[Τουρκία]
Η Τουρκία επίσημα γνωστή ως Δημοκρατία της Τουρκίας ή Τουρκική Δημοκρατία (Τουρκικά: Türkiye Cumhuriyeti, μτγ: Τούρκιε Τζουμχούριετι, προφέρεται: [ˈtyɾcije dʒumˈhuɾijeti], είναι διηπειρωτική χώρα που βρίσκεται στη Ευρασία και συγκεκριμένα στη χερσόνησο της Ανατολίας που βρίσκεται ανάμεσα στον Εύξεινο Πόντο και τη Μεσόγειο Θάλασσα και συγκροτεί το βασικό τμήμα (97%) της χώρας με ένα μικρό τμήμα (Ανατολική Θράκη) να βρίσκεται στην Ευρώπη. Η Θάλασσα του Μαρμαρά, ο Βόσπορος και ο Ελλήσποντος (που συναποτελούν τα τούρκικα στενά) οριοθετούν το σύνορο μεταξύ Ευρώπης και Ασίας καθιστώντας τη χώρα, σταυροδρόμι των δύο ηπείρων και σημαντικής γεωστρατηγικής σημασίας. Πρωτεύουσα και δεύτερη μεγαλύτερη πόλη είναι η Άγκυρα ενώ μεγαλύτερη πόλη είναι η Κωνσταντινούπολη.
Η τελευταία επίσημη απογραφή το 2000 κατέγραψε συνολικό πληθυσμό της χώρας 67.803.927 κατοίκους, ενώ σύμφωνα με κρατικές εκτιμήσεις ο πληθυσμός της χώρας ήταν 82.003.882[2] κάτοικοι το 2018, σχεδόν τα τρία τέταρτα των οποίων ζούσαν σε αστικές περιοχές. Σύμφωνα με την εκτίμηση του 2011 ο πληθυσμός αυξάνεται κατά 1,35% ετησίως. Η Τουρκία έχει μέση πυκνότητα πληθυσμού 104,7 κατοίκους ανά τ.χλμ. Τα άτομα της ηλικιακής ομάδας 15-64 αποτελούν το 67,4% του συνολικού πληθυσμού, η ομάδα 0-14 το 25,3%, με τους ηλικιωμένους 65 ετών και άνω να αποτελούν το 7,3%

[Εκπαίδευση στην Τουρκία]
Η εκπαίδευση στην Τουρκία διέπεται από ένα εθνικό σύστημα που θεσπίστηκε σύμφωνα με τις μεταρρυθμίσεις του Ατατούρκ. Είναι ένα σύστημα που εποπτεύεται από το κράτος και έχει σχεδιαστεί για να παράγει μια επιδέξια επαγγελματική τάξη για τα κοινωνικά και οικονομικά ιδρύματα του έθνους.

Η υποχρεωτική εκπαίδευση διαρκεί 12 χρόνια. Η πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρηματοδοτείται από το κράτος και παρέχεται δωρεάν στα δημόσια σχολεία, ηλικίας μεταξύ 6 και 19 ετών. Η δευτεροβάθμια ή δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν είναι υποχρεωτική, αλλά απαιτείται για να προχωρήσετε στη συνέχεια στα πανεπιστήμια. μετά την οποία οι απόφοιτοι γυμνασίου τοποθετούνται στο πανεπιστήμιο ανάλογα με την απόδοσή τους. Η Τουρκία έχει πάνω από 200 πανεπιστήμια από το 2022.

Τον Μάρτιο του 2012 η Μεγάλη Εθνοσυνέλευση ψήφισε νέα νομοθεσία για την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση που συνήθως ονομάζεται "4+4+4" (4 χρόνια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, πρώτο επίπεδο, 4 χρόνια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, δεύτερο επίπεδο και 4 χρόνια δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης). Τα παιδιά θα ξεκινήσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευσή τους τον πρώτο μήνα Σεπτέμβριο μετά τα έκτα γενέθλιά τους και θα ολοκληρωθούν κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους κατά το οποίο οι μαθητές γίνονται 14 ετών.

Τα στάδια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τα οποία περιλαμβάνουν τα δύο πρώτα στάδια της τετραετούς εκπαίδευσης το καθένα, θα περιλαμβάνουν τέσσερα έτη υποχρεωτικής στοιχειώδους εκπαίδευσης, ακολουθούμενα από επιπλέον υποχρεωτικά τέσσερα έτη μέσης εκπαίδευσης, στα οποία οι μαθητές θα μπορούν να επιλέξουν εάν επιθυμούν να σπουδάσουν σε γυμνάσιο γενικής εκπαίδευσης ή θρησκευτικό επαγγελματικό γυμνάσιο, τα οποία αναφέρονται ως σχολεία Imam Hatip.

Στο τέλος του γυμνασίου, μετά τη 12η τάξη, οι μαθητές δίνουν απολυτήριες εξετάσεις γυμνασίου και υποχρεούνται να περάσουν αυτές για να λάβουν μέρος στις εισαγωγικές εξετάσεις του Πανεπιστημίου και να συνεχίσουν τις σπουδές τους σε πανεπιστήμιο. Υπάρχουν τέσσερις τύποι βαθμολογίας για διαφορετικά ακαδημαϊκά πεδία, συμπεριλαμβανομένων ενδεικτικά:

1. Τουρκική γλώσσα-μαθηματικά: διεθνείς σχέσεις, δίκαιο, εκπαίδευση, ψυχολογία, οικονομία, διοίκηση επιχειρήσεων και παρόμοια.
2. Επιστήμη: μηχανική, πληροφορική, ιατρική και άλλα επαγγέλματα που σχετίζονται με την επιστήμη.
3. Κοινωνικές επιστήμες: ιστορία, γεωγραφία και εκπαίδευση.
4. Ξένες γλώσσες: γλώσσα/γλωσσολογία και διδασκαλία γλωσσών.

[Πανεπιστήμια]

Τα ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης περιλαμβάνουν:

- Πανεπιστήμια
- Σχολές
- Ινστιτούτα
- Σχολές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης
- Επαγγελματικές σχολές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης
- Κέντρα εφαρμογών και έρευνας

Στη δεκαετία του 1930, μετά από πρόταση του Άλμπερτ Αϊνστάιν, η κυβέρνηση Ατατούρκ προσέλαβε πάνω από χίλιους καθιερωμένους ακαδημαϊκούς, συμπεριλαμβανομένων παγκοσμίου φήμης καθηγητών εμιγκρέδων που διέφυγαν από την κατάληψη της εξουσίας από τους Ναζί στη Γερμανία. Οι περισσότεροι ήταν στην ιατρική, τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, καθώς και μερικοί στις σχολές του δικαίου και των τεχνών. Οι εξόριστοι καθηγητές της Γερμανίας υπηρέτησαν ως διευθυντές σε οκτώ από τα δώδεκα βασικά επιστημονικά ινστιτούτα της Κωνσταντινούπολης, καθώς και έξι διευθυντές των δεκαεπτά κλινικών της Κωνσταντινούπολης στην Ιατρική Σχολή.

Κατά το ακαδημαϊκό έτος 2001-2002 υπήρχαν 76 πανεπιστήμια, 53 από τα οποία ανήκαν στο κράτος και 23 σε ιδρύματα.

Μετά τις εθνικές εξετάσεις εισαγωγής στο πανεπιστήμιο που διοργανώνονται από τον εθνικό εξεταστικό φορέα, οι φοιτητές, εάν επιτύχουν, συνεχίζουν τις σπουδές τους σε πανεπιστήμιο. Οι αλλοδαποί φοιτητές λαμβάνουν μέρος στις εξετάσεις Yös ή παρέχουν ισοδύναμα διαπιστευτήρια εγκεκριμένα από το Συμβούλιο Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (YÖK).

Υπάρχουν περίπου 820 ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένων πανεπιστημίων, με συνολική εγγραφή φοιτητών άνω του 1 εκατομμυρίου. Η τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι ευθύνη του Συμβουλίου Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης και η χρηματοδότηση παρέχεται από το κράτος για τα δημόσια ιδρύματα που αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος του συστήματος τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Υπάρχουν 167 πανεπιστήμια στην Τουρκία, τα οποία ταξινομούνται είτε ως δημόσια είτε ως θεμελιώδη (ιδιωτικά) και 373.353 φοιτητές αποφοίτησαν από αυτά τα πανεπιστήμια το 2006. Τα δημόσια πανεπιστήμια συνήθως χρεώνουν πολύ χαμηλά δίδακτρα, ενώ τα ιδιωτικά πανεπιστήμια ιδρυμάτων είναι εξαιρετικά ακριβά με δίδακτρα που μπορούν να φτάσουν τα 30.000 δολάρια ετησίως. Από το 1998, τα πανεπιστήμια απέκτησαν μεγαλύτερη αυτονομία και ενθαρρύνθηκαν να αντλήσουν κεφάλαια μέσω εταιρικών σχέσεων με τη βιομηχανία.

[Κριτική]

Οι συνεχείς αλλαγές του εκπαιδευτικού συστήματος στην Τουρκία έχουν προκαλέσει διαμάχη. Το 2005 καταργήθηκαν τα προπαρασκευαστικά μαθήματα για ξένες γλώσσες με εξαίρεση μόνο λίγα γυμνάσια. Το εξεταστικό σύστημα για την είσοδο σε γυμνάσια και πανεπιστήμια αλλάζει συνεχώς από τις αρχές της δεκαετίας του 2000. Η μείωση των θεμάτων σχετικά με τον Ατατούρκ, η υποβάθμιση στη διδασκαλία των θετικών επιστημών και η προώθηση του θρησκευτικού περιεχομένου έχει προκαλέσει αντιδράσεις.

[Εξετάσεις YKS Στην Τουρκία]

Οι εξετάσεις YKS στην Τουρκία είναι μία από τις σημαντικότερες εξετάσεις που πραγματοποιούνται στην Τουρκία. Η λέξη YKS είναι συντομογραφία μιας τουρκικής πρότασης, που σημαίνει εισαγωγικές εξετάσεις για ένα ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό το τεστ μετρά τις διαφορετικές ικανότητες των μαθητών σε κάθε έναν από τους τομείς των μαθηματικών Γλώσσα, επιστήμη και επιστήμη και σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτού του τεστ, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να εισέλθουν στο πανεπιστήμιο.

Αυτός ο τύπος εξέτασης δεν υπήρχε πριν, αλλά καθιερώθηκε από τις αρχές του ακαδημαϊκού έτους 2017-2018 .

Η εξέταση YKS αποτελείται από τρεις συνεδρίες που πραγματοποιούνται για δύο ημέρες από το τέλος των σπουδών γυμνασίου κάθε χρόνο και η ημερομηνία είναι συνήθως στα μέσα Ιουνίου. Η πρώτη συνεδρία αφορά βασικές δεξιότητες, η δεύτερη συνεδρία αφορά συγκεκριμένες δεξιότητες και η τρίτη και τελευταία συνεδρία αφορά τις γλώσσες.

Η πρώτη συνεδρία, η οποία περιέχει τις βασικές δεξιότητες, αποτελείται από εκατόν είκοσι ερωτήσεις : σαράντα ερωτήσεις για την τουρκική γλώσσα, σαράντα ερωτήσεις για τα μαθηματικά, πέντε ερωτήσεις που περιλαμβάνουν τη θρησκεία και την ηθική, πέντε στη γεωγραφία, την ιστορία και τη φιλοσοφία, εκτός από είκοσι επιστημονικές ερωτήσεις στη χημεία, Φυσική και Επιστήμη.

Όσον αφορά το συγκεκριμένο τεστ δεξιοτήτων, χωρίζεται σε δύο τύπους, ένα λογοτεχνικό τμήμα και ένα μαθηματικό τμήμα, και κάθε ενότητα σε αυτές τις δύο ενότητες περιλαμβάνει σαράντα ερωτήσεις.

Όσον αφορά το γλωσσικό τεστ, περιλαμβάνει επίσης ογδόντα ερωτήσεις σε καθεμία από τις ακόλουθες γλώσσες: γερμανικά, αγγλικά, αραβικά, φαρσί και γαλλικά.

Το τέλος που καταβάλλεται σε κάθε ενότητα αυτής της εξέτασης είναι ενενήντα τουρκικές λίρες.

[ÖSYS: Σύστημα επιλογής και τοποθέτησης φοιτητών]

Το Σύστημα Επιλογής και Τοποθέτησης Φοιτητών (Τουρκικά: Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Sistemi, ÖSYS) ή η Εξέταση Ιδρυμάτων Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (Τουρκικά: Yükseköğretim Kurumları Sınavı, YKS), πρώην Εξέταση Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης Προπτυχιακή Εξέταση Τοποθέτησης, (Τουρκικά: Yükseköğretime Geçis Sınavı-Lisans Yerleştirme Sınav, YGS-LYS), είναι μια τυποποιημένη δοκιμασία για την εισαγωγή σε τριτοβάθμια εκπαίδευση στην Τουρκία που διοικείται από το ÖSYM. Στο τουρκικό εκπαιδευτικό σύστημα, ο μόνος τρόπος για να εισέλθετε σε ένα πανεπιστήμιο είναι μέσω αυτής της εξέτασης. 1.692.000 απόφοιτοι λυκείου έδωσαν εξετάσεις το 2011 και 2.255.386 το 2016. Είναι μια εξέταση πολλαπλών επιλογών, με 5 επιλογές για κάθε ερώτηση. Αποτελείται από δύο μέρη, που ονομάζονται μαζί Core Proficiency Test-Advanced Proficiency Test (τουρκικά: Temel Yeterlilik Testi-Alan Yeterlilik Testi, TYT-AYT).

2010–2018: YGS–LYS

Από το 2010 έως το 2018, οι μαθητές έλαβαν μέρος στις εξετάσεις μετάβασης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (YGS) τον Μάρτιο. Όσοι περάσουν το YGS δικαιούνται στη συνέχεια να λάβουν μέρος στις Προπτυχιακές Εξετάσεις Τοποθέτησης (LYS), τον Ιούνιο. Οι φοιτητές που λαμβάνουν μόνο το YGS, στο οποίο οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σε 160 ερωτήσεις σε 160 λεπτά, μπορούν να υποβάλουν αίτηση για προγράμματα συνεργαζόμενων πτυχίων. Πραγματοποιήθηκαν πέντε συνεδρίες LYS, ενώ το προηγούμενο σύστημα εισαγωγής στα πανεπιστήμια, το ÖSS, πραγματοποιήθηκε μία φορά το χρόνο σε ολόκληρη τη χώρα.

2018–σήμερα: TYT–AYT

Η εξέταση των ιδρυμάτων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης (YKS) είναι μια εξέταση 3 συνεδριάσεων. Όλοι οι υποψήφιοι που υποβάλλουν αίτηση στο YKS πρέπει να παρακολουθήσουν το Basic Proficiency Test (TYT). Άλλες συνεδρίες είναι προαιρετικές.

Η πρώτη συνεδρία είναι το Basic Proficiency Test (TYT), με 125 ερωτήσεις. Η δεύτερη ενότητα είναι το 2nd Field Qualification Tests (AYT) και η τρίτη ενότητα είναι το Foreign Language Test (English) (YDT).

[Κριτική]

Το 2005, "Ζωή = 180 λεπτά;" ήταν ένα σύνθημα που χρησιμοποιήθηκε από την Τουρκική Ένωση Εκπαίδευσης επικρίνοντας το σύστημα ÖSS για την προσπάθειά του να συμπεριλάβει όλη την εργασία ενός μαθητή καθ 'όλη τη διάρκεια των 12 ετών της ακαδημαϊκής του ζωής σε μια 3ωρη εξέταση πολλαπλής επιλογής. Ο πρόεδρος της εξεταστικής επιτροπής του ÖSYM δήλωσε ότι «το ÖSS είναι το μόνο διαθέσιμο σύστημα εισαγωγής στα πανεπιστήμια μέχρι να μειωθεί ο αριθμός των ατόμων που υποβάλλουν αίτηση στα πανεπιστήμια».

Για έναν μαθητή, η εκπαίδευση που λαμβάνει στο σχολείο θεωρείται ότι δεν επαρκεί για να επιτύχει στο ÖSS. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας τεράστιος τομέας στην Τουρκία ιδιωτικών σχολείων απογευματινών και Σαββατοκύριακων ("dershane") σε όλη τη χώρα. Αυτά τα ιδρύματα προετοιμάζουν τους μαθητές αποκλειστικά για εξετάσεις, συμπεριλαμβανομένων των εισαγωγικών εξετάσεων στο πανεπιστήμιο. Όλοι οι "dershane" ανταγωνίζονται μεταξύ τους για να δημιουργήσουν τον "πρωταθλητή", αυτόν που θα σημειώσει την υψηλότερη βαθμολογία στην Τουρκία. Ο τομέας dershane ενισχύεται κάθε χρόνο από το τεράστιο ενδιαφέρον των μέσων ενημέρωσης, καθώς τα αποτελέσματα των εξετάσεων αποκαλύπτονται και οι μαθητές που κατατάσσονται στους πρώτους εμφανίζονται στην τηλεόραση και στις εφημερίδες. Το 2011, η ÖSYM χρέωσε τις εφημερίδες 150000 TL για προηγούμενες ερωτήσεις εξετάσεων, ενώ απαγόρευσε σε τηλεοπτικά κανάλια εκτός της κρατικής Τουρκικής Ραδιοτηλεόρασης να μεταδίδουν τις ερωτήσεις.

[Η ύλη των εξετάσεων AYT στα Μαθηματικά Θέματα] το 2023 περιλαμβάνει

Απλές ανισότητες/Απόλυτη τιμή/Εκθετικοί αριθμοί/Ρίζες/Παραγοντοποίηση/Επίλυση εξισώσεων/Αναλογίες/Προβλήματα/Σύνολα/Συναρτήσεις/Μεταθέσεις/Συνδυασμός/Δυωνυμική/Πιθανότητα/Στατιστική/Εξισώσεις /Μιγαδικοί αριθμοί/Παραβολή /Πολυώνυμα/ Λογική/Ανισότητες/ Λογάριθμος/Ακολουθίες/Σειρές/Όριο και συνέχεια/Παράγωγοι

Η ύλη των εξετάσεων YKS στα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ το 2023 περιλαμβάνει

Εκθετική συνάρτηση/Συνάρτηση λογαρίθμου/Εκθετικές, λογαριθμικές εξισώσεις και ανισότητες/Ακολουθίες πραγματικών αριθμών/Τριγωνομετρία/Τύποι αθροίσματος, διαφοράς και διπλής γωνίας/Τριγωνομετρικές Εξισώσεις/Βασικοί μετασχηματισμοί στο αναλυτικό επίπεδο/Παράγωγο/ρυθμός μεταβολής και παράγωγοι/Εφαρμογές της παραγώγου/Αόριστο ολοκλήρωμα/Ειδικά ολοκληρώματα και οι εφαρμογές τους

Η ύλη των εξετάσεων AYT στα θέματα γεωμετρίας AYT το 2023 περιλαμβάνει

Γωνίες σε ευθεία γραμμή και τρίγωνο/Ορθογώνια και ειδικά τρίγωνα/Τριγωνομετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο/Ισοσκελές και ισόπλευρο τρίγωνο/Εμβαδά σε τρίγωνο/Γωνιακές σχέσεις σε τρίγωνο/Μετρικές σχέσεις σε ένα τρίγωνο/Ισότητα και ομοιότητα τρίγωνων/Πολύγωνα/Τετράπλευρα/Τραπέζιο/Παραλληλόγραμμο/Ρόμβος – Δελτοειδής/Ορθογώνιο/Γωνίες στον κύκλο/Μήκος στον κύκλο/Κύκλος/Πρίσματα/Πυραμίδες/Σφαίρα/Ανάλυση του επιπέδου συντεταγμένων /Επαναλαμβανόμενα, περιστρεφόμενα και συμμετρικά σχήματα/Γεωμετρία με μετασχηματισμούς/Τριγωνομετρία

[ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΗΡΟΥΝΤΑΙ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ]

1. Οι αίθουσες εξετάσεων θα καταγράφονται με κάμερες.
2. Απαγορεύεται αυστηρά η εξέταση με κινητό τηλέφωνο. Pager, walkie-talkie, κάμερα κ.λπ, υπολογιστή τσέπης, όλα τα είδη συσκευών με δυνατότητα υπολογιστή, όπως ρολόγια χειρός ή ρολόγια τσέπης. παρόμοιο εξοπλισμό· προσχέδιο χαρτί, σημειωματάριο, βιβλίο, λεξικό, ηλεκτρονική συσκευή με λειτουργία λεξικού, κανόνας διαφανειών, αριθμομηχανή, πυξίδα, μοιρογνωμόνιο, χάρακας κλπ.

Στην εξέταση πρέπει να φέρετε μολύβια, γόμες, ξύστρες, ρολόγια κ.λπ. Απαγορεύεται αυστηρά η είσοδος με κοσμήματα ή οποιοδήποτε μεταλλικό αντικείμενο. Τρόφιμα, ποτά και λοιπά αναλώσιμα δεν μπορούν να έρθουν στην εξέταση. Οι υποψήφιοι μπορούν να φέρουν νερό σε διαφανές μπουκάλι στην εξέταση.

3. Ο χρόνος απάντησης που δίνεται για αυτό το τεστ είναι 75 λεπτά.

4, Η κατανομή των απαντήσεων των υποψηφίων στις ερωτήσεις του τεστ θα εξεταστεί με τη χρήση μεθόδων επεξεργασίας πληροφοριών. Εάν τα ευρήματα δείξουν ότι έχει συμβεί ατομική ή συλλογική εξαπάτηση, η εξέταση του υποψηφίου/υποψηφίων που συμμετείχαν στη δράση εξαπάτησης θα ανασταλεί,θα κριθεί άκυρη και ενδέχεται να του απαγορευτεί να υποβάλει αίτηση σε όλες τις εξετάσεις που διοργανώνει η ÖSYM για 2 χρόνια.

Αν οι εξεταστές ανέφεραν ότι η εξέταση σε αίθουσα δεν διεξήχθη σύμφωνα με τους κανόνες και ότι επιχειρήθηκε μαζική εξαπάτηση, τότε η ÖSYM μπορεί να θεωρήσει άκυρες τις εξετάσεις όλων των υποψηφίων που δίνουν εξετάσεις σε αυτή την αίθουσα.

1.Αν $\boldsymbol{(1-3^{-1}+a^{-1})^{-3}=8}$ τότε ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσος με A)$\boldsymbol{-6}$ B) $\boldsymbol{-4}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

Έχω $\boldsymbol{(1-3^{-1}+a^{-1})^{-3}=8 \Rightarrow (1-3^{-1}+a^{-1})^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2}=1-3^{-1}+a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{3}{6}-\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=-\frac{1}{6} \Rightarrow \alpha=-6}$ άρα A

2. Αν $\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x+y-1}}$ τότε $\boldsymbol{xy}$ ίσο με A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

Έχω $\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x+y-1} \Rightarrow x+y-2\sqrt{xy}=x+y-1 \Rightarrow -2\sqrt{xy}=-1 \Rightarrow \sqrt{xy}=\frac{1}{2} \Rightarrow xy=\frac{1}{4}}$ Άρα B

3. Αν για τους θετικούς $\boldsymbol{x,y}$ ισχύει ότι $\frac{2y}{x+\frac{1}{y}}-\frac{3x}{y+\frac{1}{x}}=\frac{5x^2}{x*y+1}$ τότε $\frac{x}{y}$ είναι ίσο με A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Έχω $\frac{2y}{x+\frac{1}{y}}-\frac{3x}{y+\frac{1}{x}}=\frac{5x^2}{x*y+1} \Rightarrow \frac{2y^2}{xy+1}-\frac{3x^2}{xy+1}=\frac{5x^2}{x*y+1} \Rightarrow \boldsymbol{2y^2-3x^2=5x^2 \Rightarrow 2y^2=8x^2 \xRightarrow{x,y>0} y=2x \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2}}$ Άρα E

4. Αν $\boldsymbol{4^x\cdot 6^x\cdot 9^x=36}$ τότε το $\boldsymbol{x}$ είναι ίσο με A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{9}$

Έχω $\boldsymbol{36^x\cdot 6^x=36 \Rightarrow 6^{3x}=6^2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}}$ άρα A

5. Αν **x <0 < y** και I. $\boldsymbol{y-x^{-1}}$ II. $\boldsymbol{x^2+y^{-1}}$ III. $\boldsymbol{(x\cdot y)^{-1}}$, ποιο/α είναι αρνητικό/α ; A) Μόνο η I B) Μόνο η II C) Μόνο η III D) οι I και III E) οι II και III

Έχω **x <0** $\Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{x}<0 \Rightarrow x^{-1}<0 \Rightarrow -x^{-1}>0 \xRightarrow{y>0} y-x^{-1}>0}$

Έχω **x <0** $\Rightarrow \boldsymbol{x^2>0}$ και $\boldsymbol{y>0} \Rightarrow \boldsymbol{y^{-1}>0}$ Άρα $\boldsymbol{x^2+y^{-1}>0}$

Έχω **x <0 < y** $\Rightarrow \boldsymbol{xy<0 \Rightarrow \frac{1}{xy}<0 \Rightarrow (x\cdot y)^{-1}<0}$ Άρα Μόνο η III άρα C

6. Αν για τους θετικούς ακέραιους $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ έχω $\boldsymbol{a^3-b^3=p}$, όπου $\boldsymbol{p}$ πρώτος, τότε $\mathbf{a^2+b^2}$ είναι ίσο με A) $\frac{p+1}{2}$ B) $\frac{p+3}{2}$ C) $\frac{p+2}{3}$ D) $\frac{2p-1}{2}$ E) $\frac{2p+1}{3}$

Έχω $\boldsymbol{a^3-b^3=p \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=p}$. Αφού $\boldsymbol{p}$ πρώτος έχω $\boldsymbol{a-b=1, a^2+ab+b^2=p}$ ή $\boldsymbol{a-b=p,\ a^2+ab+b^2=1}$. Αφού $\boldsymbol{p>1}$ και προφανώς $\boldsymbol{a^2+ab+b^2>\alpha-b}$ για θετικούς ακέραιους a,b έχω την $\boldsymbol{a-b=1}$, οπότε $\boldsymbol{(a-b)^2=1 \Rightarrow\ a^2-2ab+b^2=1 \Rightarrow\ a^2+b^2=1+2ab}$ και αφού $\boldsymbol{ab=p-a^2-b^2}$ έχω $\boldsymbol{a^2+b^2=1+2(p-a^2-b^2)=1+2p-2(a^2+b^2) \Rightarrow 3(a^2+b^2)=1+2p \Rightarrow a^2+b^2=\frac{2p+1}{3}}$ άρα E

7. Αν $\mathbf{abc \neq 0}$ και $\mathbf{a+b+c=ab}$ τότε το $\frac{\mathbf{ab+ac+bc+c^2}}{\mathbf{abc}}$ είναι ίσο με A) $\frac{a+1}{a}$ B) $\frac{b+1}{b}$ C) $\frac{c+1}{c}$ D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{b}{c}$

Έχω $\frac{\mathbf{ab+ac+bc+c^2}}{\mathbf{abc}}=\frac{\mathbf{ab+}c\mathbf{(a+b+}c\mathbf{)}}{\mathbf{abc}}=\frac{\mathbf{ab+}abc}{\mathbf{abc}}=\frac{1+c}{c}$ Άρα C

8. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{a,b}$ ισχύουν ότι $\boldsymbol{0<a<3a^2}$ και **b - 1 = 6α**, τότε η μικρότερη ακέραια τιμή του $\boldsymbol{b}$ είναι ίση με A) **3** B) **4** C) **5** D) **6** E) **7**

Αφού $\boldsymbol{a<3a^2 \xRightarrow{\alpha>0} 1<3\alpha \Rightarrow 2<6\alpha \Rightarrow 3<6\alpha+1 \Rightarrow 3<b}$ Αν $\boldsymbol{b}$ ακέραιος, τότε $\boldsymbol{b\geq 4}$ Άρα B

9. Αν $\boldsymbol{(n+2)!-(n+1)!-n!=2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}$ τότε n είναι ίσο με A) **5** B) **6** C) **7** D) **8** E) **9**

Έχω $\boldsymbol{(n+2)!-(n+1)!-n!=n!\big((n+2)(n+1)-(n+1)-1\big)=n!\,(n^2+2n)=(n-1)!\,n^2(n+2)}$

Ακόμα έχω $\boldsymbol{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^2\cdot 7=(5-1)!\cdot 5^2\cdot(5+2)}$. Άρα $\boldsymbol{n=5}$ Άρα A

10. Έστω $\boldsymbol{n}$ φυσικός αριθμός. Αν για κάθε έναν πρώτο θετικό αριθμό $\boldsymbol{p}$ που διαιρεί τον $\boldsymbol{n}$, κι ο $\boldsymbol{p^2}$ διαιρεί τον $\boldsymbol{n}$, τότε ο $\boldsymbol{n}$ ονομάζεται ισχυρός αριθμός. Ποιος από τους ακόλουθους δεν είναι ισχυρός αριθμός: A) **27** B) **64** C) **72** D) **99** E) **108**

Έχω $\boldsymbol{27=3^3}$ ισχυρός, $\boldsymbol{64=2^6}$ ισχυρός, $\boldsymbol{72=2^3 3^2}$ ισχυρός, $\boldsymbol{108=2^2 3^3}$ ισχυρός, $\boldsymbol{99=11\cdot 3^2}$ όχι ισχυρός, Άρα D

11. Έστω τα σύνολα $\boldsymbol{A,B,C}$ και οι προτάσεις : I. $\mathbf{A\cup B=A\cup C}$ άρα $\boldsymbol{B=C}$ II. $\mathbf{A\cap B=\emptyset}$άρα $\mathbf{A\setminus B=A}$ III. $\boldsymbol{A\cup B=A}$ άρα $\boldsymbol{B\setminus A=\emptyset}$ τότε ποιο/α πρόταση είναι πάντα αληθής ; A) Μόνο η I B) Μόνο η II C) Μόνο η III D) οι I και II E) οι II και III

Αν $\boldsymbol{A=\{0,1\}, B=\{0\}, C=\{1\}}$ η πρόταση I δεν ισχύει στο δεύτερο σκέλος της, Οι προτάσεις II και III είναι αληθείς Άρα E

12. Έστω μια πράξη $\odot$ στους ακεραίους και $\mathbf{a\odot b=a-b+1}$ Τότε I. Το ουδέτερο στοιχείο είναι το 1

II. Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα III. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Ποιο/α πρόταση είναι αληθής ; A) Μόνο η I B) οι I και II C) οι I και III D) οι II και III E) οι I, II και III

Αν $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{1} = \mathbf{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{1}$ Άρα I. αληθής.

Αν $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = \mathbf{b} \odot \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{1} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ Άρα δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα

Αν $(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}) \odot \boldsymbol{c} = \mathbf{a} \odot (\mathbf{b} \odot \mathbf{c}) \Leftrightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{1}) \odot \boldsymbol{c} = \mathbf{a} \odot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{1}) - \boldsymbol{c} + \mathbf{1} = \mathbf{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \mathbf{1}) + \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} - \boldsymbol{c} + \mathbf{2} = \mathbf{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \mathbf{1}$ Άρα δεν ισχύει γενικά η προσεταιριστική ιδιότητα. Άρα A

13. Αν $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$ και $\mathbf{107} \equiv \mathbf{2}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n})$, $\mathbf{73} \equiv \mathbf{3}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n})$ Ποιο είναι το άθροισμα των τιμών που μπορεί να πάρει ο n; A) $\mathbf{39}$ B) $\mathbf{41}$ C) $\mathbf{47}$ D) $\mathbf{51}$ E) $\mathbf{54}$

Έχω $\mathbf{73} \equiv \mathbf{3}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n}) \Leftrightarrow \mathbf{70} \equiv \mathbf{0}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n})$. Άρα $\boldsymbol{n}|\mathbf{70} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{35}$

Όμοια $\mathbf{107} \equiv \mathbf{2}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n}) \Leftrightarrow \mathbf{105} \equiv \mathbf{0}(\mathbf{mod}\boldsymbol{n})$. Άρα $\boldsymbol{n}|\mathbf{105} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{35}$

Άρα $\boldsymbol{n}|\mathbf{35}$ συνεπώς $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}, \mathbf{7}$ ή $\mathbf{35}$ με άθροισμα $\mathbf{5} + \mathbf{7} + \mathbf{35} = \mathbf{47}$ Άρα C

14. Αν $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ τότε το $\mathbf{x}^{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$ B) $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ C) $\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ D) $\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ E) $\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$

Έχω $\mathbf{x}^{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) = \mathbf{x}^{\mathbf{3}} \cdot \left(-\mathbf{3}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{3}} + \mathbf{5}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) + \mathbf{1}\right) = -\mathbf{3} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ Άρα A

15. Έστω $\mathbf{f}: [\mathbf{1}, \infty) \to [\mathbf{1}, \infty)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}) = \sqrt{\mathbf{x}} + \mathbf{1}$ τότε $\mathbf{f}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{2})$ είναι ίσο με A) $\mathbf{1}$ B) $\boldsymbol{e} - \mathbf{1}$ C) $\boldsymbol{e}$ D) $\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}}$ E) $\ln \mathbf{2}$

Για $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ έχω $\mathbf{f}(\mathbf{e}^{\mathbf{1}}) = \sqrt{\mathbf{1}} + \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{f}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{e}$ Άρα C

16. Έστω $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}\}$, $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\}$ $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} = \mathbf{3}\}$. Ποια από τις τρεις σχέσεις ορίζει μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ της μορφής $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ A) Μόνο η $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}$ B) Μόνο η $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}}$ C) οι $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}$και $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}}$ D) οι $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}}$και $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}}$ $\mathbf{51}$ E) όλες

Από $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}$ έχω $\boldsymbol{y} = \pm\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$ άρα όχι. Από $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}}$ έχω $\boldsymbol{y} = \pm\sqrt{\boldsymbol{x} + \mathbf{3}}$ άρα όχι. Ενώ από $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}}$ έχω $\boldsymbol{y} = \mathbf{2} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ άρα ναι. Άρα B

17. Αν $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{4}} + (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{5}}$ τότε ο συντελεστής του $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ στο πολυώνυμο είναι ίσος με A) $\mathbf{4}$ B) $\mathbf{6}$ C) $\mathbf{9}$ D) $\mathbf{10}$ E) $\mathbf{11}$

Έχω $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{4}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{4}} - \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ .... και $(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{5}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} - \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}} + \mathbf{10}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ ... Άρα ο συντελεστής του $\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ στο $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{4}} + (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{5}}$ είναι ίσος με $-\mathbf{4} + \mathbf{10} = \mathbf{6}$, άρα B

18. Αν $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{11}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}} + \boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ Ποιο το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}$; A) $\mathbf{3}^{\mathbf{10}} + \mathbf{1}$ B) $\mathbf{3}^{\mathbf{10}} - \mathbf{1}$ C) $\mathbf{3}^{\mathbf{11}} + \mathbf{1}$ D) $\mathbf{3}^{\mathbf{11}} - \mathbf{1}$ E) $\mathbf{3}^{\mathbf{12}}$

Έχω $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{11}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}} + \boldsymbol{x} - \mathbf{2} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{10}}(\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) + \boldsymbol{x} - \mathbf{2} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}} + \mathbf{1})(\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) = \frac{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})} = \frac{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{6})}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{6}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}$. Άρα το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ίσο με το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\boldsymbol{x}^{\mathbf{10}} + \mathbf{1}$ με το $\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$ που είναι ίσο με $\mathbf{3}^{\mathbf{10}} + \mathbf{1}$ Άρα A

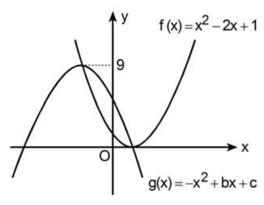
19. Έστω ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ με αρχικό συντελεστή 3 και $\boldsymbol{P}(\mathbf{1}) - \boldsymbol{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{2}$. Τότε το $\boldsymbol{P}(\mathbf{2}) - \boldsymbol{P}(\mathbf{1})$ είναι ίσο με A) $\mathbf{4}$ B) $\mathbf{5}$ C) $\mathbf{6}$ D) $\mathbf{7}$ E) $\mathbf{8}$

Έχω $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, $\mathbf{2} = \boldsymbol{P}(\mathbf{1}) - \boldsymbol{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{3} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{b} = -\mathbf{1}$ Άρα $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ και τότε $\boldsymbol{P}(\mathbf{2}) - \boldsymbol{P}(\mathbf{1}) = \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} + \boldsymbol{c} - (\mathbf{3} \cdot \mathbf{1}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} + \boldsymbol{c}\ ) = \mathbf{12} - \mathbf{2} + \boldsymbol{c} - \mathbf{3} + \mathbf{1} - \boldsymbol{c} = \mathbf{8}$ Άρα E

20. Έστω $\boldsymbol{k}$ θετικός πραγματικός και η εξίσωση $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Αν η διαφορά των ριζών της είναι 2, τότε ο $\boldsymbol{k}$ είναι ίσος με A) $\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\sqrt{\mathbf{2}}$ D) $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ E) $\sqrt{\mathbf{3}}$

Έχω $|\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{2}}| = \mathbf{2} \Rightarrow (\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \Rightarrow (\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{2}} = \mathbf{4} \Rightarrow \left(-\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{4} \Rightarrow \left(\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ Άρα D

21. Οι παραβολές $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ και $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ τέμνονται στις κορυφές τους όπως στο σχήμα. Ποιο το $\boldsymbol{g}(\mathbf{0})$; A) $\mathbf{3}$ B) $\mathbf{4}$ C) $\mathbf{5}$ D) $\mathbf{6}$ E) $\mathbf{7}$



Έχω $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{g}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ Άρα $-\mathbf{1} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \mathbf{1}$

Η κορυφή της παραβολής $-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ έχει τετμημένη $-\frac{\boldsymbol{b}}{-\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$ και τεταγμένη $\boldsymbol{g}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{9} \Rightarrow -\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{c} = \mathbf{9} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{b} + \mathbf{1} = \mathbf{9} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{b} - \mathbf{8} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} -$

$\mathbf{4b-32=0\Rightarrow b=8}$ ή $\mathbf{b=-4}$ άρα $\mathbf{c=5}$ ή $\mathbf{c=-7}$ Από το σχήμα $\mathbf{g(0)>0\Rightarrow c>0}$ Άρα δεκτή η $\mathbf{c=5}$ Άρα C

22. Εννέα μπάλες αριθμημένες από το 1 έως το 9 είναι στην τσάντα. Η Ayşe επιλέγει έναν αριθμό από το 1 έως το 9 και τραβά τυχαία μια μπάλα. Η Ayşe κερδίζει αν το άθροισμα των δύο αριθμών είναι το πολύ 9 και το γινόμενο τουλάχιστον 9. Ποιο νούμερο να επιλέξει η Ayşe ώστε να είναι πιο πιθανό να κερδίζει το παιχνίδι η Ayşe; A) **2** B) **3** C) **4** D) **5** E) **6**

Θέλω $\boldsymbol{\alpha+\beta\le 9}$ και $\boldsymbol{\alpha\beta\ge 9}$. Αν $\boldsymbol{\alpha=1\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta=9\Rightarrow\alpha+\beta=10>9}$ χάνει. Αν $\boldsymbol{\alpha=9\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta=1\Rightarrow\alpha+\beta=10>9}$ χάνει. Αν $\boldsymbol{\alpha=3\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge3\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}3\le\beta\le6\Rightarrow\beta\in\{3,4,5,6\}}$ Αν $\boldsymbol{\alpha=4\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge3\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}3\le\beta\le5\Rightarrow\beta\in\{3,4,5\}}$. Αν $\boldsymbol{\alpha=5\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge2\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}2\le\beta\le4\Rightarrow\beta\in\{2,3,4\}}$. Αν $\boldsymbol{\alpha=6\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge2\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}2\le\beta\le3\Rightarrow\beta\in\{2,3\}}$. Αν $\boldsymbol{\alpha=7\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge2\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}2\le\beta\le2\Rightarrow\beta\in\{2\}}$ Αν $\boldsymbol{\alpha=8\xRightarrow{\alpha\beta\ge9}\beta\ge2\xRightarrow{\alpha+\beta\le9}2\le\beta\le1\Rightarrow\beta\in\{\}}$ Άρα συμφέρει να επιλέξει το 3 Άρα B

23. Αν $\boldsymbol{0<x<\pi}$ ποιο είναι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $\mathbf{\sin^4 x=\cos^4 x}$; A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\boldsymbol{\pi}$ E) $\boldsymbol{2\pi}$

Έχω $\mathbf{\sin^4 x=\cos^4 x}$ άρα $\mathbf{\tan^4 x=1\Leftrightarrow\tan x=\pm1\xLeftrightarrow{0<x<\pi}x=\frac{\pi}{4}}$ ή $\mathbf{x=\frac{3\pi}{4}}$ με άθροισμα $\mathbf{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\pi}$. Άρα D

24. Αν $\mathbf{\frac{\cot x}{\tan x+\cot x}=4\sin x-3}$ τότε $\mathbf{\sin x}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{3-2\sqrt{2}}$ B) $\mathbf{1-\sqrt{3}}$ C) $\mathbf{-1+\sqrt{2}}$ D) $\mathbf{-1+\sqrt{3}}$ E) $\mathbf{-2+2\sqrt{2}}$

Έχω $\mathbf{\frac{\cot x}{\tan x+\cot x}=4\sin x-3\Rightarrow\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=4\sin x-3\Rightarrow\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}}=4\sin x-3\Rightarrow\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=4\sin x-3}$

$\mathbf{\Rightarrow\frac{\cos^2 x}{1}=4\sin x-3\Rightarrow1-\sin^2 x-4\sin x+3=0\Rightarrow\sin^2 x+4\sin x-4=0\Rightarrow\sin x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+16}}{2}\Rightarrow}$ $\mathbf{\sin x=-2\pm2\sqrt{2}}$. αφού $\mathbf{\cos^2 x=4\sin x-3\Rightarrow4\sin x-3\ge0\Rightarrow\sin x\ge\frac{3}{4}}$ άρα δεκτή η $\mathbf{\sin x=-2+2\sqrt{2}}$ άρα E

25. Αν $\boldsymbol{\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ και $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta}$, ποια πρόταση είναι αληθής; A) $\boldsymbol{\alpha=0}$ ή $\boldsymbol{\beta=\frac{\pi}{2}}$ B) $\boldsymbol{\alpha=0}$ ή $\boldsymbol{\beta=\frac{\pi}{4}}$ C) $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ ή $\boldsymbol{\beta=0}$ D) $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ ή $\boldsymbol{\beta=\frac{\pi}{2}}$ E) $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{4}}$ ή $\boldsymbol{\beta=0}$

Έχω $\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\Leftrightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\beta\Leftrightarrow-\sin\beta\cdot\cos\alpha=0\Leftrightarrow-\sin\beta=0}$ ή $\boldsymbol{\cos\alpha=0\Leftrightarrow\beta=0}$ ή $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ Άρα C

26. Αν $\boldsymbol{z\in\mathbb{C}, Im(z)\neq0, z^3=-1}$ τότε ο $\mathbf{(z-1)^{10}}$ είναι ίσος με A) $\boldsymbol{z+1}$ B) $\boldsymbol{z-1}$ C) $\boldsymbol{z}$ D) $\boldsymbol{-z}$ E) $\boldsymbol{-z-1}$

Έχω $\boldsymbol{z^3=-1\Leftrightarrow z^3+1=0\Leftrightarrow}$ $\mathbf{(z+1)(z^2-z+1)=0\Leftrightarrow z+1=0}$ ή $\boldsymbol{z^2-z+1=0\Leftrightarrow}$ $\mathbf{z=-1}$ απορρίπτεται αφού $\boldsymbol{Im(-1)=0}$ ή $\boldsymbol{z^2-z+1=0\Leftrightarrow z^2=z-1}$ Άρα $\mathbf{(z-1)^{10}=z^{20}=z^{18}z^2=z^2=z-1}$ άρα B

27. Αν $\boldsymbol{\frac{|z|^2+z}{\bar{z}}=z+i}$ τότε ο $\boldsymbol{z}$ ανήκει στο A) $\boldsymbol{\{a+ai\mid a\in\mathbb{R},a\neq0\}}$ B) $\boldsymbol{\{a-ai\mid a\in\mathbf{R},a\neq0\}}$ C) $\boldsymbol{\{a+2ai\mid a\in\mathbf{R},a\neq0\}}$ D) $\boldsymbol{\{a-2ai\mid a\in\mathbb{R},a\neq0\}}$ E) $\boldsymbol{\{2a-ai\mid a\in\mathbb{R},a\neq0\}}$

Έχω $\boldsymbol{\frac{|z|^2+z}{\bar{z}}=z+i\Leftrightarrow|z|^2+z=\bar{z}(z+i)\Leftrightarrow|z|^2+z=\bar{z}z+\bar{z}i\Leftrightarrow z=\bar{z}i\xLeftrightarrow{z=a+bi}a+bi=(a-bi)i\Leftrightarrow a+bi=ai-bii\Leftrightarrow a+bi=ai+b\Leftrightarrow a=b}$ Άρα $\boldsymbol{z=a+bi=a+\alpha i}$ άρα A

28. Αν $\mathbf{\frac{1}{z}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$ τότε $\boldsymbol{z}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{\sqrt{2}(1+i)}$ B) $\mathbf{\sqrt{2}(1-i)}$ C) $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$ D) $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}$ E) $\mathbf{\frac{1+i}{2}}$

Έχω $\boldsymbol{\frac{1}{z}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow z=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-1}\Leftrightarrow z=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}$ Άρα D

29. Αν $\boldsymbol{\log_8(\log_9(\sqrt{x+1}))=\frac{-2}{3}}$ τότε ο $\boldsymbol{x}$ είναι ίσος με A) **2** B) **3** C) **5** D) **7** E) **8**

Έχω $\boldsymbol{\log_8(\log_9(\sqrt{x+1}))=\frac{-2}{3}\Leftrightarrow\log_9(\sqrt{x+1})=8^{\frac{-2}{3}}=64^{\frac{-1}{3}}=4^{-1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_9(x+1)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\log_9(x+1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+1=9^{1/2}=\sqrt{9}=3\Leftrightarrow x=2}$ Άρα A

30. Αν $\boldsymbol{f(x)=-\log_2 x}$, $\boldsymbol{g(\mathrm{x})=\log_{10}\mathrm{x}}$, $\boldsymbol{(gof^{-1})(a)=\ln\ 2}$ τότε $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{ln2}$ B) $\boldsymbol{\frac{ln2}{ln10}}$ C) $\boldsymbol{\frac{ln10}{ln2}}$ D) $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}$ E) $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

Έχω $\boldsymbol{f(x)=-\log_2 x \Leftrightarrow -f(x)=\log_2 x \Leftrightarrow 2^{-f(x)}=x}$ Άρα $\boldsymbol{f^{-1}(x)=2^{-x}}$Άρα $\boldsymbol{(gof^{-1})(a)=\ln\ 2 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\log_{10}2^{-\alpha}=ln2 \Leftrightarrow -\alpha\log_{10}2=ln2 \Leftrightarrow -\alpha\frac{\ln2}{\ln10}=ln2 \Leftrightarrow -\alpha\frac{1}{\ln10}=1 \Leftrightarrow a=-ln10=\ln\left(\frac{1}{10}\right)}$Άρα D

31. Αν $\boldsymbol{9^{x+1}+3^{x+1}-6=0}$ τότε $\boldsymbol{x}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{\frac{ln3}{ln2}}$ B) $\boldsymbol{\frac{1+ln3}{ln2}}$ C) $\boldsymbol{\frac{2+ln3}{ln2}}$ D) $\boldsymbol{\frac{3+ln2}{ln3}}$ E) $\boldsymbol{\frac{ln2-ln3}{ln3}}$

Έχω $\boldsymbol{9^{x+1}+3^{x+1}-6=0 \Leftrightarrow 9\cdot 9^x+3\cdot 3^x-6=0 \overset{y=3^x>0}{\Longleftrightarrow} 9\cdot y^2+3\cdot \mathrm{y}-6=0 \Leftrightarrow 3y^2+\mathrm{y}-2=0 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{(3y-2)(y+1)=0 \overset{y+1>0}{\Longleftrightarrow} 3y-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow xln3=\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow xln3=\ln 2-\ln 3 \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{x=\frac{\ln 2-\ln 3}{ln3}}$ Άρα E

32. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{(a_n)}$ με $\boldsymbol{a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n=1,2,\dots)}$, $\boldsymbol{a_8=6}$ τότε το $\boldsymbol{a_6+a_9}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{9}$ B) $\boldsymbol{10}$ C) $\boldsymbol{12}$ D) $\boldsymbol{15}$ E) $\boldsymbol{16}$

Έχω $\boldsymbol{a_6+a_9=a_6+a_7+a_8=a_8+a_8=6+6=12}$ Άρα C

33. Αν για κάθε $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $\boxed{\boldsymbol{n}}$ το μεγαλύτερο περιττό ακέραιο διαιρέτη του n και έστω ακολουθία $\boldsymbol{(a_n)}$ με $\boldsymbol{a_n=\begin{cases}\boxed{n}+1, \alpha\nu\ \boxed{n}\equiv 1(\mathrm{mod}4)\\ \\ \boxed{n}-1, \alpha\nu\ \boxed{n}\equiv 3(\mathrm{mod}4)\end{cases}}$ τότε $\boldsymbol{a_{18}-a_{12}}$ ίσο με A) $\boldsymbol{2}$ B) $\boldsymbol{4}$ C) $\boldsymbol{6}$ D) $\boldsymbol{8}$ E) $\boldsymbol{10}$

Έχω $\boldsymbol{9|18\ \kappa\alpha\iota\ 9\equiv 1(\mathrm{mod}4)\Rightarrow a_{18}=9+1=10}$

Έχω $\boldsymbol{3|12\ \kappa\alpha\iota\ 3\equiv 3(\mathrm{mod}4)\Rightarrow a_{12}=3-1=2}$

Άρα $\boldsymbol{a_{18}-a_{12}=10-2=8}$ Άρα D

34. Αν $\boldsymbol{A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$ τότε $\boldsymbol{|\ A-A^T\ |}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{3}$ B) $\boldsymbol{4}$ C) $\boldsymbol{5}$ D) $\boldsymbol{6}$ E) $\boldsymbol{9}$

Έχω $\boldsymbol{|\ A-A^T\ |=\left|\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\right|=4}$ Άρα B

35. Έστω $\boldsymbol{m}\in\mathbb{R}^+$ και $\boldsymbol{u=[x\quad y]}$, $\boldsymbol{\mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}}$. Για να έχω άπειρες λύσεις πρέπει το m να είναι ίσο με A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\boldsymbol{3}$ E) $\boldsymbol{4}$

Έχω $\boldsymbol{\mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\Leftrightarrow \mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}=O\Leftrightarrow \mathrm{u}\cdot\begin{bmatrix}1-m & 2\\ 2 & 1-m\end{bmatrix}=O}$

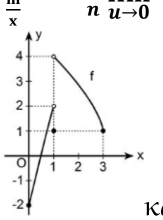
Για να έχω άπειρες λύσεις αρκεί $\boldsymbol{\begin{vmatrix}1-\mathrm{m} & 2\\ 2 & 1-\mathrm{m}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow (1-\mathrm{m})^2-4=0\Leftrightarrow \mathrm{m}^2-2m-3=0\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{\mathrm{m}=-1}$ ή $\boldsymbol{m=3\overset{m\in\mathbb{R}^+}{\Longleftrightarrow} m=3}$ Άρα D

36. Αν $\boldsymbol{A_{3\times3}}$ με $\boldsymbol{[2\quad 1\quad 3]\cdot A=[0\quad 2\quad 2]}$ και $\boldsymbol{[1\quad 4\quad 0]\cdot A=[3\quad 1\quad 5]}$ τότε $\boldsymbol{[5\quad 6\quad 6]\cdot A}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{[2\quad 1\quad 3]}$ B) $\boldsymbol{[3\quad 3\quad 7]}$ C) $\boldsymbol{[3\quad 5\quad 9]}$ D) $\boldsymbol{[6\quad 2\quad 10]}$ E) $\boldsymbol{[6\quad 4\quad 12]}$

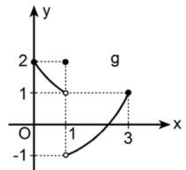
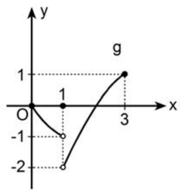
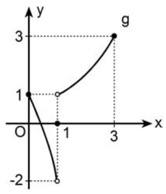
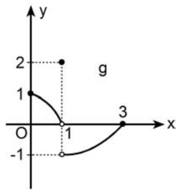
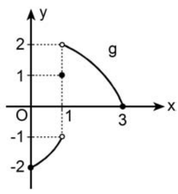
Έχω $\boldsymbol{[5\quad 6\quad 6]\cdot A=(2\cdot[2\quad 1\quad 3]+[1\quad 4\quad 0])\cdot A=2\cdot[2\quad 1\quad 3]\cdot A+[1\quad 4\quad 0]\cdot A=2\cdot[0\quad 2\quad 2]+[3\quad 1\quad 5]=[0\quad 4\quad 4]+[3\quad 1\quad 5]=[3\quad 5\quad 9]}$ Άρα C

37. Αν $\boldsymbol{m,n}\in\mathbb{R}^*$, $\boldsymbol{\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\sin\left(\frac{m}{x}\right)}$, με οριζόντια ασύμπτωτη την $\boldsymbol{y=2}$ τότε A) $\boldsymbol{m=n}$ B) $\boldsymbol{m=n+2}$ C) $\boldsymbol{m=2n}$ D) $\boldsymbol{m=3n}$ E) $\boldsymbol{2m=3n}$

Αφού έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την $\boldsymbol{y=2}$ θα έχω $\boldsymbol{2=\lim_{x\to\infty}\mathrm{f(x)}\Leftrightarrow 2=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\sin\left(\frac{m}{x}\right)=}$ $\boldsymbol{\frac{1}{n}\lim_{x\to\infty}\mathrm{x}\sin\left(\frac{m}{x}\right)=\frac{m}{n}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{m}{x}\right)=\frac{m}{n}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{m}{x}\right)}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{x}}}=\frac{m}{n}\lim_{u\to0}\frac{\sin(u)}{\mathrm{u}}=\frac{m}{n}}$Άρα $\boldsymbol{2=\frac{m}{n}}$ Άρα $\boldsymbol{m=2n}$ άρα C

38. Αν η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ είναι 

και η $\boldsymbol{(f+g)}$ είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x=1}$ ποια από τις παρακάτω θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$

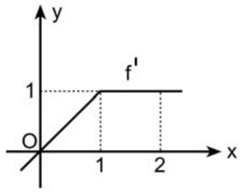

A)

B)

C)

D)

E)

Έχω $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. Αφού η $(f+g)$ είναι συνεχής στο $x=1$, θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \Leftrightarrow 2+\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=4+\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2+\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ το οποίο ισχύει μόνο στην περίπτωση Α

39. Το $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}+e^{2x}}{\ln x+3e^{2x}}$ είναι ίσο με A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\mathbf{0}$ E) $\mathbf{1}$

Έχω $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-3x}+e^{2x}}{\ln x+3e^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-5x}+1}{\frac{\ln x}{e^{2x}}+3}=\frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3}$ Άρα C

40. Η γραφική παράσταση της παραγώγου της f είναι και $f(0)=1$. Τότε το $f(2)$ είναι ίσο με A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{3}$



Έχω $f'(x)=\begin{cases} x, & \alpha\nu\ 0\le x\le 1\\ 1, & \alpha\nu\ x>0\end{cases}$ Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+c_1, & \alpha\nu\ x\le 1\\ x+c_2, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$. Αφού f παραγωγίσιμη στο 1 άρα και συνεχής στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}+c_1=1+c_2 \Leftrightarrow c_1=\frac{1}{2}+c_2$

Αφού $f(0)=1 \Leftrightarrow \frac{0^2}{2}+c_1=1 \Leftrightarrow c_1=1$ Άρα $\frac{1}{2}=c_2$. Οπότε $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+1, & \alpha\nu\ x\le 1\\ x+\frac{1}{2}, & \alpha\nu\ x>1\end{cases}$ και $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ Άρα Β

41. Αν $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ τότε η 15η παράγωγος της f στο $\ln 2$ είναι ίση με A) $17\cdot 2^{13}$ B) $15\cdot 2^{13}$ C) $9\cdot 2^{13}$ D) $15\cdot 2^{12}$ E) $7\cdot 2^{12}$

Έχω $f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}$, $f^{(2)}(x)=4e^{2x}-4e^{-2x}=2^2e^{2x}-2^2e^{-2x}$, $f^{(3)}(x)=2^3e^{2x}+2^3e^{-2x}$, … $f^{(15)}(x)=2^{15}e^{2x}+2^{15}e^{-2x}$ Άρα $f^{(15)}(\ln 2)=2^{15}e^{2\ln 2}+2^{15}e^{-2\ln 2}=2^{15}e^{\ln 4}+2^{15}e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=2^{15}4+2^{15}\frac{1}{4}=2^{15}\left(4+\frac{1}{4}\right)=2^{15}\frac{17}{4}=17\cdot 2^{13}$ Άρα Α

42. Στην καμπύλη $xy^2-x^3y-6=0$ η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_0,y_0)$ είναι παράλληλη στον άξονα των x. Άρα το x_0 είναι ίσο με A) -3 B) -2 C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) 1

Έχω $y^2+2xyy'-3x^2y-x^3y'=0$. Αφού η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_0,y_0)$ είναι παράλληλη στον άξονα των x έχω $y'(x_0)=0$ Άρα $y^2(x_0)-3(x_0)^2y(x_0)=0$. Αν $y(x_0)=0$ τότε η εξίσωση $xy^2-x^3y-6=0$ γίνεται $0-0-6=0$ αδύνατο. Άρα $y(x_0)=3(x_0)^2$ και έχω από την εξίσωση $xy^2-x^3y-6=0$ ότι εξίσωση $x_0(3(x_0)^2)^2-{x_0}^3 3(x_0)^2-6=0 \Leftrightarrow 9{x_0}^5-3{x_0}^5=6 \Leftrightarrow 6{x_0}^5=6 \Leftrightarrow {x_0}^5=1 \Leftrightarrow x_0=1$ Άρα Ε

43. Αν η εφαπτομένη της συνάρτησης f στο $x=\alpha>0$ είναι η $y-12x+14=0$ και $f'(x)=3x^2$ τότε το $f(1)$ είναι ίσο με A) -2 B) 0 C) 1 D) 3 E) 5

Έχω $\lambda=f'(\alpha) \Leftrightarrow 12=3\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha=\pm 2 \xRightarrow{\alpha>0} \alpha=2$. Άρα $y(\alpha)-12\alpha+14=0 \xRightarrow{\alpha=2} y(2)-24+14=0 \Leftrightarrow y(2)=10 \Leftrightarrow f(2)=10$. Αφού $f'(x)=3x^2 \Rightarrow f(x)=x^3+c \xRightarrow{f(2)=10} 10=2^3+c \Rightarrow c=2 \Rightarrow f(x)=x^3+2 \Rightarrow f(1)=1^3+2=3$ άρα D

44. Μια τουριστική εταιρεία χρεώνει 140 TL το άτομο για ένα ταξίδι. Αν οι κρατήσεις είναι πάνω από 80 γίνεται επιστροφή 0,5 TL για κάθε επιπλέον άτομο. Μέγιστος αριθμός ταξιδιωτών 200. Π.χ. αν έγιναν 100 κρατήσεις , τότε επιστρέφονται στον καθένα 10 TL, δηλαδή ο καθένας χρεώνεται τελικά 130 TL. Πόσοι πρέπει να συμμετέχουν ώστε τα έσοδα της εταιρείας να μεγιστοποιούνται; A) $\mathbf{160}$ B) $\mathbf{165}$ C) $\mathbf{175}$ D) $\mathbf{180}$ E) $\mathbf{185}$

Έχω $\varepsilon\sigma o\delta\alpha(x)=\begin{cases}140x, & \alpha\nu\ 0<x<80\\ [140-0{,}5(x-80)]\,x, & \alpha\nu\ 80<x<200\end{cases}=\begin{cases}140x, & \alpha\nu\ x<80\\ [180-0{,}5x]\,x, & \alpha\nu\ 80<x<200\end{cases}$
$=\begin{cases}140x, & \alpha\nu\ x<80\\ 180x-0{,}5x^2, & \alpha\nu\ 80<x<200\end{cases}$

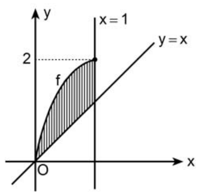
Αφού η συνάρτηση είναι αύξουσα στο $[0,80]$ η μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό είναι $\mathbf{80\cdot 140 = 11200}$. Το τριώνυμο $\mathbf{180x - 0,5x^2}$ μεγιστοποιείται στο $\frac{-\beta}{2\cdot\alpha} = \frac{-180}{2\cdot(-0,5)} = 180 \in [80,200]$ με μέγιστη τιμή $\boldsymbol{\varepsilon\sigma o\delta\alpha}(180) = 180\cdot 180 - 0,5\cdot 180^2 = 0,5\cdot 180^2 = 16200 > 11200$ Άρα D

45. Το $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\cdot \cot x dx$ είναι ίσο με A) $\frac{\pi+1}{2}$ B) $\frac{\pi+1}{3}$ C) $\frac{\pi+2}{4}$ D) $\frac{\pi-1}{6}$ E) $\frac{\pi-2}{6}$

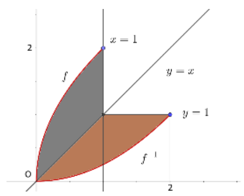
Έχω $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\cdot\cot x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+\cos 2x\, dx = \left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{4}$ Άρα C

46. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f έχω $\int_1^3 f(x)dx = 5$ τότε το $\int_0^1 (4+f(2x+1))\,dx$ είναι ίσο με A) $\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\mathbf{3}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

Έχω $I = \int_0^1 (4+f(2x+1))\,dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 f(2x+1)\,dx = 4 + \int_0^1 f(2x+1)\,dx$ Θέτω $u = 2x+1, du = 2dx$. Άρα $I = 4 + \int_1^3 f(u)\frac{1}{2}du = 4+\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$ άρα E

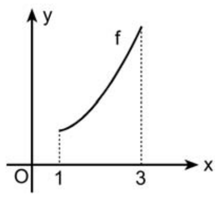


47. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι $\mathbf{1-1}$. Η έκφραση του εμβαδού της διαγραμμισμένης περιοχής είναι A) $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$ B) $\int_0^2 \left(2-f^{-1}(x)\right)dx$ C) $\int_0^1 \left(x-f^{-1}(x)\right)dx$ D) $\int_0^1 \left(2-f^{-1}(x)\right)dx + \int_1^2 f^{-1}(x)dx$ E) $\int_0^1 \left(x-f^{-1}(x)\right)dx + \int_1^2 \left(1-f^{-1}(x)\right)dx$



Από τη συμμετρία της $f^{-1}(x)$ και της $f(x)$ προκύπτει ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\int_0^1 \left(x-f^{-1}(x)\right)dx + \int_1^2 \left(1-f^{-1}(x)\right)dx$ δηλαδή το E

48. Έστω $f:[1,3]\to[2,10]$ με $f(x) = 1+x^2$ και γραφική παράσταση Το διάστημα $[1,3]$ χωρίζεται σε δυο υποδιαστήματα ίσου μήκους και τα δεξιά άκρα αυτών σημειώνονται ως x_1 και x_2. Σχεδιάζουμε δυο ορθογώνια με βάσεις τα δυο υποδιαστήματα και ύψη $f(x_1)$ και $f(x_2)$ αντίστοιχα. Αν A το άθροισμα των εμβαδών αυτών και B το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στη γραφική παράσταση και τον άξονα x'x τότε $A-B$ είναι ίσο με A) $\frac{11}{2}$ B) $\frac{13}{3}$ C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{19}{6}$ E) $\frac{23}{6}$

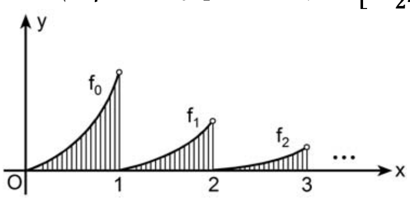


Προφανώς τα δυο ορθογώνια έχουν βάση ίση με 1, $x_1 = 2, x_2 = 3$ Άρα $A = 1\cdot f(x_1) + 1\cdot f(x_2) = f(2)+f(3) = 5+10 = 15$

Έχω $B = \int_1^3 (1+x^2)\,dx = \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 3+\frac{3^3}{3} - 1 - \frac{1^3}{3} = 3+9-1-\frac{1}{3} = 11\frac{1}{3} = \frac{34}{3}$

Άρα $A - B = \frac{45}{3} - \frac{34}{3} = \frac{11}{3}$ Άρα B

49. Έστω $n\in\mathbb{N}$, συναρτήσεις $f_n: [n, n+1) \to \left[0,\frac{1}{2^n}\right)$ με τύπο $f_n(x) = \frac{(x-n)^2}{2^n}$ και γραφικές παραστάσεις του σχήματος:

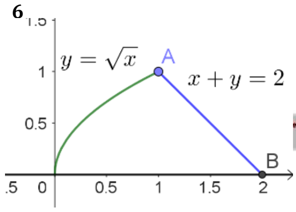


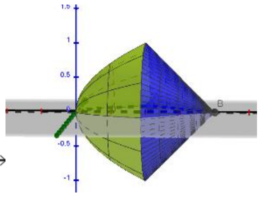
Πόσο είναι το εμβαδόν των διαγραμμισμένων περιοχών;

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{11}{12}$

Έχω $E = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_n^{n+1} f_n(x)dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}\frac{(x-n)^2}{2^n}dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x-n)^3}{3\cdot 2^n}\right]_n^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ Άρα A

50. Η περιοχή μεταξύ του άξονα x'x, της ευθείας $\boldsymbol{x+y=2}$ και της καμπύλης $\boldsymbol{y=\sqrt{x}}$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x'x κατά $\boldsymbol{360°}$. Ο όγκος του στερεού που προκύπτει είναι: A) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ B) $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$ C)$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$ D) $\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$ E) $\boldsymbol{\frac{7\pi}{6}}$

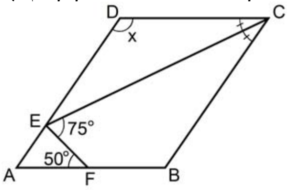




Το σημείο τομής της ευθείας και της καμπύλης είναι το A(1,1). Ο όγκος του στερεού είναι $\boldsymbol{V=V_1+V_2=\int_0^1\pi\left(\sqrt{x}\right)^2dx+\int_1^2\pi(2-x)^2dx=\int_0^1\pi x dx+\int_1^2\pi(4-4x+x^2)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\pi\left[4x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{\pi}{2}+\pi\left(8-8+\frac{8}{3}\right)-\pi\left(4-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}}$ Άρα D

[ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ-1
ΤΕΣΤ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ]
ΚΥΡΙΑΚΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
Ο χρόνος απάντησης που δίνεται για αυτό το τεστ είναι 60 λεπτά.
Υπάρχει μόνο μία σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση σε αυτό το τεστ. Εάν έχουν επισημανθεί περισσότερες από μία θέσεις απαντήσεων για μια ερώτηση αυτή η ερώτηση θα θεωρηθεί ότι έχει απαντηθεί λανθασμένα.
Αυτό το τεστ βαθμολογείται με βάση τον αριθμό των σωστών απαντήσεων.
Το ένα τέταρτο του αριθμού των λανθασμένων απαντήσεων θα αφαιρεθεί και ο αριθμός που απομένει θα είναι η βαθμολογία σας.

1. Αν $\boldsymbol{ABCD}$ παραλληλόγραμμο, $\boldsymbol{CE}$ διχοτόμος της $\widehat{\boldsymbol{C}}$, $\widehat{\boldsymbol{AFE}} = \boldsymbol{50}°$, $\widehat{\boldsymbol{CEF}} = \boldsymbol{75}°$ τότε $\boldsymbol{x} =$ A) $\boldsymbol{115}°$ B) $\boldsymbol{120}°$



C)$\boldsymbol{125}°$ D) $\boldsymbol{130}°$ E) $\boldsymbol{135}°$

Έχω $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{x}$, $\widehat{\boldsymbol{BFE}} = \boldsymbol{180}° - \widehat{\boldsymbol{AFE}} = \boldsymbol{130}°$ Στο τετράπλευρο CEFB έχω $\boldsymbol{75}° + \boldsymbol{130}° + \boldsymbol{x} + \frac{\widehat{\boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{360}° \Rightarrow \boldsymbol{x} + \frac{\widehat{\boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{155}°$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{x} + \widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{180}° \Rightarrow \frac{\widehat{\boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{25}° \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{50}°, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{130}°$. Άρα D

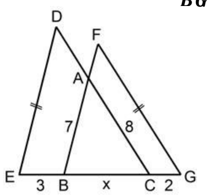
2. Αν η κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ και η μία από τις παρά τη βάση γωνίες είναι $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ και $\sin\widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \sin\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ τότε A) $\boldsymbol{0}° < \widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{30}°$ B) $\boldsymbol{30}° < \widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{45}°$ C) $\boldsymbol{45}° < \widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \boldsymbol{60}°$ D) $\boldsymbol{0}° < \widehat{\boldsymbol{\beta}} < \boldsymbol{60}°$ E) $\boldsymbol{60}° < \widehat{\boldsymbol{\beta}} < \boldsymbol{90}°$

Έχω $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{180}°$. Αφού $\sin\widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \sin\widehat{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\alpha}} < \widehat{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow \boldsymbol{180}° - \boldsymbol{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}} < \widehat{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow \boldsymbol{180}° < \boldsymbol{3}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow \boldsymbol{60}° < \widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Ακόμα έχω ότι $\widehat{\boldsymbol{\beta}} < \boldsymbol{90}°$ διότι αν $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \geq \boldsymbol{90}°$ τότε οι δυο παρά τη βάση γωνίες $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ θα έχουν άθροισμα από $\boldsymbol{180}°$ και πάνω. Άρα$\boldsymbol{60}° < \widehat{\boldsymbol{\beta}} < \boldsymbol{90}°$. Άρα D

3. Αν $\boldsymbol{DE} = \boldsymbol{FG}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{7}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{8}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{EB} = \boldsymbol{3}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{CG} = \boldsymbol{2}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{AB}//\boldsymbol{DE}, \boldsymbol{AC}//\boldsymbol{FG}$ τότε $\boldsymbol{x} =$ A) $\boldsymbol{4}$ B) 5 C)$\boldsymbol{6}$ D) $\boldsymbol{7}$ E) $\boldsymbol{8}$

Στο $\widehat{\boldsymbol{CDE}}$ από θεώρημα Θαλή $\frac{\boldsymbol{CB}}{\boldsymbol{CE}} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{ED}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+3}} = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{ED}}$

Στο $\widehat{\boldsymbol{BFG}}$ έχω $\frac{\boldsymbol{CB}}{\boldsymbol{BG}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{FG}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+2}} = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{FG}}$ Αφού $\boldsymbol{DE} = \boldsymbol{FG} \Rightarrow \boldsymbol{7}\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{8}\frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \boldsymbol{7x} + \boldsymbol{21} = \boldsymbol{8x} + \boldsymbol{16} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{5}$ Άρα B

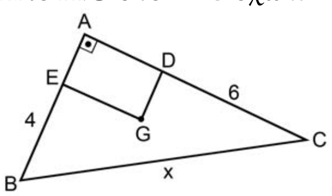


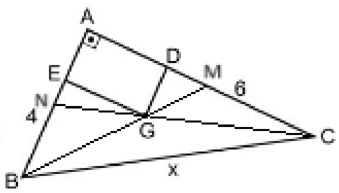
4. Αν $\boldsymbol{AB}//\boldsymbol{DG}, \boldsymbol{AC}//\boldsymbol{EG}, \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{4}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{DC} = \boldsymbol{6}\ \boldsymbol{cm}, \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{x}$, το $\boldsymbol{G}$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του ορθογωνίου $\boldsymbol{ABC}$ (βαρύκεντρο), τότε $\boldsymbol{x} =$ A) $\boldsymbol{3}\sqrt{\boldsymbol{13}}$ B) $\boldsymbol{4}\sqrt{\boldsymbol{13}}$ C)$\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{15}}$ D) $\boldsymbol{3}\sqrt{\boldsymbol{15}}$ E) $\boldsymbol{4}\sqrt{\boldsymbol{15}}$

Έστω $\boldsymbol{M}$ μέσο του $\boldsymbol{AC}$, τότε από Θ. Θαλή έχω $\frac{\boldsymbol{BE}}{\boldsymbol{BA}} = \frac{\boldsymbol{BG}}{\boldsymbol{BM}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{BA}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \Rightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{6}$

Έστω $\boldsymbol{N}$ μέσο του $\boldsymbol{AB}$, τότε από Θ. Θαλή έχω $\frac{\boldsymbol{CD}}{\boldsymbol{CA}} = \frac{\boldsymbol{CG}}{\boldsymbol{CN}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{CA}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \Rightarrow \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{9}$

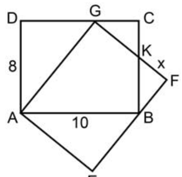
Από Π.Θ στο $\boldsymbol{ABC}$ έχω $\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{AB^2} + \boldsymbol{AC^2}} = \sqrt{\boldsymbol{6^2} + \boldsymbol{9^2}} = \boldsymbol{3}\sqrt{\boldsymbol{2^2} + \boldsymbol{3^2}} = \boldsymbol{3}\sqrt{\boldsymbol{13}}$ Άρα A





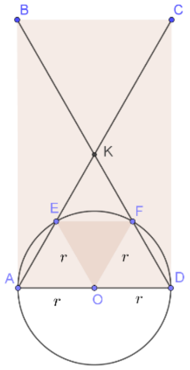
5. Τα ίσα ορθογώνια $\boldsymbol{ABCD}$ και $\boldsymbol{AEFG}$ με μήκη πλευρών 8 cm και 10 cm , όπως στο σχήμα. Οι πλευρές $\boldsymbol{BC}$ και $\boldsymbol{FG}$ τέμνονται στο $\boldsymbol{K}$. Αν $\boldsymbol{KF} = \boldsymbol{x}$, τότε $\boldsymbol{x} =$ A) $\boldsymbol{2}$ B) $\boldsymbol{3}$ C)$\boldsymbol{4}$ D) $\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{2}}$ E) $\frac{\boldsymbol{12}}{\boldsymbol{5}}$

Από Π.Θ στο ADG έχω $\boldsymbol{DG} = \sqrt{\boldsymbol{AG^2} - \boldsymbol{AD^2}} = \sqrt{\boldsymbol{10^2} - \boldsymbol{8^2}} = \boldsymbol{6} \Rightarrow \boldsymbol{GC} = \boldsymbol{DC} - \boldsymbol{DG} = \boldsymbol{10} - \boldsymbol{6} = \boldsymbol{4}$



Αφού $\boldsymbol{CGK \approx DAG \Rightarrow \frac{GK}{AG} = \frac{CG}{DA} \Rightarrow \frac{GK}{10} = \frac{4}{8} \Rightarrow GK = 5 \Rightarrow KF = GF - GK = 8 - 5 = 3}$ Άρα B

6.Σχεδιάστε έναν κύκλο με κέντρο $\boldsymbol{O}$ και διάμετρο την πλευρά $\boldsymbol{AD}$ ενός ορθογωνίου $\boldsymbol{ABCD}$ του οποίου η μεγάλη πλευρά είναι $\sqrt{\boldsymbol{3}}$ φορές η μικρή πλευρά. Τα σημεία $\boldsymbol{A, D, E, F}$ είναι τα σημεία τομής του ορθογωνίου με τον κύκλο. Πόσες φορές τον εμβαδόν $(\boldsymbol{ABCD})$ είναι το εμβαδόν του $(\boldsymbol{OEF})$ A) **8** B) **12** C)**15** D) **16** E) **18**

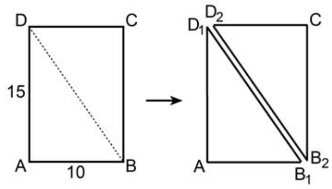


Έχω $\boldsymbol{\tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CAD} = 60^\circ}$Άρα $\boldsymbol{\widehat{AOE} = 60^\circ}$

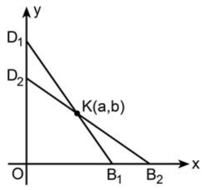
Όμοια $\boldsymbol{\widehat{FOD} = 60^\circ}$. Άρα $\boldsymbol{\widehat{OEF} = 60^\circ}$ και τα τρίγωνα $\boldsymbol{OEF, OEA, ODF, KEF}$, είναι ισόπλευρα πλευράς $\boldsymbol{r}$. Άρα $\boldsymbol{EF // = \frac{AD}{2}}$ Άρα $\boldsymbol{(OEF) = \frac{1}{4}(AKD) = \frac{1}{4}\frac{1}{4}(ABCD) = \frac{1}{16}(ABCD)}$ Άρα D

7. Ορθογώνιο $\boldsymbol{ABCD}$ με μήκη πλευρών 10 cm και 15 cm. Κόβουμε το $\boldsymbol{ABCD}$ κατά μήκος της διαγώνιου $\boldsymbol{DB}$ όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια με τις κορυφές $\boldsymbol{A, C}$ που λαμβάνονται στην αρχή των αξόνων τοποθετούνται τα τρίγωνα ως εξής. Αν το σημείο τομής $\boldsymbol{K(\alpha, \beta)}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ είναι ίσο με A) **10** B) **11** C)**12** D) **13** E) **14**

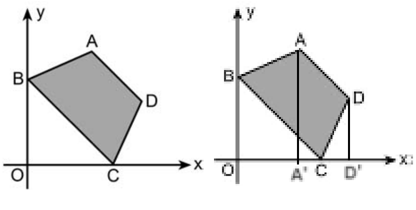
Εύκολα προκύπτει ότι οι εξισώσεις των $\boldsymbol{D_1B_1}$και $\boldsymbol{D_2B_2}$ είναι αντίστοιχα: $\boldsymbol{\frac{x}{10} + \frac{y}{15} = 1}$ και $\boldsymbol{\frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1}$



άρα $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{15x + 10y = 150} \\ \boldsymbol{10x + 15y = 150} \end{matrix}\right\} \boldsymbol{\Rightarrow 25x + 25y = 300 \Rightarrow x + y = 6},$ Άρα C



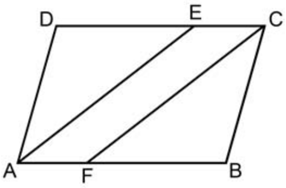
8. Το $\boldsymbol{ABCD}$ είναι τραπέζιο, $\boldsymbol{A(4,8), B(0,6), C(6,0)}$ και $\boldsymbol{D(8,4)}$. Άρα το εμβαδόν $(\boldsymbol{ABCD})$ είναι ίσο με



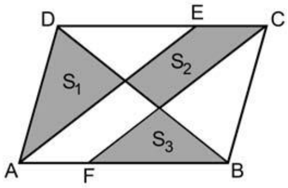
A) **28** B) **30** C)**32** D) **34** E) **36**

Έχω $\boldsymbol{(ABCD) = (OBAA') + (AA'DD') - (OBC) - (CDD') = \frac{1}{2}(OB + AA')OA' + \frac{1}{2}(DD' + AA')A'D' - \frac{1}{2}OC \cdot OB - \frac{1}{2}CD' \cdot DD' = \frac{1}{2}(6+8)4 + \frac{1}{2}(4+8)4 - \frac{1}{2}6 \cdot 6 - \frac{1}{2}2 \cdot 4 = 28 + 24 - 18 - 4 = 30}$ Άρα B

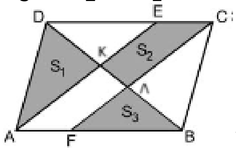
9. Στο παραλληλόγραμμο ABCD έχω σημεία τέτοια ώστε AE//FC και το παραλληλόγραμμο



χωρίζεται σε τρία ισεμβαδικά μέρη. Τότε για τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων περιοχών έχω A) $S_1 = S_3 < S_2$ B) $S_2 = S_3 < S_1$ C)$S_2 < S_3 < S_1$ D) $S_3 < S_1 < S_2$ E)

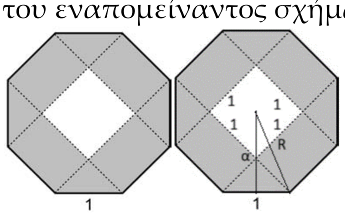


$S_3 < S_2 < S_1$



Έχω εύκολα (γπγ) ότι $\Delta\, DKE = \Delta\, BF\Lambda \Rightarrow (DKE) = (BF\Lambda) = S_3$ Όμοια $(C\Lambda N) = (KDA) = S_1$. Αφού $(DBC) = (DBA) \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + (AK\Lambda F) + S_3 \Rightarrow S_2 = (AK\Lambda F)$. Αφού $(ADE) = (AECF) \Rightarrow S_1 + S_3 = 2S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{S_1+S_3}{2}$. Άρα $S_3 \leq S_2 \leq S_1$ή $S_1 \leq S_2 \leq S_3$ Απ' το σχήμα $EK < KA \Rightarrow (EDK) < (DKA) \Rightarrow S_3 < S_1$ Άρα $S_3 < S_2 < S_1$ Άρα E

10. Αφού σχεδιάσαμε τις 4 διαγώνιους ενός κανονικού οκταγώνου πλευράς 1 αποκόψαμε το κεντρικό κομμάτι. Το εμβαδόν του εναπομείναντος σχήματος είναι ίσο με A) $1 + 2\sqrt{2}$ B) $1 + 4\sqrt{2}$ C)

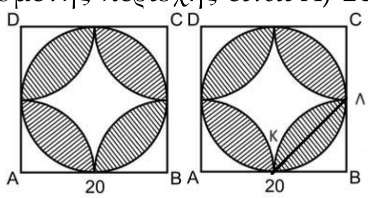


$2 + \sqrt{2}$ D) $2 + 2\sqrt{2}$ E) $2 + 4\sqrt{2}$

Στο τρίγωνο του σχήματος έχω $\tan 22.5° = \frac{\frac{1}{2}}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2\tan 22.5°}$. Έχω $\tan 45° = 1 \Rightarrow \tan 2 * 22.5° = 1 \Rightarrow \frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°} = 1 \Rightarrow 2\tan 22.5° = 1 - \tan^2 22.5° \Rightarrow \tan^2 22.5° + 2\tan 22.5° - 1 = 0 \Rightarrow \tan 22.5° = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \xRightarrow{\tan 22.5° > 0} \tan 22.5° = \sqrt{2} - 1$ Άρα $a = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

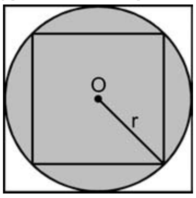
Το αποσπώμενο κομμάτι είναι τετράγωνο πλευράς 1 άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \frac{1}{2}P_8 a_8 - 1^2 = \frac{1}{2} 8 \frac{\sqrt{2}+1}{2} - 1 = 2\sqrt{2} + 1$ Άρα A

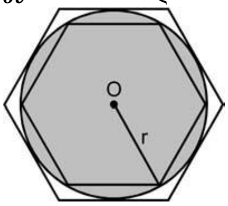
11. Τετράγωνο $ABCD$ πλευράς 20, τέσσερα τεταρτημόρια ακτίνας 10 και κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του τετραγώνου. Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι A) $100\pi - 100$ B) $100\pi - 200$ C) $200\pi - 400$ D) $400 - 100\pi$ E) $400 - 50\pi$



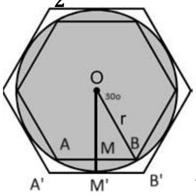
Έχω $E_{σκιας} = 8E_{φύλλο} = 8(\overset{\frown}{BK\Lambda}) - 8(\Delta\, BK\Lambda) = 8\frac{\pi \Lambda B^2}{4} - 8\frac{1}{2}\Lambda B^2 = 2\pi \Lambda B^2 - 4\Lambda B^2 = 200\pi - 400$ Άρα C

12. Σχεδιάζοντας το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο τετράγωνο ενός κύκλου ακτίνας r έχουμε $εμβαδόν_{εγγεγραμμένου\ τετραγώνου} = 2r^2$, $εμβαδόν_{κύκλου} = \pi r^2$,

$\boldsymbol{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta}$ό$\boldsymbol{\nu}_{\text{περιγεγραμμένου τετραγώνου}} = \boldsymbol{4r^2}$. Άρα $\boldsymbol{2 < \pi < 4}$. Αν αντί για τετράγωνο έχω κανονικό εξάγωνο τότε 

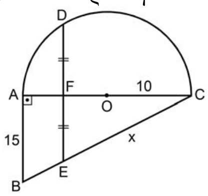


A) $\frac{3\sqrt{3}}{2} < \boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{2\sqrt{3}}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2} < \boldsymbol{\pi} < \frac{10}{3}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{3} < \boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{2\sqrt{3}}$ D) $\frac{4\sqrt{3}}{3} < \boldsymbol{\pi} < \frac{10}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{3} < \boldsymbol{\pi} < \frac{9\sqrt{3}}{4}$



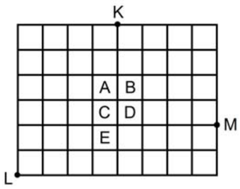
Έχω $\boldsymbol{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta}$ό$\boldsymbol{\nu}_{\text{εγγεγραμμένου εξαγώνου}} = \boldsymbol{6(OAB)} = \boldsymbol{6}\frac{\sqrt{3}r^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$Ακόμα $\frac{(OAB)}{(OA'B')} = \left(\frac{OM}{OM'}\right)^2 = \left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = (\cos 30°)^2 = \frac{3}{4}$ Άρα $\boldsymbol{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta}$ό$\boldsymbol{\nu}_{\text{περιγεγραμμένου εξαγώνου}} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\varepsilon\mu\beta\alpha\delta}$ό$\boldsymbol{\nu}_{\text{εγγεγραμμένου εξαγώνου}} = \boldsymbol{2\sqrt{3}r^2}$
Άρα $\frac{3\sqrt{3}}{2} < \boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{2\sqrt{3}}$ άρα A

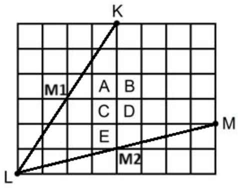
13. Ημικύκλιο με κέντρο O, $\boldsymbol{ABC}$ ορθογώνιο, $\boldsymbol{AB//DE, DF = FE, AB = 15, OC = 10, EC = x}$. Άρα $\boldsymbol{x} =$ A) **15** B) **16** C) **18** D) **20** E) **21**



Από Π.Θ στο $\boldsymbol{ABC}$ Έχω $\boldsymbol{BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25}$
$\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{D}$ συμμετρικά ως προς $\boldsymbol{AC}$ Άρα $\widehat{\boldsymbol{AEC}} = \widehat{\boldsymbol{ADC}} = \boldsymbol{90°}$ αφού η $\widehat{\boldsymbol{ADC}}$ βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $\boldsymbol{AC^2} = \boldsymbol{EC \cdot BC \Rightarrow 400 = 25x \Rightarrow x = 16}$ Άρα B

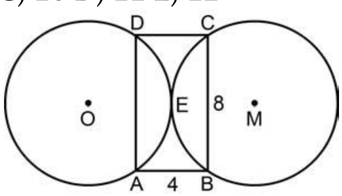
14. Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία $\boldsymbol{K, L, M}$. Το κέντρο αυτού του κύκλου βρίσκεται εντός του τετραγώνου $\boldsymbol{A, B, C, D}$ ή $\boldsymbol{E}$;





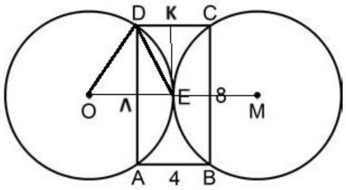
Έχω $\boldsymbol{L(0,0), K(4,6), M(8,2)}$. Άρα $\boldsymbol{LK: y = 6x/4}$, $\boldsymbol{LM: y = 2x/8}$, $\boldsymbol{LK: y = 6x/4}$. Τα μέσα των $\boldsymbol{LK}$ και $\boldsymbol{LM}$ είναι αντίστοιχα τα σημεία $\boldsymbol{M_1(2,3)}$ και $\boldsymbol{M_2(4,1)}$ και οι μεσοκάθετές τους που τέμνονται στο ζητούμενο σημείο O είναι αντίστοιχα οι $\boldsymbol{OM_1: y - 3} = -\frac{4}{6}\boldsymbol{(x - 2)}$ και $\boldsymbol{OM_2: y - 1} = -\frac{8}{2}\boldsymbol{(x - 4)}$. Προκύπτει ότι $\boldsymbol{O(3.8, 1.8)}$ Άρα στο τετράγωνο E

15. Το $\boldsymbol{ABCD}$ είναι ορθογώνιο, $\boldsymbol{AB = 4, BC = 8}$, οι ίσοι κύκλοι εφάπτονται στο $\boldsymbol{E}$ Άρα $\boldsymbol{OE} =$ A) **8** B) **9** C) **10** D) **11** E) **12**



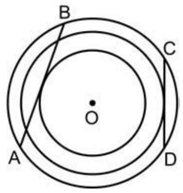
Έχω $\boldsymbol{\Lambda E = DK} = \frac{DC}{2} = \boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{D\Lambda = KE = BC/2 = 4}$,

$\widehat{DEC} = \widehat{DOE}$ (χορδής και εφαπτομένης) $\tan\widehat{DO\Lambda} = \tan\widehat{DEK} \Rightarrow \frac{4}{O\Lambda} = \frac{2}{4} \Rightarrow O\Lambda = 8 \Rightarrow OE = O\Lambda + \Lambda E =$



$8 + 2 = 10$, *άρα* C

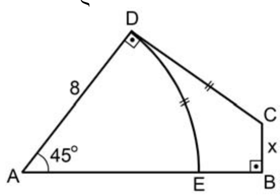
16. Η χορδή AB του μεγαλύτερου κύκλου, ακτίνας 6, εφάπτεται στον μικρότερο κύκλο, η χορδή CD του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στον μεσαίο κύκλο, $AB = 8\ cm$, $CD = 4\ cm$. Άρα ο λόγος των εμβαδών του μικρότερου προς τον μεσαίο κύκλο είναι: A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{9}{16}$



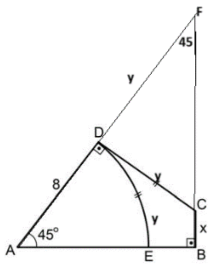
$$\frac{E_{\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}}{E_{\mu\varepsilon\sigma\alpha\acute{\iota}o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}} = \left(\frac{R_{\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}}{R_{\mu\varepsilon\sigma\alpha\acute{\iota}o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}}\right)^2 = \frac{R^2{}_{\mu\iota\kappa\rho\acute{o}\tau\varepsilon\rho o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}}{R^2{}_{\mu\varepsilon\sigma\alpha\acute{\iota}o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon}} = \frac{OA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \frac{6^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2}{6^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \frac{36-16}{36-4} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

Άρα A

17. $\widehat{BAD} = 45°$, $AB \perp BC, AD \perp DC$, $AD = 8, BC = x$, το μήκος του τόξου DE με κέντρο το A είναι ίσο με το DC. Άρα $x =$ A) $\pi - \sqrt{2}$ B) $4 - \pi$ C) $\sqrt{2}(\pi - 2)$ D) $\sqrt{2}(4 - \pi)$ E) $2(\pi - \sqrt{2})$

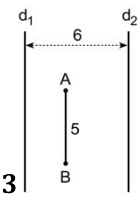


Προεκτείνω AD και BC όπως στο σχήμα. Έχω $\widehat{F} = 90° - 45° = 45°$ άρα $DF = DC = y = \frac{2\pi.\widehat{BAD}}{360}AD = \frac{2\pi.45°}{360°}8 = 2\pi$. Άρα $FC = \sqrt{2}y$, $\frac{FB}{FA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x+\sqrt{2}y}{y+8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{y+8}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y = \frac{2\pi+8}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}2\pi = 4\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi =$

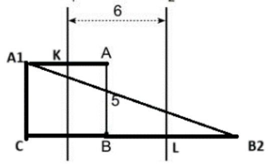


$\sqrt{2}(4 - \pi)$ άρα D

18. Έστω $d_1 || d_2 || AB$, $d(d_1, d_2) = 6$, $AB = 5$. Αν A_1συμμετρικό του A ως προς την ευθεία d_1 και B_2 συμμετρικό του B ως προς την ευθεία d_2 τότε $A_1B_2 =$ A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13



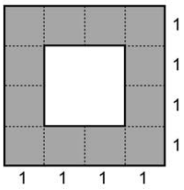
Κατασκευάζω το ορθογώνιο CA_1B_2 του σχήματος. Έχω $CA_1 = 5$, $CB_2 = A_1A + BB_2 = 2KA + 2BL = 2d(d_1, d_2) = 12$. Από Π.Θ στο CA_1B_2 έχω $A_1B_2 = \sqrt{CA_1{}^2 + CB_2{}^2} = 13$ Άρα E



19. Ο όγκος του τριγωνικού ορθού πρίσματος μ' όλες τις ακμές ίσου μήκους είναι 18 κυβικές μονάδες. Ποιο είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του; A) 24 B) 27 C) 36 D) 45 E) 54

$\boldsymbol{V = εμβαδόν_{βάσης} * ύψος = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}x \Rightarrow 18 = \frac{\sqrt{3}x^3}{4} \Rightarrow x^3 = \frac{72}{\sqrt{3}} = 8 \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} = 8 \cdot 3\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^3 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}}$. Άρα το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς είναι $\boldsymbol{E = περίμετρος_{βάσης} * ύψος = 3x * x = 3x^2 = 3 \cdot 12 = 36}$. Άρα C

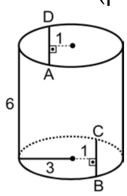
20. Ένα νέο τρισδιάστατο αντικείμενο σχηματίζεται με την κοπή και αφαίρεση τμημάτων ξύλινου κύβου με μήκος διαχωρισμού 4. Όταν κάθε έδρα εξετάζεται σε κάθετη κατεύθυνση προκύπτει η εικόνα του σχήματος με το κενό στο κέντρο. Ποιος ο μέγιστος όγκος του αντικειμένου; A) **24** B) **28**



C) **32** D) **36** E) **40**

Η πάνω και κάτω επιφάνεια έχουν από 12 κυβάκια. Οι δυο μεσαίες από $\boldsymbol{2 * 4 = 8}$ κυβάκια. Στνολικά έχω $\boldsymbol{2 * 12 + 8 = 32}$ κυβάκια άρα C

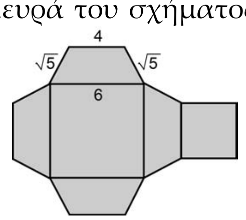
21. Ορθός κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης 3 και ύψος 6. Στις κυκλικές βάσεις του κυλίνδρου σχεδιάζονται παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα $\boldsymbol{AD}$ και $\boldsymbol{BC}$(χορδές) σε απόσταση 1 από το κέντρο των βάσεων έκαστο. (βλέπε σχήμα). Το εμβαδόν $(\boldsymbol{ABCD})$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{15\sqrt{2}}$ B) $\boldsymbol{18\sqrt{2}}$ C) $\boldsymbol{12\sqrt{3}}$ D)



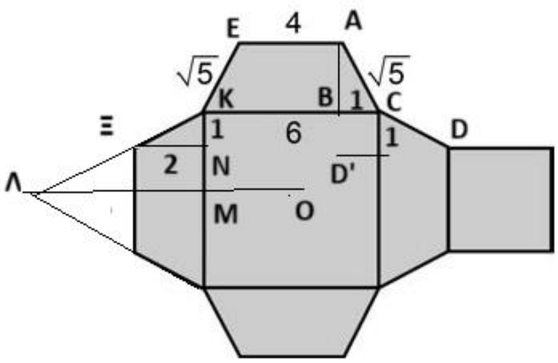
$\boldsymbol{16\sqrt{3}}$ E) $\boldsymbol{16\sqrt{5}}$

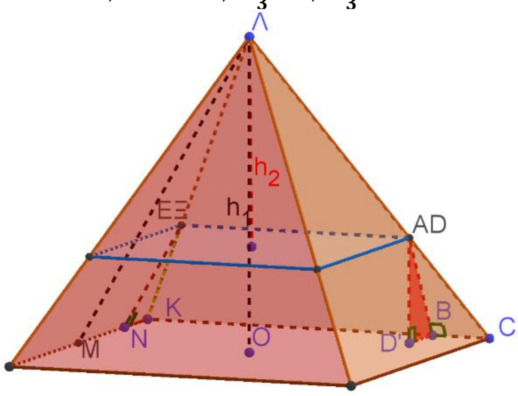
Αν $\boldsymbol{A'}$ η κάθετη προβολή του $\boldsymbol{A}$ στο επίπεδο της κάτω κυκλικής βάσης έχω $\boldsymbol{A'B = 1 + 1 = 2}$ και από Π.Θ. στο $\boldsymbol{AA'B}$ έχω $\boldsymbol{AB = \sqrt{A'A^2 + A'B^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}}$. Αν Κ το μέσο του DA και Ο το κέντρο της άνω βάσης έχω από Π.Θ. στο $\boldsymbol{OKA}$ ότι $\boldsymbol{KA = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}}$. Άρα $\boldsymbol{DA = 2KA = 2\sqrt{8}}$. Άρα $\boldsymbol{(ABCD) = AB \cdot DA = \sqrt{40}2\sqrt{8} = \sqrt{5}\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{8} = 16\sqrt{5}}$. Άρα E

22. Δίνεται η κολοβή πυραμίδα με τετραγωνική βάση και τραπεζοειδή πλευρά του σχήματος. Ο



όγκος της κολοβής πυραμίδας είναι A) $\boldsymbol{24\sqrt{3}}$ B) $\boldsymbol{26\sqrt{3}}$ C) $\boldsymbol{32\sqrt{3}}$ D) $\boldsymbol{\frac{76\sqrt{3}}{3}}$ E) $\boldsymbol{\frac{80\sqrt{3}}{3}}$





Έχω $\boldsymbol{V = V_1 - V_2 = \frac{E_{βάσης1}h_1 - E_{βάσης2}h_2}{3}}$

Στο ABC από Π.Θ. έχουμε $\boldsymbol{AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5 - 1} = 2}$ Από Θ.Θαλή έχω $\boldsymbol{\frac{KN}{KM} = \frac{ΞN}{ΛM} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{ΛM} \Rightarrow ΛM = 6}$. Στο ορθογώνιο ΛΜΟ από Π.Θ έχω $\boldsymbol{ΛO = \sqrt{ΛM^2 - OM^2} = \sqrt{36 - 3^2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow h_1 = 3\sqrt{3}}$

Στο ορθογώνιο ABD′ από Π.Θ έχω $\boldsymbol{AD' = \sqrt{AB^2 - D'B^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow h_2 = h_1 - AD' = 2\sqrt{3}}$

Άρα $\boldsymbol{V = V_1 - V_2 = \frac{E_{βάσης1}h_1 - E_{βάσης2}h_2}{3} = \frac{KC^2h_1 - EC^2h_2}{3} = \frac{6^2 3\sqrt{3} - 4^2 2\sqrt{3}}{3} = \frac{76\sqrt{3}}{3}}$ Άρα D

23. Έστω $\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{0}), \vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{1}, \sqrt{\mathbf{3}})$. Το $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}}$ είναι η κάθετη προβολή του $\vec{\mathbf{u}}$ στο $\vec{\mathbf{v}}$ και το $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}}$ είναι η κάθετη προβολή του $\vec{\boldsymbol{v}}$ στο $\vec{\boldsymbol{u}}$. Αν $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \boldsymbol{k}(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}})$ τότε $\boldsymbol{k} =$ A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Έχω $|\vec{\mathbf{u}}| = |\vec{\mathbf{v}}| = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{0}{2} = \mathbf{0} = \tan \mathbf{0}°$, $\boldsymbol{\lambda}_{\vec{\mathbf{v}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \tan \mathbf{60}°$, άρα $\widehat{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}} = \mathbf{60}°$. Ισχύει ότι $\boxed{\boldsymbol{\pi\rho\beta}_{\vec{\boldsymbol{v}}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{|\mathbf{v}|^2}\vec{\boldsymbol{v}}}$

Οπότε $\overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}}{|\vec{\mathbf{u}}|^2}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{|\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{u}}| \cos 60°}{|\vec{\mathbf{u}}|^2}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{u}}$. Όμοια $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}}{|\mathbf{v}|^2}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{|\vec{\mathbf{v}}||\vec{\mathbf{u}}| \cos 60°}{|\vec{\mathbf{v}}|^2}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{v}}$. Άρα $\overrightarrow{\boldsymbol{w_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w_2}} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}})$ Άρα A.

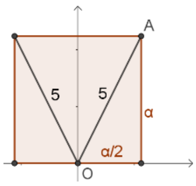
24. Έστω τρία μοναδιαία διανύσματα $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ μη συγγραμμικά. Το $\vec{\mathbf{w}}$ σχηματίζει γωνία $\mathbf{45}°$ με τα $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$. Τότε το $< \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{v}} >$ είναι ίσο με A) $\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\sqrt{\mathbf{2}}$ D) $\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}$ E) $\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{2}}$

Έχω $< \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{v}} > = (\vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{u}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{v}}) = |\mathbf{w}|^2 - \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{1} - \cos \mathbf{45}° - \cos \mathbf{45}° - \cos \mathbf{90}° = \mathbf{1} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{0} = \mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}$ Άρα D

25. Η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ και $(-\mathbf{1}, \mathbf{0})$ είναι 4 μονάδες, είναι A) $\boldsymbol{x^2 + 4y^2 = 4}$ B) $\mathbf{2x^2 + y^2 = 8}$ C) $\mathbf{2x^2 + 3y^2 = 9}$ D) $\boldsymbol{3x^2 + 2y^2 = 6}$ E) $\boldsymbol{3x^2 + 4y^2 = 12}$

Ο γ.τ είναι έλλειψη με εστίες στον άξονα των x τα σημεία $\boldsymbol{E}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ και $\boldsymbol{E'}(-\mathbf{1}, \mathbf{0})$ Άρα $\boldsymbol{\gamma = 1, 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2, \alpha^2 = 4}$. Άρα $\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = 3}$. Άρα η εξίσωση του γ.τ. είναι : $\frac{\mathbf{x^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\boldsymbol{\beta^2}} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{3x^2 + 4y^2 = 12}$ Άρα E

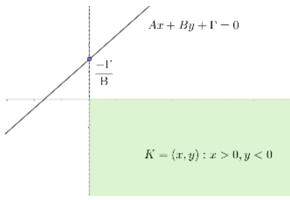
26. Η βάση ενός τετραγώνου βρίσκεται στον άξονα x'x. Αν οι αποστάσεις των δύο άλλων κορυφών από την αρχή των αξόνων είναι έκαστη ίση με 5 cm πόσο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου; A) $\mathbf{16}$ B) $\mathbf{20}$ C) $\mathbf{25}$ D) $\mathbf{30}$ E) $\mathbf{36}$



Έχω $\mathbf{5^2} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)^2 + \boldsymbol{\alpha^2} = \frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha^2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha^2} = \mathbf{20}$ Άρα B

27. Αν $\mathbf{K} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{y} < \mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ποιο από τα παρακάτω σύνολα αποτελεί υποσύνολο του $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \backslash \mathbf{K}$; A) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x - 2y - 1 = 0}\}$ B) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{2x + y + 3 = 0}\}$ C) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{3x + y - 2 = 0}\}$ D) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{2x - 3y + 1 = 0}\}$ E) $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{-x + y + 2 = 0}\}$

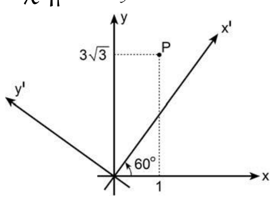
Έστω μια ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0}$ αυτή τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $\left(\mathbf{0}, -\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{\Gamma}}\right)$. Το σύνολο K είναι το 4ο τεταρτημόριο. Άρα ψάχνουμε ποια από τις 5 δοσμένες ευθείες δεν περνά από το 4ο τεταρτημόριο. Αρκεί λοιπόν $\boldsymbol{\lambda > 0}$ και $-\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}} > \mathbf{0}$. Άρα αρκεί $-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} > \mathbf{0}, -\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{B}} > \mathbf{0}$ ή A,B ετερόσημα και B,Γ ετερόσημα. Αυτά ισχύουν για την περίπτωση $\boldsymbol{2x - 3y + 1 = 0}$ Άρα D



28. Αν $\mathbf{d_1} : \boldsymbol{y = x}, \mathbf{d_2} : \mathbf{y} = \boldsymbol{-2x + 6}$, $\boldsymbol{K}$ το σημείο τομής τους, δημιουργώ τετράγωνο με διαγώνιο $\boldsymbol{OK}$ και τρίγωνο $\boldsymbol{OAB}$ με τα σημεία $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ στην ευθεία $\mathbf{d_2}$. Αν $(\boldsymbol{OAB}) = \boldsymbol{E_{τετραγώνου}}$ τότε $\boldsymbol{AB} =$ A) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ E) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

Από τη λύση του συστήματος $\boldsymbol{y = x}$, $\mathbf{y} = \boldsymbol{-2x + 6}$ προκύπτει το σημείο τομής $\boldsymbol{K}(\mathbf{2}, \mathbf{2})$. Άρα η διαγώνιος του τετραγώνου $\boldsymbol{OK^2} = \mathbf{2^2 + 2^2}$, το τετράγωνο έχει πλευρά 2 και εμβαδόν $\mathbf{2^2 = 4}$. Έχω $(\boldsymbol{OAB}) = \frac{\boldsymbol{AB * d(O, \mathbf{d_2})}}{2} \Rightarrow \mathbf{4} = \frac{\boldsymbol{AB} * \frac{|0 + 2*0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}}{2} = \frac{\boldsymbol{AB} * 6}{2\sqrt{5}} = \frac{3\boldsymbol{AB}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ Άρα B

29. Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\boldsymbol{xOy}$ περιστρέφεται ως προς το σημείο $\boldsymbol{O}$ κατά $\mathbf{60}°$ και σχηματίζεται ένα νέο σ.σ. $\boldsymbol{x'Oy'}$. Ποιες θα είναι οι νέες συντεταγμένες του σημείου $\boldsymbol{P}(\mathbf{1}, \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})$



A) $(\mathbf{5}, \sqrt{\mathbf{3}})$ B) $(\mathbf{6}, \sqrt{\mathbf{3}})$C) $(\mathbf{7}, \sqrt{\mathbf{3}})$ D) $(\mathbf{4}, \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$ E) $(\mathbf{7}, \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$

Έχω από τους τύπος περιστροφής $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3\sqrt{3}} \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{3\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{2}\mathbf{3\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \sqrt{\mathbf{3}} \end{bmatrix}$ Άρα A

30.Αν η ευθεία $(\boldsymbol{\varepsilon})$: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z-3}{b}$ είναι κάθετη στο επίπεδο $(\boldsymbol{\Pi})$: $\mathbf{3x + 9y - 6z + 5 = 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{b} =$ A) $\mathbf{0}$ B) $\mathbf{1}$ C) $\mathbf{2}$ D) $\mathbf{3}$ E) $\mathbf{4}$

Έστω $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z-3}{b} = \boldsymbol{t} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{t} - \mathbf{1}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{at}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{bt} + \mathbf{3} \Rightarrow (\boldsymbol{\varepsilon})$: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{3}) + \mathbf{t}(\mathbf{2}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

Θέλω $(\boldsymbol{\varepsilon}) \perp (\boldsymbol{\Pi}) \Rightarrow (\mathbf{2}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}) \perp (\boldsymbol{\Pi}) \Rightarrow (\mathbf{2}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}) || (\mathbf{3}, \mathbf{9}, \mathbf{-6}) \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{\alpha} = \frac{-6}{b} = \frac{3}{\alpha+b} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{b} = \mathbf{2}$ Άρα C

[Κατατακτήριες εξετάσεις-1 τεστ μαθηματικών Κυριακή, Ιούνιος 11, 2017]

1. $\frac{5-\frac{25}{9}}{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}$ είναι ίσο με A)$\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\mathbf{3}$ D) $\mathbf{4}$ E) $\mathbf{5}$

Έχω $\frac{5-\frac{25}{9}}{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}=\frac{\frac{45}{9}-\frac{25}{9}}{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}=\frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}=\frac{60}{18}-\frac{6}{18}=\frac{54}{18}=\mathbf{3}$ Άρα D)

2. $\frac{60^2\cdot 3}{15^3}$ είναι ίσο με A)$\mathbf{2,4}$ B) $\mathbf{2,6}$ C) $\mathbf{2,8}$ D) $\mathbf{3}$ E) $\mathbf{3,2}$

Έχω $\frac{60^2\cdot 3}{15^3}=\frac{60^2\cdot 3}{15^2 15}=\frac{4^2}{5}=\frac{16}{5}=\mathbf{3,2}$ E

3. $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{75}}{\sqrt{108}-\sqrt{27}}$ είναι ίσο με A)$\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\mathbf{3}$ D) $\mathbf{4}$ E) $\mathbf{5}$

Έχω $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{75}}{\sqrt{108}-\sqrt{27}}=\frac{4\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-3\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\mathbf{3}$ *άρα* C

4. $\frac{6!+7!}{(4!)^2}$ είναι ίσο με A)$\mathbf{10}$ B) 12 C) $\mathbf{15}$ D) $\mathbf{18}$ E) $\mathbf{20}$

Έχω $\frac{6!+7!}{(4!)^2}=\frac{6!(1+7)}{(4!)(4!)}=\frac{5\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\mathbf{10}$ *άρα* A

5. Αν οι αριθμοί $\frac{x}{y}, x-y$ και x είναι τρεις συνεχόμενοι διατεταγμένοι κατ' αύξουσα σειρά άρτιοι ακέραιοι, βρείτε το άθροισμα $x+y$

A) $\mathbf{8}$ B) $\mathbf{10}$ C) $\mathbf{12}$ D) $\mathbf{14}$ E) $\mathbf{16}$

Έχω $x-(x-y)=2,\ x-\frac{x}{y}=4$ *άρα* $y=2,\ x-\frac{x}{2}=4$ *άρα* $\frac{x}{2}=4, x=8$. Συνεπώς $x+y=10$ Άρα B

6. Σύμφωνα με τις εξής πράξεις διαίρεσης όπου m θετικός ακέραιος, ποιο είναι το άθροισμα των ψηφίων του m; $\begin{array}{r|l} m & 3 \\ \hline -2 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 45 & m \\ \hline -3 & \end{array}$

A) $\mathbf{3}$ B) $\mathbf{4}$ C) $\mathbf{5}$ D) $\mathbf{6}$ E) $\mathbf{7}$

Έχω $m=3k+2$ και $45=ml+3\Rightarrow 45=l(3k+2)+3\Rightarrow 42=l(3k+2)$ Αν $l=1$, τότε $3k+2=42\Rightarrow$

$3k=40$, άτοπο. Άρα $l=3l'\Rightarrow 14=l'(3k+2)=\begin{cases} 1*14\Rightarrow k=4\Rightarrow m=14 \\ 2*7\Rightarrow 3k+2=7, \text{άτοπο} \\ 7*2\Rightarrow k=0, m=2, \text{άτοπο} \\ 14*1\Rightarrow 3k+2=1, \text{άτοπο}\end{cases}$. Άρα $1+4=5$ σωστή η C

7. Αν α και b διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι και $ΕΚΠ(a,b)$ είναι πρώτος αριθμός τότε

I. τα α και b είναι πρώτοι αριθμοί μεταξύ τους.

II. Ο $a+b$ είναι περιττός

III. Το γινόμενο ab είναι περιττός.

Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς

A) Μόνο η I B) Μόνο η II C) Μόνο η III D) οι I και II E) οι II και III

Αφού $ΕΚΠ(a,b)=p\Rightarrow a=1, b=p$ ή $a=p, b=1$ γιατί αν κάποιος από a ή b είναι διάφορος το 1 τότε ο p θα είναι σύνθετος, άτοπο. Άρα $ΜΚΔ(a,b)=ΜΚΔ(1,p)=1$ άρα η I είναι αληθής.

Αν p περιττός τότε $p+1$ άρτιος και η πρόταση II δεν αληθεύει.

Αν $p=2$, τότε $ab=2$ άρτιος και η πρόταση III δεν αληθεύει. Άρα A

8. να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{xz-yz+xy-y^2}{x^2-xy+xz-yz}$

A) $\frac{z-y}{x-z}$ B) $\frac{z+y}{x+z}$C) $\frac{x+z}{y+z}$ D) $\frac{x}{x+y}$ E) $\frac{y-z}{x+y}$

Έχω $\frac{xz-yz+xy-y^2}{x^2-xy+xz-yz}=\frac{(x-y)z+(x-y)y}{x(x-y)+z(x-y)}=\frac{(x-y)(z+y)}{(x-y)(x++z)}=\frac{z+y}{x+z}$ Άρα B

9. Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $\frac{a+c}{b+2}=\frac{c}{b}, \frac{a}{b}=c$ βρείτε τον b

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\mathbf{2}$ E) $\mathbf{3}$

Έχω $\frac{a+c}{b+2}=\frac{c}{b}=\frac{a+c-c}{b+2-b}=\frac{a}{2}=\frac{bc}{2}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{bc}{2}\Rightarrow b^2=2\Rightarrow b=\sqrt{2}$ Άρα A

10. Αν $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2}{\sqrt{9a}}=1$ τότε ο $\mathbf{a}$ είναι A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

Έχω $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2}{\sqrt{9a}}=1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2}{3\sqrt{a}}=1\Rightarrow\frac{1}{3\sqrt{a}}=1\Rightarrow\frac{1}{3}=\sqrt{a}\Rightarrow\frac{1}{9}=\mathbf{a}$ Άρα D

11. Έστω $\boldsymbol{x,y,z}$ μη μηδενικοί αριθμοί και $|\boldsymbol{x+y}|=|\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|$, $|\boldsymbol{y+z}|=|\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{z}|$ και $\boldsymbol{x>0}$ τότε Ι. $\frac{x}{x+y}<\mathbf{1}$ ΙΙ. $\frac{y}{y+z}<\mathbf{1}$ ΙΙΙ. $\frac{z}{x+z}<\mathbf{1}$ Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς

A) Μόνο η Ι B) Μόνο η ΙΙ C) Μόνο η ΙΙΙ D) οι Ι και ΙΙ E) οι ΙΙ και ΙΙΙ

Αφού $|\boldsymbol{x+y}|=|\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{y}|$ οι $\boldsymbol{x,y}$ είναι ετερόσημοι. Αν $\boldsymbol{x>0>y}$ και $|\boldsymbol{x}|>|\boldsymbol{y}|$ τότε $\boldsymbol{x>-y\Leftrightarrow x+y>0}$ άρα Ι. $\frac{x}{x+y}<\mathbf{1}\Leftrightarrow \boldsymbol{x<x+y\Leftrightarrow 0<y}$ ψευδές.

Αφού $|\boldsymbol{y+z}|=|\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{z}|$ οι $\boldsymbol{y,z}$ είναι ομόσημοι. Αν $\boldsymbol{y,z}$ είναι θετικοί τότε ΙΙ. $\frac{y}{y+z}<\mathbf{1}\Leftrightarrow \boldsymbol{y<y+z\Leftrightarrow 0<z}$ που ισχύει. Αν $\boldsymbol{y,z}$ είναι αρνητικοί τότε ΙΙ. $\frac{y}{y+z}<\mathbf{1}\Leftrightarrow \boldsymbol{y>y+z\Leftrightarrow 0>z}$ που ισχύει.

Αν $\boldsymbol{z<0}$ και $\boldsymbol{x+z<0}$ τότε ΙΙΙ. $\frac{z}{x+z}<\mathbf{1}\Leftrightarrow \boldsymbol{z>x+z\Leftrightarrow 0>x}$ ψευδές αφού $\boldsymbol{x>0}$. Άρα B

12. Έστω οι τριψήφιοι αριθμοί $\boldsymbol{ADB, ADC, DAA, DAD}$ με $\boldsymbol{ADB<DAA, DAD<ADC}$. Ποια είναι αληθής;

a) $\mathbf{A=D<B<C}$ b) $\mathbf{C<A=B<D}$ c) $\mathbf{D<A=B<C}$ d)$\mathbf{B<A=D<C}$ e) $\mathbf{A=D<B}$

Έχω $\boldsymbol{ADB<DAA\Rightarrow A\le D}$, $\boldsymbol{DAD<ADC\Rightarrow D\le A}$ Άρα $\mathbf{A=D}$. Άρα $\boldsymbol{ADB<DAA\Rightarrow DB<AA\Rightarrow B<A}$

Έχω $\boldsymbol{DAD<ADC\Rightarrow AD<DC\Rightarrow D<C}$

Άρα $\mathbf{B<A=D<C}$ σωστή η d

13. Αν για τους μη μηδενικούς $\boldsymbol{x,z}$ ισχύουν ότι $\mathbf{y<x}$ και $\mathbf{x^2<y^2}$ τότε Ι. $\boldsymbol{xy>0}$ ΙΙ. $\boldsymbol{x+y<0}$ ΙΙΙ. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>\mathbf{0}$ Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς

A) Μόνο η Ι B) Μόνο η ΙΙ C) Μόνο η ΙΙΙ D) οι Ι και ΙΙΙ E) οι ΙΙ και ΙΙΙ

Έχω $\mathbf{y<x}\Leftrightarrow \boldsymbol{x-y>0}$ και $\mathbf{x^2<y^2}\Leftrightarrow \boldsymbol{(x-y)(x+y)<0}$ άρα $\boldsymbol{x+y<0}$ άρα ΙΙ. αληθής

Αν $\boldsymbol{x=1, y=-2}$ τότε $\mathbf{y<x}$ και $\mathbf{x^2<y^2}$ και $\boldsymbol{xy<0}$ άρα Ι. $\boldsymbol{xy>0}$ ψευδής

Έχω ΙΙΙ. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>\mathbf{0}\Leftrightarrow \frac{y-x}{xy}>\mathbf{0}\overset{x-y>0}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{xy}<\mathbf{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{xy<0}$ που δεν ισχύει πάντα, άρα ψευδής Άρα B

14. Το σύνολο $\boldsymbol{A}$ είναι υποσύνολο του $\{\mathbf{1,2,3,4,5,6,7}\}$. Τα στοιχεία του $\boldsymbol{A}\cap\{\mathbf{5,6,7}\}$ είναι περιττοί αριθμοί. Πόσα τριμελή σύνολα $\boldsymbol{A}$ υπάρχουν; A) $\mathbf{12}$ B) $\mathbf{14}$ C) $\mathbf{16}$ D) $\mathbf{18}$ E) $\mathbf{20}$

Έστω $\boldsymbol{x\in A}\cap\{\mathbf{5,6,7}\}\Rightarrow \boldsymbol{x}$ περιττός. Για να είναι το $\boldsymbol{A}\cap\{\mathbf{5,6,7}\}\neq\emptyset$ πρέπει κάποιο(α) από τα στοιχεία του $\boldsymbol{A}$ να είναι το $\mathbf{5}$ ή το $\mathbf{7}$. Έστω $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x,y,z}\}$. Αν $\boldsymbol{x=5, y=7}$, τότε $\boldsymbol{z}\in\{\mathbf{1,2,3,4}\}$ Άρα $\mathbf{4}$ τριμελή σύνολα. Αν $\boldsymbol{x=5, y,z\neq 7}$ τότε $\boldsymbol{y,z}\in\{\mathbf{1,2,3,4}\}$ Άρα $\binom{4}{2}=\mathbf{6}$ τριμελή σύνολα της μορφής $\{\mathbf{5},\boldsymbol{y,z}\}$. Και άλλα $\mathbf{6}$ τριμελή σύνολα της μορφής $\{\mathbf{7},\boldsymbol{y,z}\}$ Σύνολο $\mathbf{16}$ τριμελή σύνολα της μορφής. Άρα C

15. Έστω $\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\{(\mathbf{x,x}):\mathbf{x}\in\mathbb{R}\}\\ \boldsymbol{B}&=\{(\mathbf{x,3-x}):\mathbf{x}\in\mathbb{R}\}\\ \boldsymbol{C}&=\{(\mathbf{x,x+4}):\mathbf{x}\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$ αν $(\mathbf{p,q})\in\mathbf{A\cap B}$ και $(\mathbf{r,s})\in\mathbf{B\cap C}$ τότε $\frac{p-r}{q+s}$ είναι ίσο με A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

Έχω $(\mathbf{p,q})\in\mathbf{A\cap B}\Rightarrow \boldsymbol{p=q, q=3-p\Rightarrow p=q=\frac{3}{2}}$ ακόμα $(\mathbf{r,s})\in\mathbf{B\cap C}\Rightarrow \boldsymbol{s=3-r, s=r+4\Rightarrow s=\frac{7}{2}, r=-\frac{1}{2}}$. Άρα $\frac{p-r}{q+s}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}=\frac{3+1}{3+7}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ άρα E

16. Έστω $\mathbf{f(x)}=\frac{\mathbf{x\cdot(x-2)}}{\mathbf{2}}$ και $\boldsymbol{g}\mathbf{(x)}=\frac{\mathbf{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}}{\mathbf{3}}$. Ποιο είναι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $\mathbf{f(2x)=g(x+1)}$. A) $\mathbf{1}$ B) $\mathbf{3}$ C) $\mathbf{4}$ D) $\mathbf{6}$ E) $\mathbf{8}$

Έχω $\boldsymbol{f}\mathbf{(2x)=g(x+1)}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{2x\cdot(2x-2)}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{(x+1)\cdot(x+1-1)\cdot(x+1-2)}}{\mathbf{3}}\Leftrightarrow\mathbf{2x(x-1)}=\frac{\mathbf{(x+1)}\cdot x\cdot\mathbf{(x-1)}}{\mathbf{3}}$ Άρα $\boldsymbol{x=0}$ ή $\boldsymbol{x=1}$ ή $\mathbf{2}=\frac{\mathbf{(x+1)}}{\mathbf{3}}\Leftrightarrow\boldsymbol{x+1=6\Leftrightarrow x=5}$ άρα το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι $\mathbf{0+1+5=6}$. Άρα D

17. Αν $\mathbf{f(x)=x-n},\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{n,n+1})$ με $\mathbf{x}\in\mathbb{R},\mathbf{n}\in\mathbb{N}$. Βρείτε το $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})+\boldsymbol{f}\left(\frac{7}{3}\right)+\boldsymbol{f}\left(\frac{13}{6}\right)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\mathbf{1}$ E) $\mathbf{2}$

Έχω $\mathbf{1}\in[\mathbf{1,2})$ άρα $\mathbf{f(x)=x-1},\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{1,2})$ Άρα $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})=\mathbf{1-1=0}$

Έχω $\frac{7}{3}\in[\mathbf{2,3})$ άρα $\mathbf{f(x)=x-2},\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{2,3})$ Άρα $\boldsymbol{f}\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{3}-\mathbf{2}=\frac{1}{3}$

Έχω $\frac{13}{6}\in[\mathbf{2,3})$ άρα $\mathbf{f(x)=x-2},\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{2,3})$ Άρα $\boldsymbol{f}\left(\frac{13}{6}\right)=\frac{13}{6}-\mathbf{2}=\frac{1}{6}$

Άρα $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})+\boldsymbol{f}\left(\frac{7}{3}\right)+\boldsymbol{f}\left(\frac{13}{6}\right)=\mathbf{0}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ άρα A

18. Αν $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ και $x \in [-2,1)$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι : A) $[0,1]$ B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ C) $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ D) $[0,\frac{1}{3}]$ E) $[0,\frac{2}{3}]$

Αν $\alpha,\beta > 0$ τότε για $f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} > \frac{|\beta|}{1+|\beta|} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} > \frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \alpha(1+\beta) > \beta(1+\alpha) \Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta > \beta + \beta\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha > \beta$ άρα $f \uparrow (0,+\infty) \Rightarrow f(0) < f(x) < f(1), \forall x \in [0,1) \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{2}, \forall\, x \in [0,1)$

Για $x \in [-2,0) \Rightarrow |x| \in (0,2] \xRightarrow{f\uparrow(0,+\infty)} f(0) < f(|x|) \leq f(2) \Rightarrow 0 < f(|x|) \leq \frac{2}{3} \xRightarrow{f(|x|)=f(x)} 0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$

Άρα $0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$ και $0 < f(x) < \frac{1}{2}$ που συναληθεύουν όταν $0 < f(x) \leq \frac{2}{3}$ Άρα E

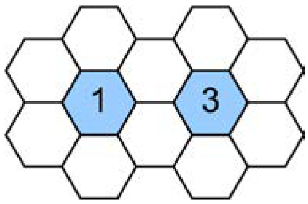
19. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ και $4 \cdot a \equiv 2(\mathrm{mod}11)$, $4 \cdot b \equiv 5(mod7)$ τότε το ελάχιστο του $\alpha + \beta$ είναι

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

Έχω $4 \cdot 3 \equiv 12(\mathrm{mod}11) \equiv 1(\mathrm{mod}11)$. Άρα $4 \cdot a \equiv 2(\mathrm{mod}11) \Leftrightarrow 3 \cdot 4 \cdot a \equiv 3 \cdot 2(\mathrm{mod}11) \Leftrightarrow a \equiv 6(\mathrm{mod}11)$

Ακόμα έχω $4 \cdot b \equiv 5(mod7) \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \cdot \beta \equiv 2 \cdot 5(\mathrm{mod}7) \Leftrightarrow \beta \equiv 3(\mathrm{mod}7)$ άρα ο ελάχιστος του $\alpha + \beta = 6 + 3 = 9$ Άρα B

20. Έστω τα εξαγωνικά κελιά του σχήματος. Οι αριθμοί στα κεντρικά κελιά δείχνουν πόσα όμορα κελιά θα χρωματιστούν πορτοκαλί. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χρωματιστούν τα κελιά; A) **24** B) **28** C) **30** D) **32** E) **36**



Τα δυο ενδιάμεσα κελιά δεν μπορούν προφανώς να χρωματιστούν ταυτόχρονα.

Έστω ότι δεν τα βάφουμε αυτά τα δύο. Τότε τα υπόλοιπα όμορα του κελιού με τον αριθμό 1 μπορούν να βαφτούν κατά $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους, ενώ τα υπόλοιπα όμορα του κελιού με τον αριθμό 3 μπορούν να βαφτούν κατά $\binom{4}{3} = 4$ τρόπους. Άρα έχουμε $4 \cdot 4 = 16$ τρόπους.

Αν βαφεί το ένα από τα δυο κεντρικά κελιά(πχ το πάνω) τα άλλα όμορα του κελιού με το 1 δεν βάφονται ενώ τα υπόλοιπα όμορα του κελιού με το 3 βάφονται κατά $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους.

Άρα συνολικά έχουμε $16 + 6 + 6 = 28$ τρόπους άρα B

21. Η αριθμομηχανή του Pelin κάθε φορά που πατά το «3» αντιλαμβάνεται με πιθανότητα A) $\frac{1}{6}$ το πλήκτρο «3» B) $\frac{1}{3}$ το πλήκτρο «4» B) $\frac{1}{2}$ το πλήκτρο «6». Αν προσπαθήσει να υπολογίσει το $23 - \frac{12}{3}$ ποια η πιθανότητα να βρει με την αριθμομηχανή αυτή ως αποτέλεσμα την τιμή 22

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{24}$

Αν το πρώτο «3» το πάρει ως 3 τότε έχω $2"3" - \frac{12}{"3"} = 23 - \frac{12}{"3"} = 22 \Leftrightarrow \frac{12}{"3"} = 1 \Leftrightarrow "3" = 12$ άτοπο αφού το $3 \in \{3,4,6\}$.

Αν το πρώτο «3» το πάρει ως 4 τότε έχω $2"3" - \frac{12}{"3"} = 24 - \frac{12}{"3"} = 22 \Leftrightarrow \frac{12}{"3"} = 2 \Leftrightarrow "3" = 6$. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Αν το πρώτο «3» το πάρει ως 6 τότε έχω $2"3" - \frac{12}{"3"} = 26 - \frac{12}{"3"} = 22 \Leftrightarrow \frac{12}{"3"} = 4 \Leftrightarrow "3" = 3$. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ Άρα η συνολική πιθανότητα είναι $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ άρα B

22. Το άθροισμα των 2 πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^2 - ax + 1 = 0$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 6x + a = 0$. Άρα το a είναι ίσο με A) -3 B) -4 C) -5 D) -6 E) -7

Έχω $S = \rho_1 + \rho_2 = -\frac{-a}{1} = a$ με $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 > 0$. Αφού S ρίζα της $x^2 + 6x + a = 0$, έχουμε $S^2 + 6S + a = 0 \Leftrightarrow a^2 + 6a + a = 0 \Leftrightarrow a^2 + 7a = 0 \Leftrightarrow a(a+7) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $a = -7$ Η περίπτωση $a = 0$ απορρίπτεται αφού τότε $\Delta = \alpha^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4 < 0$ άτοπο. Άρα $a = -7$ άρα E

23. Η τιμή της παράστασης $\frac{(1-i^2)\cdot(1-i^6)\cdot(1-i^{10})}{(1-i)\cdot(1-i^3)\cdot(1-i^5)}$ είναι A) 1 B) 2 C) $2 + i$ D) $2 + 2i$ E) $1 + 2i$

Έχουμε $\frac{(1-i^2)\cdot(1-i^6)\cdot(1-i^{10})}{(1-i)\cdot(1-i^3)\cdot(1-i^5)} = (1+i)\cdot(1+i^3)\cdot\left(1+i^5\right) = (1+i)\cdot(1-i)\cdot(1+i) = 2\cdot(1+i) = 2 + 2i$ άρα D

24. Αν $4z-3\bar{z}=\frac{1-18i}{2-i}$ τότε z είναι A) $-2+i$ B) $-3+\iota$ C) $4+2i$ D) $3-2\mathbf{i}$ E) $4-i$
Έστω $z=\alpha+\beta i$ τότε $4(\alpha+\beta i)-3(\alpha-\beta i)=\frac{1-18i}{2-i}=\frac{1-18i}{5}(2+i)\Rightarrow(a+7bi)5=(1-18i)(2+i)$
$\Rightarrow 5a+35bi=20-35i\Rightarrow a=4, b=-1\Rightarrow z=4-i$ άρα E
25. Το άθροισμα των ακεραίων που ικανοποιούν την ανισότητα $(x-1)^2<|x-1|+6$ είναι ίσο με A) **2** B) **3** C) **4** D) **5** E) **6**
Έστω $y=|x-1|\geq 0$ τότε έχουμε $y^2<y+6\Leftrightarrow y^2-y-6<0\Leftrightarrow(y-3)(y+2)<0\xRightarrow{y+2>0}y-3<0\Rightarrow|x-1|<3\Rightarrow-3<x-1<3\Rightarrow-2<x<4\Rightarrow x\in\{-1,0,1,2,3\}$ με άθροισμα $-1+0+1+2+3=5$. Άρα D
26. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την $\frac{6x+1}{(x+1)^2}>1$ είναι A) $(-1,4)$ B) $(-1,6)$ C) $(0,4)$ D) $(0,\infty)$ E) $(2,\infty)$
Έχουμε $\frac{6x+1}{(x+1)^2}>1\Leftrightarrow 6x+1>(x+1)^2\Leftrightarrow 6x+1>x^2+2x+1\Leftrightarrow 0>x^2-4x\Leftrightarrow 0>\mathrm{x}(\mathrm{x}-4)\Leftrightarrow x\in(0,4)$. Άρα C
27. Ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού έχει ρίζες το $-3,-1$ και 2. Αν ισχύει ακόμα ότι $P(0)=12$, τότε ο συντελεστής του x^2 είναι A) -4 B) -3 C) -2 D) 1 E) 2
Έχω $P(x)=a(\mathrm{x}+3)(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)\xRightarrow{P(0)=12}12=a(-6)\Rightarrow a=-2$. Άρα $P(x)=-2(\mathrm{x}+3)(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)$
$=(-2\mathrm{x}-6)(x^2-\mathrm{x}-2)=-2x^3+2x^2+4x-6x^2+6\mathrm{x}+12=-2x^3-4x^2+10x+12$ άρα A
28. Αν α και $\mathbf{b}$ ακέραιοι και $\mathrm{P(x)=x^3-ax^2-(b+2)x+4b}$, $\mathrm{Q(x)=x^2-2ax+b}$ με $\mathrm{P}(-4)=0$, $\mathrm{Q}(-4)\neq 0$. Αν οι ρίζες του $\mathrm{Q(x)}$ είναι και ρίζες του $\mathrm{P(x)}$, τότε το $b-\alpha$ είναι ίσο με A) **8** B) **9** C) **11** D) **13** E) **14**
Έχω $\mathrm{P}(-4)=0\Rightarrow-64-16\alpha+4(\mathrm{b}+2)+4\mathrm{b}=0\Rightarrow-16-4\alpha+\mathrm{b}+2+\mathrm{b}=0\Rightarrow-14-4\alpha+2b=0\Rightarrow b=7+2\alpha$. Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες του $\mathrm{Q(x)}$ τότε έχουμε $\rho_1+\rho_2=-\frac{-2\alpha}{1}=2\alpha$. Έχω $\rho_1,\rho_2,-4$ ρίζες του $\mathrm{P(x)}$ άρα $\rho_1+\rho_2+(-4)=\alpha\Rightarrow 2\alpha-4=\alpha\Rightarrow\alpha=4\Rightarrow\beta=15,\beta-\alpha=15-4=11$ άρα C
29. Ποιος είναι ο αριθμός των πολυωνύμων δευτέρου βαθμού με ρίζα το $-\frac{2}{3}$ και συντελεστές από το σύνολο $\{0,1,2,3\ldots 9\}$; A) **5** B) **7** C) **8** D) **10** E) **11**
Έχω $P(x)=(3\mathrm{x}+2)(\alpha\mathrm{x}+\beta)$ ώστε $P\left(-\frac{2}{3}\right)=0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. Άρα $P(x)=3\alpha\mathrm{x}^2+(3\beta+2a)x+2\beta$. Άρα για να είναι β′ βαθμού πρέπει $\alpha\neq 0$. Θέλω ακόμα $3\alpha, 3\beta+2a, 2\beta\in\{0,1,2,3\ldots 9\}=A$. Άρα $\alpha\in\{1,2,3\}$.
Αν $\alpha=1$ τότε $3\beta+2a\in A\Leftrightarrow 3\beta+2\in A\Leftrightarrow\beta\in\{0,1,2\}$
Αν $\alpha=2$ τότε $3\beta+4\in A\Leftrightarrow\beta\in\{0,1\}$
Αν $\alpha=3$ τότε $3\beta+6\in A\Leftrightarrow\beta\in\{0,1\}$
Άρα έχω $3+2+2=7$ τρόπους άρα B
30. Αν για τις προτάσεις p,q και r η πρόταση $(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\Rightarrow\mathbf{r}$ είναι ψευδής τότε
I. $\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q}$
II. $\mathbf{q}\Rightarrow\mathbf{r}$
III. $\mathbf{r}\Rightarrow\mathbf{p}$
Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς
A) Μόνο η I B) Μόνο η II C) Μόνο η III D) οι I και III E) οι II και III
Αν η I. $\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q}$ είναι ψευδής τότε η $(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\Rightarrow\mathbf{r}$ γίνεται $(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\upsilon}\boldsymbol{\delta}\acute{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\varsigma})\Rightarrow\mathbf{r}$ που είναι αληθής, άτοπο.
Άρα η I. $\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q}$ είναι αληθής.
Αν η II. $\mathbf{q}\Rightarrow\mathbf{r}$ είναι αληθής τότε κα με βάση το I έχω ότι η $(\mathbf{p}\Rightarrow\mathbf{q})\Rightarrow\mathbf{r}$ είναι αληθής, άτοπο.
Άρα η II. $\mathbf{q}\Rightarrow\mathbf{r}$ είναι ψευδής.
Αν η III. $\mathbf{r}\Rightarrow\mathbf{p}$ είναι ψευδής τότε?????

Άρα αληθείς οι I και III άρα D
31. Ένας μαθητής κάνει τον ακόλουθο συλλογισμό: Έστω $x>0$, $\mathrm{f(x)}=\ln(\pi\mathrm{x})$ και $\mathrm{g(x)}=\ln(\mathrm{ex})$
I. Για κάθε $x>0$, οι παράγωγοι είναι ίσες.
II. Άρα για κάθε $x>0$, οι συναρτήσεις είναι ίσες.
III. Η lnx είναι 1-1 άρα $\pi\mathrm{x}=\mathrm{ex}$ για κάθε $x>0$
IV. Αφού ισχύει για κάθε $x>0$ ισχύει και για $x=1$
V. Για $x=1$ έχω $\pi=\mathrm{e}$

Σε ποιο βήμα έκανε λάθος; A) I B) II C) III D) IV E) V

Έκανε λάθος στο II αφού αν $\boldsymbol{f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c}$ με $\boldsymbol{c=f(1)-g(1)=\ln(\pi)-\ln(e)=\ln(\pi)-1\neq 0}$

32. Ποιο είναι το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\boldsymbol{x^{\ln 4}-6\cdot 2^{\ln x}+8=0}$ A) $\mathbf{e^6}$ B) $\mathbf{e^4}$ C) $\mathbf{e^3}$ D) $\frac{\mathbf{e^2}}{\mathbf{2}}$ E) $\frac{\mathbf{e^3}}{\mathbf{3}}$

Έχω $\boldsymbol{x^{\ln 4}=4^{\ln x}=(2^2)^{\ln x}=\left(2^{lnx}\right)^2}$ Θέτω $\boldsymbol{2^{lnx}=y}$ άρα $\boldsymbol{y^2-6y+8=0\Leftrightarrow(y-2)(y-4)=0\Leftrightarrow y=2}$ ή $\boldsymbol{y=4\Leftrightarrow 2^{lnx}=2}$ ή $\boldsymbol{2^{lnx}=4\Leftrightarrow lnx=1}$ ή $\boldsymbol{lnx=2\Leftrightarrow x=e}$ ή $\boldsymbol{x=e^2}$. Άρα το γινόμενο των ριζών είναι $\boldsymbol{e\,e^2=e^3}$ Άρα C

33. Το κλάσμα $\frac{\log_3\sqrt{27}+\log_{27}\sqrt{3}}{\log_3\sqrt{27}-\log_{27}\sqrt{3}}$ είναι ίσο με A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{7}{6}$

Έχω $\frac{\log_3\sqrt{27}+\log_{27}\sqrt{3}}{\log_3\sqrt{27}-\log_{27}\sqrt{3}}=\frac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\log_{27}3}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\log_{27}3}=\frac{\frac{3}{2}\log_3 3+\frac{1}{2}\log_{27}3}{\frac{3}{2}\log_3 3-\frac{1}{2}\log_{27}3}=\frac{3\log_3 3+\log_{27}27^{\frac{1}{3}}}{3\log_3 3-\log_{27}27^{\frac{1}{3}}}=\frac{3+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ Άρα C

34. αν $\mathbf{lnx+lny=9}$ και $\mathbf{Inx-Iny=3}$ τότε το $\boldsymbol{\log_y x}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{1}$ B) $\mathbf{2}$ C) $\mathbf{3}$ D) $\mathbf{4}$ E) $\mathbf{5}$

Έχω $\boldsymbol{2\mathrm{lnx}=12\Leftrightarrow lnx=6}$ και $\boldsymbol{2\mathrm{lny}=6\Leftrightarrow lny=3}$ Άρα $\boldsymbol{\log_y x=\frac{lnx}{lny}=\frac{6}{3}=2}$ Άρα B

35. Αν $\boldsymbol{(a_n)}$ αριθμητική πρόοδος με $\mathbf{a_{10}+a_7=6}$ και $\boldsymbol{a_9-a_6=1}$ τότε ο $\mathbf{a_1}$ είναι ίσος με
A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{2}$

Έχω $\boldsymbol{a_9-a_6=1}$ άρα $\boldsymbol{3\omega=1}$ άρα $\boldsymbol{\omega=\frac{1}{3}}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{a_{10}+a_7=6\Leftrightarrow a_1+9\omega+a_1+6\omega=6\Leftrightarrow 2a_1+15\omega=6\Leftrightarrow 2a_1+15\cdot\frac{1}{3}=6\Leftrightarrow 2a_1=1\Leftrightarrow a_1=\frac{1}{2}}$ Άρα E

36. Αν $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k=10}$ τότε $\boldsymbol{n}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{18}$ B) $\mathbf{19}$ C) $\mathbf{20}$ D) $\mathbf{21}$ E) $\mathbf{22}$

Έστω $\boldsymbol{\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k}$.

Έχω $\boldsymbol{\alpha_1=(-1)^2 1}$=1

Έχω ακόμα ότι $\boldsymbol{\alpha_{n+2}=\alpha_n+(-1)^{n+1+1}(n+1)+(-1)^{n+2+1}(n+2)}$.

Αν $\boldsymbol{n=2\lambda}$ τότε

$$\boldsymbol{\alpha_{n+2}=\alpha_n+(-1)^{2\lambda+2}(n+1)+(-1)^{2\lambda+3}(n+2)=\alpha_n+(n+1)-(n+2)=\alpha_n-1}$$

Άρα η υποακολουθία $\boldsymbol{\alpha_{2\lambda}}$ είναι φθίνουσα και συνεπώς κάθε όρος της μικρότερος του 1 άρα διάφορος του 10.

Αν $\boldsymbol{n=2\lambda+1}$ τότε

$\boldsymbol{\alpha_{n+2}=\alpha_n+(-1)^{2\lambda+3}(n+1)+(-1)^{2\lambda+4}(n+2)=\alpha_n-(n+1)+(n+2)=\alpha_n+1}$.

Άρα η υποακολουθία $\boldsymbol{\alpha_{2\lambda+1}}$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\boldsymbol{\omega=1}$ και $\boldsymbol{\alpha_1=1}$. Άρα $\boldsymbol{\alpha_{2\lambda+1}=\lambda+1}$

Άρα για $\boldsymbol{\alpha_{2\lambda+1}=10\Rightarrow\ \lambda+1=10\Rightarrow\ \lambda=9\Rightarrow\alpha_{19}=10}$ άρα B

37. Το όριο $\boldsymbol{\lim_{x\to\pi}\frac{x^2\cdot\sin(\pi-x)+\pi^2\cdot\sin(x-\pi)}{(x-\pi)^2}}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{-2\pi}$ B) $\boldsymbol{-\pi}$ C) $\boldsymbol{\pi}$ D) $\boldsymbol{2\pi}$ E) $\boldsymbol{3\pi}$

Έχω $\boldsymbol{\lim_{x\to\pi}\frac{x^2\cdot\sin(\pi-x)+\pi^2\cdot\sin(x-\pi)}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)(x^2-\pi^2)}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)(x^2-\pi^2)}{(x-\pi)(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)(x+\pi)}{(x-\pi)}=-1(\pi+\pi)=-2\pi}$. Άρα A

38. Αν για κάθε πραγματικό $\boldsymbol{x}$ έχω $\mathbf{1\leq f(x)\leq 2}$ τότε

I. υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}$

II. υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}$

III. υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to 1}|f(x)|-f(x)$

Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς

A) Μόνο η I B) Μόνο η II C) Μόνο η III D) οι I και III E) οι II και III

Αν η $\boldsymbol{f}$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbf{1}$ τότε οι προτάσεις I. και II. δεν είναι αληθείς.

Έχω για κάθε πραγματικό $\boldsymbol{x}$ έχω $\mathbf{f(x)\geq 1>0}$ άρα $\mathbf{|f(x)|-f(x)=f(x)-f(x)=0}$. Άρα $\mathbf{\lim_{x\to 1}|f(x)|-f(x)=\lim_{x\to 1}0=0}$. Άρα η III. Αληθής. Άρα C

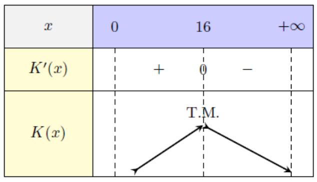
39. Αν $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ τότε το $\boldsymbol{f'(1)}$ είναι ίσο με A) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4\sqrt{2}}}$ B) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}$ C) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}}$ D) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{\sqrt{2}}}$ E) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3\sqrt{2}}}$

Έχω $\boldsymbol{f'(x)=\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ Άρα $\boldsymbol{f'(1)=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{1}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1}}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}}$ άρα A

40. Αν $\mathbf{f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, τότε$\boldsymbol{(f\circ f)'(2\pi)}$ είναι ίσο με A) $\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ B) $\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4}}$ C) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ D) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ E) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

Έχω $(\mathbf{f}\circ\mathbf{f})(x) = \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathbf{2}}\right)$ άρα $(\mathbf{f}\circ\mathbf{f})'(x) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{cos}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)'\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathbf{2}}\right)$
$= \frac{1}{4}\boldsymbol{cos}\left(\frac{x}{2}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathbf{2}}\right)$ Άρα $(\mathbf{f}\circ\mathbf{f})'(2\pi) = \frac{1}{4}\boldsymbol{cos}\left(\frac{2\pi}{2}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{sin}\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{4}\boldsymbol{cos}(\pi)\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{sin}(\pi)}{\mathbf{2}}\right) = \frac{1}{4}(-1)\mathbf{cos}(0) = -\frac{1}{4}$ Άρα Β

41. Το κόστος παραγωγής ενός κυβικού κρυστάλλου με μήκος πλευράς $\boldsymbol{x}$ μονάδες μήκους είναι 5 TL ανά κυβική μονάδα όγκου και η τιμή πώλησης είναι 20 TL ανά τετραγωνική μονάδα επιφάνειας. Για ποιο $\boldsymbol{x}$ θα έχουμε το μέγιστο κέρδος από την πώληση αυτού του κρυστάλλου; A) **16** B) **18** C) **20** D) **22** E) **24**



Έχω για κάθε κρύσταλλο πλευράς x ότι:
$\boldsymbol{K\acute{\varepsilon}\rho\delta o\varsigma(x) = \Pi\acute{\omega}\lambda\eta\sigma\eta(x) - K\acute{o}\sigma\tau o\varsigma(x) = 6\cdot 20x^2 - 5x^3}$
με $\boldsymbol{K'(x) = 240x - 15x^2 = -15x(-16+x)}$
Ο πίνακας μεταβολών είναι :
Άρα Α

42. Αν $\mathbf{f(x) = a\,lnx + bx^2 + 3}$ και η εφαπτομένη στο σημείο $(\mathbf{1}, \boldsymbol{f}(\mathbf{1}))$ είναι η $\mathbf{y - 2x + 1 = 0}$, τότε το γινομενο $\boldsymbol{ab}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{-18}$ B) $\mathbf{-16}$ C) $\mathbf{-12}$ D) $\mathbf{-8}$ E) $\mathbf{-6}$

Έχω $\mathbf{f'(x)} = \frac{a}{x} + \mathbf{2bx}$ με $\mathbf{f'(1)} = \boldsymbol{\lambda_\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$. Για $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, έχω $\mathbf{y - 2 + 1 = 0} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{1}$. Άρα το σημείο επαφής είναι το $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, άρα $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{ln1} + \mathbf{b1^2} + \mathbf{3} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = \mathbf{1} - \mathbf{3} \Rightarrow \boldsymbol{b} = -\mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}(-\mathbf{2}) = \mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{6} \Rightarrow \boldsymbol{ab} = \mathbf{6}(-\mathbf{2}) = -\mathbf{12}$ Άρα C

43. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{ln}\,(\mathbf{2x+8})$ έχει την ίδια κατακόρυφη ασύμπτωτη με τη συνάρτηση $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{sinx}}{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}}$ τότε το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσο με A) **0** B) **1** C) **2** D) **3** E) **4**
Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{ln}\,(\mathbf{2x+8})$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $\boldsymbol{x} = -\mathbf{4}$ αφού $\lim\limits_{x\to-4^+}\boldsymbol{f}(x) = -\infty$.
Η συνάρτηση $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{sinx}}{x^2+\alpha\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{sinx}}{x(x+\alpha)}$ έχει πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτη την $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ και την $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\alpha}$ που μηδενίζουν τον παρονομαστή. αφού $\lim\limits_{x\to0}\boldsymbol{g}(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{\mathbf{sinx}}{x(x+\alpha)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\mathbf{sinx}}{x}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(x+\alpha)} = \mathbf{1} * \frac{1}{(0+\alpha)} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι η $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Από την άλλη έχουμε $\lim\limits_{x\to-\alpha}\boldsymbol{g}(x) = \lim\limits_{x\to-\alpha}\frac{\mathbf{sinx}}{x(x+\alpha)} = \frac{\mathbf{sin}(-\alpha)}{(-\alpha)}\lim\limits_{x\to-\alpha}\frac{1}{(x+\alpha)} = \pm\infty$. Άρα η $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\alpha}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της g. Άρα $-\mathbf{4} = -\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{4}$ Άρα Ε

44. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathbf{2tan\,(2x)dx}$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{ln}\mathbf{2}$ B) $\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$ C) $\mathbf{ln4}$ D) $\boldsymbol{ln}\mathbf{5}$ E) $\boldsymbol{ln}\mathbf{6}$
Θέτω $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{d\omega} = \mathbf{2}\boldsymbol{dx}$, άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathbf{2tan\,(2x)dx} =$$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathbf{tan}(\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{d\omega} = [-\mathbf{ln}|\boldsymbol{cos\omega}|\,]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\mathbf{ln}\left|\boldsymbol{cos}\frac{\pi}{3}\right| + \mathbf{ln}|\boldsymbol{cos}\mathbf{0}| = -\mathbf{ln}\left|\frac{1}{2}\right| + \boldsymbol{ln}\mathbf{1} = \boldsymbol{ln}\mathbf{2}$ Άρα Α

45. Αν στο ολοκλήρωμα $\int\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{e^x}}\mathbf{dx}$ θέσω $\mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{1+e^x}}$,
προκύπτει A) $\int\frac{2u}{u^2+1}\boldsymbol{du}$ B) $\int\frac{u^2}{u^2+1}\boldsymbol{du}$ C) $\int\frac{1}{u^2-1}\boldsymbol{du}$ D) $\int\frac{\mathbf{u}}{u^2-1}\boldsymbol{du}$ E) $\int\frac{2u^2}{u^2-1}\boldsymbol{du}$
Έχω $\mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{1+e^x}} \Rightarrow \boldsymbol{u^2} = \mathbf{1+e^x} \Rightarrow \mathbf{2}\boldsymbol{udu} = \mathbf{e^x}\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{u^2} - \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{du} = \frac{u^2-1}{2u}\boldsymbol{dx} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \frac{2u}{u^2-1}\boldsymbol{du}$
Άρα $\int\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{e^x}}\mathbf{dx} = \int\boldsymbol{u}\frac{2u}{u^2-1}\boldsymbol{du} = \int\frac{2u^2}{u^2-1}\mathbf{du}$ Άρα Ε

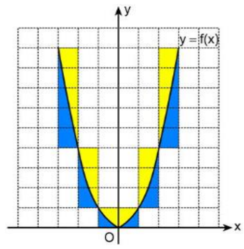
46. Το ολοκλήρωμα $\int_4^5\frac{x+1}{x^2-5x+6}\boldsymbol{dx}$ είναι ίσο με A) $\mathbf{5}\boldsymbol{ln}\mathbf{3} - \boldsymbol{ln}\mathbf{2}$ B) $\mathbf{5}\boldsymbol{ln}\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$ C) $\mathbf{3}\boldsymbol{ln}\mathbf{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$ D) $\mathbf{2}\boldsymbol{ln}\mathbf{2} + \mathbf{3}\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$ E) $\mathbf{7}\boldsymbol{ln}\mathbf{2} - \mathbf{3}\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$
Έχω $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = -\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}$ άρα $\int_4^5\frac{x+1}{x^2-5x+6}\boldsymbol{dx} = \int_4^5 -\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}\,\boldsymbol{dx} = -\mathbf{3}[\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|]_4^5 + \mathbf{4}[\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|]_4^5 = -\mathbf{3}(\boldsymbol{ln}\mathbf{3} - \boldsymbol{ln}\mathbf{2}) + \mathbf{4}(\boldsymbol{ln}\mathbf{2} - \boldsymbol{ln}\mathbf{1}) = \mathbf{7}\boldsymbol{ln}\mathbf{2} - \mathbf{3}\boldsymbol{ln}\mathbf{3}$ Άρα Ε

47. Το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\boldsymbol{xln}(\mathbf{2x})\mathbf{dx}$ είναι ίσο με A) $\frac{\mathbf{e^2}}{\mathbf{2}}$ B) $\frac{\mathbf{e^2-1}}{\mathbf{4}}$ C) $\frac{\mathbf{e^2+1}}{\mathbf{16}}$ D) **1** E) **2**

Έχω $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \boldsymbol{x ln}(2\mathbf{x})\mathbf{dx} = \left[\frac{x^2}{2}\boldsymbol{ln}(2\mathbf{x})\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x^2}{2}\frac{2}{2x}\,\mathbf{dx} = \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8}\boldsymbol{ln1} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x}{2}\,\mathbf{dx} = \frac{e^2}{8} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = \frac{e^2}{8} - \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{e^2+1}{16}$

Άρα C

48. Αν $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x^2}, \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{3}, \mathbf{3}]$ και το καρτεσιανό επίπεδο χωρίζεται σε μικρά τετραγωνάκια πλευράς 1. Οι περιοχές ακριβώς κάτω από την $\boldsymbol{C_f}$ είναι μπλε ενώ αυτές ακριβώς πάνω από την $\boldsymbol{C_f}$ είναι κίτρινές βλέπε σχήμα. Ποιος ο λόγος του αθροίσματος των εμβαδών των μπλε περιοχών προς το άθροισμα των εμβαδών των κίτρινων περιοχών. A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{6}{7}$



Έχω $\frac{\boldsymbol{M\pi\lambda\varepsilon}}{\boldsymbol{K\acute{\iota}\tau\rho\iota\nu\alpha}} = \frac{\int_{-3}^{3}\mathbf{x^2}\boldsymbol{dx} - 2(1*1-1*4)}{2(1*1+1*4+1*9) - \int_{-3}^{3}\mathbf{x^2}\boldsymbol{dx}} = \frac{2\int_{0}^{3}\mathbf{x^2}\boldsymbol{dx} - 10}{28 - 2\int_{0}^{3}\mathbf{x^2}\boldsymbol{dx}} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 5}{14 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3} = \frac{\frac{27}{3} - 5}{14 - \frac{27}{3}} = \frac{4}{5}$ Άρα C

49. Αν $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\sec(x)-1}{2} = \frac{3}{\sec(x)+1}$ τότε $\mathbf{tan}\,(\boldsymbol{x})$ είναι ίσο με A) $\sqrt{\mathbf{2}}$B) $\sqrt{\mathbf{3}}$ C) $\sqrt{\mathbf{5}}$ D) $\sqrt{\mathbf{6}}$ E) $\sqrt{\mathbf{7}}$

Αφού $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \frac{\pi}{2}$ έχω $\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$

Έχω $\frac{\sec(x)-1}{2} = \frac{3}{\sec(x)+1} \Leftrightarrow \mathbf{sec^2}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{1} = \mathbf{6} \Leftrightarrow \mathbf{sec^2}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{7} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} = \mathbf{7} \Leftrightarrow \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \mathbf{7} \Leftrightarrow$ $\mathbf{tan^2}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{1} = \mathbf{7}$ άρα $\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\mathbf{6}}$ Άρα D

50. Αν $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$ πόσες διαφορετικές λύσεις έχει η εξίσωση $\mathbf{cos}\,(\mathbf{5}\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x})$;

A) $\mathbf{3}$ B) $\mathbf{6}$ C) $\mathbf{8}$ D) $\mathbf{11}$ E) $\mathbf{12}$

Έχω $\mathbf{cos}\,(\mathbf{5}\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \mathbf{cos}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow$

$\mathbf{cos}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{sin}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{sin}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow -\boldsymbol{sin}\,(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{sin}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{sin}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ ή $\boldsymbol{sin}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

Άρα $\mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ ή $\mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} + \boldsymbol{\pi}$ ή $\mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi}$ ή $\mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{k\pi} + \boldsymbol{\pi}$ ή με $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

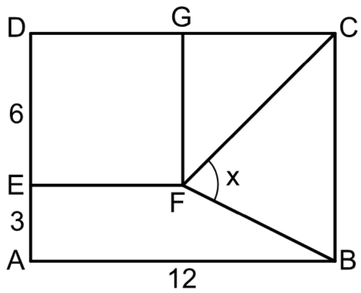
Άρα $\boldsymbol{x} = \frac{2k\pi}{3}$ ή $\boldsymbol{x} = \frac{2k\pi+\pi}{3}$ ή $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k\pi}$ ή $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k\pi} + \frac{\pi}{2}$ με $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Άρα $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ή $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ή $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\pi}$ ή $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ Άρα 8 διαφορετικές ρίζες άρα C

51. Αν $\sum_{k=2}^{4}\mathbf{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{kx}) = \boldsymbol{A}$ τότε το $\sum_{k=2}^{4}\mathbf{cos}^{\,2}(\boldsymbol{kx})$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{A} + \mathbf{2}$B) $\boldsymbol{A} + \mathbf{4}$ C) $\frac{A+1}{2}$ D) $\frac{A+2}{2}$ E) $\frac{A+3}{2}$

Έχω $\sum_{k=2}^{4}\mathbf{cos}^{\,2}(\boldsymbol{kx}) = \sum_{k=2}^{4}\frac{\cos(2kx)+1}{2} = \sum_{k=2}^{4}\frac{\cos(2kx)}{2} + \sum_{k=2}^{4}\frac{1}{2} = \frac{A}{2} + \frac{3}{2} = \frac{A+3}{2}$ Άρα E

52. Αν $\boldsymbol{ABCD}$ ορθογώνιο, $\boldsymbol{DEFG}$ τετράγωνο, $\boldsymbol{DE} = \mathbf{6}$, $\boldsymbol{AE} = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{AB} = \mathbf{12}$, $\widehat{\boldsymbol{BFC}} = \boldsymbol{x}$, τότε $\mathbf{cot}\,(\boldsymbol{x})$= A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\mathbf{1}$ D) $\sqrt{\mathbf{3}}$ E) $\mathbf{2}$



Έχω $\boldsymbol{GC} = \boldsymbol{GF} = \mathbf{6} \Rightarrow \boldsymbol{FC} = \sqrt{\mathbf{6^2} + \mathbf{6^2}} = \mathbf{6}\sqrt{\mathbf{2}}$

$\widehat{\boldsymbol{GFC}} = \mathbf{45°} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{FCB}} = \mathbf{45°}$

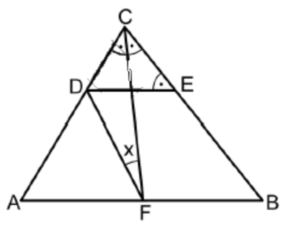
$\boldsymbol{FB} = \sqrt{\mathbf{3^2} + \mathbf{6^2}} = \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}$

Από νόμο ημιτόνων στο $\Delta\,\boldsymbol{FCB}$ έχω $\frac{CB}{\sin x} = \frac{FB}{\sin 45°} \Rightarrow \frac{9\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} \Rightarrow$ $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \mathbf{cot}(\boldsymbol{x}) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{3}$ άραB

53. $\boldsymbol{AFD}$ ισόπλευρο τρίγωνο, $\boldsymbol{DE}//\boldsymbol{AB}$, $\widehat{\boldsymbol{DFC}} = \boldsymbol{x}$.

Τα σημεία $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ τέτοια ώστε $\widehat{\boldsymbol{ACF}} = \widehat{\boldsymbol{FCB}} = \widehat{\boldsymbol{DFC}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}$, τότε το x είναι ίσο με

A) $\mathbf{20°}$ B) $\mathbf{25°}$ C) $\mathbf{30°}$ D) $\mathbf{35°}$ E) $\mathbf{40°}$



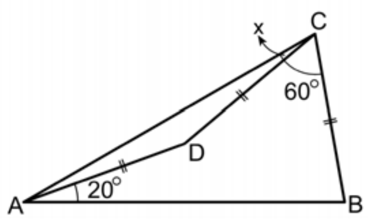
Έχω $\boldsymbol{DE} \,//\, \boldsymbol{AB} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{D}} = \widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{60°}$ (εντός εκτός κι επί ταυτά)

Στο τρίγωνο $\boldsymbol{DCE}$ έχω $\mathbf{60°} + \mathbf{3}\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{180°} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{40°}$

Έχω $\widehat{\boldsymbol{ADF}} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{x} =$(ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $\boldsymbol{DCF}$

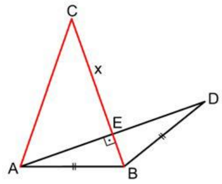
Άρα $\mathbf{60°} = \mathbf{40°} + \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{20°}$ Άρα A

54. $AD = DC = CB$, $\widehat{BAD} = 20°$, $\widehat{BCD} = 60°$, $\widehat{ACD} = x$. Άρα x είναι ίσο με A) $5°$ B) $10°$ C) $15°$ D) $20°$ E) $25°$



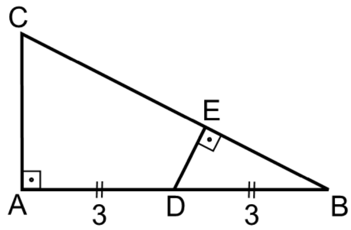
Έχω το τρίγωνο BCD ότι είναι ισόπλευρο,
άρα $AD = DB (= DC) \Rightarrow \widehat{DBA} = \widehat{BAD} = 20°$
$\widehat{CBD} = 60°$, άρα $\widehat{B} = \widehat{DBA} + \widehat{CBD} = 20° + 60° = 80°$
$AD = DC$ άρα $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = x$. Άρα στο τρίγωνο ABC έχουμε
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow x + 20° + 80° + x + 60° = 180° \Rightarrow x = 10°$ άρα B

55. ABC ισοσκελές, $AD \cap BC = \{E\}$, $AB = BD = 6$, $AC = CB = 9$, Άρα $CE = x$ είναι ίσο με A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8



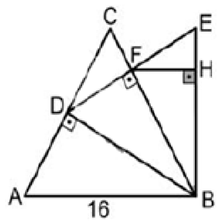
Από Π.Θ στο τρίγωνο ACE έχω : $AC^2 = AE^2 + EC^2 \Rightarrow 9^2 = AE^2 + x^2$
Από Π.Θ στο τρίγωνο ABE έχω : $AB^2 = AE^2 + EB^2 \Rightarrow 6^2 = AE^2 + (9-x)^2$. Αφαιρώντας κατά μέλη έχω:
$9^2 - 6^2 = x^2 - (9-x)^2 \Rightarrow 45 = 18x - 81 \Rightarrow x = 7$ Άρα D

56. ABC ορθογώνιο, $AB \perp AC$, $DE \perp EB$, $AD = DB = 3$, $(ABC) = 6(BDE)$,
τότε AC είναι ίσο με A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 3 E) 6



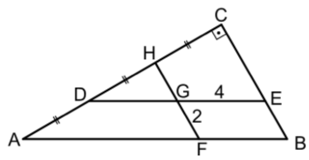
έχω $(ABC) = 6(BDE) \Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{2} = 6\frac{ED \cdot EB}{2} \Rightarrow 6AC = 6ED \cdot EB \Rightarrow AC = ED \cdot EB$
Από την ομοιότητα των τριγώνων $ABC \approx BDE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow \frac{ED \cdot EB}{6} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB = \sqrt{6}$
Από Π.Θ στο τρίγωνο DBE έχω :
$DB^2 = DE^2 + EB^2 \Rightarrow 3^2 = DE^2 + \sqrt{6}^2 \Rightarrow DE = \sqrt{3}$.
Έχω $\frac{(ABC)}{(BDE)} = \lambda^2 \Rightarrow 6 = \left(\frac{AC}{DE}\right)^2 \Rightarrow 6 = \frac{AC^2}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ Άρα B

57. Τα τρίγωνα ABC και BDE είναι ισόπλευρα, $DB \perp AC$, $FB \perp DE$, $EB \perp FH$, $AB = 16$. Το εμβαδόν (BFH) είναι ίσο με A) $12\sqrt{3}$ B) $15\sqrt{3}$ C) $18\sqrt{3}$ D) $20\sqrt{3}$ E) $24\sqrt{3}$



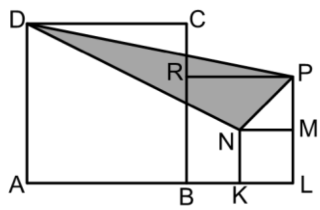
Έχω $BHF \approx BFD \approx BDA$ άρα $\frac{(BHF)}{(BDA)} = \left(\frac{BF}{BA}\right)^2 = \left(\frac{BD\cos 30°}{BA}\right)^2 = \left(\frac{BA\cos 30° \cos 30°}{BA}\right)^2 = (\cos 30°)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16}$. Έχω για το εμβαδόν ισόπλευρου $(BCA) = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} = 64\sqrt{3}$
Άρα $(BFH) = \frac{9}{16}(BDA) = \frac{9}{16}\frac{1}{2}(BCA) = \frac{9}{32}64\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ Άρα C

58. Έστω $AC \perp BC$, $AB//DE$, $BC//FH$, $AD = DH = HC$, $GE = 4$, $GF = 2$
Το (ABC) είναι ίσο με A) $9\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $15\sqrt{3}$ D) $18\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$



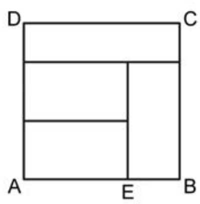
H μέσο DC και HG // CE Άρα G μέσο DE Άρα $DG = DE = 4$
D μέσο AH και DG // CE Άρα G μέσο HF Άρα $HG = GF = 2$
Από Π.Θ στο DHG έχω $DH = \sqrt{DG^2 - HG^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$
Άρα $(DGH) = \frac{HG \cdot DH}{2} = \frac{2\sqrt{12}}{2} = \sqrt{12}$. Έχω $\frac{(ABC)}{(DGH)} = \left(\frac{AC}{DH}\right)^2 \Rightarrow \frac{(ABC)}{\sqrt{12}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 \Rightarrow (ABC) = 9\sqrt{12} = 18\sqrt{3}$ άρα D

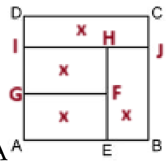
59. Τα τετράγωνα $ABCD$, $BLPR$ και $KLMN$ είναι πλευράς μήκους 3, 2 και 1 αντίστοιχα. Το (DNP) είναι ίσο με A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8



Έχω
$(DNP) = (DPLA) - (DNKA) - (NPLK) =$
$\frac{1}{2}(DA + PL) \cdot AL - \frac{1}{2}(DA + NK) \cdot AK - \frac{1}{2}(PL + NK) \cdot LK =$
$\frac{1}{2}(3+2) \cdot 5 - \frac{1}{2}(3+1) \cdot 4 - \frac{1}{2}(2+1) \cdot 1 = \frac{25}{2} - \frac{16}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ Άρα A

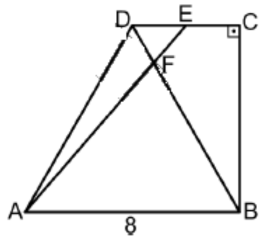
60. Το τετράγωνο $ABCD$ είναι χωρισμένο σε 4 ισεμβαδικά ορθογώνια. Άρα ο λόγος $\frac{AE}{AD}$ είναι ίσος με A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{9}{16}$





Έχω στο δεύτερο σχήμα $\boldsymbol{\frac{AE}{AB}=\frac{(AEHI)}{(ABJI)}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}\xRightarrow{AB=AD}\frac{AE}{AD}=\frac{2}{3}}$ Άρα A

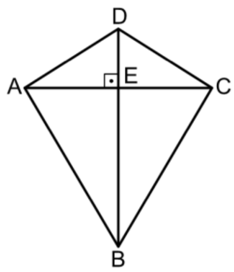
61. $\boldsymbol{ABCD}$ τραπέζιο, $\boldsymbol{ADB}$ ισόπλευρο τρίγωνο, $\boldsymbol{AB\ //\ DC}$, $\boldsymbol{BF=4DF}$, $\boldsymbol{AB=8}$ Άρα $(\boldsymbol{ABCE})$ είναι ίσο με A) $\boldsymbol{10\sqrt{3}}$ B) $\boldsymbol{12\sqrt{3}}$ C) $\boldsymbol{16\sqrt{3}}$ D) $\boldsymbol{18\sqrt{3}}$ E) $\boldsymbol{20\sqrt{3}}$



Έχω

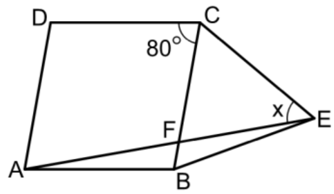
$\boldsymbol{(ABCE)=\frac{1}{2}(AB+CE)\cdot BC=\frac{1}{2}(8+DC-DE)\cdot DB\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\left(8+DB\sin 30^\circ-AB\cdot\frac{DF}{BF}\right)\cdot DB\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\left(8+8\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(8+4-2)\cdot 4\sqrt{3}=5\cdot 4\sqrt{3}=20\sqrt{3}}$ Άρα E

62. Το $\boldsymbol{ABCD}$ είναι χαρταετός, **AC ⊥ BD**, $\boldsymbol{AB=BC}$, **AD = DC**, **BE = 4ED**, **AC=16** και $(\boldsymbol{ABCD})=\boldsymbol{160}$. Η περίμετρος του $\boldsymbol{ABCD}$ είναι ίση με A) $\boldsymbol{20\sqrt{5}}$ B) $\boldsymbol{24\sqrt{5}}$ C) $\boldsymbol{28\sqrt{5}}$ D) $\boldsymbol{30\sqrt{5}}$ E) $\boldsymbol{32\sqrt{5}}$



Έχω $\boldsymbol{(ABCD)=\frac{AC\cdot DB}{2}\Rightarrow 160=\frac{16\cdot DB}{2}\Rightarrow DB=20\Rightarrow DE=DB-BE=20-4ED\Rightarrow 5DE=20\Rightarrow DE=4}$, $\boldsymbol{BE=16}$. Ακόμα $\boldsymbol{AE=\frac{AC}{2}=8}$ Άρα Η περίμετρος του $\boldsymbol{ABCD}$ είναι $\boldsymbol{AB+BC+CD+AD=2(AB+AD)=2\left(\sqrt{AE^2+EB^2}+\sqrt{AE^2+DE^2}\right)=2\left(\sqrt{8^2+16^2}+\sqrt{8^2+4^2}\right)=2\left(8\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right)=24\sqrt{5}}$ Άρα B

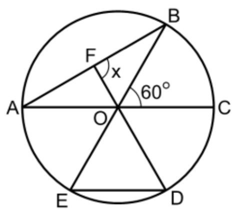
63. Το $\boldsymbol{ABCD}$ είναι ρόμβος, το $\boldsymbol{BCE}$ ισόπλευρο, το $\boldsymbol{F}$ σημείο τομής των $\boldsymbol{BC}$ και $\boldsymbol{AE}$, $\boldsymbol{\widehat{AEC}=x}$. Άρα x είναι ίσο με A) $\boldsymbol{35^\circ}$ B) $\boldsymbol{40^\circ}$ C) $\boldsymbol{45^\circ}$ D) $\boldsymbol{50^\circ}$ E) $\boldsymbol{55^\circ}$



Έχω $\boldsymbol{AB=BE(=BC)}$ άρα $\boldsymbol{ABE}$ ισοσκελές. Άρα $\boldsymbol{\widehat{BEA}=\frac{(180^\circ-\widehat{ABE})}{2}=\frac{(180^\circ-(100^\circ+60^\circ))}{2}=10^\circ}$

Άρα $\boldsymbol{x=60^\circ-\widehat{BEA}=60^\circ-10^\circ=50^\circ}$ Άρα D

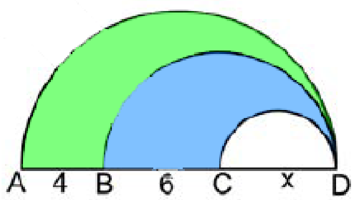
64.το O κέντρο του κύκλου, AC // ED, $\boldsymbol{AC\cap FD=O}$, $\boldsymbol{\widehat{BOC}=60^\circ}$, $\boldsymbol{\widehat{DFB}=x}$.
Άρα x είναι ίσο με A) $\boldsymbol{75^\circ}$ B) $\boldsymbol{80^\circ}$ C) $\boldsymbol{90^\circ}$ D) $\boldsymbol{105^\circ}$ E) $\boldsymbol{120^\circ}$



Έχω στο ισοσκελές EOD ότι $\boldsymbol{\widehat{EOD}=180^\circ-2\widehat{OED}=180^\circ-2\widehat{BOC}=60^\circ}$

Έχω $\boldsymbol{x=\widehat{FAO}+\widehat{FOA}=\frac{\widehat{BOC}}{2}+\widehat{COD}=\frac{60^\circ}{2}+180^\circ-\widehat{BOC}-\widehat{EOD}=30^\circ+180^\circ-60^\circ-60^\circ=90^\circ}$ Άρα C

65. $\boldsymbol{AB=4, BC=6, CD=x}$. Αν η πράσινη επιφάνεια έχει ίδιο εμβαδόν με την μπλε, τότε $\boldsymbol{x}$ είναι ίσο με A) **4** B) **5** C) **6** D) **7** E) **8**



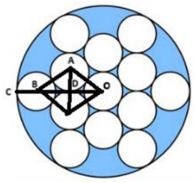
Πράσινο = Μπλε Άρα

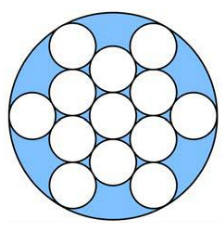
$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\left(\frac{4+6+x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{6+x}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{6+x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow}$

$\boldsymbol{(10+x)^2-(6+x)^2=(6+x)^2-(x)^2\Rightarrow}$

$\boldsymbol{64+8x=36+12x\Rightarrow\ 4x=28\Rightarrow\ x=7}$ Άρα D

66. Δεκατρείς κύκλοι ακτίνας 1 και ένας μεγάλος κύκλος εφάπτονται όπως στο σχήμα. Το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με
A) $\boldsymbol{3\sqrt{2}\pi}$ B) $\boldsymbol{4\sqrt{2}\pi}$ C) $\boldsymbol{2\sqrt{3}\pi}$ D) $\boldsymbol{6\sqrt{3}\pi}$ E) $\boldsymbol{4\sqrt{3}\pi}$



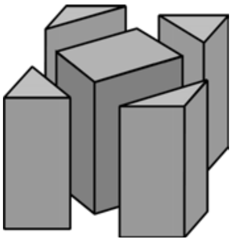


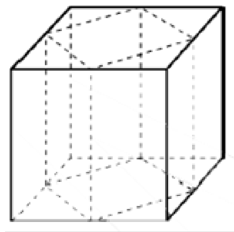
Από Π.Θ στο ABD έχω $\boldsymbol{DB=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}}$

Άρα $\boldsymbol{OC^2=(1+OB)^2=(1+2DB)^2=\left(1+2\sqrt{3}\right)^2=13+4\sqrt{3}}$.

Το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας είναι ίσο με $\boldsymbol{\pi\, OC^2-13\pi\cdot 1^2=\pi\left(13+4\sqrt{3}\right)-13\pi=4\sqrt{3}\pi}$ Άρα E

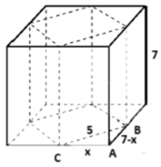
67. Ένα τετράγωνο ορθό πρίσμα με πλευρά βάσης ίση με 5 και τέσσερα όμοια τριγωνικά ορθά πρίσματα συναρμολογούνται όπως στο σχήμα και σχηματίζουν κύβο πλευράς 7. Το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός τριγωνικού ορθού πρίσματος είναι ίσο με A) **72** B) **75** C) **80** D) **90** E) **96**.

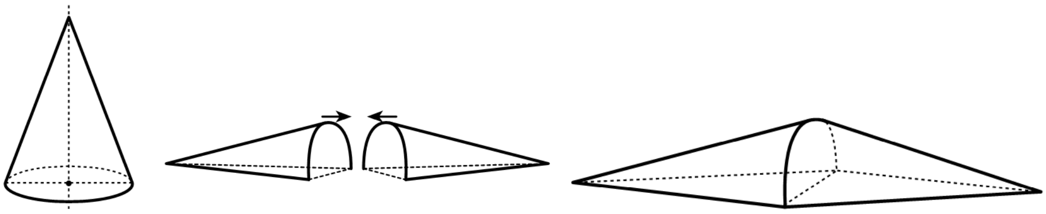




Έστω $AC = x$, $AB = 7 - x$ Από Π.Θ στο ορθογώνιο ABC έχω $BC^2 = AC^2 + BA^2 \Rightarrow 5^2 = x^2 + (7-x)^2 \Rightarrow 25 = 2x^2 - 14x + 49 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow x = 3$ ή 4

Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας καθενός τριγωνικού ορθού πρίσματος είναι ίσο με $(AC + AB + BC)7 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = (3 + 4 + 5)7 + 3 \cdot 4 = 84 + 12 = 96$ Άρα E





68.
Ο ορθός κυκλικός κώνος που έχει ακτίνα βάσης 5 και ύψος 12, κόβεται κατά μήκος επιπέδου κάθετου στην βάση του που διέρχεται από την κορυφή του και χωρίζεται σε δυο ίσα μέρη όπως στο σχήμα. Αυτά τα δύο ίσα μέρη περιστρέφονται και προσκολλώνται μεταξύ του και σχηματίζουν το στερεό που φαίνεται στο σχήμα δεξιά. Το στερεό αυτό τοποθετείται σε επίπεδο τραπέζι. Η ακτίνα της μεγαλύτερης σφαίρας που μπορεί να χωρέσει στο εσωτερικό του στερεού αυτού είναι ίση με A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{12}{5}$ E) $\frac{13}{5}$

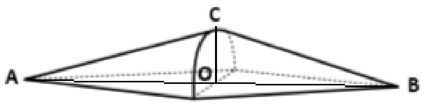
Από Π.Θ στο έχω $AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

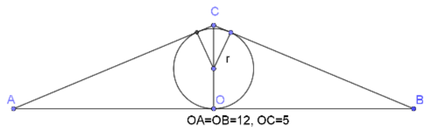
Έχω

$r \cdot \tau = (ABC) \Rightarrow r\left(\frac{AC+BC+OA+OB}{2}\right) = \frac{OC \cdot AB}{2} \Rightarrow r\left(\frac{13+13+24}{2}\right) = \frac{5 \cdot 24}{2} \Rightarrow$

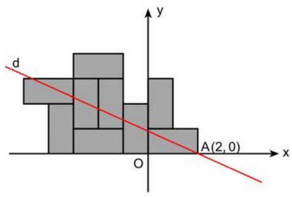
$50r = 5 \cdot 24 \Rightarrow r = \frac{12}{5}$

Άρα D





69. Στο καρτεσιανό επίπεδο, ένα σχήμα αποτελείται από 9 ίσα ορθογώνια με μικρή πλευρά 1 και μεγάλη πλευρά 2. Στη συνέχεια χωρίζουμε το σχήμα με μια ευθεία (d) που περνά από το σημείο $A(2, 0)$, σε δύο ισεμβαδικά μέρη. Η κλίση της (d) είναι ίση με A) $\frac{-3}{7}$ B) $\frac{-5}{12}$ C) $\frac{-7}{16}$ D) $\frac{-9}{20}$ E) $\frac{-11}{24}$

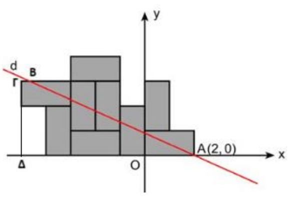


Η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = \lambda(x - 2)$ Για $y = 3, x = \frac{3}{\lambda} + 2$ Άρα $B\left(\frac{3}{\lambda} + 2, 3\right)$ Το σημείο Γ είναι το $\Gamma(-5, 3)$

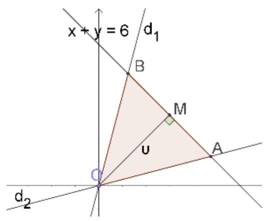
Άρα $(B\Gamma\Delta A) = \boldsymbol{\mu\iota\sigma o\varepsilon\pi\iota\varphi}\acute{\alpha}\boldsymbol{\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} + \boldsymbol{\lambda\varepsilon\upsilon\kappa}\acute{o}\ \boldsymbol{o\rho\theta o\gamma}\acute{\omega}\boldsymbol{\nu\iota o}$

Έχω $\boldsymbol{\mu\iota\sigma o\varepsilon\pi\iota\varphi}\acute{\alpha}\boldsymbol{\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma} = \frac{9*1*2}{2} = 9$, $\boldsymbol{\lambda\varepsilon\upsilon\kappa}\acute{o}\ \boldsymbol{o\rho\theta o\gamma}\acute{\omega}\boldsymbol{\nu\iota o} = 1 * 2 = 2$

άρα $(B\Gamma\Delta A) = 11 \Rightarrow \frac{(B\Gamma + A\Delta)\Gamma\Delta}{2} = 11 \Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{\lambda}+2-(-5)+7\right)3}{2} = 11 \Rightarrow \frac{3}{\lambda} + 14 = \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{3}{\lambda} = \frac{22}{3} - 14 \Rightarrow \frac{3}{\lambda} = \frac{-20}{3} \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{20}$ άρα D



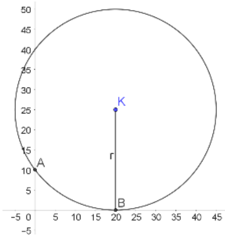
70. Η κλειστή περιοχή που οριοθετείται από τις ευθείες $\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία ε: $\boldsymbol{x+y=6}$ ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Ποιο το εμβαδόν αυτού του ισόπλευρου τριγώνου A) $\mathbf{3\sqrt{3}}$ B) $\mathbf{4\sqrt{3}}$ C) $\mathbf{6\sqrt{3}}$ D) $\mathbf{8\sqrt{3}}$ E) $\mathbf{9\sqrt{3}}$



Έχω

$(\boldsymbol{OAB}) = \frac{\boldsymbol{AB\cdot\upsilon}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\upsilon\cdot AM} = \boldsymbol{\upsilon\cdot\upsilon}\cdot\mathbf{tan\,30}^\circ = \boldsymbol{d^2(O,\varepsilon)} = \left(\frac{|\mathbf{1\cdot0+1\cdot0-6}|}{\sqrt{\mathbf{1^2+1^2}}}\right)^{\mathbf{2}}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} = \mathbf{6\sqrt{3}}$ Άρα C

71. Κύκλος που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{A(0,10)}$ εφάπτεται στον άξονα $\boldsymbol{x'x}$ στο $\boldsymbol{B(20,0)}$. Η ακτίνα του κύκλου είναι: A) $\mathbf{18}$ B) $\mathbf{20}$ C) $\mathbf{21}$ D) $\mathbf{25}$ E) $\mathbf{30}$

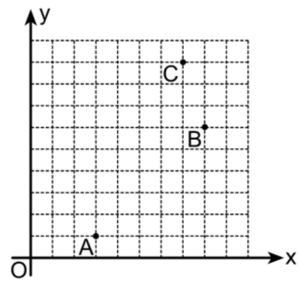


Έχω για τον κύκλο ακτίνας $\boldsymbol{r}$ ότι $(\boldsymbol{x-x_K})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y-y_K})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r^2} \xRightarrow{\mathbf{A(0,10)}}$
$(\boldsymbol{x_K})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{10}-\boldsymbol{y_K})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r^2}$
Αφού εφάπτεται στον άξονα $\boldsymbol{x'x}$ στο $\boldsymbol{B(20,0)}$ έχω $\boldsymbol{x_K = x_B = 20}, \boldsymbol{y_K = r}$.
Άρα $(\mathbf{20})^{\mathbf{2}} + (\mathbf{10}-\boldsymbol{r})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r^2} \Rightarrow \mathbf{400+100-20}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r^2} = \boldsymbol{r^2} \Rightarrow \mathbf{20}\boldsymbol{r} = \mathbf{500} \Rightarrow \boldsymbol{r} = \mathbf{25}$
Άρα D

72. Αν $\boldsymbol{p>0}$ και η απόσταση των εστιακών σημείων της έλλειψης $\frac{\boldsymbol{x^2}}{(\boldsymbol{p+1})^2} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{(\boldsymbol{p-1})^2} = \mathbf{1}$ είναι ίση με 12, τότε το μήκος του κύριου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με : A) $\mathbf{14}$ B) $\mathbf{15}$ C) $\mathbf{18}$ D) $\mathbf{20}$ E) $\mathbf{24}$
Έχω $\boldsymbol{p+1>p-1}$ άρα $\boldsymbol{\gamma = \sqrt{a^2-b^2}}, \mathbf{12} = \mathbf{2}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{a^2-b^2}} \Rightarrow \mathbf{36} = (\boldsymbol{p+1})^{\mathbf{2}} - (\boldsymbol{p-1})^{\mathbf{2}} \Rightarrow \mathbf{36} = \mathbf{4}\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{p} = \mathbf{9}$
Άρα μήκος του κύριου άξονα είναι $\boldsymbol{AA'} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}(\boldsymbol{p+1}) = \mathbf{20}$ Άρα D

73. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$ έχουν άθροισμα το μηδενικό διάνυσμα τότε I. $\parallel \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} \parallel = \parallel \vec{\boldsymbol{v}} \parallel$ II. $\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{3}\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{2},-\mathbf{4})$ όταν $\vec{\mathbf{u}} = (-\mathbf{1},\mathbf{2})$ III. Η γωνία των $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$ είναι $\mathbf{180}°$. Ποιες προτάσεις είναι πάντα αληθείς
A) Μόνο η I B) Μόνο η III C) οι I και II D) οι I και III E) οι II και III
Έχω $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ Άρα $\parallel \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} \parallel = \parallel -\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}} \parallel = \mathbf{3} \parallel \vec{\boldsymbol{v}} \parallel \neq \parallel \vec{\boldsymbol{v}} \parallel$ άρα I Ψευδής.
Έχω $\vec{\mathbf{u}} + \mathbf{3}\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{2},-\mathbf{4}) \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} - \mathbf{3}\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{2},-\mathbf{4}) \Leftrightarrow -\mathbf{2}\vec{\mathbf{u}} = (\mathbf{2},-\mathbf{4}) \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} = (-\mathbf{1},\mathbf{2})$ Άρα II Αληθής
Τα διανύσματα $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$ είναι αντίθετα άρα η γωνία των $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$ είναι $\mathbf{180}°$. Άρα III Αληθής
Άρα E

74. Έστω $\boldsymbol{A(3,1)}, \boldsymbol{B(8,6)}, \boldsymbol{C(7,9)}$ και α) το $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ είναι το διάνυσμα της κάθετης προβολής του $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ στο $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ β) το $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$ είναι το διάνυσμα της κάθετης προβολής του $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ στο $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ Τότε το $\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}$ είναι ίσο με A) $(\mathbf{2},\mathbf{1})$ B) $(\mathbf{3},\mathbf{0})$ C) $(\mathbf{0},\mathbf{4})$ D) $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ E) $(\mathbf{4},\mathbf{3})$



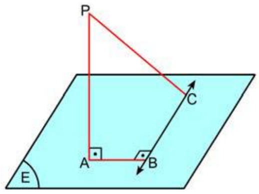
Έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{DE}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AE}} - \overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|^2}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} - \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, με $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = (\mathbf{4},\mathbf{8}), \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\mathbf{5},\mathbf{5}), \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \mathbf{20+40=60}, |\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}|^2 = \mathbf{4^2+8^2=80}$, $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|^2 = \mathbf{5^2+5^2=50}$
Άρα $\overrightarrow{\boldsymbol{DE}} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{50}}(\mathbf{5},\mathbf{5}) - \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{80}}(\mathbf{4},\mathbf{8}) = (\mathbf{3},\mathbf{0})$ Άρα B
Έγινε χρήση του τύπου $\boxed{\boldsymbol{\pi\rho\beta}_{\vec{\boldsymbol{v}}}\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{|\mathbf{v}|^2}\vec{\boldsymbol{v}}}$

75. Αν οι ευθείες $\boldsymbol{d_1}: \boldsymbol{x+1 = y+2} = \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{d_2}: \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{z-c}}{\boldsymbol{a}}$ τέμνονται σε ορθή γωνία τότε το c είναι ίσο με A) $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$ B) $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$ C) $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ D) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ E) $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$
Έχω $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1}, \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}} - \mathbf{2}$ Άρα $\boldsymbol{d_1}: (\boldsymbol{x,y,z}) = \left(\frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}, \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}}-\mathbf{2}, \boldsymbol{z}\right) = \boldsymbol{z}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\right) - (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0})$
Για την $\boldsymbol{d_2}: (\boldsymbol{x,y,z}) = \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{c}, \frac{\boldsymbol{bz}}{\boldsymbol{a}} - \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{z}\right) = \boldsymbol{z}\left(\mathbf{1}, \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}, \mathbf{1}\right) - \left(\boldsymbol{c}, \frac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}, \mathbf{0}\right)$ Αφού τέμνονται κάθετα έχω $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}, \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}, \mathbf{1}\right) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} + \mathbf{1} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{b} = -\mathbf{3}\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{d_2}: \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{y}}{-\mathbf{3}\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{z-c}}{\boldsymbol{a}}$ ή $\boldsymbol{d_2}: \mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{y}}{-\mathbf{3}} = \mathbf{z-c}$
Αφού οι δυο ευθείες τέμνονται έχω : $\boldsymbol{x+1 = y+2}$ και $\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{y}}{-\mathbf{3}}$ άρα : $\boldsymbol{x}+\mathbf{1} = -\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ και αφού
$\boldsymbol{y}+\mathbf{2} = \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}}$ και $\frac{\boldsymbol{y}}{-\mathbf{3}} = \mathbf{z-c}$ έχω $-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} + \mathbf{2} = \frac{\boldsymbol{z}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \boldsymbol{z} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ και $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} - \mathbf{c} \Rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$ Άρα A

76. Αν $\mathbf{a}, \boldsymbol{b}$ πραγματικοί αριθμοί και το επίπεδο $\mathbf{ax} + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{y} + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{z} = \mathbf{6}$ διέρχεται από το σημείο (1,1,1) και είναι κάθετο στο επίπεδο $\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{8}\boldsymbol{z} = \mathbf{5}$ τότε το άθροισμα $\mathbf{a} + \boldsymbol{b}$ είναι ίσο με A) **3** B) **4** C) **5** D) **6** E) **7**

Έχω το σημείο (1,1,1) διέρχεται από το επίπεδο $\mathbf{ax} + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{y} + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\mathbf{z} = \mathbf{6}$ Άρα $\mathbf{a}\cdot\mathbf{1} + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{1} + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{1} = \mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{3}\boldsymbol{a} = \mathbf{6} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{2}$. Ακόμα αφού τα δυο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε θα είναι κάθετα μεταξύ τους και τα κάθετα στα επίπεδα διανύσματα, έστω $\overrightarrow{\mathbf{n_1}}, \overrightarrow{\mathbf{n_2}}$ αντίστοιχα. Έχω $\overrightarrow{\mathbf{n_1}} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}+\boldsymbol{b}, \mathbf{a}-\boldsymbol{b})$ και $\overrightarrow{\mathbf{n_2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{8})$. Οπότε $\overrightarrow{\mathbf{n_1}} \perp \overrightarrow{\mathbf{n_2}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{n_1}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n_2}} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a}+\boldsymbol{b}, \mathbf{a}-\boldsymbol{b}) \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{8}) = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{2}+\boldsymbol{b}, \mathbf{2}-\boldsymbol{b}) \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{8}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{2} + \mathbf{4} + \mathbf{2}\boldsymbol{b} - \mathbf{16} + \mathbf{8}\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{10}\boldsymbol{b} = \mathbf{10} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{1}$. Άρα $\mathbf{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$ Άρα A

77. Αν $\boldsymbol{PA} = \mathbf{13}, \boldsymbol{BC} = \mathbf{9}, \boldsymbol{AB} = \mathbf{5}$, $\boldsymbol{PA} \perp \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{AB} \perp \boldsymbol{BC}$, τότε ποιο είναι το μήκος του $\boldsymbol{PC}$



A) **15** B) **18** C) $\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{10}}$ D) $\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{11}}$ E) $\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}}$

Από Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ έχω $\boldsymbol{AC}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BC}^2 = \mathbf{5}^2 + \mathbf{9}^2 = \mathbf{106}$

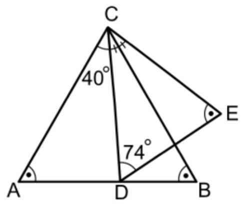
Από Π.Θ στο ορθογώνιο τρίγωνο $\boldsymbol{ACP}$ έχω $\boldsymbol{PC}^2 = \boldsymbol{AP}^2 + \boldsymbol{AC}^2 = \mathbf{13}^2 + \mathbf{106} = \mathbf{275}$

Άρα $\boldsymbol{PC} = \sqrt{\mathbf{275}} = \mathbf{5}\sqrt{\mathbf{11}}$ Άρα D

78-80

Απαντήστε πλήρως στις ερωτήσεις 78-80 στο φύλλο απαντήσεών σας.

78. Το τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ ισοσκελές με βάση AB, $\widehat{\mathbf{ABC}} = \widehat{\mathbf{DEC}}$, $\widehat{\mathbf{CDE}} = \mathbf{74}°$, $\widehat{\boldsymbol{ACD}} = \mathbf{40}°$, $\widehat{\mathbf{DCB}} = \widehat{\mathbf{BCE}} = \boldsymbol{x}$. Πόσο είναι το x;



Στο τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ έχουμε $\mathbf{2}\widehat{\mathbf{ABC}} + \mathbf{40}° + \boldsymbol{x} = \mathbf{180}° \Rightarrow \mathbf{2}\widehat{\mathbf{ABC}} + \boldsymbol{x} = \mathbf{140}°$

Στο τρίγωνο $\boldsymbol{CDE}$ έχουμε $\widehat{\mathbf{ABC}} + \mathbf{74}° + \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{180}° \Rightarrow \widehat{\mathbf{ABC}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{106}°$

Άρα $2(\mathbf{106}° - \mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{140}° \Rightarrow -\mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{140}° - \mathbf{212}°$

και $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{72}°}{\mathbf{3}} = \boxed{\mathbf{24}°}$

79. Αν το ψηφίο $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ και έχω τους αριθμούς $\begin{matrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{AA}\\ \boldsymbol{AAA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{AA}\ldots\boldsymbol{A}\end{matrix}$ όπου ο τελευταίος αποτελείται από 50 ψηφία $\boldsymbol{A}$ και το υπόλοιπο του αθροίσματος των αριθμών αυτών διαιρούμενο με το 9 είναι το 3, τότε ποιο είναι το άθροισμα των πιθανών τιμών που μπορεί να πάρει το $\boldsymbol{A}$;

Έχω $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{AA} + \boldsymbol{AAA} + \cdots + \boldsymbol{AA}\ldots\boldsymbol{A}) \equiv (\boldsymbol{A} + \mathbf{2}\boldsymbol{A} + \mathbf{3}\boldsymbol{A} + \cdots + \mathbf{50}\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \boldsymbol{A}(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \cdots + \mathbf{50})\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \boldsymbol{A}\left(\frac{\mathbf{50}\cdot\mathbf{51}}{\mathbf{2}}\right) \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \boldsymbol{A}(\mathbf{25}\cdot\mathbf{51})\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \boldsymbol{A}(\mathbf{7}\cdot\mathbf{6})\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \boldsymbol{A}(42)\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9} \equiv \mathbf{6}\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9}$

Δίνεται ότι $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{AA} + \boldsymbol{AAA} + \cdots + \boldsymbol{AA}\ldots\boldsymbol{A}) \equiv \mathbf{3}\ \boldsymbol{mod}\mathbf{9}$.

Άρα πρέπει $\mathbf{6}\boldsymbol{A} \equiv \mathbf{3}\boldsymbol{mod}\mathbf{9}$

Αν $\boldsymbol{A} = \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{9}$ δεν ισχύει Άρα $\boldsymbol{A} = \mathbf{2}$ ή **5** ή **8** και το άθροισμά τους είναι $\mathbf{2} + \mathbf{5} + \mathbf{8} = \boxed{\mathbf{15}}$

80. Αν $\boldsymbol{F}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{f}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, **F(2)=7** και **F(1)=3** ,να βρεθεί το $\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$

Έχω $\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \displaystyle\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \left[\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})^2}{\mathbf{2}}\right]_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{F}(2)^2}{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{F}(1)^2}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} = \boxed{\mathbf{20}}$

[Πηγές]

https://www.osym.gov.tr/TR,15045/osys-cikmis-sorular.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Student_Selection_and_Placement_System

https://en.wikipedia.org/wiki/Education_in_Turkey

https://fanarstudy.com/en/blog/yks-turkey

https://www.milliyet.com.tr/egitim/2023-yks-konulari-2023-tyt-ayt-konulari-ve-soru-dagilimi-6609398
Τουρκία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)