[Εισαγωγή]

Το Πορτογαλικό σύστημα εκπαίδευσης τηρεί τα γενικά πρότυπα, αλλά δεν είναι ακόμα τόσο προχωρημένο όπως εκείνο πολλών άλλων δυτικοευρωπαϊκών χωρών. Στο παρελθόν, ήταν ιδιαίτερα εμφανές το χαμηλό επίπεδο του εκπαιδευτικού συστήματος της χώρας σε σχέση με τα υπόλοιπα της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

[Το εκπαιδευτικό σύστημα]

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Πορτογαλίας για την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση είναι διαρθρωμένο ως εξής:

[Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση]

Από ηλικία 6 ετών ως 10 είναι το Δημοτικό Σχολείο. Από 10 ως 12 ετών είναι ο δεύτερος κύκλος της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης.

[Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση]

Περιλαμβάνει το 10ο, 11ο και 12ο έτος για εφήβους μεταξύ 15 και 18 ετών. Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι υποχρεωτική από το σχολικό έτος 2012/2013.

Οι βαθμοί κυμαίνονται από 0 έως 20 μονάδες και ο μαθητής θα πρέπει να έχει υποχρεωτική παρακολούθηση σε 5 θέματα. Τα επιλεγμένα θέματα έχουν να κάνουν με την ανώτερη πορεία που θέλει να ακολουθήσει.

Ορισμένα μαθήματα είναι υποχρεωτικά για όλους, όπως η πορτογαλική γλώσσα, η ξένη γλώσσα, η φιλοσοφία και η φυσική αγωγή. Όμως, για παράδειγμα, για έναν μαθητή που θέλει να μπει στην Ιατρική, κατά τη διάρκεια του γυμνασίου δεν χρειάζεται να μελετήσει θέματα όπως η γεωγραφία και η ιστορία. Εκείνοι που θέλουν να σπουδάσουν κάποια ανώτατη εκπαίδευση στις Τέχνες δεν χρειάζεται να σπουδάσουν βιολογία, γεωγραφία κλπ.

Στο τέλος του γυμνασίου ο μαθητής θα πάρει μέρος στην εθνική εξέταση και είναι ο μέσος όρος των εξετάσεων αυτών, που θα επιτρέψουν την πρόσβασή του στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

[Τριτοβάθμια Εκπαίδευση]

Στην Πορτογαλία η τριτοβάθμια εκπαίδευση παρέχεται από τα Πανεπιστήμια (Universidade) τα Πολυτεχνικά Ινστιτούτα (Instituto Politécnico), τις Ανώτατες Σχολές (Escola Superior) και τα Ανώτατα Ινστιτούτα (Instituto Superior). Στην ανώτατη εκπαίδευση υπάρχουν 20 κρατικά και 8 ιδιωτικά εκπαιδευτικά ιδρύματα. Οι φοιτητές έχουν τη δυνατότητα να μετακινούνται από το ένα ίδρυμα στο άλλο. Αυτό είναι εφικτό να γίνει μεταξύ ενός κρατικού και ιδιωτικού ιδρύματος.

Τα Πανεπιστήμια είναι τα μόνα ιδρύματα που χορηγούν τίτλους μεταπτυχιακών σπουδών, τα οποία παρέχουν επιστημονικές γνώσεις που επιτρέπουν την ανάπτυξη έρευνας σε διάφορους τομείς σπουδών. Τα Πολυτεχνικά Ινστιτούτα, Ανώτατες Σχολές, Ανώτατα Ινστιτούτα παρέχουν θεωρητικές και πρακτικές επιστημονικές γνώσεις στους τομείς: Παιδαγωγική, Εφαρμοσμένες Τέχνες, Καλές Τέχνες, Εκπαίδευση Καθηγητών, Νοσηλευτική, Διοίκηση-Διαχείριση, Γεωργία, Δασοπονία και Μηχανική-Τεχνολογία.

[Προϋποθέσεις εισαγωγής]

Οι υποψήφιοι φοιτητές μπορούν να εισαχθούν στην ανώτατη εκπαίδευση εάν διαθέτουν απολυτήριο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επίσης πρέπει να συμμετάσχουν στις εξετάσεις εισαγωγής Concurso Nacional για τα κρατικά ιδρύματα και στις εξετάσεις Concurso Local για τα ιδιωτικά ιδρύματα. Για να συμμετάσχει κανείς σε αυτές τις εξετάσεις θα πρέπει να εκπληρώνει ορισμένες απαραίτητες προϋποθέσεις για τον τομέα επιλογής του. Τα πανεπιστήμια ανακοινώνουν τις απαιτήσεις εισαγωγής σε ένα εγχειρίδιο που διανέμεται στους ενδιαφερόμενους από το γραφείο Direcção de Serviços de Acceso ao Ensimo Superior το οποίο είναι υπεύθυνο για την επιλογή των φοιτητών στους διάφορους τομείς σπουδών τους. Οι κενές θέσεις που κατανέμονται από τα κρατικά-ιδιωτικά πανεπιστήμια καλύπτονται από τους επιτυχόντες των εξετάσεων εισαγωγής που διοργανώνονται την χρονική περίοδο Μαρτίου-Απριλίου. Η γνώση της πορτογαλικής γλώσσας είναι απαραίτητη για να παρακολουθήσει κανείς ανώτατες σπουδές. Κάποια πανεπιστήμια οργανώνουν μαθήματα προετοιμασίας εκμάθησης γλώσσας.

Κάθε χρόνο όλα τα ανώτατα ιδρύματα (δημόσια, ιδιωτικά) ανακοινώνουν τον αριθμό εισακτέων για κάθε τομέα σπουδών ο οποίος έχει εγκριθεί από το Υπουργείο Παιδείας
Ο Εθνικός Διαγωνισμός για την Πρόσβαση στη Δημόσια Τριτοβάθμια Εκπαίδευση (CNA) είναι η κύρια οδός (γενικό καθεστώς) πρόσβασης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, που προορίζεται ειδικά – αλλά όχι αποκλειστικά – για φοιτητές που έχουν ολοκληρώσει τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Πορτογαλία. Η πρόσβαση αυτή οργανώνεται και συντονίζεται άμεσα από τη Γενική Διεύθυνση Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (DGES).

Οι φοιτητές που επιθυμούν να εισέλθουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση σε μαθήματα φυσικών επιστημών, πρέπει πάντα να εγγραφούν στις πανελλαδικές εξετάσεις των Μαθηματικών Α στην 1η φάση. Η 1η φάση είναι απαραίτητη γιατί είναι η μόνη που επιτρέπει την αίτηση του φοιτητή στην 1η φάση των αιτήσεων, όταν υπάρχουν ακόμα αρκετές διαθέσιμες θέσεις! Εάν ο μαθητής εγγραφεί στην 1η φάση των εξετάσεων Μαθηματικών Α και χάσει επίσης δεν θα μπορέσει να κάνει τη 2η φάση, οπότε η έλλειψη δεν αποτελεί επιλογή!
Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της εθνικής εξέτασης των Μαθηματικών Α και Β; (superprof.pt)
Η πανελλαδική εξέταση των Μαθηματικών Α μπορεί να γίνει μόνο στο τέλος του 12ου έτους και περιλαμβάνει ενότητες όπως :

- Λογική και θεωρία συνόλων.
- Άλγεβρα
- Αναλυτική γεωμετρία
- Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.
- Στατιστική
- Τριγωνομετρία και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Ακολουθίες
- Συνδυαστική.
- Πιθανότητες
- Εκθετικές συναρτήσεις και λογαριθμικές συναρτήσεις
- Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός.
- Μιγαδικοί αριθμοί

[Οι Εθνικές Εξετάσεις Μαθηματικών Β]
Το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών Β είναι παρόμοιο με αυτό των Μαθηματικών Α με τη διαφορά ότι το 2ο είναι τριετές γνωστικό αντικείμενο ενώ το 1ο είναι διετές δηλαδή διδάσκεται μόνο στο 10ο και 11ο έτος που είναι η εθνική εξέταση που γίνεται στο τέλος του 11ου έτους.

Οι εξετάσεις Μαθηματικών Β είναι λιγότερο δύσκολες από τις εξετάσεις Μαθηματικών Α, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι είναι εύκολες.

Η εξέταση Μαθηματικών Β μπορεί να ληφθεί στην 12η τάξη, δεν είναι, ωστόσο, σκόπιμη επειδή οι εθνικές εξετάσεις μαθηματικών Α και Β, καθώς και οι εξετάσεις MACS είναι πάντα την ίδια ημέρα, σύμφωνα με το εθνικό ημερολόγιο εξετάσεων και εάν ο μαθητής θέλει να λάβει την εθνική εξέταση μαθηματικών Α στη 12η τάξη, Δεν μπορείτε να κάνετε και τα δύο την ίδια μέρα!

[Τι είναι το MACS (Μαθηματικά Εφαρμοσμένα στις Κοινωνικές Επιστήμες);]

Τα Μαθηματικά Εφαρμοσμένα στις Κοινωνικές Επιστήμες είναι, όπως υποδηλώνει το όνομα, η πειθαρχία των μαθηματικών που διδάσκονται στις Κοινωνικές Επιστήμες, προορίζεται για την πορεία των γλωσσών και των ανθρωπιστικών επιστημών των Επιστημονικών-Ανθρωπιστικών μαθημάτων.

Αυτός ο κλάδος, σύμφωνα με το επίσημο έγγραφο του DGES "σκοπεύει να διαδραματίσει έναν αναπόφευκτο ρόλο για τους μαθητές [αυτού του μαθήματος], συμβάλλοντας σε μια όσο το δυνατόν πληρέστερη προσέγγιση σε πραγματικές καταστάσεις, αναπτύσσοντας την ικανότητα διατύπωσης και μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων και αναπτύσσοντας την ικανότητα επικοινωνίας μαθηματικών ιδεών". Δηλαδή, αυτή η πειθαρχία, καθώς και η εθνική μαθηματική εξέταση στοχεύει να παρέχει στους φοιτητές ανθρωπιστικών μαθημάτων μαθηματική, κριτική και δική τους σκέψη.

Οι εισαγωγικές εξετάσεις των Μαθηματικών που εφαρμόζονται στις Κοινωνικές Επιστήμες είναι πάντα την ίδια ημέρα με τις εξετάσεις των Μαθηματικών Α και Β.

[Χρήση αριθμομηχανής]

Στις τελικές εξετάσεις των κλάδων Φυσικής και Χημείας Α (715), Μαθηματικών Α (635), Μαθηματικά Β (735) και MACS (835), οι μαθητές πρέπει να διαθέτουν αριθμομηχανές γραφικών σε λειτουργία εξέτασης (exam mode). Για αυτές τις τελικές εξετάσεις, επιτρέπεται η χρήση γραφικών αριθμομηχανών που δεν έχουν CAS (Computer Algebra System).

Η ενεργοποίηση της λειτουργίας εξέτασης πρέπει να γίνει στην αίθουσα όπου διεξάγεται η εξέταση, παρουσία του επιτηρητή καθηγητή, πριν από την έναρξη του τεστ, ώστε οι μαθητές να έχουν μόνο τη δυνατότητα πρόσβασης σε λειτουργίες γραφικών και υπολογισμών. Η κατάσταση λειτουργίας εξέτασης είναι ορατή, με εμφανέστατο τρόπο για τους επιτηρητές, μέσω ενός led ή μέσω άλλων ενδείξεων που είναι ορατές στην οθόνη της αριθμομηχανής. Για λόγους δικαιοσύνης και σεβασμού προς τον κανόνα, θα πρέπει οι εξεταζόμενοι να καθαρίζουν τη μνήμη της αριθμομηχανής, στην αίθουσα που διεξάγεται η εξέταση, παρουσία του επιτηρητή, για να μπορέσει να εξεταστούν απρόσκοπτα.

[Εθνική Τελική Εξέταση Μαθηματικών Α Εξέταση 635 | Φάση 1]

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση | 2023 12ο έτος σχολικής φοίτησης | Διάρκεια της εξέτασης: 150 λεπτά. | Ανοχή: 30 λεπτά

Η εξέταση περιλαμβάνει 12 θέματα, που είναι υποχρεωτικά. Από τα υπόλοιπα 6 θέματα του τεστ, μόνο τα 3 θέματα των οποίων οι απαντήσεις συγκεντρώνουν την καλύτερη βαθμολογία συμβάλλουν στην τελική βαθμολόγηση.

Χρησιμοποιείστε μόνο μπλε ή μαύρο στυλό ή στυλό.

Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διορθωτικό. Διαγράψτε ό,τι δεν θέλετε να σημειωθεί.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χάρακα, πυξίδα, τετράγωνο, μοιρογνωμόνιο και αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων.

Υποβάλετε μόνο μία απάντηση για κάθε θέμα.

Θα βρείτε τη βαθμολογία των θεμάτων στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου.

Στις απαντήσεις σας στα θέματα πολλαπλής επιλογής, επιλέξτε τη σωστή επιλογή. Γράψτε τον αριθμό του αντικειμένου και αριθμό του στοιχείου και το γράμμα που προσδιορίζει την επιλογή που έχετε επιλέξει.

Στις απαντήσεις σας στα υπόλοιπα στοιχεία, αναφέρετε όλους τους υπολογισμούς που πρέπει να κάνετε και όλες τις απαραίτητες αιτιολογήσεις. Όταν δεν σας ζητείται να προσεγγίσετε ένα αποτέλεσμα, να δίνετε πάντα την ακριβή τιμή.

[Τυπολόγιο που δίνεται στους εξεταζόμενους]

Γεωμετρία

- Μήκος τόξου περιφέρειας: $\boldsymbol{ar}$ ($\boldsymbol{\alpha} -$ μέτρο επίκεντρης γωνίας, σε ακτίνια, - r-ακτίνα)
- Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου: Ημιπερίμετρος × Απόστημα
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα: $\frac{\boldsymbol{ar^2}}{\boldsymbol{2}}$($\boldsymbol{\alpha} -$ μέτρο επίκεντρης γωνίας, σε ακτίνια, - r-ακτίνα)
- Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου: $\boldsymbol{\pi r g}$($\boldsymbol{r} -$ ακτίνα βάσης; $\boldsymbol{g}$—γεννήτρια)
- Εμβαδόν σφαιρικής επιφάνειας: $\boldsymbol{4\pi r^2}$($\boldsymbol{r}$-ακτίνα)
- Όγκος πυραμίδας : $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$ ×Εμβαδόν βάσης× Ύψος
- Όγκος κώνου: $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$ ×Εμβαδόν βάσης × Ύψος
- Όγκος σφαίρας: $\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{\pi r^3}$($\boldsymbol{r}$-ακτίνα)

Πρόοδοι

- Άθροισμα των πρώτων $\boldsymbol{n}$ όρων μιας προόδου ($\boldsymbol{u_n}$) :
- Αριθμητική Πρόοδος: $\frac{\boldsymbol{u_1+u_n}}{\boldsymbol{2}} \times \boldsymbol{n}$
- Γεωμετρική Πρόοδος: $\boldsymbol{u_1} \times \frac{\boldsymbol{1-r^n}}{\boldsymbol{1-r}}$

Τριγωνομετρία

- $\boldsymbol{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
- $\boldsymbol{\cos\,(a+b) = \ \cos a \cos b - \ sina\ sinb}$

Μιγαδικοί

- $\boldsymbol{(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}}$
- $\boldsymbol{\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}}$ $(\boldsymbol{k} \in \{\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{n-1}\}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{N})$

Κανόνες παραγώγισης

- $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$
- $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$
- $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$
- $(\boldsymbol{u^n})' = \boldsymbol{nu^{n-1}u'}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbf{R})$
- $\boldsymbol{(\sin u)' = u' \cos u}$
- $\boldsymbol{(\ \cos u)' = -u' \sin u}$
- $\boldsymbol{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$
- $\boldsymbol{(e^u)' = u'e^u}$
- $\boldsymbol{(a^u)' = u'a^u \ln a}$ $\ (\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^+\backslash\{\boldsymbol{1}\})$
- $\boldsymbol{(\ \ln u)' = \frac{u'}{u}}$
- $\boldsymbol{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^+\backslash\{\boldsymbol{1}\})$

Αξιοσημείωτα όρια

- $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbf{N})$
- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1}$
- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$
- $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0}$
- $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty}$ $(\boldsymbol{p} \in \mathbf{R})$

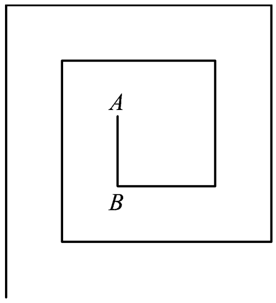
***1.** Ποιο είναι το όριο στο άπειρο της ακολουθίας $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\mathbf{2n}}$;

(A) $\mathbf{1}$ (B) $\mathbf{2e}$ (C) $\boldsymbol{e^2}$ (D) $+\infty$

ΛΥΣΗ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=e^2$ άρα (C)

2. Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται μια απλή πολυγωνική γραμμή που κατασκευάστηκε από το ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{AB}$. Το δεύτερο ευθύγραμμο τμήμα, με το ένα άκρο στο B, κατασκευάστηκε κατά 2 cm μακρύτερο από το πρώτο, το τρίτο τμήμα κατασκευάστηκε κατά 2 cm μακρύτερο από το δεύτερο, και ούτω καθεξής, με κάθε ευθύγραμμο τμήμα να είναι πάντα κατά 2 cm μακρύτερο από το προηγούμενο..



Σχήμα 1

Αν συνεχίσετε να κατασκευάζετε την πολυγωνική γραμμή με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω μέχρι το 100ο τμήμα της γραμμής, θα έχετε μια πολυγωνική γραμμή συνολικού μήκους 104 μέτρων.

Προσδιορίστε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος [AB] .

Δώστε την απαιτούμενη τιμή σε εκατοστά.

ΛΥΣΗ

Έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\boldsymbol{\alpha_1=AB,\omega=2}$, Το άθροισμα των $\boldsymbol{n=100}$ όρων ακολουθίας αριθμητικής προόδου είναι:

$\frac{\alpha_1+(n-1)\omega}{2}\times n=S_{100}\Rightarrow\frac{AB+(100-1)2}{2}\times 100=104\times 100cm\Rightarrow AB+(100-1)\cdot 2=104\cdot 2\Rightarrow AB=208-198\Rightarrow\boxed{AB=10cm}$

***3.** Λύστε αυτό το ερώτημα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.

Έστω $\boldsymbol{f}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο $\boldsymbol{R}$, της οποίας η παράγωγος, $\boldsymbol{f'}$, δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{f'(x)=-2xe^{1-x^2}}$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ ως προς τα κοίλα της γραφικής της παράστασης και την ύπαρξη σημείων καμπής.

Στην απάντησή σας, δείξτε

- το(τα) διάστημα(τα) στο(α) οποίο(α) η γραφική παράσταση της f έχει κοίλα προς τα κάτω,
- το(τα) διάστημα(τα) στο(α) οποίο(α) η γραφική παράσταση της f έχει κοίλα προς τα πάνω,
- την ή τις τετμημένες του ή των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f , εάν υπάρχουν.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f''(x)=-2\left(xe^{1-x^2}\right)'=-2\left(e^{1-x^2}-2x^2e^{1-x^2}\right)=-2e^{1-x^2}(1-2x^2)=e^{1-x^2}(4x^2-2)<0\Leftrightarrow 4x^2-2<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ενώ $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

Ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ Σ.Κ.				$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ Σ.Κ.		

Άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\infty\right)$ ενώ τα στρέφει προς τα κάτω στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Τα σημεία καμπής είναι τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\boldsymbol{f}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\boldsymbol{f}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

4. Θεωρήστε τη συνάρτηση $\boldsymbol{g}$, με πεδίο ορισμού $\boldsymbol{R}$, και τύπο

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{αν } x<1\\ 7\times 3^{x-1}-3 & \text{αν } x\geq 1\end{cases}}$$

Λύστε τα θέματα 4.1. και 4.2. χωρίς τη χρήση αριθμομηχανής.

*4.1 Ελέγξτε αν η συνάρτηση $\boldsymbol{g}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x=1}$.

4.2. Λύστε, στο διάστημα $[\mathbf{1},+\infty)$, την εξίσωση $\boldsymbol{\log_3(g(x))=x+\log_3 2}$

ΛΥΣΗ

*4.1 Έχουμε $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{4x-4}{e^{x-1}-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{4}{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}=\frac{4}{1}=4}$ και $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}7\times3^{x-1}-3=7\times1-3=7-3=4=g(1)=\lim\limits_{x\to1^-}g(x)}$ Άρα η $\boldsymbol{g}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x=1}$

4.2 Έχουμε $\boldsymbol{\log_3(g(x))=x+\log_3 2\Leftrightarrow\log_3(g(x))=\log_3 3^x+\log_3 2\Leftrightarrow\log_3(g(x))=\log_3(2\cdot3^x)\Leftrightarrow g(x)=2\cdot3^x\overset{x\geq1}{\Leftrightarrow}7\times3^{x-1}-3=2\cdot3^x\Leftrightarrow\frac{7\cdot3^x}{3}-3=2\cdot3^x\Leftrightarrow3^x=9\Leftrightarrow\boxed{x=2}}$ δεκτή αφού $\boldsymbol{2\geq1}$

5. Μια ομάδα νέων έχει εγγραφεί σε μια κατασκήνωση διακοπών που προσφέρει σέρφινγκ και σκέιτμπορντ.

*5.1 Δέκα από τους νέους της ομάδας θα παραταχθούν στην παραλία για ένα μάθημα σερφ.

Η Ana, ο Diogo και ο Francisco είναι τρεις από αυτούς.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν οι νέοι στην ουρά έτσι ώστε η Ana, ο Diogo και ο Francisco να είναι μαζί; (A) **483840** (B) **241920** (C) **60480** (D) **30240**

ΛΥΣΗ

Αν θεωρήσουμε τα τρία παιδιά ως μια ομάδα, τότε έχω σε πρώτη φάση να διατάξουμε 8 στοιχεία. Αυτό γίνεται με $\mathbf{8!}$ τρόπους. Σε δεύτερη φάση, η ομάδα των τριών παιδιών διατάσσεται κατά $\mathbf{3!}$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $\mathbf{8!\cdot3!=40320\cdot6=\boxed{241920}}$ τρόπους διάταξης των 10 νέων με τους Ana, Diogo και Francisco να είναι μαζί. Άρα (B)

5.2. Κατά την εγγραφή τους, όλοι οι νέοι της ομάδας απάντησαν σε ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με το σερφ και το σκέιτμπορντ.

Σύμφωνα με τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο:

- Το **65**% ασχολείται με το σέρφινγκ,
- το **20**% έκανε skateboard και δεν έκανε σερφ,

- τέσσερις στους πέντε από αυτούς που έκαναν σερφ έκαναν και σκέιτμπορντ.

Επιλέχθηκε τυχαία ένας νέος που είχε απαντήσει στο ερωτηματολόγιο ότι δεν έκανε skateboard.
Προσδιορίστε την πιθανότητα ο νέος αυτός, στο ερωτηματολόγιο, να απάντησε επίσης ότι έκανε σέρφινγκ.
Παρουσιάστε το αποτέλεσμα ως μη αναγώγιμο κλάσμα.

ΛΥΣΗ

Έστω Α το γεγονός «ο νέος απάντησε ότι έκανε σέρφινγκ» και Β το γεγονός «ο νέος απάντησε ότι έκανε σκέιτμπορντ»

Τότε έχουμε ότι $\boldsymbol{P(A)=0,65}$, $\boldsymbol{P(B\cap\bar{A})=0,2}$. Ζητάμε να βρούμε το $\boldsymbol{P(A\mid\bar{B})}$.

Έχουμε ότι κάνουν και τα δύο το $\boldsymbol{P(B\cap A)=\frac{4}{5}P(A)=\frac{4}{5}\,0.65=0.52}$ ενώ μόνο σερφινγκ το $\boldsymbol{P(A\cap\bar{B})=\frac{1}{5}P(A)=\frac{1}{5}\,0.65=0.13}$.

Έχουμε $\boldsymbol{P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A})=0.52+0.2=0.72}$ άρα $\boldsymbol{P(\bar{B})=1-P(B)=0.28}$

Άρα από θεώρημα Bayes $\boldsymbol{P(A\mid\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.13}{0.28}=\boxed{\frac{13}{28}}}$

⋆ 5.3. Θεωρήστε ότι υπάρχουν **70** νέοι στην ομάδα ηλικίας 13 ή 14 ετών, με τον αριθμό των 14χρονων να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των 13χρονων.

Δύο από αυτούς τους νέους θα επιλεγούν τυχαία για να εκτελέσουν μια συγκεκριμένη εργασία.

Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να επιλεγούν δύο από αυτούς τους νέους με διαφορετικές ηλικίες είναι $\boldsymbol{\frac{16}{35}}$

Προσδιορίστε τον αριθμό των 13χρονων στην ομάδα.

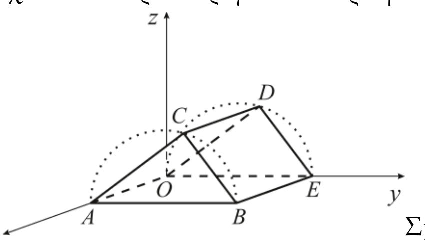
ΛΥΣΗ

Έστω $\boldsymbol{x}$ οι 13χρονοι και $\boldsymbol{70-x}$ οι 14χρονοι. Έστω Α το γεγονός «ο πρώτος νέος είναι 13χρονος» και Β το γεγονός «ο δεύτερος νέος είναι 14χρονος».

Τότε έχω $\boldsymbol{P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)=\frac{16}{35}\Leftrightarrow\frac{x}{70}\cdot\frac{70-x}{69}+\frac{70-x}{70}\cdot\frac{x}{69}=\frac{16}{35}\Leftrightarrow 2x(70-x)=32\cdot 69\Leftrightarrow 2x^2-70x+16\cdot 69=0}$ με $\boldsymbol{\Delta=(-70)^2-4\cdot16\cdot69=4900-4416=484=22^2}$.

Άρα $\boldsymbol{x=\frac{70\pm22}{4}\Leftrightarrow x=46}$ ή $\boldsymbol{x=24}$. Δεκτή η $\boxed{\boldsymbol{x=24}}$ αφού οι 13χρονοι είναι οι λιγότεροι.

6. Το σχήμα 2 δείχνει ένα ορθό τριγωνικό πρίσμα $\boldsymbol{OABCDE}$ με βάσεις $\boldsymbol{ABC}$ και $\boldsymbol{OED}$ σε ένα σύστημα αναφοράς Oxyz.



Σχήμα 2

Είναι γνωστό ότι:

· οι βάσεις του πρίσματος εγγράφονται σε ημικύκλια με διαμέτρους $\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{OE}$ αντίστοιχα,

· οι κορυφές Α και Ε του πρίσματος ανήκουν, αντίστοιχα, στους θετικούς ημιάξονες $\boldsymbol{Ox}$ και $\boldsymbol{Oy}$.

· $\boldsymbol{OE=12,5}$

· η ευθεία $\boldsymbol{AC}$ ορίζεται από τη διανυσματική εξίσωση $\boldsymbol{(x,y,z)=(10,0,0)+k(0,4,3)}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$

∗ 6.1 Ποια από τις ακόλουθες διανυσματικές εξισώσεις ορίζει την ευθεία **OD** ?

$$\{\mathbf{A}\}\boldsymbol{(x,y,z)=(0,6,8)+k\left(0,2,\frac{3}{2}\right)},\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$$

$$\{\mathbf{B}\}\boldsymbol{(x,y,z)=(0,-4,-3)+k\left(0,2,\frac{3}{2}\right)},\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$$

$$\{\mathbf{C}\}\boldsymbol{(x,y,z)=(0,-4,-3)+k(0,3,-4)},\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$$

$$\{\mathbf{D}\}\boldsymbol{(x,y,z)=(0,6,8)+k(0,3,-4)},\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Αφού $\boldsymbol{A\in Ox\cap AC}$ και για $\boldsymbol{k=0}$, έχουμε $\boldsymbol{(x,y,z)=(10,0,0)\in Ox}$, ισχύει ότι $\boldsymbol{A=(10,0,0)}$

Έχω $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(0,4,3) \Leftrightarrow$

Έχω ότι $O \in OD$ άρα η ευθεία OD ορίζεται από τη διανυσματική εξίσωση $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,4,3)$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Θέτω $\lambda = \frac{k}{2} - 1$ και η διανυσματική εξίσωση της OD γίνεται $(x,y,z) = (0,0,0) + \left(\frac{k}{2} - 1\right)(0,4,3) = (0,-4,-3) + \frac{k}{2}(0,4,3) = (0,-4,-3) + k\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$ άρα $\{B\}$

∗ 6.2. Λύστε αυτό το θέμα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.

Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου C.

ΛΥΣΗ

Αφού $AB =// OE$ οι συντεταγμένες του B $(10, 12, 5, 0)$ ενώ αφού $C \in AC$ οι συντεταγμένες του σημείου C είναι $(10, 4k, 3k)$

Έχω απ' το ημικύκλιο ABC ότι

$\widehat{ACB} = 90° \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$

$(10-10, 4k-0, 3k-0) \cdot (10-10, 4k-12.5, 3k-0) = 0 \Rightarrow$

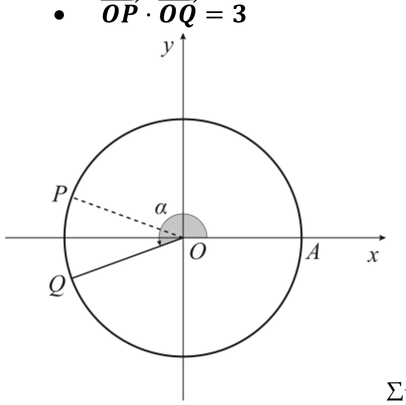
$(0, 4k, 3k) \cdot (0, 4k-12.5, 3k) = 0 \Rightarrow$

$4k(4k-12.5) + 9k^2 = 0 \Rightarrow 25k^2 - 50k = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \boxed{C = (10,8,6)}$

7. Το Σχήμα 3 δείχνει, σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy, έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και τα σημεία A , P και Q , τα οποία ανήκουν στον κύκλο.

Είναι γνωστό ότι:

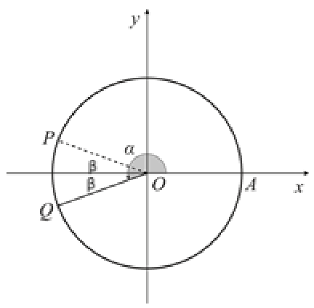
- το σημείο A έχει συντεταγμένες $(2, 0)$
- Η προσανατολισμένη γωνία AOQ έχει μέτρο που ανήκει στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$
- τα σημεία P και Q έχουν την ίδια τετμημένη
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$



Σχήμα 3

Βρείτε την τιμή του $\cos(2\alpha)$

ΛΥΣΗ



Έχω $\alpha - \beta = 180° \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 360°$,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3 \Rightarrow |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cos(2\beta) = 3 \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha - 360°) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

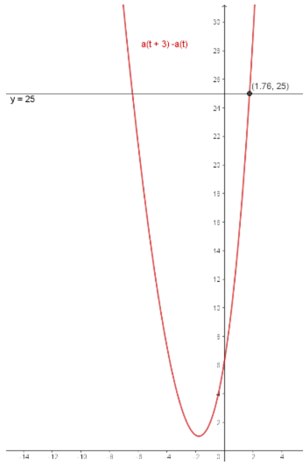
8. Μια εταιρεία αναπτύσσει ένα πρόγραμμα δοκιμών για τη βελτίωση της προώθησης πυραύλων.

Οι χρησιμοποιούμενοι πύραυλοι ξεκινούν από το έδαφος και ακολουθούν κάθετη τροχιά.

Για ένα από τα μοντέλα πυραύλων που χρησιμοποιούνται, υποθέστε ότι, μετά την εκτόξευση και μέχρι να εξαντληθεί το καύσιμο, η απόστασή του από το έδαφος, a , σε μέτρα, δίνεται, σε κάθε στιγμή t , σε δευτερόλεπτα, από τη σχέση

$a(t) = 100\left[t + (10-t)\ln\left(1 - \frac{t}{10}\right)\right] - 4,9t^2$ όπου $t \in [0,8]$

Χρησιμοποιώντας την αριθμομηχανή γραφικών παραστάσεων, προσδιορίστε τη στιγμή από την οποία, σε 3 δευτερόλεπτα, ο πύραυλος αυτός διανύει 25 μέτρα.
Δώστε το αποτέλεσμα σε δευτερόλεπτα, στρογγυλοποιημένο στο πλησιέστερο δέκατο.
Μην αιτιολογήσετε την εγκυρότητα του αποτελέσματος που προέκυψε από την αριθμομηχανή.



Στην απάντησή σας:
- να δώσετε μια εξίσωση που σας επιτρέπει να λύσετε το πρόβλημα,
- να αναπαραστήσετε, σε ένα πλαίσιο αναφοράς, τη γραφική παράσταση (ή τις γραφικές παραστάσεις) της συνάρτησης (ή των συναρτήσεων) που απεικονίζονται στον υπολογιστή και να σημειώσετε το (τα) σχετικό(-ά) σημείο(-α) που σας επιτρέπει(-ουν) να λύσετε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

Έχουμε προφανώς ότι $\boxed{\boldsymbol{a(t+3)-a(t)=25}}$

Σχεδιάζω την ευθεία $\boldsymbol{y=25}$ και την $\boldsymbol{a(x+3)-a(x)}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων με την βοήθεια αριθμομηχανής και διαπιστώνω ότι τέμνονται σε δυο σημεία από τα οποία επιλέγω το $\boldsymbol{(1.76, 25)}$ αφού $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{8}]$. Άρα μετά τη στρογγυλοποίηση έχω $\boxed{\boldsymbol{t=1.8}}$

***9,** Έστω $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και $(\boldsymbol{0}, +\infty)$, αντίστοιχα, και έστω $\boldsymbol{r}$ η ευθεία της εξίσωσης $\boldsymbol{y=2x-1}$

Είναι γνωστό ότι:

- η ευθεία $\boldsymbol{r}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$ στο σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{1}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{f(x)-2x+1})=\boldsymbol{0}$;
- στα πεδία ορισμού τους, η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ έχει κοίλα προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$ έχει κοίλα προς τα κάτω.

Εξετάστε τις ακόλουθες προτάσεις.

I. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη όταν το $\boldsymbol{x}$ τείνει στο $+\infty$

II. $\lim\limits_{x\to1}\boldsymbol{g(x)=2}$

III. $\boldsymbol{f''(x)<g''(x)}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{0}, +\infty)$

Δικαιολογήστε ότι οι προτάσεις I, II και III είναι λανθασμένες.

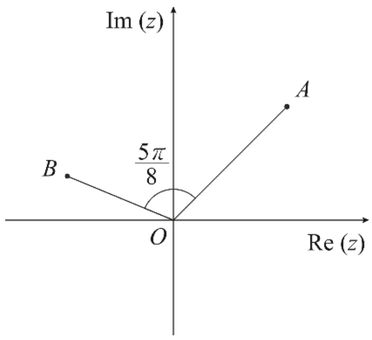
ΛΥΣΗ

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(\boldsymbol{f(x)-2x+1})=\boldsymbol{0}$ η $\boldsymbol{f}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $\boldsymbol{r}$ και όχι οριζόντια. Άρα η πρόταση I είναι Ψευδής.

Αφού η ευθεία $\boldsymbol{y=2x-1}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$ στο σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{1}$ έχω $\boldsymbol{g(1)=2\cdot1-1=1}$ Αφού g παραγωγίσιμη, η g είναι συνεχής στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to1}\boldsymbol{g(x)=g(1)} \Leftrightarrow \boldsymbol{2=1}$ άτοπο. Άρα η πρόταση II είναι Ψευδής.

Αφού η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ έχει κοίλα προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$ έχει κοίλα προς τα κάτω ισχύει ότι $\boldsymbol{f''(x)\geq0}, \forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{g''(x)\leq0}, \forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{0},+\infty)$, άρα
$\boldsymbol{f''(x)\geq0\geq g''(x)}, \forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{0},+\infty)$. Άρα η πρόταση III είναι Ψευδής.

***10.** Το σχήμα 4 δείχνει τα σημεία Α και Β στο μιγαδικό επίπεδο.
Το σημείο Ο είναι η αρχή των αξόνων.
Το σημείο Α είναι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z, έτσι ώστε $\mathbf{Im}\ (\boldsymbol{z}) = \mathbf{Re}\ (\boldsymbol{z})$ και $\mathbf{Re}\ (\boldsymbol{z}) > \mathbf{0}$
Το σημείο Β είναι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού $\boldsymbol{w}$ έτσι ώστε η κυρτή γωνία $\boldsymbol{AOB}$ να έχει πλάτος $\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{8}}$ ακτίνια.
Ποια από τις ακόλουθες τιμές είναι το όρισμα του $\boldsymbol{w \cdot z}$; Σχήμα 4



(A) $\frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{8}}$ (B) $\frac{\mathbf{57\pi}}{\mathbf{8}}$ {C} $\frac{\mathbf{9\pi}}{\mathbf{8}}$ {D} $\frac{\mathbf{11\pi}}{\mathbf{8}}$
ΛΥΣΗ
Έχω ότι οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ Άρα $\boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{tan}^{-1}\left(\frac{\mathbf{Im}(z)}{\mathbf{Re}\ (z)}\right) = \boldsymbol{tan}^{-1}\mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$
Οπότε $\boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z}) = \left(\widehat{\boldsymbol{AOB}} + \boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z})\right) + \boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z}) = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{8}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{9\pi}}{\mathbf{8}}$ Άρα {C}
11. Λύστε αυτό το θέμα χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.
Θεωρήστε, στο $\mathbb{C}$, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, τον αριθμό $\boldsymbol{w} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - i^{17}}{i}$
Προσδιορίστε, στο $\mathbb{C}$, τις λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{w}$
Παρουσιάστε τις ζητούμενες τιμές με τη μορφή $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$, με $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$
ΛΥΣΗ
Έχω $\boldsymbol{w} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \cdot i^{16}}{i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - i}{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2} - \mathbf{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} = \mathbf{cos}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \boldsymbol{isin}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \boldsymbol{e}^{i\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{z}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{e}^{i\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \mathbf{z} = \pm\left(\boldsymbol{e}^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\boldsymbol{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \pm\left(\mathbf{cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \boldsymbol{isin}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \boxed{\pm\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right)}$
12. Έστω $\boldsymbol{f}$ η συνάρτηση, με πεδίο ορισμού $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, που ορίζεται από τη σχέση $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{r}$ η ευθεία με εξίσωση $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$
*12.1 Ποια από τις παρακάτω είναι η παράγωγος της $\boldsymbol{f}$
{A}$\mathbf{2} - \mathbf{2cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ {B}$\mathbf{2} - \mathbf{2sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ {C}$\mathbf{3} - \mathbf{4cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ {D}$\mathbf{3} - \mathbf{4sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$
ΛΥΣΗ
Έχουμε $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \mathbf{1} = \mathbf{2cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} - \mathbf{2sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} = \mathbf{2} - \mathbf{2sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} - \mathbf{2sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \mathbf{1} = \mathbf{3} - \mathbf{4sin}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}$ άρα {D}
12.2. Λύστε αυτό το θέμα χωρίς να καταφύγετε στην αριθμομηχανή, εκτός από περιστασιακούς αριθμητικούς υπολογισμούς.
Δείξτε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano - Cauchy, ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ τέμνει την ευθεία $\boldsymbol{r}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο τετμημένης που ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$
Έστω η συνεχής στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ συνάρτηση $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - (-\boldsymbol{x} + \mathbf{2}) = \boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} - \mathbf{2} = \boldsymbol{sin}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$
Είναι $\boldsymbol{h}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{sin}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - \mathbf{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \mathbf{2} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{h}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{sin}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - \mathbf{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - \mathbf{2} > \mathbf{0}$
Άρα $\boldsymbol{h}\left(\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{h}\left(\frac{\pi}{3}\right) < \mathbf{0}$. Από το θεώρημα Bolzano - Cauchy υπάρχει τουλάχιστον ένα $\boldsymbol{x} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, και συνεπώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ τέμνει την ευθεία $\boldsymbol{r}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$
***13.** Έστω $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$ πραγματικοί αριθμοί μη μηδενικοί, έτσι ώστε η ευθεία της εξίσωσης $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που ορίζεται από τον τύπο $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{bx}$
Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
ΛΥΣΗ
Θα έχω $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. Έστω $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})\right)$ το σημείο επαφής. Ισχύουν ότι $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}) = \boldsymbol{ax}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}) = \boldsymbol{a} \end{matrix}\right\}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} ax_1{}^2 + bx_1 = ax_1 + b \\ 2ax_1 + b = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ax_1{}^2 + bx_1 = ax_1 + b \\ 2ax_1 + b = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ax_1{}^2 - ax_1 + bx_1 - b = 0 \\ 2ax_1 + b = a \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} ax_1(x_1 - 1) + b(x_1 - 1) = 0 \\ 2ax_1 + b = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (ax_1 + b)(x_1 - 1) = 0 \\ 2ax_1 + b = a \end{matrix}\right\}$$

Αν $\boldsymbol{x_1 \neq 1}$ τότε $\boldsymbol{x_1 = -\frac{b}{a}}$, $\boldsymbol{2a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b = a \Rightarrow -b = a}$ άρα $\boldsymbol{x_1 = -\frac{b}{a} = 1}$ άτοπο.

Αν $\boldsymbol{x_1 = 1}$ τότε $\boldsymbol{\alpha = -b}$, $\boldsymbol{f(x_1) = a + b = 0}$ άρα οι συντεταγμένες του σημείου επαφής είναι $(\boldsymbol{1, 0})$

ΤΕΛΟΣ

[Εθνική Τελική Εξέταση Μαθηματικών Α Εξέταση 635 | Φάση 2]

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση | 2023 12ο έτος σχολικής φοίτησης |Διάρκεια της εξέτασης: 150 λεπτά. | Ανοχή: 30 λεπτά

***1.** Έστω (u_n) μια ακολουθία τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ Ποια από τις παρακάτω εκφράσεις μπορεί να είναι γενικός όρος της (u_n)

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ (B) $-\frac{n^2+1}{n}$ (C) $\frac{4n+3}{3n+4}$ (D) $\frac{(-1)^n}{n}$

ΛΥΣΗ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 \overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\ m=\frac{n}{2}}{=} \left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 = e^2 \neq 0$ άτοπο

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{n}-\frac{1}{n}\right) = -\infty \neq 0$ άτοπο

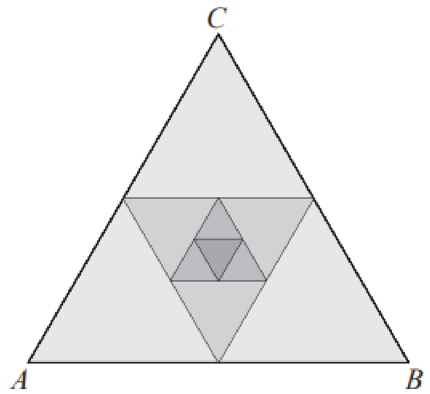
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right) = \frac{4}{3} \neq 0$ άτοπο

έχω $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ άρα $0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$ άρα (D)

2. Θεωρήστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ABC , με $AB = 1$. Ενώνοντας τα μέσα των πλευρών αυτού του τριγώνου, παίρνουμε ένα δεύτερο τρίγωνο. Ενώνοντας τα μέσα των πλευρών του δεύτερου τρίγωνου, παίρνουμε ένα τρίτο τρίγωνο. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο και προκύπτει μια ακολουθία n τριγώνων, όντας $n \geq 4$.

Στο σχήμα 1, εμφανίζονται τα τέσσερα πρώτα τρίγωνα της ακολουθίας.

Να δείξετε ότι το άθροισμα των περιμέτρων των n τριγώνων της ακολουθίας είναι μικρότερο από 6 μονάδες, όποια κι αν είναι η τιμή του n



Σχήμα 1

ΛΥΣΗ

Έχουμε γεωμετρική πρόοδο u_n με $u_1 = 3AB = 3, \lambda = \frac{1}{2}$ Το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας είναι: $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 6 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 6 \cdot 1 = 6$

***3.** Θεωρήστε όλους τους εξαψήφιους φυσικούς αριθμούς που μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 1 έως 9. Από αυτούς τους αριθμούς, πόσοι έχουν ακριβώς δύο πεντάρια;

(A) **98 415** (B) **61 440** (C) **36 015** (D) **25 200**

ΛΥΣΗ

Σε πρώτη φάση έχουμε $\binom{6}{2}$ επιλογές για τα δύο πεντάρια από τα έξι ψηφία. Για τα υπόλοιπα 4 ψηφία του αριθμού έχουμε 8^4 επιλογές, αφού συμπληρώνονται από τα ψηφία 1 έως 9 χωρίς το ψηφίο 5. Άρα έχουμε $\binom{6}{2} \cdot 8^4 = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot 4096 = 61\,440$ άρα (B)

4. Έστω Ε , ένα πεπερασμένο σύνολο, ο χώρος δείγματος που σχετίζεται με ένα τυχαίο πείραμα με δυο ισοπίθανα γεγονότα $A \subset E$ και $B \subset E$.

Είναι γνωστό ότι:

• $P(\bar{A}) = 0,6$

• $P(A \cup \bar{B}) = 0,7$

Προσδιορίστε την τιμή του $P((A \cup \bar{B}) \mid B)$.

Εκφράστε το αποτέλεσμα ως μη αναγώγιμο κλάσμα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\boldsymbol{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4 = P(B)}$ αφού είναι ισοπίθανα.

$\boldsymbol{P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,7 = 0,4 + 0,6 - P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,3}$

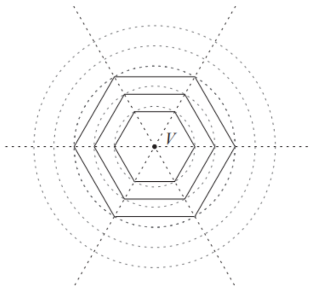
$\boldsymbol{0,4 = P(A) = P(A \cap E) = P\big(A \cap (B \cup \bar{B})\big) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B) + 0,3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,1}$

Ακόμα έχουμε $\boldsymbol{P\big(\ (A \cup \bar{B})\ \big|\ B\ \big) = \frac{P((A\cup\bar{B})\cap B)}{P(B)} = \frac{P((A\cap B)\cup(\bar{B}\cap B))}{P(B)} = \frac{P((A\cap B)\cup(E))}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \boxed{\frac{1}{4}}}$

5. Μια ορισμένη γεωμετρική σύνθεση σχηματίζεται από $\boldsymbol{n}$ κανονικά εξάγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους ομόκεντρους, που περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, με κέντρο το σημείο $\boldsymbol{V}$, όπου $\boldsymbol{n > 3}$.

Το σχήμα 2 είναι ένα διάγραμμα μέρους αυτής της σύνθεσης και δείχνει τρία από τα $\boldsymbol{n}$ εξάγωνα που αποτελούν τη σύνθεση.

Θεωρήστε το σύνολο των σημείων που σχηματίζεται από το σημείο $\boldsymbol{V}$ και τις κορυφές όλων των εξάγωνων στη σύνθεση.



Σχήμα 2.

Αν είναι γνωστό ότι, επιλέγοντας τυχαία δύο σημεία από αυτό το σύνολο, η πιθανότητα να είναι κορυφές του ίδιου εξάγωνου ισούται με $\boldsymbol{\frac{5}{49}}$, να προσδιορίστε την τιμή του $\boldsymbol{n}$.

ΛΥΣΗ

Όλα τα σημεία είναι $\boldsymbol{1 + 6n}$ (το κέντρο $\boldsymbol{V}$ και τα 6 σημεία ανά κύκλο), άρα έχω $\boldsymbol{\binom{6n+1}{2}}$ τρόπους επιλογής δυο από τα $\boldsymbol{1 + 6n}$ σημεία.

Ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $\boldsymbol{n \cdot \binom{6}{2}}$, αφού για κάθε έναν από τους n κύκλους έχω $\binom{6}{2}$ ζεύγη ομοκυκλικών.

Η πιθανότητα είναι $\boldsymbol{P = \frac{n\cdot\binom{6}{2}}{\binom{6n+1}{2}} = n \cdot \frac{n\cdot 15}{\frac{6n(6n+1)}{2}} = \frac{5}{6n+1} = \frac{5}{49} \Rightarrow 49 = 6n + 1 \Rightarrow n = \boxed{8}}$.

6. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, και τύπο $\boldsymbol{f(x) = a + e^{bx}}$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Γνωρίζοντας ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ περιέχει τα σημεία με συντεταγμένες $\boldsymbol{A(1,5)}$ και $\boldsymbol{B(2,7)}$, προσδιορίστε τις τιμές των $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{b}$.

ΛΥΣΗ

Έχω για $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{f(1) = 5 \Leftrightarrow a + e^{b} = 5}$ και για $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{f(2) = 7 \Leftrightarrow a + e^{2b} = 7}$ Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\boldsymbol{e^{2b} - e^{b} = 2 \Leftrightarrow e^{2b} - e^{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^{b} + 1)(e^{b} - 2) = 0 \Leftrightarrow e^{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = ln2}}$. Άρα $\boldsymbol{a + e^{ln2} = 5 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 3}}$

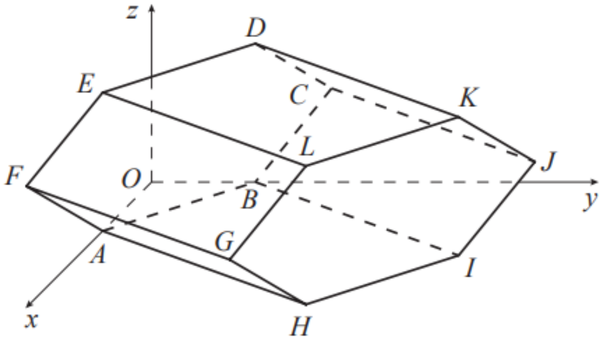
***7.** Η τιμή του $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)}$ είναι (A) $\boldsymbol{0}$ (B) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ (C) $\boldsymbol{1}$ (D) $\boldsymbol{2}$

ΛΥΣΗ

Είναι $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right) = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right) = 2\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right) = 2 \cdot 1 = 2}$ Άρα (D)

8. Το σχήμα αναπαριστά το εξαγωνικό πρίσμα $\boldsymbol{ABCDEFGHIJKL}$ με βάσεις $\boldsymbol{ABCDEF}$ και $\boldsymbol{GHIJKL}$. Οι συντεταγμένες των σημείων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{G}$ είναι $\boldsymbol{(4,0,0)}$ και $\boldsymbol{\left(12,\frac{13}{2},2\right)}$.

Η διανυσματική εξίσωση της ευθείας $\boldsymbol{EL}$ είναι $\boldsymbol{(x,y,z) = (-2,-8,4) + k(3,4,0), k \in \mathbb{R}}$



Σχήμα 3

*8.1 Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει τη σφαίρα διαμέτρου AG;

(A) $\boldsymbol{(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

*8.2 Λύστε αυτό το θέμα χωρίς να καταφύγετε στην αριθμομηχανή.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου F στο πρίσμα.

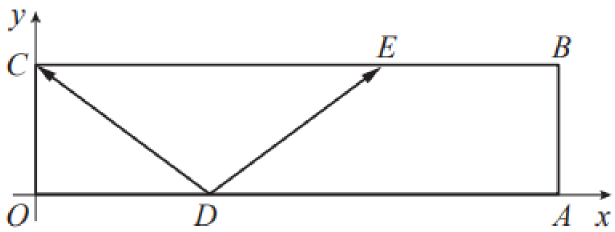
ΛΥΣΗ

$\overrightarrow{AG} = \left(12-4, \frac{13}{2}-0, 2-0\right) = \left(8, \frac{13}{2}, 2\right)$

Έχω $d(A,G) = |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{8^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{64 + \frac{169}{4} + 4} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2}$. Άρα αν R η ακτίνα της σφαίρας, τότε η διάμετρος $AG = 2R \Leftrightarrow \frac{21}{2} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{21}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{441}{16}$. Αν M το κέντρο της σφαίρας, τότε το M μέσο της AG, Άρα $M\left(\frac{x_A+x_G}{2}, \frac{y_A+y_G}{2}, \frac{z_A+z_G}{2}\right) = \left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$. Άρα η εξίσωση της σφαίρας είναι $(x-8)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$ άρα (A)

Έχω $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EL} = k(3,4,0) || \overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EL} \perp \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EL} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF}\right) \cdot \overrightarrow{EL} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{EL} = 0 \Leftrightarrow \left(8, \frac{13}{2}, 2\right) \cdot (3k, 4k, 0) - \left|\overrightarrow{EL}\right|^2 = 0 \Leftrightarrow 24k + 26k - ((3k)^2 + (4k)^2) = 0 \Leftrightarrow 50k - 25k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ή $k = 2$. Άρα $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EL} = 2(3,4,0) = (6,8,0) \Leftrightarrow (x_G - x_F, y_G - y_F, z_G - z_F) = (6,8,0) \Leftrightarrow \left(12 - x_F, \frac{13}{2} - y_F, 2 - z_F\right) = (6,8,0) \Leftrightarrow \boxed{F = \left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)}$

9. Στο ορθογώνιο $OABC$ του σχήματος $A \in Ox, C \in Oy, D \in OA, E \in CB$ με $EB = OD = \frac{OA}{3}$, $OC = \frac{OA}{4}$, $\overrightarrow{DC} \cdot$



$\overrightarrow{DE} = -7$ Βρείτε το μήκος του OA.

Σχήμα 4.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ λόγω της μεταξύ τους καθετότητας.

$CE = CB - EB = OA - OD = OA - \frac{OA}{3} = \frac{2OA}{3}$ άρα αφού $\overrightarrow{DO} \nearrow\swarrow \overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CE} = -\frac{OA}{3}\frac{2 \cdot OA}{3} = \frac{2}{9}OA^2$

Έχουμε $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}\right) = \left|\overrightarrow{DO}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + 2\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CE} \Rightarrow -7 = \left(\frac{OA}{3}\right)^2 + \left(\frac{OA}{4}\right)^2 + 0 - \frac{2}{9}OA^2 + 0 \Rightarrow -7 = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{2}{9}\right)OA^2 \Rightarrow -7 = \left(-\frac{7}{144}\right)OA^2 \Rightarrow \boxed{OA = 12}$

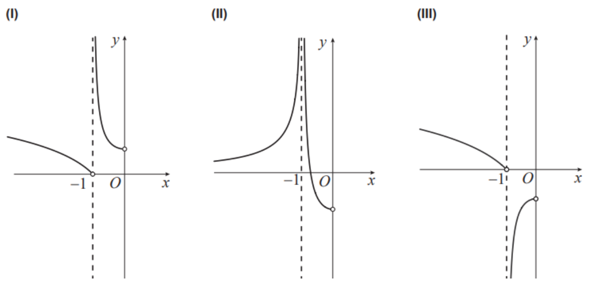
***10.** Έστω g μια άρτια, διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, τέτοια ώστε

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$

$g(0) < 0$

$g'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -1)$.

Στα σχήματα I, II και III απεικονίζεται μέρος της γραφικής παράστασης της g και η ασύμπτωτή της με εξίσωση $x = -1$. Αιτιολογήστε ότι κανένα από τα τρία σχήματα δεν παριστά μέρος της γραφικής παράστασης της g.



ΛΥΣΗ

Από το σχήμα I προκύπτει ότι $\lim_{x \to 0^-} g(x) > 0$ αφού η g είναι διαφορίσιμη , θα είναι και συνεχής στο x=0 άρα $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) > 0$ άτοπο αφού $g(0) < 0$. Άρα το σχήμα I δεν κάνει.

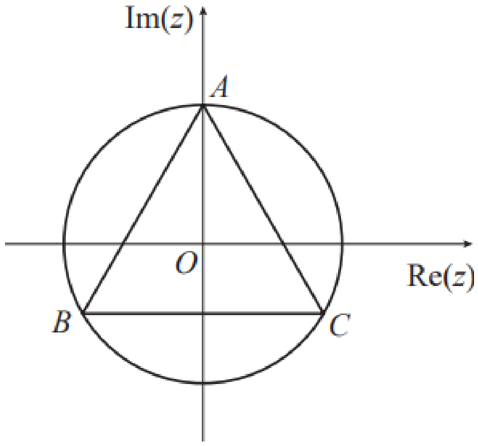
Από το σχήμα ΙΙ προκύπτει ότι η $\boldsymbol{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-\mathbf{1})$ και αφού η $\boldsymbol{g}$ είναι διαφορίσιμη, θα είναι $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in (-\infty,-\mathbf{1})$ άτοπο $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in (-\infty,-\mathbf{1})$. Άρα το σχήμα ΙΙ δεν κάνει.

Από το σχήμα ΙΙΙ προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$. Επειδή η $\boldsymbol{g}$ είναι άρτια για $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{u}$ έχω $\lim\limits_{u\to1^-} g(-u) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{u\to1^-} g(u) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} g(x) = -\infty$ άτοπο αφού $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$. Άρα το σχήμα ΙΙΙ δεν κάνει.

11. Στο σχήμα έχουμε το ισόπλευρο $\boldsymbol{ABC}$ στο μιγαδικό επίπεδο. Το $\boldsymbol{A}$ βρίσκεται στον άξονα των φανταστικών αριθμών. Τα Α και Β αντιστοιχούν στους μιγαδικούς $\boldsymbol{z_1}$ και $\boldsymbol{z_2}$αντίστοιχα. Σε ποιο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ανήκει ο $\boldsymbol{z_1^2} \times \boldsymbol{z_2}$;

ΛΥΣΗ

$\boldsymbol{Arg}(z_1^2 \times z_2) = 2Arg(z_1) + Arg(z_2) = 2\cdot 90^\circ + \widehat{AOB} = 180^\circ + 120^\circ = 300^\circ$. Άρα στο 4ο τεταρτημόριο.



12. Θεωρήστε στο σύνολο ℂ τον μιγαδικό αριθμό $\boldsymbol{z} = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i}$ όπου $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2\pi})$ και ισχύουν ότι:

$\mathbf{Re}(\boldsymbol{z}) = -\mathbf{Im}(\boldsymbol{z})$

ο $\boldsymbol{z}$ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο. Βρείτε το $\boldsymbol{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Έχω $z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2i^{3}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2(-i)e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2ie^{i\alpha}}{1+\sqrt{3}i} = \frac{ie^{i\alpha}}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\alpha} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)} = cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

Αφού $\mathbf{Re}(z) = -\mathbf{Im}(z) \Rightarrow cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = -sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) \Rightarrow tan\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{6}+\alpha = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = k\pi - \frac{5\pi}{12} \xRightarrow{\alpha\in[0,2\pi)} \boxed{\alpha = \frac{19\pi}{12}}$

***13.** Προκειμένου να πραγματοποιηθούν εργασίες ανακαίνισης στους χώρους εγκαταστάσεών της, μια μικρή εταιρεία σκοπεύει να υποβάλει αίτηση για δάνειο σε τράπεζα, πληρωτέα σε ίσες μηνιαίες δόσεις. Σύμφωνα με την πρόταση της τράπεζας, η αξία της μηνιαίας δόσης που θα καταβληθεί, $\boldsymbol{p}$, σε ευρώ, δίνεται, σε συνάρτηση με το εφαρμοζόμενο ετήσιο επιτόκιο, $\boldsymbol{j}\%$, σε ποσοστό, από τον τύπο :

$p(j) = \frac{62{,}5j}{1-(1+\frac{j}{1200})^{-120}}$, όπου $\boldsymbol{j} > \mathbf{0}$.

Είναι γνωστό ότι, σε περίπτωση διπλασιασμού του αρχικού ετήσιου επιτοκίου, η μηνιαία δόση θα αυξηθεί κατά 120 ευρώ.

Προσδιορίστε, χρησιμοποιώντας τη γραφική αριθμομηχανή, το αρχικό ετήσιο επιτόκιο.

Εκφράστε το αποτέλεσμα ως ποσοστό, στρογγυλοποιημένο στα πλησιέστερα χιλιοστό.

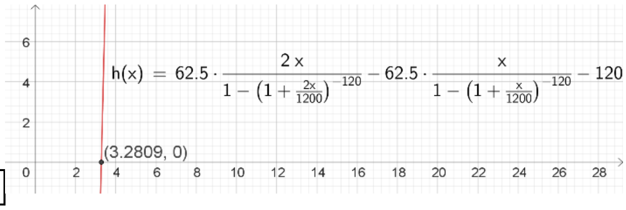
Στην απάντησή σας παρουσιάστε:

– μια εξίσωση που σας επιτρέπει να λύσετε το πρόβλημα.

– το γράφημα(α) της(των) συνάρτησης(ών) που εμφανίζονται στην αριθμομηχανή και τα σχετικά σημεία, τα οποία σας επιτρέπουν να λύσετε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

Έχω $\boldsymbol{p(2j) - p(j) = 120}$. Θεωρώ την συνάρτηση $\boldsymbol{h(j) = p(2j) - p(j) - 120}$ που τέμνει τον άξονα των $\boldsymbol{x}$ στο



σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{x = 3{,}28092}$. Άρα $\boxed{\boldsymbol{j = 3{,}281\%}}$

14. Θεωρήστε τη συνάρτηση f , ορισμένη στο $(\boldsymbol{0}, \infty)$ με $\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}}$

Να απαντήσετε στα θέματα 14.1. και 14.2. χωρίς να καταφύγετε στην αριθμομηχανή.

*14.1. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και οριζόντια ασύμπτωτη. Βρείτε μια εξίσωση για καθεμία από αυτές τις ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

Έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) + 2 = 0 + 2 = 2}$. Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $\boldsymbol{y = 2}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(\ln x + 2x) = (+\infty)(-\infty + 0) = -\infty}$ Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x= $\boldsymbol{0}$

14.2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ για τη μονοτονία και την ύπαρξη σχετικών ακροτάτων και προσδιορίστε αυτά τα ακρότατα, εάν υπάρχουν.

ΛΥΣΗ

$\boldsymbol{f'(x) = \left(\frac{\ln x + 2x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x} + 2\right)' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$.

Έχω $\boldsymbol{f'(x) > 0 \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e}$

Οπότε ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος:

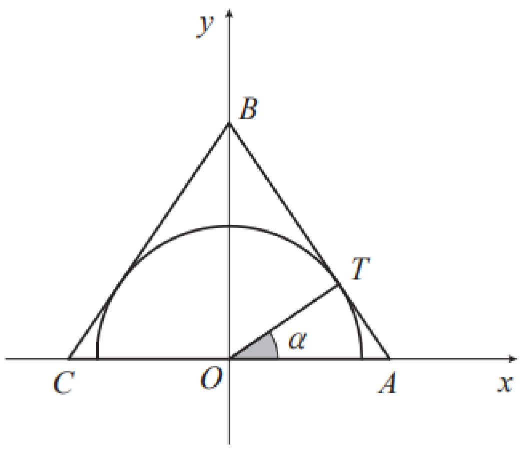
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+2$ Τ.Μ.	$\searrow$	2

Η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο για $\boldsymbol{x = e}$ την τιμή $\boldsymbol{f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{1}{e} + 2}$

***15.** Στο Σχήμα 6, έχουμε ημικύκλιο με κέντρο Ο την αρχή των αξόνων και ακτίνας 2 και το ισοσκελές τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$.

Είναι γνωστό ότι:

- Η κορυφή Α ανήκει στον θετικό ημιάξονα Οx.
- Η κορυφή Β ανήκει στον θετικό ημιάξονα Οy.
- Η κορυφή C ανήκει στον αρνητικό ημιάξονα Οx
- $\boldsymbol{AB = BC}$



Σχήμα 6

- Η $\boldsymbol{AB}$ εφάπτεται στο ημικύκλιο στο Τ
- $\boldsymbol{A\hat{O}T = \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$

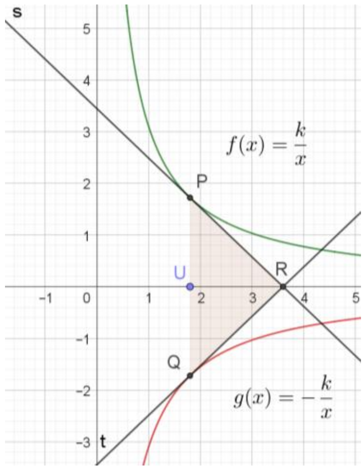
Να δειχθεί ότι το εμβαδόν $\boldsymbol{(ABC) = \frac{8}{\sin(2\alpha)}}$

ΛΥΣΗ

$$\boldsymbol{(ABC) = \frac{CA \cdot OB}{2} = OA \cdot OB = \frac{OT}{\cos(a)} \cdot \tan\widehat{OAB} \cdot OA = \frac{OT}{\cos(a)} \cdot \tan\widehat{OAT} \cdot OA == \frac{OT}{\cos(a)} \cdot \frac{1}{\tan(a)} \cdot OA}$$

$$\boldsymbol{= \frac{OT}{\cos(a)} \cdot \frac{\cos(a)}{\sin(a)} \cdot OA = \frac{OT}{\cos(a)} \cdot \frac{OT}{\sin(a)} = \frac{2 \cdot 2}{\sin(a) \cdot \cos(a)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)} = \frac{8}{\sin(2\alpha)}}$$

***16.** Έστω δυο συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ ορισμένες στο $(\mathbf{0}, +\infty)$, με $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$ και $\boldsymbol{g(x)} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{k} > \mathbf{0}$. Θεωρήστε τα σημεία $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ των γραφικών παραστάσεων των $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ με ίδια τετμημένη, οι εφαπτόμενες ευθείες $\boldsymbol{s}$ και $\boldsymbol{t}$ στα σημεία $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ αντίστοιχα τέμνονται στο $\boldsymbol{R}$. Να δειχθεί ότι ανεξάρτητα από την θέση των σημείων $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ ισχύει ότι $(\boldsymbol{PQR}) = \boldsymbol{k}$



ΛΥΣΗ

Έχω $\boldsymbol{x_P} = \boldsymbol{x_Q} = \boldsymbol{x_U}$ όπου $\boldsymbol{U}$ η προβολή των $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ στον άξονα $\boldsymbol{x'x}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης $\boldsymbol{s}$ είναι: $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f(x_P)} = \boldsymbol{f'(x_P)(x - x_P)}$ ή $\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}^2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_P})$

ή $\boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}^2}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}}$ Για $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ έχω $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{x_P}$

Όμοια η εξίσωση της εφαπτομένης $\boldsymbol{t}$ είναι: $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}^2}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}}$ Για $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ έχω $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{x_P}$

Άρα η τομή των δυο ευθείων είναι το σημείο $\boldsymbol{R}(\mathbf{2}\boldsymbol{x_P}, \mathbf{0})$

Άρα $(\boldsymbol{PQR}) = \frac{\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{UR}}{\mathbf{2}} = \frac{(\boldsymbol{y_P} - \boldsymbol{y_Q})(\boldsymbol{x_R} - \boldsymbol{x_U})}{\mathbf{2}} = \frac{\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x_P}} \cdot (\mathbf{2}\boldsymbol{x_P} - \boldsymbol{x_P})}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{k}$

ΤΕΛΟΣ

[Πηγές]
National ES Exams and Final Exams
https://iave.pt/provas-e-exames/provas-e-exames/provas-e-exames-finais-nacionais-es/

Provas de Ingresso | DGES

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ της εθνικής εξέτασης των Μαθηματικών A και B; (superprof.pt)