα των συναρτήσεων $\boldsymbol{f(x)}$ και $\boldsymbol{g(x)}$.



Δίνεται ότι $\int_a^c f(x)dx = 10$, $\int_a^b g(x)dx = -2$, $\int_b^c g(x)dx = 3$.

Ποιο το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στις καμπύλες $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ και $x = c$;

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

Λύση

Έχω $E = \int_a^c f(x) - g(x)dx = \int_a^c f(x) - g(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx = 10 - (\int_a^b g(x)dx + \int_b^c g(x)dx) = 10 - (-2+3) = 9$. Άρα C

5. Ποια η τιμή του $\sin^{-1}(\sin a)$ όπου $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$;

A. $a - \pi$ B. $\pi - a$ C. a D. $-a$

Λύση

Έχω $\sin^{-1}(\sin x) = x$, αν $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ακόμα έχω $\pi < a < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi > -a > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \pi - \pi > \pi - a > \pi - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 > \pi - a > -\frac{\pi}{2}$. Άρα $\sin^{-1}(\sin a) = \sin^{-1}(\sin \pi - a) = \pi - a$. Άρα B

6. Δεδομένων των δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$, έστω $\vec{c}$ η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$. Ποια είναι η προβολή του $10\vec{a}$ στο $2\vec{b}$;

A. $2\vec{c}$ B. $5\vec{c}$ C. $10\vec{c}$ D. $20\vec{c}$

Λύση

Έχω $\boxed{\vec{c} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}$. Η ζητούμενη προβολή είναι $\frac{10\vec{a}2\vec{b}}{|2\vec{b}|}\frac{2\vec{b}}{|2\vec{b}|} = 10\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{b}|}\vec{b} = 10\vec{c}$, άρα C

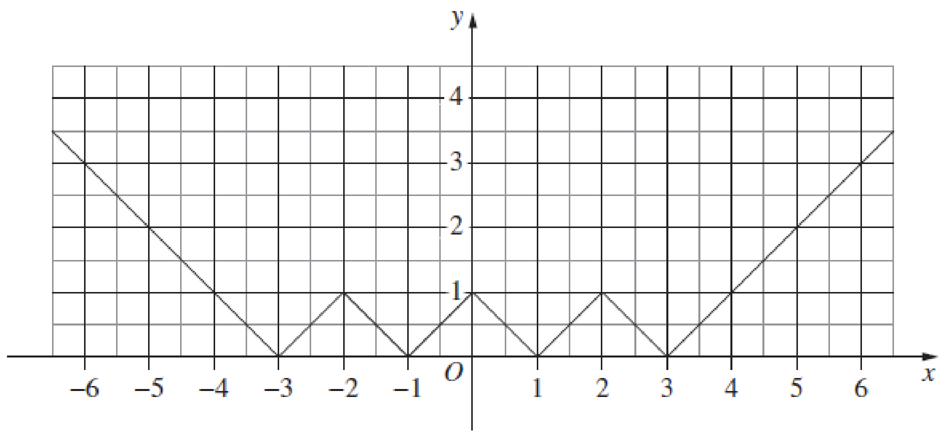
7. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής για τους πραγματικούς αριθμούς a και b όπου $-1 \le a < b \le 1$;

A. $\sec a < \sec b$ B. $\sin^{-1} a < \sin^{-1} b$ C. $\arccos a < \arccos b$

D. $\cos^{-1} a + \sin^{-1} a < \cos^{-1} b + \sin^{-1} b$

Λύση

Η $\sec x$ είναι φθίνουσα στο $[-1, 0]$ και αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα η Α απορρίπτεται. Η $\sin^{-1} x$ είναι αύξουσα στο $[-1, 1]$ άρα η Β ισχύει. Η $\arccos x$ έχει παράγωγο $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$, άρα είναι φθίνουσα, οπότε η C απορρίπτεται. Το διάγραμμα δείχνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Η $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε x, άρα και η D απορρίπτεται.



8.

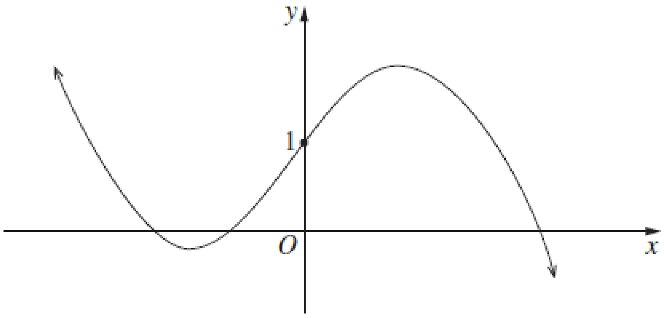
Ποιο από τα παρακάτω είναι η εξίσωση της συνάρτησης;

A. $y = \left|1 - \left||x| - 2\right|\right|$ B. $y = \left|2 - \left||x| - 1\right|\right|$ C. $y = |1 - |x - 2||$ D. $y = |2 - |x - 1||$

Λύση

Η B απορρίπτεται αφού για $x = 1$, έχω $y = \left|2 - \left||1| - 1\right|\right| = 2$, αλλά το σημείο $(1, 2)$ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση. Η C απορρίπτεται αφού για $x = 6$, έχω $y = |1 - |6 - 2|| = 3$, αλλά το σημείο (6,3) δεν ανήκει στην γραφική παράσταση. Η D απορρίπτεται αφού για $x = 1$, έχω $y = |2 - |1 - 1|| = 2$, αλλά το σημείο (1,2) δεν ανήκει στην γραφική παράσταση. Άρα A

9. Η γραφική παράσταση μιας κυβικής συνάρτησης, $y = f(x)$, δίνεται παρακάτω.



Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει αντίστροφη σχέση της οποίας η γραφική παράσταση έχει περισσότερα από 3 σημεία με συντεταγμένη $x = 1$;

A. $y = \sqrt{f(x)}$ B. $y = \frac{1}{f(x)}$ C. $y = f(|x|)$ D. $y = |f(x)|$

Λύση

Έστω y^{-1} η αντίστροφη σχέση της $y(x)$ με $y^{-1}(1) = \alpha$. Τότε $y(\alpha) = 1$, δηλαδή το α είναι ρίζα της $y(x) = 1$.

Αν $y(x) = \sqrt{f(x)}$, τότε η εξίσωση $1 = \sqrt{f(x)} \Leftrightarrow 1 = f(x)$ έχει , όπως φαίνεται από το γράφημα, ακριβώς 3 διακριτές ρίζες, άρα η A απορρίπτεται.

Αν $y(x) = \frac{1}{f(x)}$, τότε η εξίσωση $1 = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow 1 = f(x)$ έχει , όπως φαίνεται από το γράφημα, ακριβώς 3 διακριτές ρίζες, άρα η B απορρίπτεται.

Αν $y(x) = f(|x|)$, τότε η εξίσωση $1 = f(|x|)$ έχει, ακριβώς 3 διακριτές ρίζες, το 0 , μια θετική ρίζα, έστω c, και την αντίθετή της, την $-c$, άρα η C απορρίπτεται.

Αν $y(x) = |f(x)|$, τότε η εξίσωση $1 = |f(x)| \Leftrightarrow \pm 1 = f(x)$ έχει , όπως φαίνεται από το γράφημα, ακριβώς 4 διακριτές ρίζες, οι τρεις από την $1 = f(x)$ και η τέταρτη από την $-1 = f(x)$ που έχει μια ακριβώς θετική ρίζα στα δεξιά του γραφήματος, άρα D.

10. Μια ομάδα με 5 μαθητές και 3 δασκάλους θα τακτοποιηθεί σε κύκλο.

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό εάν δεν μπορούν να καθίσουν μαζί περισσότεροι από 2 μαθητές;

A. $4! \times 3!$ B. $5! \times 3!$ C. $2! \times 5! \times 3!$ D. $2! \times 2! \times 2! \times 3!$

Λύση

Η μόνη δυνατή διάταξή τους σε κύκλο είναι η ΜΜΔΜΔΜΜΔ. (Δεν διαφέρει από την ΜΜΔΜΜΔΜΔ, αφού είναι σε κύκλο). Άρα έχω $5!$ συνδυασμούς για τους μαθητές επί $3!$ συνδυασμούς για τους δασκάλους, άρα B.

Ενότητα ΙΙ

Περίπου 1 ώρα και 45 λεπτά για αυτήν την ενότητα.

Ερώτηση 11 (16 βαθμοί)

(α) Οι παραμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας δίνονται παρακάτω.

$\boldsymbol{x = 1 + 3t, y = 4t}$.

Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση αυτής της ευθείας με τη μορφή $\boldsymbol{y = mx + c}$. (βαθμοί 2)

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα γράμματα της λέξης CONDOBOLIN σε μια γραμμή; (βαθμοί 2)

(γ) Θεωρήστε το πολυώνυμο $\boldsymbol{P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x - 12}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Δίνεται ότι το $\boldsymbol{x + 1}$ είναι παράγοντας του $\boldsymbol{P(x)}$ και ότι, όταν το $\boldsymbol{P(x)}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{x - 2}$, το υπόλοιπο είναι $\boldsymbol{-18}$. Βρείτε τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$. (βαθμοί 3)

(δ) Βρείτε το $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx$. (βαθμοί 2)

(ε) Λύστε την $\boldsymbol{\cos\theta + \sin\theta = 1}$ για $\boldsymbol{0 \le \theta \le 2\pi}$ (βαθμοί 3)

(στ) Μια πρόσφατη απογραφή διαπίστωσε ότι το 30% των Αυστραλών γεννήθηκαν στο εξωτερικό. Ερευνήθηκε ένα δείγμα 900 τυχαία επιλεγμένων Αυστραλών. Έστω $\boldsymbol{\hat{p}}$ η αναλογία δείγματος των ερωτηθέντων που γεννήθηκαν στο εξωτερικό. Πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια κανονική κατανομή για την προσέγγιση του $\boldsymbol{P(\hat{p} \le 0,31)}$.

(i) Δείξτε ότι η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\boldsymbol{\hat{p}}$ είναι $\frac{7}{30\,000}$ (βαθμοί 2)

(ii) Χρησιμοποιήστε την τυπική κανονική κατανομή και τις πληροφορίες στη σελίδα 16?? για να βρείτε κατά προσέγγιση την $\boldsymbol{P(\hat{p} \le 0,31)}$, δίνοντας την απάντησή σας με δύο δεκαδικά ψηφία.

Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{4x = 4 + 12t, 3y = 12t}$. Άρα $\boldsymbol{4x = 4 + 3y} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}}}$

(β) Έχω 10 γράμματα, το O επαναλαμβάνεται 3 φορές, το N δύο φορές, άρα έχω $\frac{10!}{2!3!} = \boxed{\mathbf{302400}}$ διατάξεις.

(γ) Αφού το $\boldsymbol{x + 1}$ είναι παράγοντας του $\boldsymbol{P(x)}$, έχω $\boldsymbol{P(-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta - 13 = 0}$. Αφού όταν το $\boldsymbol{P(x)}$ διαιρείται με το $\boldsymbol{x - 2}$, το υπόλοιπο είναι $\boldsymbol{-18}$, έχω $\boldsymbol{P(2) = -18 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta - 4 = -18 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta + 7 = 0}$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχω $\boldsymbol{3\alpha - 6 = 0} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha = 2}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\beta = -11}}$

(δ) Έχω $\boldsymbol{I} = \int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} dx$. Θέτω $\boldsymbol{t} = \frac{3x}{2} \Rightarrow \boldsymbol{dt} = \frac{3}{2}\boldsymbol{dx} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \frac{2}{3}\boldsymbol{dt}$.

Άρα $\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{2}{3} dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{3}\sin^{-1}(t) + c = \boxed{\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + c}$

(ε) Έχω $\boldsymbol{\cos\theta + \sin\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = 0} \xRightarrow{0 \le \theta \le 2\pi} \boldsymbol{\theta} =$ $\boldsymbol{0}$ ή $\frac{\pi}{2}$ ή $\boldsymbol{\pi}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ ή $\boldsymbol{2\pi}$, από τις οποίες επαληθεύουν την αρχική μόνο οι $\boxed{\boldsymbol{\theta = 0} \text{ ή } \frac{\pi}{2} \text{ ή } \boldsymbol{2\pi}}$.

(στ) (i) Έχω $\boldsymbol{p(\gamma\varepsilon\nu\nu\eta\theta\eta\kappa\varepsilon\ \sigma\tau o\ \varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{o}) = 0.3}$, $\boldsymbol{1 - p = 0.7}$, $\boldsymbol{n = 900}$. Άρα $\boldsymbol{Var(\hat{p}) = \sigma^2} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.3\ 0.7}{900} = \frac{7}{30\,000}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{P(\hat{p} \leq 0{,}31) = P(\hat{p} - p \leq 0.31 - 0.30) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sigma} \leq \frac{0.01}{\sqrt{\frac{7}{30\,000}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{\sqrt{7}}\right) = P(Z \leq 0.6546..) \cong}$ $\boldsymbol{P(Z \leq 0.65) = 0.7422 \cong \boxed{0.74}}$, όπως φαίνεται από τον πίνακα παρακάτω.

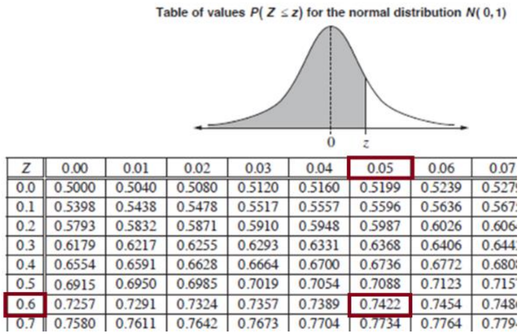


Table of values $P(Z \leq z)$ for the normal distribution $N(0,1)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.527
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.567
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.606
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.644
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.680
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.715
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.748
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.779

Ερώτηση 12

(α) Βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{\int_3^4 (x+2)\sqrt{x-3}\,dx}$ κάνοντας την αντικατάσταση $\boldsymbol{u = x - 3}$ (βαθμοί 3)

(β) Με χρήση μαθηματικής επαγωγής δείξτε ότι για κάθε $\boldsymbol{n \geq 1}$ ισχύει ότι

$\boldsymbol{(1 \times 2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \cdots + (n \times 2^n) = 2 + (n-1)2^{n+1}}$ (βαθμοί 3)

(γ) Ένα γυμναστήριο διαθέτει 9 κομμάτια για τον εξοπλισμό του: 5 διαδρόμους και 4 μηχανές κωπηλασίας. Κατά μέσο όρο, κάθε διάδρομος χρησιμοποιείται το 65% του χρόνου και κάθε κωπηλατική μηχανή χρησιμοποιείται το 40% του χρόνου.

(i) Βρείτε μια έκφραση για την πιθανότητα ότι, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, να είναι ακριβώς 3 από τους 5 διαδρόμους σε χρήση. (βαθμοί 2)

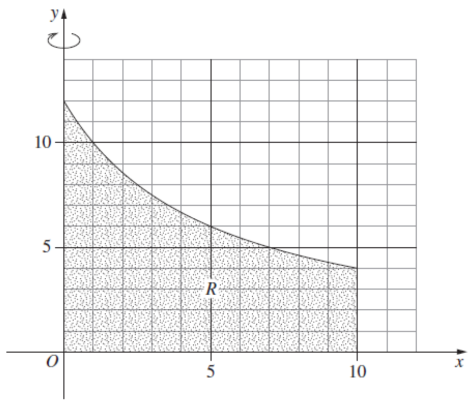
(ii) Βρείτε μια έκφραση για την πιθανότητα ότι, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, να είναι ακριβώς 3 από τους 5 διαδρόμους σε χρήση και να μην χρησιμοποιούνται κωπηλατικά μηχανήματα. (βαθμός 1)

(δ) Δίνεται ότι $\boldsymbol{{}^{n}C_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r}$ για όλους τους ακέραιους με $\boldsymbol{1 \leq r \leq n-1}$. (Να ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό).

Βρείτε ΈΝΑ πιθανό συνδυασμό των $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ με $\boldsymbol{{}^{2022}C_{80} + {}^{2022}C_{81} + {}^{2023}C_{1943} = {}^{p}C_q}$.

(ε) Η περιοχή, R, ορίζεται από την υπερβολή $\boldsymbol{y = \frac{60}{x+5}}$, την ευθεία $\boldsymbol{x = 10}$ και τους δύο άξονες συντεταγμένων.

Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της επιφάνειας R γύρω από τον άξονα των y. Δώστε την απάντηση ακριβώς.



Λύση

(α) Έχω $\boldsymbol{u = x - 3 \Longrightarrow u + 5 = x + 2, du = dx, u = 0}$ για $\boldsymbol{x = 3}$, $\boldsymbol{u = 1}$ για $\boldsymbol{x = 4}$. Άρα $\boldsymbol{\int_3^4 (x+2)\sqrt{x-3}\,dx =}$ $\boldsymbol{\int_0^1 (u+5)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} + 5u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{56}{15}}}$

(β) Για $\boldsymbol{n = 1}$ ισχύει, αφού $\boldsymbol{(1 \times 2) = 2 + (1-1)2^{1+1} = 2}$.

Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{(1 \times 2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \cdots + (k \times 2^k) = 2 + (k-1)2^{k+1}}$.

Θα δείξω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n = k + 1}$, δηλαδή ότι

$$(1 \times 2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \cdots + (k \times 2^k) + \left((k+1) \times 2^{k+1}\right) = 2 + (k + 1 - 1)2^{k+1+1} = 2 + k \times 2^{k+2}$$

Έχω $(1 \times 2) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \cdots + (k \times 2^k) + \left((k+1) \times 2^{k+1}\right) = 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1) \times 2^{k+1} = 2 + (k - 1 + k + 1) \times 2^{k+1} = 2 + 2k \times 2^{k+1} = 2 + k \times 2^{k+2}$, όπως θέλαμε.

(γ) (i) Είναι $p = {}^5C_3(0.65)^3(1-0.65)^2 = \boxed{10(0.65)^3(0.35)^2}$

(ii) Είναι $p' = p \times (1 - 0.40)^4 = \boxed{10(0.65)^3(0.35)^2(0.60)^4}$

(δ) ${}^{2022}C_{80} + {}^{2022}C_{81} + {}^{2023}C_{1943} = {}^{2022}C_{80} + {}^{2022}C_{81} + {}^{2023}C_{2023-1943} = {}^{2022}C_{80} + {}^{2022}C_{81} + {}^{2023}C_{80} = {}^{2023}C_{81} + {}^{2023}C_{80} = \boxed{{}^{2024}C_{81}}$

(ε) Έχω $y = \frac{60}{x+5} \Leftrightarrow x + 5 = \frac{60}{y} \Leftrightarrow x = \frac{60}{y} - 5$

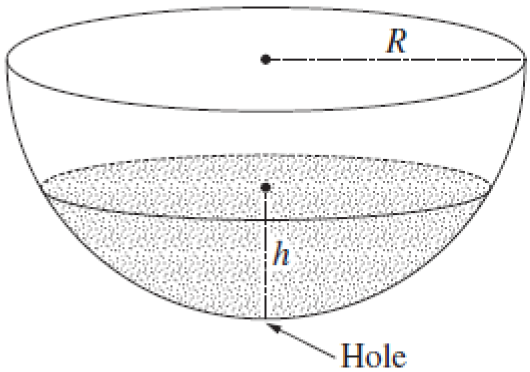
Το άνω κομμάτι του στερεού προκύπτει από την περιστροφή του κομματιού της υπερβολής με τεταγμένες $4 < y < 12$. Ο όγκος του είναι $V_1 = \pi \int_4^{12} x^2 dy = \pi \int_4^{12} (\frac{60}{y} - 5)^2 dy = \pi \int_4^{12} \frac{3600}{y^2} - \frac{600}{y} + 25 dy = \pi[-\frac{3600}{y} - 600\ln\ y + 25y]_4^{12} = \pi\left[\left(-\frac{3600}{12} - 600\ln\ 12 + 25 \times 12\right) - \left(-\frac{3600}{4} - 600\ln\ 4 + 25 \times 4\right)\right] = \pi(-600\ln\ 12 + 800 + 600\ln\ 4) = \pi(800 - 600\ln 3)$.

Το κάτω κομμάτι είναι κύλινδρος ακτίνας 10 και ύψους 4 άρα $V_2 = \pi \times 10^2 \times 4 = 400\pi$

Τελικά ο όγκος του στερεού είναι $V_1 + V_2 = \pi(1200 - 600\ln 3) = \boxed{600\pi(2 - \ln 3)}$

Ερώτηση 13

(α) Μια ημισφαιρική δεξαμενή νερού έχει ακτίνα $\boldsymbol{R\ cm}$. Η δεξαμενή έχει μια τρύπα στο κάτω μέρος που επιτρέπει την αποστράγγιση του νερού.



Αρχικά η δεξαμενή είναι άδεια. Το νερό χύνεται στη δεξαμενή με σταθερό ρυθμό $2kR\text{cm}^3\text{s}^{-1}$, όπου $\boldsymbol{k}$ είναι θετική σταθερά.

Μετά από $\boldsymbol{t}$ δευτερόλεπτα, το ύψος του νερού στη δεξαμενή είναι $\boldsymbol{h\ cm}$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, και ο όγκος του νερού στη δεξαμενή είναι $\boldsymbol{V\ cm^3}$.

Είναι γνωστό ότι $V = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$. (ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό.)

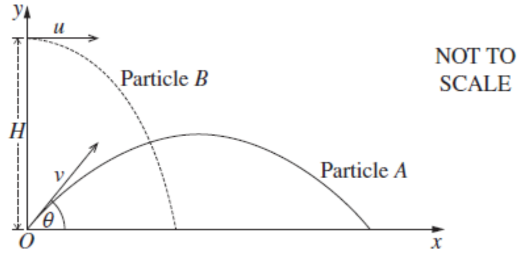
Ενώ το νερό ρέει στη δεξαμενή ταυτόχρονα αποστραγγίζεται από τον πυθμένα, ο ρυθμός της μεταβολής του όγκου του νερού στη δεξαμενή δίνεται με $\frac{dV}{dt} = k(2R - h)$

(i) Δείξτε ότι $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{\pi h}$ (βαθμοί 2)

(ii) Δείξτε ότι η δεξαμενή είναι γεμάτη νερό μετά από $T = \frac{\pi R^2}{2k}$ δευτερόλεπτα. (βαθμοί 2)

(iii) Μόλις γεμίσει η δεξαμενή, το νερό σταματά να ρέει στη δεξαμενή, αλλά αυτό συνεχίζει να στραγγίζει από την τρύπα στο κάτω μέρος όπως πριν. Δείξτε ότι η δεξαμενή χρειάζεται 3 φορές περισσότερο χρόνο για να αδειάσει από ό,τι για να γεμίσει (βαθμοί 3).

(β) Το σωματίδιο Α φεύγει από την αρχή των αξόνων με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{v}\ \mathbf{ms^{-1}}$ υπό γωνία $\boldsymbol{\theta}$ με το οριζόντιο επίπεδο. Ταυτόχρονα, το σωματίδιο Β φεύγει οριζόντια με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{u}\ \mathbf{ms^{-1}}$ από σημείο που βρίσκεται $\boldsymbol{H}$ μέτρα πάνω από την αρχή, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου Α, $\boldsymbol{t}$ δευτερόλεπτα μετά την βολή του, δίνεται από

$\mathbf{r}_A(t) = \begin{pmatrix} vt\cos\theta \\ vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$. (ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό.)

Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου Β, $\boldsymbol{t}$ δευτερόλεπτα μετά την βολή του, δίνεται από

$\mathbf{r}_B(t) = \begin{pmatrix} ut \\ H - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$. (ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό.)

Η γωνία $\boldsymbol{\theta}$ επιλέγεται έτσι ώστε $\tan\theta = 2$.

Τα δύο σωματίδια συγκρούονται.

(i) Δείχνοντας πρώτα ότι $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, επαληθεύστε ότι $v = \sqrt{5}\,u$. (βαθμοί 2)

(ii) Δείξτε ότι τα σωματίδια συγκρούονται τη στιγμή $T = \frac{H}{2u}$ (βαθμός 1)

Όταν τα σωματίδια συγκρούονται, τα διανύσματα ταχύτητάς τους είναι κάθετα.

(iii) Δείξτε ότι $H = \frac{2u^2}{g}$ (βαθμοί 3)

(iv) Πριν από τη σύγκρουση, η τροχιά του σωματιδίου Α ήταν παραβολή. (ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό.) Βρείτε το ύψος της κορυφής αυτής της παραβολής πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Δώστε την απάντησή σας ως προς το $\boldsymbol{H}$. (βαθμοί 2)

Λύση

(α) (i) Έχω $V = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow \frac{dV}{dh} = \pi(2Rh - h^2)$. Άρα $\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\frac{dV}{dh}}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi(2Rh-h^2)}k(2R-h) = \frac{k}{\pi h}$

(ii) Αφού $\frac{dh}{dt} = \frac{k}{\pi h} \Rightarrow \pi h dh = k dt \Rightarrow \frac{\pi}{2}h^2 = kt + c$. Αφού την $t = 0, h = 0$ προκύπτει ότι $c = 0$. Άρα $\frac{\pi}{2}h^2 = kt$. Την $t = T, h = R$. Άρα $\frac{\pi}{2}R^2 = kT \Rightarrow T = \frac{\pi R^2}{2k}$.

(iii) Αφού πλέον το νερό δεν χύνεται πλέον στην δεξαμενή με τον σταθερό ρυθμό $2kR$ θα έχω πλέον ότι $\frac{dV}{dt} = k(2R-h) - 2kR \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -kh \Rightarrow \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = -kh \Rightarrow \pi(2Rh - h^2)\frac{dh}{dt} = -kh \Rightarrow \pi(2R-h)dh = -kdt \Rightarrow \pi\left(2Rh - \frac{h^2}{2}\right) = -kt + c$. Αφού $t = 0, h = R$ έχω $\pi\left(2R^2 - \frac{R^2}{2}\right) = c \Rightarrow c = \pi\frac{3R^2}{2}$ άρα $\pi\left(2Rh - \frac{h^2}{2}\right) = -kt + \pi\frac{3R^2}{2}$. Αφού την $t = T', h = 0$, έχω $0 = -kT' + \pi\frac{3R^2}{2} \Rightarrow T' = \pi\frac{3R^2}{2k} = 3T$

(β) (i) Έχω $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 5 \xRightarrow{\cos\theta>0} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Την στιγμή Τ της σύγκρουσης έχω $vt\cos\theta = ut \Rightarrow v\frac{1}{\sqrt{5}} = u \Rightarrow v = \sqrt{5}\,u$

(ii) Την στιγμή Τ της σύγκρουσης έχω ακόμη ότι $vT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2 = H - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow vT\sin\theta = H \Rightarrow \sqrt{5}\,uT\sin\theta = H \Rightarrow T = \frac{H}{\sqrt{5}\,u\sin\theta} = \frac{H}{u\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{H}{u\tan\theta} = \frac{H}{2u}$

(iii) Έχω $\mathbf{v}_A(t) = \begin{pmatrix} d(vt\cos\theta) \\ d(vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta - gt \end{pmatrix}$ και $\mathbf{V}_B(t) = \begin{pmatrix} u \\ H - gt \end{pmatrix}$. Αφού τα διανύσματα αυτά την στιγμή T της σύγκρουσης είναι κάθετα θα έχω $\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta - gT \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ -gT \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v\cos\theta u + (v\sin\theta - gT)(H - gT) = 0 \Rightarrow uu + \left(\frac{u}{\cos\theta}\sin\theta - gT\right)(-gT) = 0 \Rightarrow u^2 + (2u - gT)(-gT) = 0 \Rightarrow u^2 - 2gTu + (gT)^2 = 0 \Rightarrow (u - gT)^2 = 0 \Rightarrow u = gT = g\frac{H}{2u} \Rightarrow H = \frac{2u^2}{g}$

(iv) Το ύψος της παραβολής είναι $y(t) = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ και την στιγμή που θα φτάσει στην κορυφή θα είναι $y'(T) = 0$

Έχω $y'(t) = v\sin\theta - gt$. Άρα $0 = v\sin\theta - gT \Rightarrow v\sin\theta = gT$. Άρα το ζητούμενο ύψος είναι το

$$y(T) = vT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2 = gT^2 - \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\theta}{g} = \frac{1}{2}\frac{5u^2\frac{4}{5}}{g} = \frac{2u^2}{g} = \boxed{H}$$

Ερώτηση 14

(α) Έστω $f(x) = 2x + \ln x,\ x > 0$.

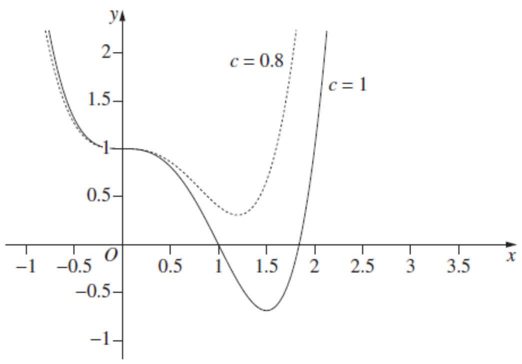
(i) Εξηγήστε γιατί η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη. (βαθμός 1)

(ii) Έστω $g(x) = f^{-1}(x)$. Λαμβάνοντας υπόψιν την τιμή $f(1)$, ή με άλλον τρόπο, υπολογίστε την τιμή $g'(2)$. (βαθμοί 2)

(β) Θεωρούμε την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και τον κύκλο $(x - c)^2 + y^2 = c^2$, όπου c μια σταθερά.

(i) Δείξτε ότι οι τετμημένες των σημείων τομής της υπερβολής με τον κύκλο είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^4 - 2cx^3 + 1$ (βαθμός 1)

(ii) Τα γραφήματα της $y = x^4 - 2cx^3 + 1$ για $c = 0.8$ και $c = 1$ φαίνονται στο σχήμα

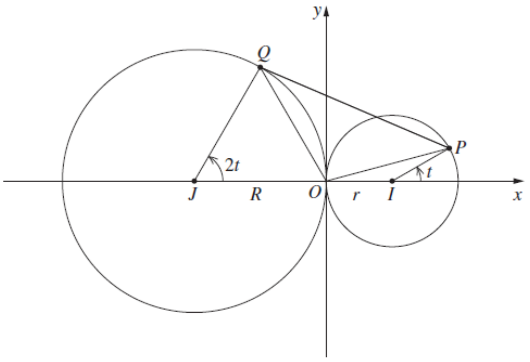


Με την βοήθεια των γραφημάτων αυτών, ή με άλλον τρόπο, βρείτε την ακριβή τιμή του $c > 0$ τέτοια ώστε η υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ και ο κύκλος $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ να τέμνονται μόνο σε ένα σημείο. (βαθμός 3)

(γ)

(i) Δίνεται ότι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ είναι κάθετα και έχουν το ίδιο μέτρο. (Να ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό). Τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ αντίστοιχα. Με αυτές τις πληροφορίες, ή με άλλον τρόπο, δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$. (βαθμοί 3)

(ii) Το σημείο $\boldsymbol{P}$ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο το $\boldsymbol{I}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{0})$ με ακτίνα $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{0}$, έτσι ώστε το $\overrightarrow{\boldsymbol{IP}}$ κάνει γωνία $\boldsymbol{t}$ ως προς τον οριζόντιο άξονα. Το σημείο $\boldsymbol{Q}$ βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο στο $\boldsymbol{J}\,(-\boldsymbol{R},\boldsymbol{0})$ με ακτίνα $\boldsymbol{R} > \boldsymbol{0}$, έτσι ώστε το $\overrightarrow{\boldsymbol{JQ}}$ κάνει γωνία $\boldsymbol{2t}$ ως προς τον οριζόντιο άξονα.



Σημειώστε ότι $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OI}} + \overrightarrow{\boldsymbol{IP}}$ και $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OJ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{JQ}}$.

Χρησιμοποιώντας το μέρος (i) ή αλλιώς, βρείτε τις τιμές του $\boldsymbol{t}$, όπου $-\boldsymbol{\pi} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{\pi}$, που μεγιστοποιούν το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{OPQ}$.

Λύση

(α)

(i) Η $\boldsymbol{f}$ είναι αύξουσα αφού $\boldsymbol{f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0,\ x > 0}$. Άρα η $\boldsymbol{f}$ είναι μονότονη, άρα 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

(ii) Έχω $\boldsymbol{f(1) = 2 \Leftrightarrow g(2) = f^{-1}(2) = 1}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))}}$ Άρα $\boldsymbol{g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \boxed{\frac{1}{3}}}$

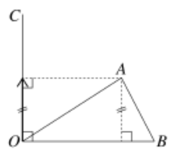
(β)

(i) Με αντικατάσταση της $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ στην εξίσωση $\boldsymbol{(x-c)^2 + y^2 = c^2}$ έχω $\boldsymbol{(x-c)^2 + \frac{1}{x^2} = c^2 \Longrightarrow x^2(x^2 - 2cx + c^2) + 1 = c^2x^2 \Longrightarrow x^4 - 2cx^3 + 1 = 0}$

(ii) Αρκεί η πολυωνυμική εξίσωση να έχει μια ρίζα διπλή, οπότε θα έχουμε για κάποιο $\boldsymbol{\rho}$ ότι $\boldsymbol{P(\rho) = P'(\rho) = 0}$. Έχω $\boldsymbol{P'(x) = 4x^3 - 6cx^2 = x^2(4x - 6c)}$ που έχει ρίζες τις $\boldsymbol{\rho = 0}$ και $\boldsymbol{\rho = \frac{3c}{2}}$. Η πρώτη απορρίπτεται γιατί $\boldsymbol{P(0) = 1 \neq 0}$. Αρκεί λοιπόν $\boldsymbol{P\left(\frac{3c}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{3c}{2}\right)^4 - 2c\left(\frac{3c}{2}\right)^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \frac{81c^4}{16} - \frac{27c^4}{4} + 1 = 0 \Longrightarrow 81c^4 - 108c^4 + 16 = 0 \Longrightarrow c^4 = \frac{16}{27} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}}}$

(γ)

(i) Έχω $\boldsymbol{E = \frac{1}{2}|OB||\text{προβολή του } \overrightarrow{OA} \text{ στο } \overrightarrow{OC}| = \frac{1}{2}|OB||\text{προβολή του } \overrightarrow{OA} \text{ στο } \overrightarrow{OC}|}$, όπου $\boldsymbol{\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}}$ **και** $\boldsymbol{|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}| \Longrightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-b_2\\ b_1\end{pmatrix}}$, με $\boldsymbol{\text{προβολή του } \overrightarrow{OA} \text{ στο } \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} \Longrightarrow |\text{προβολή του } \overrightarrow{OA} \text{ στο } \overrightarrow{OC}| = \frac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OC}|}}$.



Άρα $\boldsymbol{E = \frac{1}{2}|OB|\frac{|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-b_2\\ b_1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IP} = \begin{pmatrix}r\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}rcost\\ rsint\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r + rcost\\ rsint\end{pmatrix}}$

Όμοια $\boldsymbol{\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JQ} = \begin{pmatrix}-R\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}Rcos2t\\ Rsin2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R + Rcos2t\\ Rsin2t\end{pmatrix}}$.

Άρα από ερώτημα (i) έχω $\boldsymbol{E_{\Delta OPQ}} = \frac{1}{2}|(r + rcost)Rsin2t - rsint(-R + Rcos2t)| = \frac{rR}{2}|(1 + cost)sin2t - sint(-1 + cos2t)| = \frac{rR}{2}|(\sin 2t\cos t - \sin t\cos 2t) + \sin 2t + \sin t| = \frac{1}{2}Rr|\sin t + \sin 2t + \sin t| = \frac{1}{2}Rr|\sin 2t + 2\sin t|$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(t) = \sin 2t + 2\sin t,\ t \in [-\pi, \pi]$ άρα $\mathrm{E} = \frac{Rr}{2}|f(t)|$.

Έχω $f'(t) = 2\cos 2t + 2\cos t = 2(2\cos^2 t + \cos t - 1) = 2(2\cos t - 1)(\cos t + 1)$

Με $\cos t + 1 \geq 0, t \in [-\pi, \pi]$. Έχω $2\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{3}$ και επομένως $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

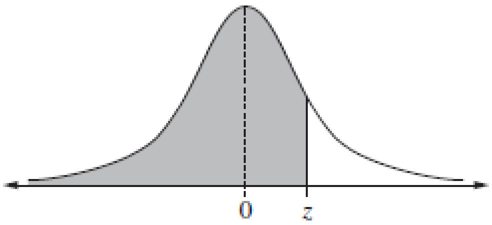
Άρα έχω τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$+\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	f'(0)=4	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-\pi) = 0$	$\searrow$	$f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$f(\pi) = 0$
$\lvert f(x)\rvert$	$f(-\pi) = 0$	$\nearrow$	$f(-\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$f(\pi) = 0$

Άρα το μέγιστο εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{OPQ}$ προκύπτει για $\boxed{t = \pm\frac{\pi}{3}}$

Για την ερώτηση 11 (στ)(ii)

Table of values $P(Z \le z)$ for the normal distribution $N(0,1)$



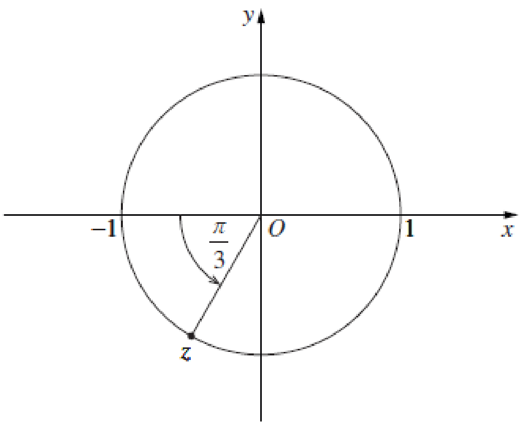
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995

2023 HIGHER SCHOOL CERTIFICATE EXAMINATION
Mathematics Extension 2

Μέρος 1

Περίπου 15 λεπτά για αυτήν την ενότητα

1. Ποιο από τα παρακάτω είναι ίσο με το $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ib})^3$;
   A. $(\boldsymbol{a^3-3ab^2})+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{3a^2b+b^3})$ B. $(\boldsymbol{a^3+3ab^2})+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{3a^2b+b^3})$ C. $(\boldsymbol{a^3-3ab^2})+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{3a^2b-b^3})$ D. $(\boldsymbol{a^3+3ab^2})+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{3a^2b-b^3})$
   Λύση
   Έχω $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ib})^3=\boldsymbol{a^3+3a^2ib+3\alpha(ib)^2+(ib)^3=a^3+3a^2bi-3\alpha b^2-b^3i=(a^3-3\alpha b^2)+i(3a^2b-b^3)}$ άρα C.
2. Σκεφτείτε την ακόλουθη δήλωση.
   «Αν ένα ζώο είναι φυτοφάγο, τότε δεν τρώει κρέας».
   Ποιο από τα παρακάτω είναι το αντίστροφο αυτής της δήλωσης;
   A. Αν ένα ζώο είναι φυτοφάγο, τότε τρώει κρέας.
   B. Αν ένα ζώο δεν είναι φυτοφάγο, τότε τρώει κρέας.
   C. Αν ένα ζώο τρώει κρέας, τότε δεν είναι φυτοφάγο.
   D. Αν ένα ζώο δεν τρώει κρέας, τότε είναι φυτοφάγο
   Λύση
   Η υπόθεση γίνεται συμπέρασμα και αντιστρόφως, άρα D.
3. Ένας μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{z}$ βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



   Ποιος από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς είναι ίσος με τον $\bar{\boldsymbol{z}}$;
   A. $-\boldsymbol{z}$ B. $\boldsymbol{z^2}$ C. $-\boldsymbol{z^3}$ D. $\boldsymbol{z^4}$
   Λύση
   Έχω $\boldsymbol{z=cos\,\frac{4\pi}{3}+isin\,\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}},\ \bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$
   $\boldsymbol{-z=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \boldsymbol{z^2=cos\,\frac{8\pi}{3}+isin\,\frac{8\pi}{3}=cos\,\frac{2\pi}{3}+isin\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \boldsymbol{z^3=cos\,\frac{6\pi}{3}+isin\,\frac{6\pi}{3}=1},\quad \boldsymbol{z^4=cos\,\frac{16\pi}{3}+isin\,\frac{16\pi}{3}=cos\,\frac{4\pi}{3}+isin\,\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Άρα B
4. Εξετάστε την ακόλουθη δήλωση σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς.
   «Όποιον θετικό αριθμό $\boldsymbol{r}$ επιλέξετε, είναι δυνατό να βρείτε έναν αριθμό $\boldsymbol{x}$ μεγαλύτερο από 1 έτσι ώστε $\boldsymbol{\frac{\ln x}{x^3}<r}$»
   Όταν αυτή η δήλωση είναι γραμμένη στην επίσημη γλώσσα απόδειξης, ποιο από τα παρακάτω λαμβάνεται;

A. $\forall \boldsymbol{x>1}\quad \exists \boldsymbol{r>0}\quad \boldsymbol{\frac{\ln x}{x^3}<r}$

B. $\exists x > 1 \quad \forall r > 0 \ \frac{\ln x}{x^3} < r$

C. $\forall r > 0 \quad \exists x > 1 \ \frac{\ln x}{x^3} < r$

D. $\exists r > 0 \quad \forall x > 1 \ \frac{\ln x}{x^3} < r$

Λύση
C, προφανές.

5. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με τις γραμμές $\ell_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\ell_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι αληθής;

A. οι ℓ_1 και ℓ_2 είναι η ίδια ευθεία.

B. οι ℓ_1 και ℓ_2 δεν είναι παράλληλες και τέμνονται.

C. οι ℓ_1 και ℓ_2 είναι παράλληλες και δεν τέμνονται.

D. οι ℓ_1 και ℓ_2 δεν είναι παράλληλες και δεν τέμνονται

Λύση
Έχω για τα διανύσματα κατεύθυνσης των δυο γραμμών ότι $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, άρα οι δυο γραμμές είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Για $\lambda = 0$ και $\mu = -4$, έχω ότι το σημείο $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ανήκει και στις δυο γραμμές. Άρα οι δυο ευθείες ταυτίζονται, άρα A.

6. Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις ΔΕΝ περιγράφει απλή αρμονική κίνηση;

A. $x = \cos^2 t - \sin 2t$

B. $x = \sin 4t + 4\cos 2t$

C. $x = 2\sin 3t - 4\cos 3t + 5$

D. $x = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + 5\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

Λύση
Ας θυμηθούμε ότι μια συνάρτηση που περιγράφει απλή αρμονική κίνηση πρέπει να μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\boxed{x = A\cos(nt) + B\sin(nt) + C}$
Για το A έχω $\cos^2 t - \sin 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) - \sin 2t$, άρα περιγράφει απλή αρμονική κίνηση.
Για το C είναι άμεσο ότι περιγράφει απλή αρμονική κίνηση.
Για το D έχω $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + 5\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = -4\sin(2t) + 5\left[\sin(2t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2t)\right] = -4\sin(2t) + 5\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2t)\right] = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 4\right)\sin(2t) - \frac{5}{\sqrt{2}}\cos(2t)$, άρα περιγράφει απλή αρμονική κίνηση.
Για το B έχω $x = \sin 4t + 4\cos 2t = 2\sin(2t)\cos(2t) + 4\cos(2t)$ που δεν παίρνει την μορφή που θέλουμε, άρα ΔΕΝ περιγράφει απλή αρμονική κίνηση, άρα B.

7. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις που αφορούν μιγαδικούς αριθμούς είναι αληθής;

A. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, θ με $x \neq 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow x + iy = re^{i\theta}$, για κάποιον πραγματικό αριθμό r.

B. Για όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς $\boldsymbol{z_1}$ και $\boldsymbol{z_2}$, $\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_1}) = \boldsymbol{\theta_1}\mathbf{and}\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_2}) = \boldsymbol{\theta_2} \Rightarrow \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_1 z_2}) = \boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2}$, όπου **Arg** το πρωτεύον όρισμα.

C. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{r_1, r_2, \theta_1, \theta_2}$ με $\boldsymbol{r_1, r_2 > 0}, \boldsymbol{r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Longrightarrow r_1 = r_2}\mathbf{and}\boldsymbol{\theta_1 = \theta_2}$.

D. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x, y, r, \theta}$ με $\boldsymbol{x \neq 0}$, $\boldsymbol{x + iy = re^{i\theta} \Longrightarrow \theta} = \mathbf{arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

Λύση

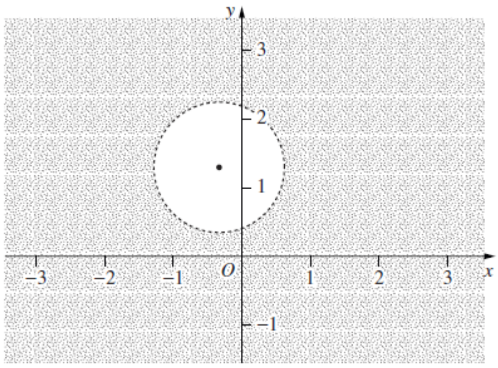
Το A είναι αληθές.

Το B δεν ισχύει γενικά για τα πρωτεύοντα ορίσματα $\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z})$ αφού αυτά ορίζονται στο διάστημα (-π,π]. Αν για παράδειγμα, $\boldsymbol{z_1 = z_2 = -1}$, τότε $\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_1}) = \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_2}) = \boldsymbol{\pi}$, και έχω $\mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_2}) = \boldsymbol{2\pi \neq 0} = \mathbf{Arg}(\boldsymbol{z_1 z_2})$. Αυτό που ισχύει είναι ότι $\boldsymbol{arg(z_1) = \theta_1}$ **και** $\boldsymbol{arg(z_2) = \theta_2 \Rightarrow arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2}$, όπου $\boldsymbol{arg}$ όρισμα στο R.

Το C είναι ψευδές, αυτό που ισχύει είναι ότι $\boldsymbol{r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Longrightarrow r_1 = r_2}$ **και** $\boldsymbol{\theta_1 = \theta_2 + 2\kappa\pi}$, για κάποιο $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}$.

Το D είναι ψευδές, αφού η συνάρτηση $\mathbf{arctan}(\boldsymbol{x})$ έχει σύνολο τιμών $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ενώ $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$. Αν για παράδειγμα, $\boldsymbol{z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$, τότε $\mathbf{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathbf{arctan}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$

8. Μια γραμμοσκιασμένη περιοχή ενός μιγαδικού επιπέδου φαίνεται στο σχήμα.



Ποια σχέση περιγράφει την γραμμοσκιασμένη περιοχή;

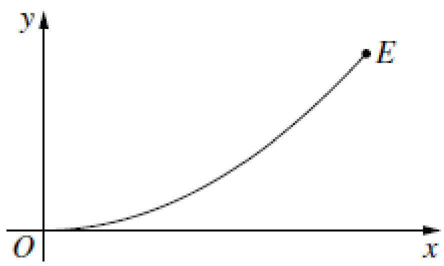
A. $|\boldsymbol{z - i}| > \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - 1}|$
B. $|\boldsymbol{z - i}| < \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - 1}|$
C. $|\boldsymbol{z - 1}| > \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - i}|$
D. $|\boldsymbol{z - 1}| < \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - i}|$

Λύση

Για το $\boldsymbol{z = 3i}$ της γραμμοσκιασμένης περιοχής, έχω $|\boldsymbol{z - i}| = |\boldsymbol{3i - i}| = \boldsymbol{2}$ και $|\boldsymbol{z - 1}| = |\boldsymbol{3i - 1}| = \sqrt{\mathbf{10}}$, άρα $|\boldsymbol{z - i}| = \boldsymbol{2} < \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - 1}| = \boldsymbol{2}\sqrt{\mathbf{10}}$ και το A απορρίπτεται. Ακόμα έχω $\boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - i}| = \boldsymbol{4} > |\boldsymbol{z - 1}| = \sqrt{\mathbf{10}}$, άρα και το C απορρίπτεται. Για το $\boldsymbol{z = 2}$ της γραμμοσκιασμένης περιοχής, έχω $|\boldsymbol{z - i}| = |\boldsymbol{2 - i}| = \sqrt{\mathbf{5}}$ και $|\boldsymbol{z - 1}| = |\boldsymbol{2 - 1}| = \boldsymbol{1}$, άρα $|\boldsymbol{z - i}| = \sqrt{\mathbf{5}} > \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - 1}| = \boldsymbol{2}$ και το B απορρίπτεται. Άρα D.

Πιο σοβαρά, για $\boldsymbol{z = x + iy}$ έχω $|\boldsymbol{z - 1}| < \boldsymbol{2}|\boldsymbol{z - i}| \Leftrightarrow |\boldsymbol{x + iy - 1}| < \boldsymbol{2}|\boldsymbol{x + iy - i}| \Leftrightarrow (\boldsymbol{x - 1})^2 + \boldsymbol{y}^2 < \boldsymbol{4}[\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{y - 1})^2] \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 2x + 1 + y^2 < 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3y^2 - 8y + 3 > 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 9y^2 - 24y + 9 > 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 + 9y^2 - 24y + 16 + 9 > 1 + 16 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 + (3y - 4)^2 > 8 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 > \frac{8}{9}}$, δηλαδή η περιοχή εκτός του κύκλου με κέντρο $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ και ακτίνα $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στην καμπύλη από το σημείο O ως το E, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι $\boldsymbol{r}$, η ταχύτητά του είναι $\boldsymbol{v}$ και η επιτάχυνσή του είναι $\boldsymbol{\alpha}$.

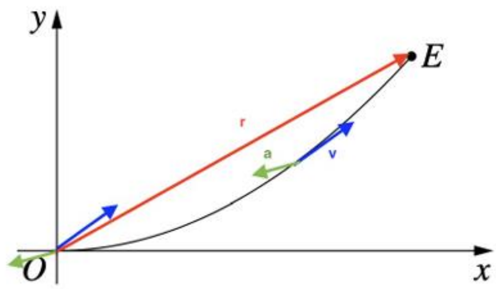
Ενώ κινείται από το O στο E, το σωματίδιο πάντα επιβραδύνεται.

Ποιο από τα παρακάτω είναι συνεπές με την κίνηση του σωματιδίου;

A. $\boldsymbol{r \cdot v \leq 0}$ **και** $\boldsymbol{a \cdot v \geq 0}$
B. $\boldsymbol{r \cdot v \leq 0}$ **και** $\boldsymbol{a \cdot v \leq 0}$
C. $\boldsymbol{r \cdot v \geq 0}$ **και** $\boldsymbol{a \cdot v \geq 0}$
D. $\boldsymbol{r \cdot v \geq 0}$ **και** $\boldsymbol{a \cdot v \leq 0}$

Λύση

Το σώμα συνεχώς απομακρύνεται άρα συνεχώς $\boldsymbol{v \geq 0}$, όμοια αφού επιβραδύνεται έχω $\boldsymbol{a \leq 0}$. Προφανώς $\boldsymbol{r \geq 0}$ Άρα D.



Πιο σοβαρά, Εάν το σωματίδιο κινείται από το O στο E, τότε τα v και r ταξιδεύουν σε μια εξαιρετικά παρόμοια κατεύθυνση (περίπου μέχρι κάποια οξεία γωνία από το διάγραμμα). Επομένως η γωνία θ μεταξύ v και r πρέπει να είναι μικρότερη από 90∘, οπότε r · v ≥ 0 ως 0 ≤ cos(θ) ≤ 1. Εάν το σωματίδιο επιβραδύνεται, η δύναμη και επομένως η επιτάχυνση πρέπει να είναι σε διεύθυνση αντίθετη από την ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι a · v ≤ 0, ως γωνία α μεταξύ a και v πρόκειται να είναι μεγαλύτερο από 90∘, επομένως cos(α) ≤ 0.

10. Θεωρούμε τρία τυχαία τρισδιάστατα διανύσματα $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω τρεις συνθήκες. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ και $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

A. Δύο από τα $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$ θα μπορούσαν να είναι μοναδιαία διανύσματα.

B. Τα σημεία A, B και C θα μπορούσαν να βρίσκονται σε μια σφαίρα με κέντρο το O.

C. Για οποιοδήποτε τρισδιάστατο διάνυσμα $\vec{a}$, μπορούν να βρεθούν διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ έτσι, ώστε τα $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$ να πληρούν αυτές τις τρεις προϋποθέσεις.

D. Για κάθε $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{c}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες, υπάρχουν r, s και t έτσι ώστε τα r, s και t να είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$.

Λύση

Αν το A είναι αληθές, τότε ας υποθέσουμε τρεις περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1η : Τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Longrightarrow \vec{a} = \vec{b}$ (καθώς η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων πρέπει να είναι μηδέν, προκειμένου για cos(θ) = 1 στον τύπο $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta)$). Ωστόσο, τότε $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \Longrightarrow 2 = 3$, άτοπο.
- Περίπτωση 2η : Τα $\vec{a}, \vec{c}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Τότε $\vec{c} \cdot \vec{a} = cos(\theta) = 3$, άτοπο.
- Περίπτωση 3η : Τα $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Τότε $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 = cos(\theta)$. Άτοπο.

Η επιλογή C επίσης δεν μπορεί να είναι αληθής καθώς αν $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 1$, άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το D είναι αληθές, δηλαδή $\exists r, s, t > 0$ έτσι ώστε $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$. Τότε θα έχω $\vec{a} \cdot (r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{0} \Longrightarrow r|\vec{a}|^2 + s\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Longrightarrow r|\vec{a}|^2 + s + 2t = 0$.

Άτοπο αφού το πρώτο μέλος της ισότητας είναι αυστηρά θετικό, καθώς $r, s, t > 0$. Έτσι με τη διαδικασία της εξάλειψης η B είναι η σωστή απάντηση.

Μέρος II

Περίπου 2 ώρες και 45 λεπτά για αυτήν την ενότητα

Ερώτηση 11 **(15 βαθμοί)**

(α) Λύστε την δευτεροβάθμια εξίσωση $\boldsymbol{z^2 - 3z + 4 = 0}$, όπου $\boldsymbol{z}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός. Δώστε την απάντηση σε καρτεσιανή μορφή. (βαθμοί 2) (β) Βρείτε την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ και $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Δώστε την απάντηση στην πλησιέστερη μοίρα. (βαθμοί 3)

(γ) Βρείτε την διανυσματική εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(-3,1,5)$ και $B(0,2,3)$. (βαθμοί 2)

(δ) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $ABEF$ είναι παραλληλόγραμμα.

Θεωρώντας το $\overrightarrow{AB}$, δείξτε ότι το $CDFE$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. (βαθμοί 2)

(ε) Ένα σωματίδιο κινείται σε απλή αρμονική κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση $\ddot{x} = -9(x-4)$. Βρείτε την περίοδο και το κεντρικό σημείο της κίνησης. (βαθμοί 2)

(στ) Βρείτε το $\int_0^2 \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx$ (βαθμοί 4)

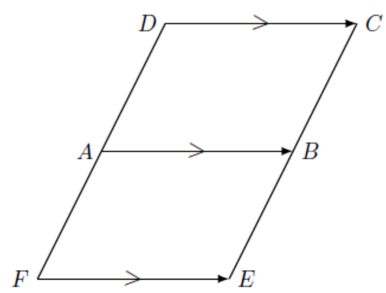
Λύση

(α) $z = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}}$

(β) Έχω $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(-1) + (2)(4) + (-3)(2) = 1$, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

Άρα $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{21}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right) = 86.656 \ldots = 87^o$

(γ) Έχω $\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}}$



(δ) Αφού το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο έχω $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,. Αφού το $ABEF$ είναι παραλληλόγραμμο έχω, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$. Άρα, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$, άρα το $CDEF$ έχει δυο πλευρές ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

(ε) Ο γενικός τύπος της απλής αρμονικής κίνησης είναι

$$\boxed{\ddot{x} = -n^2(x-c)}$$

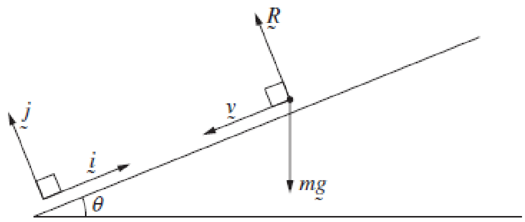
Άρα $n = 3, c = 4$. Συνεπώς, η περίοδος $T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$, και το κέντρο $c = 4$.

(ε) Έχω $\int_0^2 \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx = = \int_0^2 \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} dx = [2\ln|x+1| + 3\ln|x-3|]_0^2 = 2\ln 3 + 3\ln 1 - 2\ln 1 - 3\ln 3 = -\ln 3 = \boxed{\ln\frac{1}{3}}$

Ερώτηση 12 (15 Βαθμοί)

(α) Δείξτε ότι ο $\sqrt{23}$ είναι άρρητος. (βαθμοί 3)

(β) Δείξτε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y, όπου $x^2 + y^2 \neq 0$, $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \leq 2$. (βαθμοί 2) (γ) Ένα αντικείμενο με μάζα $\boldsymbol{m}\ \boldsymbol{kg}$ γλιστράει προς τα κάτω σε ένα ομαλό κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα $\boldsymbol{v(t)}$, όπου $\boldsymbol{t}$ είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα αφότου το αντικείμενο άρχισε να γλιστρά προς τα κάτω. Το κεκλιμένο επίπεδο σχηματίζει γωνία $\boldsymbol{\theta}$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Η κάθετη δύναμη αντίδρασης είναι $\vec{\boldsymbol{R}}$. Η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι $\vec{\boldsymbol{g}}$ και έχει μέγεθος $\boldsymbol{g}$. Καμία άλλη δύναμη δεν επιδρά στο αντικείμενο.



Τα διανύσματα $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ και $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ είναι μοναδιαία διανύσματα παράλληλα και κάθετα, αντίστοιχα, προς το κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

(i) Δείξτε ότι η συνισταμένη δύναμη στο αντικείμενο είναι $\vec{\boldsymbol{F}} = -(\boldsymbol{mgsin\theta})\vec{\boldsymbol{\imath}}$. (βαθμοί 2)

(ii) Δεδομένου ότι το αντικείμενο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, βρείτε την ταχύτητά του $\boldsymbol{v(t)}$ ως προς $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{t}$ και $\vec{\boldsymbol{\imath}}$.

(δ) Βρείτε τις κυβικές ρίζες το $\boldsymbol{2-2i}$. Δώστε την απάντησή σας σε εκθετική μορφή. (βαθμοί 3)

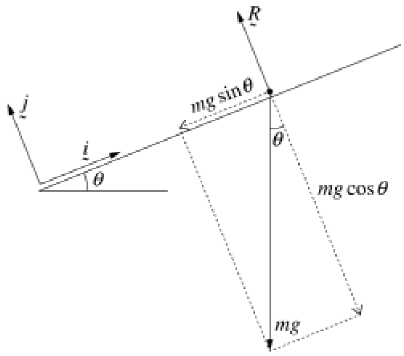
(ε) Ο μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{2+i}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z) = z^4 - 3z^3 + cz^2 + dz - 30}$, όπου $\boldsymbol{c}$ και $\boldsymbol{d}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

(i) Εξηγήστε γιατί και ο $\boldsymbol{2-i}$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z)}$ (βαθμός 1)

(ii) Βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z)}$. (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έστω ότι ο $\sqrt{\boldsymbol{23}}$ είναι ρητός, άρα $\sqrt{\boldsymbol{23}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ για κάποιους πρώτους μεταξύ τους ακεραίους $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$. Άρα $\boldsymbol{p^2 = 23q^2}$, άρα το $\boldsymbol{p^2}$ διαιρείται με το 23, άρα και το $\boldsymbol{p}$ διαιρείται με το 23. Άρα $\boldsymbol{p = 23r}$ για κάποιο ακέραιο r. Τότε θα έχω $\boldsymbol{(23r)^2 = 23q^2 \Rightarrow 23^2r^2 = 23q^2 \Rightarrow 23r^2 = q^2}$ άρα το 23 διαιρεί και το $\boldsymbol{q^2}$ και συνεπώς και το q. Αλλά τότε οι ακέραιοι $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{q}$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους αφού έχουν κοινό διαιρέτη το 23, άτοπο. Άρα ο $\sqrt{\boldsymbol{23}}$ είναι άρρητος.



(β) Έχω $\boldsymbol{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2}$ που ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$.

(γ) (i) Έχω στο κάθετο και παράλληλο προς το κεκλιμμένο επίπεδο ότι $\vec{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{mg\cos\theta}\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ και $\vec{\boldsymbol{F}} = -(\boldsymbol{mg\sin\ \theta})\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Άρα η συνισταμένη των δυνάμεων είναι η $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = -(\boldsymbol{mg\sin\ \theta})\vec{\boldsymbol{\imath}}}$

(ii) Έχω $\boldsymbol{m\vec{a} = -mg\sin\theta\ \vec{\imath} \Rightarrow \vec{a} = -g\sin\theta\ \vec{\imath} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\sin\theta\vec{\imath} \Rightarrow d\vec{v} = -g\sin\theta\vec{\imath}\ dt \Rightarrow \vec{v} = -gt\sin\theta\vec{\imath} + c}$. Αλλά για $\boldsymbol{t = 0}, \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, άρα $\boldsymbol{c = 0}$. Τελικά έχω $\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{gt\sin\theta}\vec{\boldsymbol{\imath}}}$

(δ) Έχω $\boldsymbol{z^3 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = \sqrt{8}e^{-i\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z =}$ $\boldsymbol{\sqrt{8}e^{-i\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}} \Psi \sqrt{8}e^{-i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}} \Psi \sqrt{8}e^{-i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}} \Rightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{z = \sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{12}}\text{ή }\sqrt{8}e^{-i\frac{9\pi}{12}}\text{ ή }\sqrt{8}e^{-i\frac{17\pi}{12}}}}$

(ε) (i) Το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, άρα οι ρίζες του εμφανίζονται κατά ζεύγη συζυγών μιγαδικών, άρα αφού ο μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{2+i}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z)}$, και ο $\overline{\boldsymbol{2+\imath}} = \boldsymbol{2-I}$ θα είναι ρίζα του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z)}$.

(ii) Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ οι άλλες δύο ρίζες του πολυωνύμου $\boldsymbol{P(z)}$. Από τους τύπους του Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών του έχω

- $\boldsymbol{(2+i)+(2-i)+\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3 \Rightarrow 4+\alpha+\beta=3 \Rightarrow \alpha+\beta=-1}$και
- $\boldsymbol{(2+i)(2-i)\alpha\beta=\frac{e}{a}=-30 \Rightarrow (2^2-i^2)\alpha\beta=-30 \Rightarrow 5\alpha\beta=-30 \Rightarrow \alpha\beta=-6}$

Άρα τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\boldsymbol{x^2-(-1)x-6=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=-3, x=2}$.

Άρα $\boxed{\boldsymbol{(\alpha,\beta)=(-3,2)} \text{ ή } \boldsymbol{(2,-3)}}$

Ερώτηση 13 (15 βαθμοί)

(α) Βρείτε την τιμή του $\int \frac{1-x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\boldsymbol{dx}$ (βαθμοί 3)

(β) (i) Δείξτε ότι $\boldsymbol{k^2-2k-3 \geq 0}$ για $\boldsymbol{k \geq 3}$ (βαθμός 1)

(ii) Συνεπώς, ή με άλλον τρόπο, με χρήση μαθηματικής επαγωγής δείξτε ότι $\boldsymbol{2^n \geq n^2-2}$, για όλους τους ακέραιους $\boldsymbol{n \geq 3}$. (βαθμοί 3)

(γ) Ένα σωματίδιο μάζας $\boldsymbol{1\,kgr}$ βάλλεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $\boldsymbol{40\,m\,s^{-1}}$ με γωνία $\boldsymbol{30°}$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

(i) Χρησιμοποιήστε τις παραπάνω πληροφορίες για να δείξετε ότι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{20\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{20} \end{pmatrix}$ (βαθμός 1)

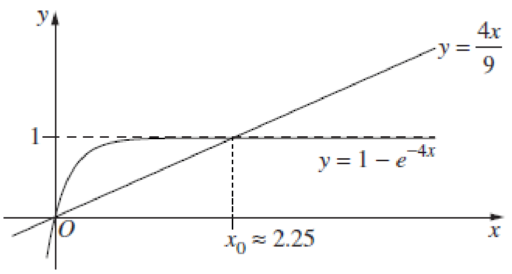
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο είναι η βαρύτητα και η αντίσταση του αέρα. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη με το διάνυσμα της ταχύτητας με σταθερά αναλογικότητας 4. Έστω ότι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι $\boldsymbol{10\,m\,s^{-2}}$.

Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου, τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ δευτερόλεπτα μετά την βολή του σωματίδιου, είναι $\boldsymbol{\vec{r}(t)}$ και το διάνυσμα ταχύτητας είναι $\boldsymbol{\vec{v}(t)}$.

(ii) Δείξτε ότι $\boldsymbol{\vec{v}(t)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{20\sqrt{3}e^{-4t}} \\ \boldsymbol{\frac{45}{2}e^{-4t}-\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$. (βαθμοί 3)

(iii) Δείξτε ότι $\boldsymbol{\vec{r}(t)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5\sqrt{3}(1-e^{-4t})} \\ \boldsymbol{\frac{45}{8}(1-e^{-4t})-\frac{5}{2}t} \end{pmatrix}$. (βαθμοί 2)

(iv) Τα γραφήματα των $\boldsymbol{y=1-e^{-4x}}$ και $\boldsymbol{y=\frac{4x}{9}}$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα, βρείτε το οριζόντιο βεληνεκές του σωματιδίου, δίνοντας απάντηση στρογγυλοποιημένη στο ένα δεκαδικό ψηφίο. (βαθμοί 2)

Λύση

(α) Έχω

$$\boldsymbol{I} = \int \frac{\boldsymbol{1-x}}{\sqrt{\boldsymbol{5-4x-x^2}}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\boldsymbol{1-x}}{\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}}\boldsymbol{dx}$$

$$= -\int \frac{\boldsymbol{x+2}}{\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}}\boldsymbol{dx} + \int \frac{\boldsymbol{3}}{\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}}\boldsymbol{dx} = -\int \frac{\boldsymbol{x+2}}{\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}}\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{3\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+c}$$

Θέτω $\boldsymbol{x+2 = 3\sin\theta}, \sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}} = \boldsymbol{3cos\theta}, \boldsymbol{dx = 3cos\theta d\theta}$, Άρα $\int \frac{\boldsymbol{x+2}}{\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}}\boldsymbol{dx} = \int \frac{\boldsymbol{3\sin\theta}}{\boldsymbol{3\cos\theta}}\boldsymbol{3cos\theta d\theta} =$ $\int \boldsymbol{3\sin\theta\, d\theta = -3cos\theta} = -\sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}}$. Άρα $\boxed{\boldsymbol{I} = \sqrt{\boldsymbol{9-(x+2)^2}} + \boldsymbol{3\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+c}}$

(β) (i) Δείξτε ότι $\boldsymbol{k^2-2k-3 \geq 0}$ για $\boldsymbol{k \geq 3}$, έχω $\boldsymbol{k-3 \geq 0}$ και $\boldsymbol{k+1 \geq 0}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχω $\boldsymbol{(k-3)(k+1) \geq 0 \Rightarrow k^2-2k-3 \geq 0}$, όπως θέλαμε.

(ii) $\boldsymbol{2^n \geq n^2-2}$, για όλους τους ακέραιους $\boldsymbol{n \geq 3}$

Για $\boldsymbol{n=3}$, έχω $\boldsymbol{2^3 = 8 \geq 7 = n^2-2}$, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n=k}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{2^k \geq k^2-2}(*)$

Θα δείξω ότι ισχύει για $\boldsymbol{n=k+1}$, δηλαδή ότι $\boldsymbol{2^{k+1} \geq (k+1)^2-2}$.

Πράγματι έχω

$$\boldsymbol{2^{k+1} = 2\cdot 2^k} \underbrace{\geq}_{\boldsymbol{\alpha\pi ό(*)}} 2(k^2-2) = \boldsymbol{2k^2-4 = k^2-2k-3+k^2+2k+1-2} = \underbrace{\boldsymbol{k^2-2k-3}}_{\boldsymbol{\geq 0 \alpha\pi ό(i)}} + \boldsymbol{(k+1)^2-2 \geq (k+1)^2-2}.$$

(γ) (i) Έχω $\boldsymbol{v(0)} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{40\cos 30^\circ}\\ \boldsymbol{40\sin 30^\circ}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{20\sqrt{3}}\\ \boldsymbol{20}\end{pmatrix}$

(ii) Έχω για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m\vec{g}+\vec{r}}$, όπου η αντίσταση του αέρα. Άρα $\boldsymbol{m\vec{a} = m\vec{g} - 4\vec{v} \Rightarrow \vec{a}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{-10}\end{pmatrix} - \boldsymbol{4}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{-4\dot{x}}\\ \boldsymbol{-10-4\dot{y}}\end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{x} = -4\dot{x}, \ddot{y} = -10-4\dot{y}$

Από την πρώτη σχέση έχω $\frac{d\dot{x}}{dt} = \boldsymbol{-4\dot{x}} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \boldsymbol{-4dt \Rightarrow \ln\dot{x} = -4t+c \Rightarrow \dot{x} = e^{-4t+c}}$.

Για $\boldsymbol{t=0}$, έχω $\boldsymbol{\dot{x}(0) = 20\sqrt{3} = e^c}$, άρα $\boldsymbol{\dot{x} = e^c e^{-4t} = 20\sqrt{3}e^{-4t}}$

Από την δεύτερη σχέση έχω

$\boldsymbol{\ddot{y} = -4\left(\dot{y}+\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{\ddot{y}}{\dot{y}+\frac{5}{2}} = -4 \Rightarrow \frac{d\left(\dot{y}+\frac{5}{2}\right)}{\dot{y}+\frac{5}{2}} = -4dt \Rightarrow ln\left(\dot{y}+\frac{5}{2}\right) = -4t+c \Rightarrow \dot{y}+\frac{5}{2} = e^{-4t+c} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{5}{2} + e^{-4t+c}}$. Για $\boldsymbol{t=0}$, έχω $\boldsymbol{\dot{y}(0) = 20 = -\frac{5}{2}+e^c \Rightarrow e^c = \frac{45}{2}}$,

άρα $\boldsymbol{\dot{y} = -\frac{5}{2}+e^{-4t+c} = -\frac{5}{2}+e^c e^{-4t} = -\frac{5}{2}+\frac{45}{2}e^{-4t}}$

(iii) έχω $\boldsymbol{\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 20\sqrt{3}e^{-4t} \Rightarrow \int dx = \frac{20}{\sqrt{3}}\int e^{-4t}dt \Rightarrow x(t) = -5\sqrt{3}e^{-4t}+c \xRightarrow{x(0)=0} c = 5\sqrt{3}}$. Άρα $\boldsymbol{x(t) = -5\sqrt{3}e^{-4t}+5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}(1-e^{-4t})}$

Όμοια έχω $\boldsymbol{\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}+\frac{45}{2}e^{-4t} \Rightarrow \int dy = \int \frac{45}{2}e^{-4t}-\frac{5}{2}dt \Rightarrow y(t) = \frac{-45}{8}e^{-4t}-\frac{5t}{2}+c \xRightarrow{y(0)=0} c = \frac{45}{8}}$, άρα $\boldsymbol{y(t) = \frac{-45}{8}e^{-4t}-\frac{5t}{2}+\frac{45}{8} = \frac{45}{8}(1-e^{-4t})-\frac{5}{2}t}$

(iv) Όταν το σωματίδιο θα φτάσει στο έδαφος θα έχω $\mathbf{y}(\boldsymbol{T}) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{45}{8}(1 - e^{-4T}) - \frac{5}{2}T = 0 \Rightarrow 1 - e^{-4T} = \frac{4}{9}T$, που από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T = 2,25 = \frac{9}{4}$. Το βεληνεκές του σωματιδίου θα είναι το $\mathbf{x}(T) = 5\sqrt{3}(1 - e^{-4T}) = 5\sqrt{3}(1 - e^{-9}) = 8,65918 \ldots = \boxed{8.7\ m}$

Ερώτηση 14 (15 βαθμοί)

(α) Έστω z μιγαδικός αριθμός με $z = e^{\frac{i\pi}{6}}$ και w μιγαδικός αριθμός με $w = e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

(i) Αφού γράψετε τους αριθμούς z και w στην καρτεσιανή τους μορφή, ή με άλλον τρόπο, δείξτε ότι $|z+w|^2 = \frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. (βαθμοί 3)

(ii) Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w και $z + w$ αναπαρίστανται στο μιγαδικό επίπεδο από τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OC}$ αντίστοιχα, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Δείξτε ότι $\angle AOC = \frac{7\pi}{24}$. (βαθμοί 2)

(iii) Συμπεράνετε λοιπόν ότι $\cos\frac{7\pi}{24} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}{4}$ (βαθμός 1)

(β) Το σημείο P βρίσκεται 4 μέτρα δεξιά από την αρχή O σε ευθεία γραμμή. Ένα σωματίδιο φεύγει από την ηρεμία στο P και κινείται κατά μήκος της ευθείας γραμμής με απλή αρμονική κίνηση με κέντρο το O, με περίοδο 8π δευτερόλεπτα.

Μετά από 2π δευτερόλεπτα, ένα άλλο σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία στο P και κινείται επίσης κατά μήκος αυτής της ευθείας γραμμής σε απλή αρμονική κίνηση με κέντρο το O, με περίοδο 8π δευτερόλεπτα.

Βρείτε πότε και πού συγκρούονται για πρώτη φορά τα δύο σωματίδια. (βαθμοί 3)

(γ) Βλήμα μάζας $M\ kg$ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την αρχή με μια αρχική ταχύτητα $v\ ms^{-1}$. Η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι $g\ ms^{-2}$. Το βλήμα υφίσταται μια δύναμη αντίστασης μεγέθους kMv^2 *newtons*, όπου k είναι μια θετική σταθερά και v_0 είναι η ταχύτητα του βλήματος τη χρονική στιγμή t δευτερόλεπτα.

(i) Το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωματίδιο είναι H μέτρα. Δείξτε ότι $H = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{kv_0^2+g}{g}\right)$. (βαθμοί 3)

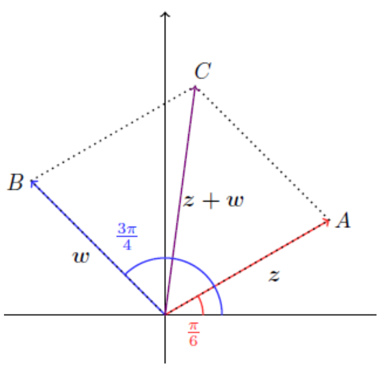
(ii) Όταν το βλήμα προσγειώνεται στο έδαφος, η ταχύτητά του είναι $v_1\ m\ s^{-1}$, όπου v_1 είναι μικρότερο από το μέγεθος της τελικής ταχύτητας.
Δείξτε ότι $g(v_0^2 - v_1^2) = kv_0^2 v_1^2$. (βαθμοί 3)

Λύση

(α) (i) Έχω $z + w = e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+i(1+\sqrt{2})}{2}$.

Άρα $|z+w|^2 = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 + (1+\sqrt{2})^2\right) = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{6} + 2 + 1 + 2\sqrt{2} + 2) = \frac{1}{4}(8 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2})$, όπως θέλαμε.

(ii) Τα διανύσματα θέσης των z, w και $z + w$ φαίνονται στο διάγραμμα .

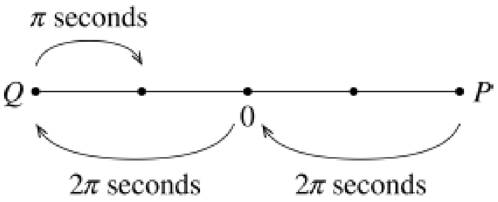


Έχω λοιπόν ότι $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(\arg(w) - \arg(z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{24}$

(iii) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΔAOC έχουμε

$|AC|^2 = |OC|^2 + |OA|^2 - 2|OA||OC|\cos(\angle AOC) \Rightarrow |w|^2 = |z+w|^2 + |z|^2 - 2|z||z+w|\cos(\angle AOC) \Rightarrow$
$\cos\frac{7\pi}{24} = \frac{|z|^2+|z+w|^2-|w|^2}{2|z||z+w|} = \frac{1+|z+w|^2-1}{2|z+w|} = \frac{|z+w|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}{4}$, όπως θέλαμε.

(β) Δεδομένου ότι η περίοδος είναι 8π, το πρώτο σωματίδιο είναι στο O όταν το δεύτερο σωματίδιο φεύγει από το P. Το πρώτο σωματίδιο βρίσκεται στο Q όταν το δεύτερο σωματίδιο είναι στο O . O χρόνος σύγκρουσης λοιπόν είναι 5π μετά την απελευθέρωση του πρώτου σωματιδίου.



Πιο σοβαρά, εφόσον το σωματίδιο ξεκινά σε ηρεμία, συμπεραίνουμε ότι το 4 και το −4 είναι μέγιστες και ελάχιστες τιμές για την απόσταση από το O. Περαιτέρω, εφόσον ξεκινά σε ηρεμία, μοντελοποιούμε την απλή αρμονική κίνηση μας χρησιμοποιώντας cos, με πλάτος a = 4, κέντρο $\boldsymbol{c = 0}$, περίοδος $\boldsymbol{T = 8\pi = 2\pi\omega}$, και έτσι $\boldsymbol{\omega = \frac{1}{4}}$. Τελικά έχω : $\boldsymbol{x_1 = a\cos n\,t + c = 4\cos\left(\frac{t}{4}\right)}$. Το δεύτερο σωματίδιο κάνει την ίδια κίνηση με $\boldsymbol{2\pi}$ δευτερόλεπτα καθυστέρηση, άρα $\boldsymbol{x_2 = a\cos n\,(t-2\pi) + c = 4\cos\left(\frac{t-2\pi}{4}\right)}$. Όταν συγκρουστούν θα έχω $\boldsymbol{4\cos\left(\frac{t-2\pi}{4}\right) = 4\cos\left(\frac{t}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{t-2\pi}{4}\right) = \pm\left(\frac{t}{4}\right) \Rightarrow \frac{t-2\pi}{4} = \frac{t}{4} + 2k\pi}$ άτοπο ή $\boldsymbol{\frac{t-2\pi}{4} = -\frac{t}{4} + 2k\pi \Rightarrow t - 2\pi = -t + 8k\pi \Rightarrow t = (4k+1)\pi}$. Αφού η σύγκρουση γίνεται 2π δευτερόλεπτα αφότου ξεκινήσει το πρώτο σωματίδιο, πρέπει $\boldsymbol{t > 2\pi \Rightarrow 4k+1 > 2 \Rightarrow k > 0}$. Άρα η πρώτη σύγκρουση γίνεται για $\boldsymbol{k = 1 \Rightarrow \boxed{t = 5\pi}}$ στο σημείο με $\boldsymbol{x = 4\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = \boxed{-2\sqrt{2}}}$, αριστερά του O.

(γ) (i) Έχω για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{r}}$, όπου η αντίσταση του αέρα. Άρα $\boldsymbol{M\vec{a} = -M\vec{g} - kMv^2 \Rightarrow \vec{a} = -\vec{g} - kv^2}$. Έχω ότι $\boldsymbol{\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = v\frac{dv}{dx}}}$ Άρα έχουμε $\boldsymbol{v\frac{dv}{dx} = -\vec{g} - kv^2 \Rightarrow \frac{v}{g+kv^2}dv = -dx \Rightarrow \int_0^{v_0}\frac{v}{g+kv^2}dv = \int_H^0 -dx}$, αφού, όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος η ταχύτητά του είναι μηδέν. Άρα $\boldsymbol{\int_0^{v_0}\frac{v}{g+kv^2}dv = \int_0^H dx \Rightarrow \frac{1}{2k}[\ln(g+kv^2)]_0^{v_0} = [x]_0^H \Rightarrow \frac{1}{2k}(\ln(g+kv_0{}^2) - \ln(g)) = H \Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{kv_0{}^2+g}{g}\right)}}$

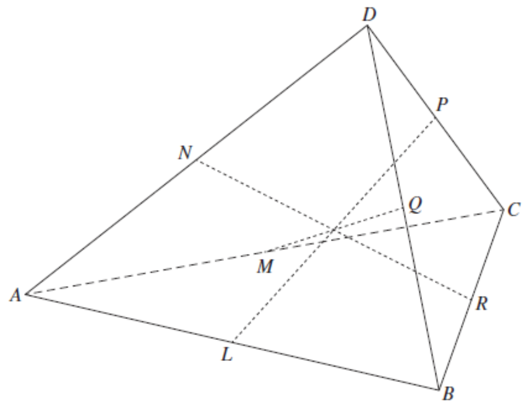
(ii) Έχω για τη συνισταμένη των δυνάμεων $\boldsymbol{\vec{F} = m\vec{g} + \vec{r}}$, όπου η αντίσταση του αέρα. Άρα $\boldsymbol{M\vec{a} = M\vec{g} - kMv^2 \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} - kv^2}$. Άρα έχουμε $\boldsymbol{v\frac{dv}{dx} = g - kv^2 \Rightarrow \frac{v}{g-kv^2}dv = dx \Rightarrow \int_0^{v_1}\frac{v}{g-kv^2}dv = \int_H^0 dx}$, αφού, όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος η ταχύτητά του είναι μηδέν και στο έδαφος τώρα είναι $\boldsymbol{v_1}$. Άρα $\boldsymbol{\frac{1}{2k}[\ln(g - kv^2)]_0^{v_1} = -H \Rightarrow \frac{1}{2k}[\ln(g-kv_1{}^2) - \ln(g)] = -\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{kv_0{}^2+g}{g}\right) \Rightarrow \ln(g-kv_1{}^2) - \ln(g) = -\ln\left(\frac{kv_0{}^2+g}{g}\right) \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\ln\left(\frac{g-kv_1{}^2}{g}\right) = \ln\left(\frac{g}{kv_0{}^2+g}\right) \Rightarrow \frac{g-kv_1{}^2}{g} = \frac{g}{kv_0{}^2+g} \Rightarrow g^2 = (g+kv_0^2)(g-kv_1^2) \Rightarrow g^2 = g^2 + gkv_0^2 - gkv_1^2 - k^2v_0^2v_1^2 \Rightarrow k^2v_0^2v_1^2 = gk(v_0^2 - v_1^2) \Rightarrow \boxed{kv_0^2v_1^2 = g(v_0^2 - v_1)^2}}$.

Ερώτηση 15 (15 βαθμοί)

(α) (i) Έστω $\boldsymbol{J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta}$ όπου ο $\boldsymbol{n \geq 0}$ είναι ακέραιος. Δείξτε ότι $\boldsymbol{J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}}$ για όλους τους ακέραιους $\boldsymbol{n \geq 2}$. (βαθμοί 3)

(ii) Έστω $\boldsymbol{I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx}$ όπου ο $\boldsymbol{n}$ είναι θετικός ακέραιος. Με την βοήθεια της αντικατάστασης $\boldsymbol{x = \sin^2\theta}$, ή με άλλον τρόπο, δείξτε ότι $\boldsymbol{I_n = \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}\theta d\theta}$. (βαθμοί 4)

(iii) Συνεπώς, ή με άλλον τρόπο, δείξτε ότι $\boldsymbol{I_n = \frac{n}{4n+2}I_{n-1}}$, για όλους τους ακέραιους $\boldsymbol{n \geq 1}$. (βαθμοί 2) (β) Στην τριγωνική πυραμίδα $\boldsymbol{ABCD}$, $\boldsymbol{L}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{M}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{N}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{AD}$, $\boldsymbol{P}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{CD}$, $\boldsymbol{Q}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{BD}$ και $\boldsymbol{R}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{BC}$.

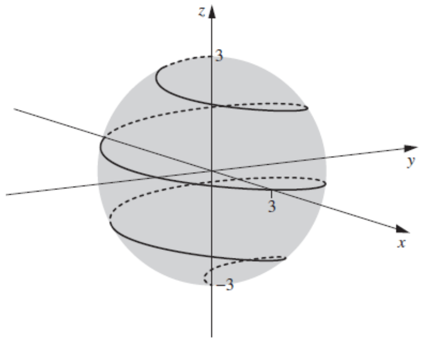


Έστω $\vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{c}=\overrightarrow{AC}$ και $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$.

(i) Δείξτε ότι $\overrightarrow{LP}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$. (βαθμός 1)

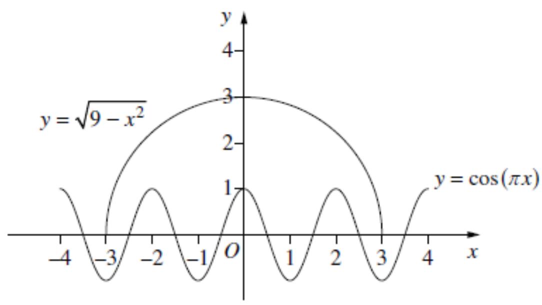
(ii) Αποδεικνύεται ότι $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})$ και $\overrightarrow{NR}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})$. (Να ΜΗΝ τα αποδείξετε αυτά). Δείξτε ότι $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=4\left(|\overrightarrow{LP}|^2+|\overrightarrow{MQ}|^2+|\overrightarrow{NR}|^2\right)$ (βαθμοί 3)

(γ) Μια καμπύλη $\boldsymbol{C}$ σπειρώνεται 3 φορές γύρω από τη σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα 3, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ένα σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στο σημείο $(\mathbf{0},\mathbf{0},-\mathbf{3})$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης C στην επιφάνεια της σφαίρας, που τελειώνει στο σημείο $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{3})$.

Με χρήση του παρακάτω διαγράμματος, που δείχνει τα γραφήματα των συναρτήσεων $\boldsymbol{f(x)=cos(\pi x)}$ και $\boldsymbol{g(x)=\sqrt{9-x^2}}$, και θεωρώντας το γράφημα της $\boldsymbol{y=f(x)g(x)}$, δώστε ένα πιθανό σύνολο παραμετρικών εξισώσεων που περιγράφουν την καμπύλη C.



Λύση

(α)

(i) Έχω $\boldsymbol{J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\sin\theta\, d\theta=\underbrace{\left[-\sin^{n-1}\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,(n-1)\sin^{n-2}\theta\, d\theta=}$ $\boldsymbol{(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta-\sin^n\theta\, d\theta=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n}$, συνεπώς $\boldsymbol{(1+n-1)J_n=(n-1)J_{n-2}\Rightarrow J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}}$

(ii) Για $\boldsymbol{x=\sin^2\theta}$, έχω $\boldsymbol{dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta}$ και όταν $\boldsymbol{x=1,\theta=\pi/2}$, ενώ όταν $\boldsymbol{x=0,\theta=0}$.

Άρα έχω $\boldsymbol{I_n=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta(1-\sin^2\theta)^n(2\sin\theta\cos\theta)d\theta=}$ $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^{2n+1}\theta\cos^{2n+1}\theta d\theta=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta)^{n+1}d\theta=\frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(2\theta)d\theta}$

Θέτω $\boldsymbol{u=2\theta\Rightarrow du=2d\theta}$ και όταν $\boldsymbol{\theta=0,u=\pi/2}$, ενώ όταν $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2},u=\pi}$.

Άρα έχω $\boldsymbol{I_n=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du+\frac{1}{2^{2n}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du}$. Επειδή η $\boldsymbol{\sin^{2n+1}u}$ είναι συμμετρική ως προς την $\boldsymbol{u=\frac{\pi}{2}}$, έχω $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du}$.

Άρα $\boldsymbol{I_n=2\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n+1}u}{2}du=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\, du=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta}$

(iii) Έχω με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα ότι $\boldsymbol{I_n = \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n}}J_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2n}{2n+1}J_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\ \theta d\theta = \frac{1}{2^{2n}}\frac{2n}{2n+1}2^{2n-2}I_{n-1} = \frac{2n}{2^2(2n+1)}I_{n-1} = \frac{n}{4n+2}I_{n-1}}$

(β)

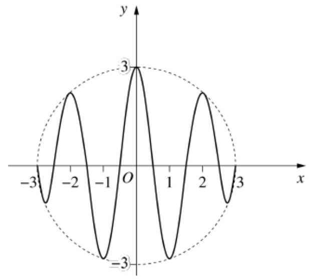
(i) Έχω από το σχήμα ότι $\boldsymbol{\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = -\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})}$

(ii) Ξεκινάμε από το 2ο μέλος της εξίσωσης. Έχουμε $\boldsymbol{4\left(\left|\overrightarrow{LP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{NR}\right|^2\right) = 4(\overrightarrow{LP}\cdot\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR}\cdot\overrightarrow{NR}) = 4(\frac{1}{4}(-b+c+d)\cdot(-b+c+d) + \frac{1}{4}(d+b-c)\cdot(d+b-c) + \frac{1}{4}(b+c-d)\cdot(b+c-d)) = |c|^2 + 2c\cdot(d-b) + |d-b|^2 + |d|^2 + 2d\cdot(b-c) + |b-c|^2 + |b|^2 + 2b\cdot(c-d) + |c-d|^2 = |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |b-c|^2 + |d-b|^2 + |c-d|^2 + 2[c\cdot d - c\cdot b + d\cdot b - d\cdot c + b\cdot c - b\cdot d] = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 + 2\times 0 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CD}\right|^2}$, όπως θέλαμε.

(γ) Αφού η σπείρα βρίσκεται πάνω στην σφαίρα, θα έχουμε $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 3^2}$. Η υπόδειξη που μας δίνεται σχετικά με την $\boldsymbol{\sqrt{9-t^2}\cos(\pi t)}$, η παρατήρηση ότι $\boldsymbol{\left(\sqrt{9-t^2}\cos(\pi t)\right)^2 + \left(\sqrt{9-t^2}\sin(\pi t)\right)^2 + t^2 = 3^2}$μας ωθεί στον να δοκιμάσουμε τις εξής παραμετρικές

- $\boxed{\boldsymbol{z = t}}$,
- μία από τις $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι η $\boldsymbol{\pm\sqrt{9-t^2}\cos(\pi t)}$ και η άλλη είναι η $\boldsymbol{\pm\sqrt{9-t^2}\sin(\pi t)}$.

Παρατηρούμε ότι στο σχήμα ότι το σημείο $\boldsymbol{(3,0,0)}$ είναι σημείο της σπείρας, άρα για $\boldsymbol{z = t = 0}$, θέλω $\boldsymbol{x = 3}$, οπότε η μόνη περίπτωση που μας ικανοποιεί είναι η $\boxed{\boldsymbol{x(t) = \sqrt{9-t^2}\cos(\pi t)}}$. Αφού ξεκινά από το $\boldsymbol{(0,0,-3)}$, παρατηρούμε στο σχήμα ότι $\boldsymbol{y < 0}$, άρα παίρνουμε την $\boxed{\boldsymbol{y(t) = -\sqrt{9-t^2}\sin(\pi t)}}$. Για επιβεβαίωση έχω εύκολα ότι για $\boldsymbol{t = -3}$, έχουμε το αρχικό σημείο $\boldsymbol{(0,0,-3)}$ της σπείρας, ενώ για $\boldsymbol{t = 3}$, έχουμε το τελικό σημείο $\boldsymbol{(0,0,3)}$ της σπείρας. Παρατηρούμε ακόμα το γράφημα της $\boldsymbol{y = \cos(\pi x)\sqrt{9-x^2}}$ για $\boldsymbol{-3 \le x \le 3}$, ότι είναι η προβολή της σπείρας στο επίπεδο xz.

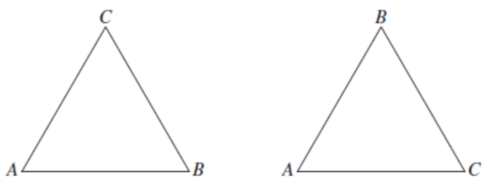


Ερώτηση 16 (14 βαθμοί)

(α) Έστω $\boldsymbol{w}$ ο μιγαδικός αριθμός $\boldsymbol{w = e^{\frac{2i\pi}{3}}}$.

(i) Δείξτε ότι $\boldsymbol{1 + w + w^2 = 0}$ (βαθμοί 2)

Οι κορυφές ενός τριγώνου μπορούν να ονομαστούν A, B και C αντίθετα ή κατά την φορά του ρολογιού, όπως φαίνεται.



ABC is anticlockwise   *ABC* is clockwise

Τρεις μιγαδικοί αριθμοί $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με τα σημεία $\boldsymbol{A, B}$ και $\boldsymbol{C}$ αντίστοιχα.

(ii) Δείξτε ότι αν το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι αντίθετα στην φορά του ρολογιού και ισόπλευρο, τότε $\boldsymbol{a + bw + cw^2 = 0}$. (βαθμοί 2)

(iii) Αποδεικνύεται ότι αν το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι σύμφωνα με την φορά του ρολογιού και ισόπλευρο, τότε $\boldsymbol{a + bw^2 + cw = 0}$. (Να ΜΗΝ το αποδείξετε αυτό)

Να δείξετε ότι αν το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι ισόπλευρο, τότε $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca}$ (βαθμοί 2)

(β)

(i) Δείξτε ότι $x > \ln x$, για $x > 0$ (βαθμοί 2)

(ii) Με την βοήθεια του (i), ή με άλλον τρόπο, δείξτε ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους, $e^{n^2+n} > (n!)^2$ (βαθμοί 3)

(γ) Οι μιγαδικοί αριθμοί w και z έχουν μέτρο 1, και $\frac{\pi}{2} < \mathbf{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) < \pi$,όπου **Arg** το πρωτεύον όρισμα. Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y, θεωρήστε τον μιγαδικό αριθμό $\frac{xz+yw}{z}$

Σε ένα επίπεδο xy, σχεδιάστε την περιοχή που περιέχει όλα τα σημεία (x, y) για τα οποία $\frac{\pi}{2} < \mathbf{Arg}\left(\frac{xz+yw}{z}\right) < \pi$ (βαθμοί 3)

Λύση

(α)

(i) Έχω $1 + w + w^2 = 1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Ή πιο απλά $1 + w + w^2 = \frac{1-w^3}{1-w} = 0$, αφού $w^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = 1$

(ii) Έχω $\overrightarrow{AB} = b - a, \overrightarrow{BC} = c - b, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ και ότι η περιστροφή του $\overrightarrow{AB}$ κατά $\frac{2\pi}{3}$ ως προς Α δίνει το $\overrightarrow{BC}$. Άρα $c - b = (b - a)w \Rightarrow c - b = wb - aw \Rightarrow c - b - wb + aw = 0 \Rightarrow c - (1 + w)b + aw = 0 \Rightarrow c + w^2b + aw = 0 \Rightarrow w^2c + w^2w^2b + aww^2 = 0 \Rightarrow w^2c + wb + a = 0$, όπως θέλαμε.

(iii) Αφού το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, θα είναι αντίθετο ή σύμφωνα με την φορά του ρολογιού οπότε θα ισχύει μια από τις σχέσεις $a + bw + cw^2 = 0$ και $a + bw^2 + cw = 0$. Άρα θα ισχύει ότι το γινόμενό τους σε κάθε περίπτωση είναι μηδέν. Άρα έχω

$(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = 0 \Leftrightarrow a^2 + bw^3 + cw^3 + ab(w^2 + w) + bc(w^2 + w^4) + ac(w + w^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

(β)

(i) Έστω $f(x) = x - \ln x, x > 0$.

Έχω $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, x > 0$ Από τον διπλανό πίνακα μεταβολών, έχω ότι η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$, άρα $f(x) = x - \ln x \geq 1 > 0, x > 0 \Rightarrow x < \ln x, x > 0$

t	0	1	$-\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

(ii) Έχω από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$1 > \ln 1$$

$$2 > \ln 2$$

$$3 > \ln 3$$

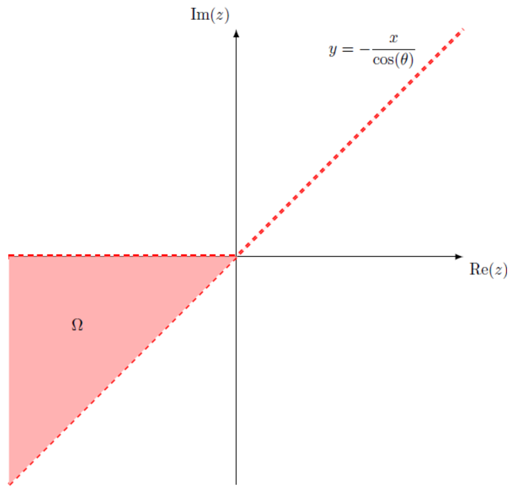
$$\ldots$$

$$n - 1 > \ln(n - 1)$$

$$n > \ln n$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, έχω $\mathbf{1+2+3+\cdots+n-1+n>\ln\,1+\ln\,2+\ln\,3+\cdots+\ln\,(n-1)+\ln\,n=\ln\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n)=\ln\,(n!)}\Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{n\,(n+1)}}{\mathbf{2}}>\mathbf{\ln\,(}\boldsymbol{n}!)\Leftrightarrow \boldsymbol{n\,(n+1)>2\ln\,(n!)=\ln\,(n!)^2}\Leftrightarrow \boldsymbol{e^{n^2+n}>(n!)^2}$, όπως θέλαμε.

(iii) Έχω $|\boldsymbol{z}|=|\boldsymbol{w}|=\mathbf{1}$, άρα $\left|\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}}\right|=\mathbf{1}$, άρα $\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{e^{i\theta}}$, με $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}<\boldsymbol{\theta}<\boldsymbol{\pi}$. Έχω ακόμη ότι $\frac{\boldsymbol{xz+yw}}{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x+y\frac{w}{z}=x+ye^{-i\theta}=Re^{i\varphi}}$, με $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}<\boldsymbol{\varphi}<\boldsymbol{\pi}$ και $\boldsymbol{R}>\mathbf{0}$. Άρα $\boldsymbol{x+ycos\theta\ -iysin\theta=Rcos\varphi\ -iRsin\varphi\Rightarrow x+ycos\theta\ =Rcos\varphi}$ και $\boldsymbol{ysin\theta=-Rsin\varphi}$. Έχω ακόμη ότι $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}<\boldsymbol{\theta,\varphi<\pi\Rightarrow sin\theta>0,sin\varphi\ >0,cos\theta<0,cos\varphi<0}$. Άρα $\boldsymbol{ysin\theta=-Rsin\varphi\Rightarrow y=-\frac{Rsin\varphi}{sin\theta}<0}$ και $\boldsymbol{x+ycos\theta\ =Rcos\varphi<0\Rightarrow ycos\theta\ <-x\xRightarrow{cos\theta<0}y\ >-\frac{x}{cos\theta}}$. Άρα η ζητούμενη περιοχή είναι το σύνολο $\boldsymbol{\Omega=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:y>-\frac{x}{\cos\,(\theta)}\wedge y<0,y\in\mathbb{R}\ \textit{και}\ \theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\}}$ δηλαδή η σκιασμένη περιοχή που φαίνεται στο σχήμα.



[Πηγές]

Αυστραλία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΥΣΤΡΑΛΙΑΣ – The BrainStorm (wordpress.com)

Τα καλύτερα πανεπιστήμια στην Αυστραλία για διεθνείς φοιτητές - alinks.org

https://www.matrix.edu.au/2023-hsc-maths-extension-2-exam-paper-solutions/

https://educationstandards.nsw.edu.au/wps/portal/nesa/11-12/resources/hsc-exam-papers