[Η Ολλανδία]
Η Ολλανδία (ολλανδικά: Nederland, προφέρεται: [ˈneːdərˌlɑnt]), επίσημα Κάτω Χώρες, είναι το ευρωπαϊκό τμήμα του Βασιλείου των Κάτω Χωρών (ολλανδικά: Koninkrijk der Nederlanden). Είναι πυκνοκατοικημένη χώρα που βρίσκεται στη Δυτική Ευρώπη, με τρεις μικρές νησιωτικές περιοχές στην Καραϊβική. Το 2023, είχε συνολικό πληθυσμό: 17.866.118 κατοίκους.
Η Ολλανδία έχει έκταση 33.491 τ.χλμ. ξηράς και, αν ληφθεί υπ' όψιν και το 20% της θαλάσσιας έκτασης συνολική επιφάνεια: 41.526 τ.χλμ. Η μισή χώρα βρίσκεται λιγότερο από ένα μέτρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, ενώ το 1/4 κάτω από το επίπεδο της θάλασσας. Το ψηλότερο σημείο της χώρας είναι το Φάαλσερμπερχ (Vaalserberg) στα νότια της χώρας, στα σύνορα με το Βέλγιο και τη Γερμανία και έχει υψόμετρο μόλις 321 μέτρα. Το χαμηλότερο σημείο της χώρας βρίσκεται στον δήμο Νίουερκερκ αν ντεν Άισελ (Ολλανδικά: Nieuwerkerk aan den IJssel) και βρίσκεται 6,76 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, αποτελώντας έτσι το χαμηλότερο σημείο της Ευρώπης. Το τοπίο είναι γενικά πιο λοφώδες στα ανατολικά και νότια της χώρας.
Η χώρα δεν διαθέτει καμία πόλη με πληθυσμό άνω του ενός εκατομμυρίου, ωστόσο οι τέσσερις μεγαλύτερες πόλεις (Άμστερνταμ, Ρότερνταμ, Χάγη και Ουτρέχτη) καθώς και άλλες περιοχές των περιχώρων, θεωρούνται συχνά ως ένα ενιαίο πολεοδομικό σύμπλεγμα, το οποίο ονομάζεται Ράντσταντ (Randstad) και περιλαμβάνει περίπου 7 εκατομμύρια κατοίκους.

[Ανώτερη και Ανώτατη εκπαίδευση]
Η τριτοβάθμια εκπαίδευση στην Ολλανδία προσφέρεται σε δύο τύπους ιδρυμάτων: ερευνητικά πανεπιστήμια («universiteiten» ή «Wetenschappelijk Onderwijs») και τα πανεπιστήμια επαγγελματικής εκπαίδευσης («Hogescholen» ή «Hoger Beroepsonderwijs»). Τα πρώτα περιλαμβάνουν γενικά πανεπιστήμια και πανεπιστήμια που ειδικεύονται στον τομέα της μηχανικής και της γεωργίας. Τα δεύτερα περιλαμβάνουν γενικά ιδρύματα και ιδρύματα που ειδικεύονται σε ένα συγκεκριμένο τομέα, όπως η γεωργία, καλές τέχνες και τέχνες του θεάματος, ή η κατάρτιση των εκπαιδευτικών.

Από τον Σεπτέμβριο του 2002, το σύστημα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Ολλανδία έχει οργανωθεί γύρω από ένα σύστημα τριών κύκλων σπουδών που αποτελείται από βασικό Πτυχίο, Μεταπτυχιακό και Διδακτορικό. Την ίδια στιγμή, το πιστωτικό σύστημα ECTS υιοθετήθηκε ως ένας τρόπος ποσοτικοποίησης των περιόδων σπουδών. Ωστόσο, το σύστημα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης συνεχίζει να είναι ένα δυαδικό σύστημα με μια διάκριση μεταξύ της εκπαίδευσης με προσανατολισμό στην έρευνα και επαγγελματικής τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το επίπεδο του προγράμματος σπουδών καθορίζει τόσο τον αριθμό των πιστωτικών μονάδων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση του προγράμματος και το πτυχίο που απονέμεται. Ένα WO πρόγραμμα βασικού πτυχίου απαιτεί την ολοκλήρωση 180 πιστωτικών μονάδων (3 χρόνια) και οι απόφοιτοι αποκτούν πτυχίο του Bachelor of Arts ή Bachelor of Science (BA / B.Sc.), ανάλογα με τον κλάδο. Ένα πρόγραμμα βασικού πτυχίου HBO απαιτεί την ολοκλήρωση 240 πιστωτικών μονάδων (4 χρόνια), και οι απόφοιτοι αποκτούν πτυχίο που αναφέρει τον τομέα των σπουδών τους, για παράδειγμα Πτυχίο Μηχανικού (B Eng.) ή Πτυχίο Νοσηλευτικής (B. Nursing).

Τα μεταπτυχιακά προγράμματα WO απαιτούν κυρίως την ολοκλήρωση 60 ή 120 μονάδων (1 ή 2 χρόνια). Ορισμένα προγράμματα απαιτούν 90 (1,5 έτη) ή πάνω από 120 μονάδες. Στη μηχανική, τη γεωργία, και τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, οι 120 μονάδες απαιτούνται πάντοτε. Οι απόφοιτοι αποκτούν το πτυχίο Master of Arts ή Μεταπτυχιακό τίτλο ειδίκευσης (MA / MSc). Τα μεταπτυχιακά προγράμματα HBO απαιτούν την ολοκλήρωση 60 έως 120 μονάδες, και οι απόφοιτοι αποκτούν πτυχίο που δείχνει το πεδίο μελέτης, για παράδειγμα Μεταπτυχιακό Κοινωνικής Εργασίας (MSW).

Ο τρίτος κύκλος της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης προσφέρεται μόνο από τα ερευνητικά πανεπιστήμια, τα οποία έχουν το δικαίωμα να απονείμουν τον υψηλότερο ακαδημαϊκό τίτλο σπουδών της χώρας, το διδακτορικό, το οποίο επιτρέπει σε ένα πρόσωπο να χρησιμοποιεί τον τίτλου δόκτωρ (Δρ.).

[Top 5 Ολλανδικά Πανεπιστήμια]

Σύμφωνα με τα στοιχεία του ολλανδικού οργανισμού Nuffic, το 2010 στη χώρα σπούδαζαν 1.026 Ελληνες, το 2018- 2.937, το 2019- 3.114 και το 2020- 3.266. Παρακάτω παρουσιάζουμε τα καλύτερα Πανεπιστήμια της Ολλανδίας, σύμφωνα με το Times Higher Education, το βρετανικό περιοδικό με ειδίκευση σε θέματα σχετικά με την τριτοβάθμια εκπαίδευση.

1. University of Amsterdam

Το Πανεπιστήμιο του Αμστερνταμ (UvA) ιδρύθηκε το 1632 και είναι το τρίτο αρχαιότερο πανεπιστήμιο της χώρας. Έχει περίπου 24.000 φοιτητές, γεγονός που το καθιστά το μεγαλύτερο στις Κάτω Χώρες με βάση τον αριθμό των φοιτητών. Το UvA βρίσκεται στην πρώτη 100άδα της παγκόσμιας κατάταξης πανεπιστημίων και κατατάσσεται ιδιαίτερα ψηλά στις ανθρωπιστικές και κοινωνικές επιστήμες. Το UvA είναι ένα από τα μεγαλύτερα ερευνητικά πανεπιστήμια της Ευρώπης, με βάση τον αριθμό των επιστημονικών δημοσιεύσεων και το ύψος της χρηματοδότησης της έρευνας. Προσφέρει περίπου 150 πτυχία που διδάσκονται στα αγγλικά, προσελκύοντας περισσότερους από 3.000 διεθνείς φοιτητές από περισσότερες από 100 χώρες.

2 . Delft University of Technology

Το Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο του Delft (TU Delft) είναι το μεγαλύτερο και παλαιότερο δημόσιο τεχνικό πανεπιστήμιο των Κάτω Χωρών και ιδρύθηκε ως βασιλική ακαδημία για πολιτικούς μηχανικούς. Ο αριθμός των φοιτητών στο TU Delft αυξήθηκε δραματικά μετά τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, γεγονός που οδήγησε στην παράδοση, η οποία εξακολουθεί να εφαρμόζεται, να υπάρχει μια "εβδομάδα υποδοχής" για τους νέους φοιτητές, η οποία είναι παρόμοια με τις εβδομάδες πρωτοετών στο Ηνωμένο Βασίλειο και τις ΗΠΑ. Παρόλο που τα αρχικά πανεπιστημιακά κτίρια βρίσκονταν στο κέντρο της πόλης, τώρα βρίσκονται όλα στο Mekelpark, την πανεπιστημιακή γειτονιά που σχεδιάστηκε για τον σκοπό αυτό. Ιδιαίτερα αξιοσημείωτη είναι η βιβλιοθήκη του TU Delft, η οποία έχει οροφή καλυμμένη με γρασίδι για φυσική μόνωση. Στο πανεπιστήμιο φοιτούν περίπου 18.000 φοιτητές, εκ των οποίων το ένα τέταρτο είναι διεθνείς.

3. Utrecht University

Το Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης ιδρύθηκε το 1636 και είναι ένα από τα σημαντικότερα ερευνητικά πανεπιστήμια της Ολλανδίας. Φοιτητές και προσωπικό από περίπου 118 διαφορετικές εθνικότητες σπουδάζουν και εργάζονται στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης. Το Πανεπιστήμιο προσφέρει περισσότερα από 90 μεταπτυχιακά προγράμματα και 12 προπτυχιακά προγράμματα. Όλα τα προγράμματα διδάσκονται στην αγγλική γλώσσα και καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα ακαδημαϊκών κλάδων, συμπεριλαμβανομένων των φυσικών επιστημών, του δικαίου, της διακυβέρνησης, των επιστημών της ζωής, των ανθρωπιστικών επιστημών, των κοινωνικών επιστημών και των γεωεπιστημών. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές φοιτητικές ενώσεις και λέσχες στο πανεπιστήμιο, που καλύπτουν τις παραστατικές τέχνες, τον αθλητισμό, τις τέχνες και πολλούς άλλους τομείς ενδιαφέροντος, ενώ υπάρχει μεγάλη ελληνική κοινότητα φοιτητών. Η Ουτρέχτη είναι από τις πιο όμορφες και ήσυχες πόλεις της Ολλανδίας, μόλις 45 λεπτά μακριά από το Άμστερνταμ.

4. University of Groningen

Το Πανεπιστήμιο του Groningen ιδρύθηκε το 1614 και προσφέρει 180 πτυχία πτυχίου και μεταπτυχιακών σπουδών με αγγλική διδασκαλία. Τα μαθήματα αυτά κατανέμονται σε 11 σχολές και εννέα μεταπτυχιακές σχολές. Περισσότερες από 120 εθνικότητες εκπροσωπούνται στις πανεπιστημιουπόλεις του πανεπιστημίου.

5. Wageningen University & Research

Το Wageningen University & Research είναι εξειδικευμένο στις γεωργικές και περιβαλλοντικές επιστήμες. Τα περισσότερα από τα προπτυχιακά προγράμματα BSc διδάσκονται σε ένα μείγμα ολλανδικών και αγγλικών, αλλά περίπου 40 προπτυχιακά και μεταπτυχιακά προγράμματα διδάσκονται αποκλειστικά στα αγγλικά. Για τον λόγο αυτό το πανεπιστήμιο προσελκύει σημαντικό αριθμό διεθνών φοιτητών – περίπου το 27% του συνόλου των φοιτητών προέρχεται από το εξωτερικό.
Συνολικά, το πανεπιστήμιο προσφέρει 20 διαφορετικά προπτυχιακά προγράμματα, συμπεριλαμβανομένων μαθημάτων στις επιχειρήσεις, τη διεθνή ανάπτυξη και τις επιστήμες υγείας.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στην Ολλανδία]
Η Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η οποία ξεκινά από την ηλικία των 12 ετών, είναι υποχρεωτική μέχρι την ηλικία των 16 ετών και προσφέρεται σε διάφορα επίπεδα. Τα δύο προγράμματα γενικής εκπαίδευσης που οδηγούν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι τα HAVO (πέντε χρόνια) και VWO (έξι έτη). Οι μαθητές εγγράφονται ανάλογα με τις ικανότητές τους, και αν και το VWO είναι πιο αυστηρό, τόσο το HAVO όσο και το VWO χαρακτηρίζονται ως επιλεκτικοί τύποι δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το πρόγραμμα σπουδών του VWO προετοιμάζει τους μαθητές για το πανεπιστήμιο και μόνο το δίπλωμα VWO παρέχει πρόσβαση σε WO (ερευνητικά πανεπιστήμια). Το δίπλωμα HAVO είναι η ελάχιστη προϋπόθεση για την εισαγωγή στο HBO (πανεπιστήμια επαγγελματικής εκπαίδευσης). Τα δύο τελευταία χρόνια του HAVO και τα τρία τελευταία χρόνια της VWO αναφέρονται ως δεύτερη φάση («tweede fase»), ή ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κατά τη διάρκεια αυτών των ετών, οι μαθητές επικεντρώνονται σε μία από τις τέσσερις θεματικές δέσμες («profielen»), κάθε μια από τις οποίες εστιάζει σε μια συγκεκριμένη περιοχή μελέτης, επιπρόσθετα της ικανοποίησης των γενικών απαιτήσεων εκπαίδευσης. Κάθε δέσμη έχει σχεδιαστεί για να προετοιμάσει τους μαθητές για τα προγράμματα σπουδών στο τριτοβάθμιο επίπεδο. Ένας μαθητής που εγγράφονται στα VWO ή HAVO μπορεί να επιλέξει από τις παρακάτω θεματικές δέσμες:

1) Επιστήμη και Τεχνολογία («Natuur en Techniek»)
2) Επιστήμη και Υγεία («Natuur en Gezondheid»)
3) Οικονομικά και Κοινωνία («Economie en Maatschappij»)
4) Πολιτισμός και Κοινωνία («Cultuur en Maatschappij»)

[Προγράμματα σπουδών HAVO και VWO]
Ένας μαθητής στα ανώτερα χρόνια του HAVO ή του VWO, θα πρέπει να επιλέξει ένα πρόγραμμα σπουδών στο τέλος του τρίτου έτους. Από το τέταρτο έτος και μετά, θα παρακολουθήσει διάφορα μαθήματα που αντιστοιχούν στο επιλεγμένο Πρόγραμμα σπουδών. Στο HAVO 5 και VWO 6 θα δώσει τελικά τις τελικές εξετάσεις σε αυτά τα μαθήματα. Υπάρχουν τέσσερα Προγράμματα σπουδών για να διαλέξει: Πολιτισμός και Κοινωνία, Οικονομία και Κοινωνία, Φύση και Υγεία και Φύση και Τεχνολογία.
Πολιτισμός και Κοινωνία
Η Ιστορία και τα Μαθηματικά C περιλαμβάνονται σε αυτό το Προγράμματα σπουδών. Για το γυμνάσιο, αυτό περιλαμβάνει επίσης ελληνικά και λατινικά. Επιπλέον, ο υποψήφιος μπορεί να επιλέξει από τα μαθήματα επιλογής Προγράμματα σπουδών όπως: Γαλλικά, Γερμανικά, Γεωγραφία, Κοινωνικές Επιστήμες, Οικονομικά, Φιλοσοφία και Τέχνη. Το Πρόγραμμα σπουδών Πολιτισμός και Κοινωνία μπορεί να ολοκληρωθεί χωρίς μαθηματικά στο HAVO. Τα υποχρεωτικά μαθήματα για αυτό το Πρόγραμμα σπουδών στο HAVO είναι η Ιστορία και μια Σύγχρονη Ξένη Γλώσσα. Ένας μαθητής με πρόγραμμα σπουδών Πολιτισμού και Κοινωνίας μπορεί να επιλέξει να προσθέσει τα μαθηματικά A ή τα μαθηματικά B. Τα Μαθηματικά C επικαλύπτονται με τα Μαθηματικά A, αλλά περιλαμβάνουν επίσης μαθήματα που δεν απαντώνται στα Μαθηματικά A

ή στα Μαθηματικά Β, όπως ο Λογικός Συλλογισμός και η Γεωμετρία (κατόψεις, διευρύνσεις και προοπτική). Τα Μαθηματικά C δεν είναι απαραίτητα ευκολότερα από τα Μαθηματικά Α.

Εάν ο μαθητής έχει μια ικανότητα για γλώσσες, είναι δημιουργικός και ενδιαφέρεται για την ιστορία και τον κόσμο γύρω τους, τότε, με αυτό το πρόγραμμα σπουδών, θα αναπτύξει τις γλωσσικές δεξιότητές του και τις γενικές γνώσεις τους. Σπουδές στα Μέσα ενημέρωσης, την επικοινωνία ή τη δημοσιογραφία ταιριάζουν καλά με αυτό το προφίλ.

Οικονομία και Κοινωνία
Το πρόγραμμα σπουδών της οικονομίας και της κοινωνίας είναι επίσης γνωστό ως «η διαδρομή προς τις επιχειρήσεις». Η αριθμητική και η έρευνα είναι σημαντικά χαρακτηριστικά αυτού του προγράμματος σπουδών. Σε αυτό το πρόγραμμα σπουδών, παρακολουθούν Οικονομικά, Μαθηματικά Α και Ιστορία. Είναι επίσης δυνατό να πάρουν τα Μαθηματικά Β αντί για τα Μαθηματικά Α. Επιπλέον, πρέπει να επιλέξουν από τα μαθήματα επιλογής :Γεωγραφία, Οικονομία των Επιχειρήσεων και Κοινωνικές Επιστήμες. Είναι επίσης δυνατό να επιλέξουν μια σύγχρονη ξένη γλώσσα. Εάν είστε καλοί στα Μαθηματικά και ενδιαφέρεστε για τα οικονομικά και τις επιχειρηματικές πτυχές της ζωής, τότε αυτό είναι ένα πολύ κατάλληλο Προγράμματα σπουδών για εσάς. Με αυτό το Προγράμματα σπουδών, θα αναπτύξουν τις μαθηματικές τους δεξιότητες και τις αναλυτικές δεξιότητές τους. Σπουδές στα οικονομικά, τη διοίκηση επιχειρήσεων ή το δίκαιο ταιριάζουν καλά με αυτό το πρόγραμμα σπουδών.

Επιστήμη και Υγεία
Το πρόγραμμα σπουδών Επιστήμη και Υγεία επικεντρώνεται στην υγεία, τη χημεία, το περιβάλλον, το νερό, τα φυτά και τα ζώα. Σε αυτό τα υποχρεωτικά μαθήματα είναι η Βιολογία και η Χημεία. Επιπλέον, είναι υποχρεωτική η λήψη Μαθηματικών Α ή Μαθηματικών Β. Μαθήματα επιλογής : Φυσική, Φύση, Ζωή και Τεχνολογία και Γεωγραφία.
Σε αυτό το πρόγραμμα σπουδών, μαθαίνουν για την προέλευση των πραγμάτων και πώς λειτουργούν. Αναπτύσσουν τις τεχνικές και αναλυτικές δεξιότητές τους. Εάν είστε καλοί στην επιστήμη και ενδιαφέρεστε για την υγεία και το περιβάλλον, τότε αυτό είναι ένα κατάλληλο πρόγραμμα σπουδών για εσάς. Σπουδές στην τεχνολογία τροφίμων, τις βιοϊατρικές επιστήμες ή τις επιστήμες υγείας ταιριάζουν καλά με αυτό το πρόγραμμα σπουδών.

Επιστήμη και Τεχνολογία

Σε αυτό το Προγράμματα σπουδών θα ακολουθήσετε τα μαθήματα: Μαθηματικά Β, Φυσική και Χημεία. Επιπλέον, πρέπει να επιλέξετε από τα μαθήματα επιλογής : Βιολογία, Μαθηματικά D, Φύση, Ζωή και Τεχνολογία και Επιστήμη Υπολογιστών.

Με αυτό το Προγράμματα σπουδών, θα αναπτύξετε τις τεχνικές και αναλυτικές δεξιότητές σας. Εάν είστε καλοί στα μαθηματικά, σας αρέσει να λύνετε προβλήματα και ενδιαφέρεστε για το περιβάλλον, τη φύση και το νερό, τότε αυτό είναι ένα κατάλληλο πρόγραμμα σπουδών για εσάς. Σπουδές στην αρχιτεκτονική, την ηλεκτρολογία ή την περιβαλλοντική επιστήμη ταιριάζουν καλά με αυτό το Προγράμματα σπουδών.

[Κοινά μαθήματα]
Τα κοινά θέματα του HAVO είναι:
- Ολλανδικά
- Αγγλικά
- Κοινωνιολογία
- Πληροφορική

- Φυσική αγωγή
- Εκπαίδευση Πολιτιστικών Τεχνών

Τα κοινά θέματα του VWO είναι:

- Ολλανδικά
- Αγγλικά
- Δεύτερη Ξένη Γλώσσα (για το Γυμνάσιο είναι τα Λατινικά ή τα Ελληνικά)
- Κοινωνιολογία
- Πληροφορική
- Φυσική αγωγή
- Πολιτιστική Καλλιτεχνική Εκπαίδευση (ή Κλασική Πολιτιστική Εκπαίδευση για το Γυμνάσιο)

[Εξετάσεις]

Μπορείτε να πάρετε μαζί σας το βασικό πακέτο εργαλείων παρακάτω για κάθε εξέταση.

- Υλικό γραφής, συμπεριλαμβανομένου χαρτιού γραφήματος
- (Σχέδιο) μολύβι
- Μπλε και κόκκινο στυλό
- Χάρακας με υποδιαίρεση χιλιοστού
- Πυξίδα
- Γεωμετρικό τρίγωνο
- Γομολάστιχα
- Μονότομο ολλανδικό λεξικό ή λεξικό από ξένη γλώσσα προς ολλανδικά ή από ολλανδικά προς ξένη γλώσσα (μόνο για γραπτές εξετάσεις)
- Αριθμομηχανή με «βασικές λειτουργίες».

Η βασική αριθμομηχανή δεν πρέπει:

- να συνδεθεί στην πρίζα
- να δημιουργεί θόρυβο
- να έχει τη δυνατότητα εμφάνισης γραφημάτων
- να έχει τη δυνατότητα αποστολής ή λήψης δεδομένων

Ειδικά για τα Μαθηματικά A, B, C

Υπολογιστής γραφικών και χαρτί «μελιμετρέ» σε cm^2

Σημείωση: η αριθμομηχανή πρέπει να βρίσκεται σε λειτουργία εξέτασης, πράγμα που σημαίνει ότι οι εφαρμογές, τα προγράμματα και τα αρχεία (κειμένου) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν και δεν είναι διαθέσιμη οποιαδήποτε λειτουργία CAS. Επίσης, η αριθμομηχανή δεν πρέπει να είναι συνδεδεμένη στο δίκτυο και δεν πρέπει να περιέχει κάρτα SD. Επιτρέπεται να φέρετε μόνο μία αριθμομηχανή και δεν επιτρέπεται να δανειστείτε ο ένας τον άλλον αριθμομηχανές. Πρέπει να είναι δυνατός ο έλεγχος ανά πάσα στιγμή κατά τη διάρκεια της εξέτασης εάν ένα μηχάνημα βρίσκεται στη σωστή λειτουργία εξέτασης στα Ολλανδικά χωρίς να ενοχλεί τον υποψήφιο.

Οι μηχανές που σε κάθε περίπτωση επιτρέπονται το 2024:

- Casio: • fx-9860GII(SD); • fx-CG50.
- Hewlett Packard: • HP Prime
- Texas Instruments: • TI-84 Plus CE-T; • TI-Nspire CX (έκδοση χωρίς CAS); • TI-Nspire CX II-T (έκδοση χωρίς CAS).
- NumWorks: • η αριθμομηχανή γραφικών της NumWorks

Η σχολική εξέταση (SE) ενός μαθήματος προσμετράται στο 50% του τελικού βαθμού για το μάθημα αυτό. Το υπόλοιπο 50% είναι ο βαθμός της τελικής εξέτασης (CE) αυτού του μαθήματος. Με άλλα λόγια: ((SE + CE) / 2) = τελικός βαθμός. Για τα μαθήματα στα οποία δεν λαμβάνεται τελική εξέταση, η σχολική εξέταση καθορίζει το 100% του τελικού βαθμού.

Ακολουθούν τα εξεταστικά δοκίμια των Μαθηματικών A,B,C με τις λύσεις τους. Επειδή τα μαθηματικά B είναι πιο κοντά στην ύλη των ελληνικών εξετάσεων παραθέσαμε και το δεύτερο εξεταστικό δοκίμιο του Ιουνίου.

Εξετάσεις VWO 2023 περίοδος 1
Πέμπτη 11 Μαΐου 13:30-16:30
μαθηματικά A
Αυτή η εξέταση αποτελείται από 22 ερωτήσεις.
Για αυτήν την εξέταση μπορούν να ληφθούν το πολύ 80 πόντοι.
Κάθε αριθμός ερώτησης δείχνει πόσους πόντους μπορούν να κερδίσουν με μια σωστή απάντηση.
Εάν μια ερώτηση απαιτεί εξήγηση, επεξήγηση ή υπολογισμό, η απάντηση συνήθως δεν βαθμολογείται εάν λείπει αυτή η εξήγηση, η εξήγηση ή ο υπολογισμός.
Μην δίνετε περισσότερες απαντήσεις (λόγοι, παραδείγματα κ.λπ.) από αυτές που ζητούνται.
Για παράδειγμα, εάν ζητηθούν δύο λόγοι και παρέχετε περισσότερους από δύο λόγους, μόνο οι δύο πρώτοι θα προσμετρηθούν στην αξιολόγηση.

Τυπολόγιο

Παραγώγιση

κανόνας	Συνάρτηση	παράγωγος
κανόνας αθροίσματος	$\mathbf{s(x) = f(x) + g(x)}$	$\mathbf{s'(x) = f'(x) + g'(x)}$
κανόνας διαφοράς	$\mathbf{s(x) = f(x) - g(x)}$	$\mathbf{s'(x) = f'(x) - g'(x)}$
Κανόνας γινομένου	$\mathbf{p(x) = f(x) \cdot g(x)}$	$\mathbf{p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$
κανόνας πηλίκου	$\mathbf{q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$	$\mathbf{q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$
κανόνας της αλυσίδας	$\mathbf{k(x) = f(g(x))}$	$\mathbf{k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ $\mathbf{\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}}$

Κανόνας λογαρίθμων	συνθήκη
$\mathbf{{}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)}$	$\mathbf{g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0}$
$\mathbf{{}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(\frac{a}{b})}$	$\mathbf{g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0}$
$\mathbf{{}^{g}\log(a^{p}) = p \cdot {}^{g}\log(a)}$	$\mathbf{g > 0, g \neq 1, a > 0}$
$\mathbf{{}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}}$	$\mathbf{g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1}$

Καταδύσεις

Η Karima παρακολουθεί μαθήματα καταδύσεων για αρχάριους. Το φυλλάδιο θεωρίας εξηγεί ότι υπάρχει μεγαλύτερη πίεση κάτω από το νερό από ότι πάνω από το νερό.

Στην επιφάνεια η πίεση είναι 1 bar. Επειδή ένας δύτης αναπνέει αέρα σε μεγαλύτερο βάθος σε υψηλότερη πίεση, χρησιμοποιεί την παροχή αέρα πιο γρήγορα και ο μέγιστος χρόνος κατάδυσης είναι μικρότερος.

Λόγω του βάρους του νερού, η πίεση κάτω από το νερό αυξάνεται γραμμικά με το βάθος: δείτε τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας

βάθος	Πίεση
0 μ	1 bar
10 μ	2 bar
20 μ	3 bar
30 μ	4 bar
40 μ	5 bar

Ένας δύτης μεταφέρει πεπιεσμένο αέρα σε μία φιάλη κατάδυσης για να αναπνεύσει υποβρύχια. Είναι ζωτικής σημασίας να προγραμματίσετε μία κατάδυση καλά, έτσι ώστε ο δύτης να μην μένει ποτέ χωρίς αέρα. Ο μέγιστος χρόνος κατάδυσης με βάση τη διαθέσιμη παροχή αέρα μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με το φυλλάδιο θεωρίας της Karima με τον ακόλουθο τύπο: $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{V(b-e)}}{\mathbf{q \cdot p}}$

Εδώ ο μέγιστος χρόνος κατάδυσης σε σταθερό βάθος σε λεπτά, V είναι η χωρητικότητα της φιάλης κατάδυσης σε λίτρα, b και e είναι η πίεση στη φιάλη σε bar στην αρχή και στο τέλος της κατάδυσης αντίστοιχα, q είναι η κατανάλωση αέρα του δύτη σε λίτρα/λεπτό και p η πίεση στο βάθος κατάδυσης.

Η Karima σχεδιάζει να πραγματοποιήσει μία κατάδυση σε βάθος 10 μέτρων. Διαθέτει μία φιάλη κατάδυσης χωρητικότητας 14 λίτρων που είναι γεμάτη με αέρα σε πίεση 200 bar. Η Karima αρχικά δεν γνωρίζει την κατανάλωση αέρα της και χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η κατανάλωση αέρα ενός δύτη συγκρίσιμη με αυτήν είναι 18 λίτρα/λεπτό. Στο τέλος της κατάδυσης θέλει να έχει τουλάχιστον 50 bar πίεση στη φιάλη της ως εφεδρεία.

1) Χρησιμοποιήστε αυτές τις πληροφορίες για να υπολογίσετε τον μέγιστο αριθμό λεπτών που επιτρέπεται να βουτήξει να διαρκέσει. Δώστε την απάντησή σας σε ολόκληρα λεπτά. 3π

Σημείωση 1 Υπάρχουν επίσης τύποι που λαμβάνουν υπόψη τη διάρκεια της κατάδυσης και την πίεση κατά την κάθοδο και την ανάβαση, αλλά θα το αγνοήσουμε σε αυτήν την ανάθεση.

Στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε τιμή συγκρίσιμου δύτη για την κατανάλωση αέρα της Karima. Για πιο ακριβή υπολογισμό, θέλει να υπολογίσει την ατομική της κατανάλωση αέρα με βάση δεδομένα από προηγούμενη κατάδυση. Η Καρίμα προηγουμένως έκανε μια κατάδυση με βάθος κατάδυσης 15 μέτρων. Ξεκίνησε με μια γεμάτη φιάλη κατάδυσης 14 λίτρων με πίεση 200 bar. Στο τέλος της κατάδυσής της, μετά από 49 λεπτά, είχε ακόμα 63 bar πίεση στη φιάλη κατάδυσής της.

2) Υπολογίστε την κατανάλωση αέρα σε λίτρα ανά λεπτό κατά τη διάρκεια αυτής της κατάδυσης. Να σου δώσει απάντηση με ένα δεκαδικό ψηφίο. 4π

Για να υπολογίσετε πιο γρήγορα τον μέγιστο χρόνο κατάδυσης, είναι χρήσιμο να εισαγάγετε το βάθος κατάδυσης d σε μέτρα στον τύπο αντί για την πίεση p στο βάθος κατάδυσης. Ο τύπος πρέπει να προσαρμοστεί για αυτό.

3) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα, συντάξτε έναν τέτοιο τύπο για το T. 3π

Για μια κατάσταση με φιάλη 10 λίτρων με αρχική πίεση 180 bar, τελική πίεση 60 bar και κατανάλωση αέρα δύτη 25 λίτρα/λεπτό, ο ακόλουθος τύπος ισχύει για τον μέγιστο χρόνο κατάδυσης: $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1200}}{\mathbf{2{,}5d+25}}$

4) Χρησιμοποιώντας την παράγωγο του T, διερευνήστε εάν ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος κατάδυσης σε αυτήν την κατάσταση αυξάνεται ή μειώνεται με την αύξηση του βάθους κατάδυσης. 4π

Λύση

1) Στα 10μ βάθος η πίεση $\mathbf{p = 2\ bar}$ άρα ο μέγιστος χρόνος σε λεπτά είναι $\mathbf{T = \frac{V(b-e)}{q \cdot p} = \frac{14(200-50)}{18 \cdot 2} = 58,33 \approx \boxed{58}}$

2) Στα 15μ βάθος η πίεση $\mathbf{p = 2,5\ bar}$ άρα $\mathbf{T = \frac{V(b-e)}{q \cdot p} \Longrightarrow 49 = \frac{14(200-63)}{q \cdot 2,5} \Longrightarrow q = \frac{14(200-63)}{49 \cdot 2,5} = 15,657 \approx \boxed{15,7}}$ λίτρα/λεπτό.

3) Αφού η πίεση αυξάνεται γραμμικά ως προς το βάθος θα ισχύει ότι $\mathbf{p(d) = a \cdot d + \beta}$. Έχουμε $\mathbf{1 = p(0) = a \cdot 0 + \beta \Longrightarrow \beta = 1}$ και $\mathbf{2 = p(10) = a \cdot 10 + \beta = 10\alpha + 1 \Longrightarrow \alpha = 0,1}$ Άρα $\mathbf{p(d) = 0,1 \cdot d + 1}$
Συνεπώς ο τύπος $\mathbf{T = \frac{V(b-e)}{q \cdot p}}$ γίνεται $\boxed{\mathbf{T = \frac{V(b-e)}{q \cdot (0,1 \cdot d + 1)}}}$

4) Έχω $\mathbf{T(d) = \frac{1200}{2,5d+25}}$ με $\mathbf{T'(d) = -\frac{1200 \cdot 2,5}{(2,5d+25)^2} < 0}$ για κάθε $\mathbf{d}$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος κατάδυσης σε αυτήν την κατάσταση μειώνεται με την αύξηση του βάθους κατάδυσης.

Το αγγελικό μερίδιο

Το παραδοσιακά παρασκευασμένο ουίσκι, αποθηκεύεται σε ξύλινα βαρέλια για αρκετά χρόνια για να ωριμάσει. Γενικά, όσο περισσότερο παλαιώνει το ουίσκι, τόσο καλύτερη είναι η γεύση του. Ωστόσο, η μακροχρόνια ωρίμανση έχει ένα μειονέκτημα: μέρος του ουίσκι χάνεται επειδή απορροφάται στο ξύλινο βαρέλι ή εξατμίζεται.

Το μέρος του ουίσκι που χάνεται κατά την ωρίμανση ονομάζεται αγγελικό μέρος . Το μερίδιο αγγέλου εκφράζεται ως ποσοστό ανά έτος.

Το αγγελικό μέρος ενός συγκεκριμένου τύπου ουίσκι είναι 4,5%. Ας υποθέσουμε ότι το μερίδιο αγγέλου είναι το ίδιο κάθε χρόνο.

5) Υπολογίστε πόσο χρόνο θα χρειαστεί μέχρι να μείνει μόνο το μισό ουίσκι.

Δώστε την απάντησή σας σε χρόνια και ολόκληρους μήνες. 3π

Στην πραγματικότητα, με το παραδοσιακά παρασκευασμένο ουίσκι, η μερίδα αγγέλου δεν είναι η ίδια κάθε χρόνο. Αυτό το μέρος είναι πολύ μεγαλύτερο, ειδικά στην αρχή της περιόδου ωρίμανσης, επειδή το ουίσκι πρέπει ακόμα να διεισδύσει στο ξύλο.

Το Pappy Van Winkle 23 είναι ένα ιδιαίτερο ουίσκι που παράγεται με παραδοσιακό τρόπο και, όπως υποδηλώνει το όνομα, ωριμάζει για 23 χρόνια σε ξύλινο βαρέλι πριν εμφιαλωθεί. Ο ιστότοπος του κατασκευαστή αναφέρει τα εξής:

«Η διαδικασία ωρίμανσης ξεκινά με ένα βαρέλι που περιέχει 200 λίτρα ουίσκι. Μέχρι και 10% χάνεται τον πρώτο χρόνο γιατί το ουίσκι απορροφάται στο ξύλο. Για τα επόμενα 8 χρόνια, θα χαθεί 4% ετησίως και στη συνέχεια 3% ετησίως. Τέλος, 6 λίτρα του τελικού προϊόντος χάνονται κατά το γέμισμα των φιαλών. Το Pappy Van Winkle 23 πωλείται σε φιάλες των 750 ml.»

6) Υπολογίστε πόσα τέτοια μπουκάλια μπορούν να γεμίσουν, υποθέτοντας ότι αρχικά είχαμε στα βαρέλια 200 λίτρα ουίσκι. 4π

Τα περισσότερα ουίσκι αυτές τις μέρες δεν ωριμάζουν πλέον σε ξύλινα βαρέλια. Αντίθετα, το ουίσκι τοποθετείται σε μεγάλους μεταλλικούς βραστήρες και προστίθενται ροκανίδια. Αυτό περιορίζει το μερίδιο αγγέλου σε περίπου 3% ετησίως. Για το υπόλοιπο της εργασίας υποθέτουμε ότι το μερίδιο αγγέλου είναι 3% κάθε χρόνο.

Στη μαζική παραγωγή ουίσκι, διασφαλίζεται ότι η συνολική ποσότητα ουίσκι παραμένει η ίδια, συμπληρώνοντας ετησίως τον βραστήρα με νεοπαραγόμενο ουίσκι. Αυτό δημιουργεί ένα μείγμα που μόνο εν μέρει αποτελείται από το αρχικό ουίσκι.

Για παράδειγμα: Ένας βραστήρας περιέχει 500 λίτρα ουίσκι. Μετά από ένα χρόνο, το 3% αυτού, ή 15 λίτρα, έχει χαθεί. Στο τέλος εκείνης της χρονιάς, προστίθενται στον βραστήρα 15 λίτρα ουίσκι νέας παραγωγής, ώστε να περιέχει 485 λίτρα ουίσκι 1 έτους και 15 λίτρα ουίσκι 0 ετών. Στο τέλος του δεύτερου έτους, άλλα 15 λίτρα έχουν χαθεί και αυτό επίσης αναπληρώνεται με ουίσκι που παράγεται πρόσφατα κ.ο.κ.

Ο πίνακας δείχνει τη σύνθεση του μείγματος στο τέλος του έτους για μία σειρά ετών, σε ποσοστά.

πίνακας

	ηλικία του ουίσκι				
έτος (n)	n	n -1	n -2	n -3	n -4
0	100	0	0	0	0
1	97	3	0	0	0
2	94,09	2,91	3	0	0
3	91,27	2,82	2,91	3	0
4	88,53	2,74	2,82	2.91	3
5	85,87	…	…	…	…

Για παράδειγμα, στον πίνακα μπορείτε να διαβάσετε ότι στο τέλος του 4ου έτους το 88,53% του μείγματος αποτελείται από ουίσκι 4 ετών, 2,74% από ουίσκι 3 ετών, 2,82% από ουίσκι 2 ετών, 2 ,91% από Ουίσκι 1 έτους και 3% από νεοπαραγόμενο ουίσκι (ουίσκι 0 ετών).
7) Υπολογίστε ποιο ποσοστό του μείγματος στο τέλος του 7ου έτους αποτελείται από ουίσκι 5 ετών και άνω. Δώστε την απάντησή σας με δύο δεκαδικά ψηφία. 4π

Αν κοιτάξουμε μόνο το ουίσκι που προστέθηκε αργότερα σε ένα δεδομένο έτος, τα ποσοστά του ουίσκι που προστέθηκαν αργότερα για εκείνο το έτος σχηματίζουν μια γεωμετρική ακολουθία.
Για να υπολογίσετε ποιο ποσοστό ενός μείγματος ουίσκι αποτελείται από ουίσκι που προστέθηκε αργότερα, μπορείτε να προσθέσετε τους όρους από αυτήν τη γεωμετρική ακολουθία.
Ισχύει λοιπόν: $\mathbf{T(n)=\sum_{k=0}^{n-1} W(k)}$ με $\mathbf{W(k)=3\cdot 0,97^{k}}$
Σε αυτόν τον τύπο, το $\mathbf{T(n)}$ είναι το ποσοστό του ουίσκι που προστέθηκε αργότερα μετά από $\mathbf{n}$ χρόνια και το $\mathbf{W(k)}$ είναι το ποσοστό του ουίσκι ηλικίας $\mathbf{k}$ ετών στο μείγμα.
8) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο αθροίσματος, υπολογίστε ποιο ποσοστό του μείγματος μετά από 7 χρόνια αποτελείται από όλο το ουίσκι που προστέθηκε αργότερα. Δώστε την απάντησή σας με ένα δεκαδικό ψηφίο. 2π

Λύση
5) Η ποσότητα του ουίσκι ακολουθεί εκθετική συνάρτηση με $\mathbf{f(0)=1}$ που σημαίνει ότι αρχικά έχουμε το 100% της ποσότητας, $\mathbf{f(1)=100\%-4,5\%=0,955}$ της αρχικής ποσότητας ουίσκι, $\mathbf{f(2)=0,955^{2}}$, δηλαδή $\mathbf{f(x)=\ 0,955^{x}}$, όπου x ο χρόνος. Οπότε για το μισό ουίσκι έχουμε $\mathbf{0,5=0,955^{x}}\Rightarrow$ $\mathbf{x=\frac{ln0,5}{ln0,955}=15,054}$ που σημαίνει ότι θα χρειαστούν 15 χρόνια και 1 μήνας.
6) Έχω ότι μετά από 23 χρόνια απομένουν $\mathbf{200\cdot 0,9\ \cdot 0,96^{8}\cdot 0,97^{14}-6=78,77}$ λίτρα.
Άρα γεμίζουμε $\mathbf{78,77/0,75=105,02}$, δηλαδή 105 φιάλες των 750 ml.
7) Το ποσοστό του μείγματος στο τέλος του 7ου έτους που αποτελείται από ουίσκι 7 ετών είναι $\mathbf{100*0,97^{7}}$(%).
Το ποσοστό του μείγματος στο τέλος του 7ου έτους που αποτελείται από ουίσκι 6 ετών είναι $\mathbf{3*0,97^{6}}$(%)
Ομοίως το ποσοστό του μείγματος στο τέλος του 7ου έτους που αποτελείται από ουίσκι 5 ετών είναι $\mathbf{3*0,97^{5}}$(%)
Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι $\mathbf{100*0,97^{7}+3*0,97^{6}+3*0,97^{5}}=\boxed{\mathbf{85,87}(\%)}$
8) Έχω $\mathbf{T(7)=\sum_{k=0}^{6}\ W(k)=\sum_{k=0}^{6}\ 3\cdot 0,97^{k}=3\cdot\sum_{k=0}^{6}\ 0,97^{k}=3\cdot\frac{1-0,97^{7}}{1-0,97}}=\boxed{\mathbf{19,2}(\%)}$

Βάρος και άθληση

Στις αρχές αυτού του αιώνα, ο βιολόγος Yunsheng Ma, μαζί με άλλους βιολόγους, διεξήγαγαν έρευνα για τη σχέση μεταξύ του σωματικού βάρους, της ποσότητας άσκησης και των διατροφικών συνηθειών κατά τη διάρκεια των διακοπών μίας ομάδας Αμερικανών.

Η τιμή MET (Μεταβολικό Ισοδύναμο της Εργασίας) παίζει ρόλο στην έρευνα για την επίδραση της άσκησης στο σωματικό βάρος . Η τιμή MET είναι μία μονάδα για την ποσότητα ενέργειας που κοστίζει μία συγκεκριμένη φυσική δραστηριότητα σε σύγκριση με την ποσότητα ενέργειας που απαιτείται σε ηρεμία. Ένα MET αντιστοιχεί στον μεταβολικό ρυθμό ηρεμίας, την ποσότητα ενέργειας που δαπανάται ενώ κάθεστε ακίνητοι. Η τιμή MET της σωματικής δραστηριότητας κυμαίνεται από 0,9 MET (κατά τη διάρκεια του ύπνου) έως 18 MET (κατά τη διάρκεια έντονης άσκησης). Ο πίνακας δείχνει την τιμή MET για ενήλικες άνδρες για έναν αριθμό δραστηριοτήτων.

δραστηριότητα	Τιμή MET 18 ετών και άνω
ακινησία	1
περπάτημα, αργό, 3-5 χλμ./ώρα	3.5
περπάτημα, γρήγορο, 5-6	4.3
ποδηλασία, αργή, 16-19 χλμ./ώρα	4.0
ποδηλασία, γρήγορη, 19-22 km/h	8.0
τρέξιμο	8.0
Ποδηλασία, σπορ	15.8
κολύμβηση, αναψυχής	4.0
κολύμβηση, σπορ	9.8

Χρησιμοποιώντας την τιμή MET και τη διάρκεια της δραστηριότητας, μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των λεπτών MET ή των ωρών MET μίας δραστηριότητας. Για παράδειγμα, εάν ένας ενήλικος άνδρας κάνει ήρεμα ποδήλατο για 45 λεπτά, λέγεται ότι έχει εκτελέσει 180 λεπτά MET ή 3 ώρες MET. Αυτό χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον βαθμό άσκησης.

Ένας ενήλικος άνδρας περπατά μία πίστα 8 km κάθε εβδομάδα με ταχύτητα 4 km/h σε 2 ώρες. Θέλει να πετύχει περισσότερες ώρες MET και αποφασίζει να περπατήσει την ίδια πίστα με ταχύτητα 6 χλμ./ώρα. Ο χρόνος που 'απομένει' από αυτές τις 2 ώρες ξοδεύεται ακίνητος.

9) Εξετάστε εάν αυτό παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα για αυτόν. 5π

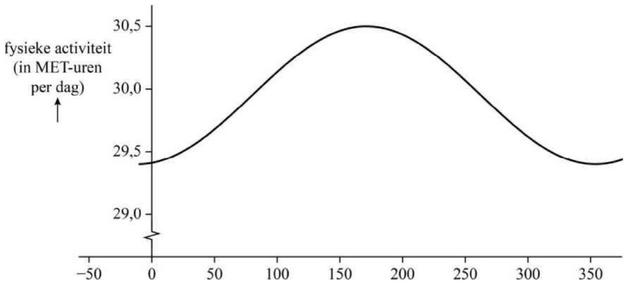
Για να πετύχει περισσότερες ώρες MET, αυτός ο ενήλικος άνδρας θέλει να κάνει ποδήλατο για μία ώρα ή να τρέχει για μία ώρα το πολύ 3 φορές την εβδομάδα (την Τρίτη, την Τετάρτη και/ή την Πέμπτη), επιτυγχάνοντας έτσι ακριβώς 12 ώρες MET συνολικά. Για παράδειγμα, μπορεί να τρέξει την Τρίτη και να ποδηλατήσει ήρεμα την Πέμπτη. Θέλει να κάνει μία δραστηριότητα για μια ώρα σε μια μέρα, επομένως η αλλαγή δραστηριοτήτων μετά από μισή ώρα δεν είναι επιλογή για αυτόν.

10) Ερευνήστε πόσα διαφορετικά εβδομαδιαία προγράμματα μπορεί να κάνει. 4π

Μετά τις διακοπές, οι Αμερικανοί φαίνεται να είναι πιο βαρείς κατά μέσο όρο από πριν.

Αυτό θα μπορούσε εν μέρει να οφείλεται στον περιορισμένο όγκο άσκησης κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Το Σχήμα 1 δείχνει τη σχέση μεταξύ της συνολικής φυσικής δραστηριότητας ανά ημέρα και της μέρας για την ομάδα των Αμερικανών που μελετήθηκαν. Εδώ το **t = 0** αντιστοιχεί στην 1η Ιανουάριου.

Σχήμα 1



—»Χρόνος(σε ημέρες)

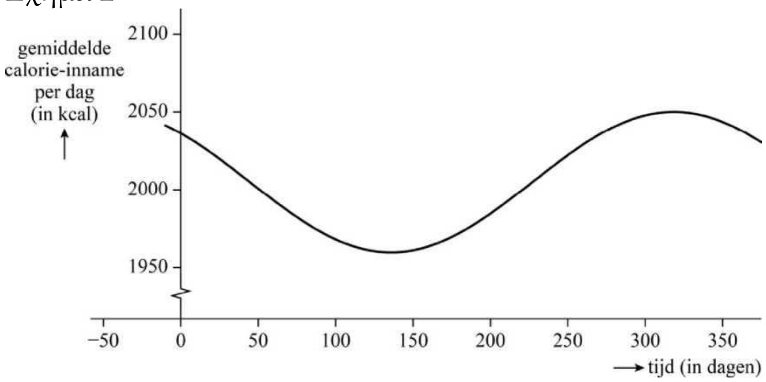
Η συνολική σωματική δραστηριότητα ανά ημέρα ποικίλλει ετησίως από τουλάχιστον 29,4 ώρες MET την ημέρα έως 30,5 ώρες MET την ημέρα. Στις 21 Δεκεμβρίου, τη συντομότερη ημέρα, η συνολική φυσική δραστηριότητα ανά ημέρα είναι ελάχιστη. Η συνολική φυσική δραστηριότητα μοντελοποιείται με έναν τύπο της μορφής: $\mathbf{F = a + b\sin\,(c(t - d))}$

Όπου $\mathbf{F}$ είναι η συνολική φυσική δραστηριότητα σε ώρες MET ανά ημέρα και $\mathbf{t}$ είναι ο χρόνος σε ημέρες με $\mathbf{t = 0}$ την 1η Ιανουάριου.

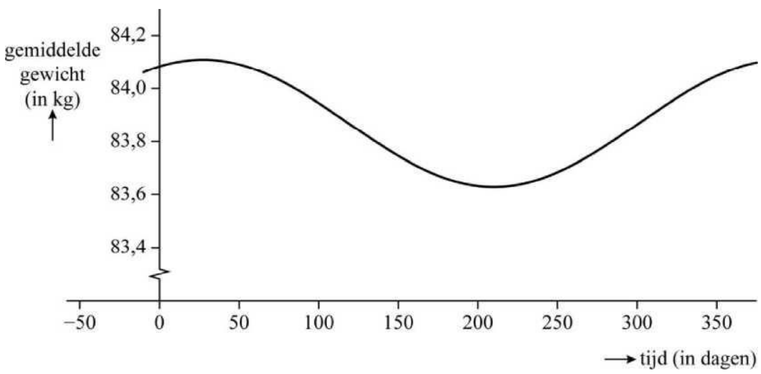
11) Υπολογίστε τις τιμές των $\mathbf{a, b, c}$ και $\mathbf{d}$. Τα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\mathbf{b}$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, το $\mathbf{c}$ με πέντε δεκαδικά ψηφία και το $\mathbf{d}$ σε ακέραια μορφή. 5π

Καταγράφηκε επίσης πόσες θερμίδες κατανάλωναν οι συμμετέχοντες κατά μέσο όρο την ημέρα κατά τη διάρκεια του έτους και πώς το μέσο βάρος των συμμετεχόντων ποικίλλει κατά τη διάρκεια του έτους. Δείτε τα σχήματα 2 και 3.

Σχήμα 2



σχήμα 3



Η μέση πρόσληψη θερμίδων διαμορφώνεται με τον τύπο: $\mathbf{C = 2005 + 45\sin\,(0,0172t + 2,3756)}$

Εδώ C είναι η μέση πρόσληψη θερμίδων σε kcal ανά ημέρα και t είναι πάλι ο χρόνος σε ημέρες με $\mathbf{t = 0}$ την 1η Ιανουάριου.

Το μέσο βάρος διαμορφώνεται με τον τύπο: $\mathbf{G = 83,87 + 0,24\sin\,(0,0172t + 1,1017)}$

Όπου G είναι το μέσο βάρος σε kg και t ο χρόνος σε ημέρες με $\mathbf{t = 0}$ την 1η Ιανουάριου.

Η μεγαλύτερη διαφορά στο μέσο βάρος σε ένα χρόνο είναι μικρότερη σε ποσοστιαία βάση από τη μεγαλύτερη διαφορά στη μέση πρόσληψη θερμίδων σε ένα χρόνο.

12) Δείξτε το χρησιμοποιώντας τους τύπους. 4π

Το μέσο βάρος φτάνει στο μέγιστο αργότερα από τη μέση πρόσληψη θερμίδων.

13) Υπολογίστε πόσες ημέρες αργότερα είναι σύμφωνα με τους τύπους. 3π

Λύση

9) Στο αρχικό σενάριο εκτελεί $\mathbf{2\cdot 3,5=7}$ ώρες MET. Στο δεύτερο σενάριο, θα χρειαστεί $\mathbf{8/6}$ ώρες για να περπατήσει την πίστα. Άρα θα εκτελέσει $\mathbf{8/6\cdot 4,3+(2-8/6)=6,4}$ ώρες MET, άρα δεν θα πετύχει περισσότερες ώρες MET.

10) 1ο σενάριο: 3 ημέρες χαλαρής ποδηλασίας από μια ώρα με $\mathbf{3\cdot 4=12}$ ώρες MET.

2ο σενάριο:1 ημέρα χαλαρής ποδηλασίας (4 ώρες MET) και 1 ημέρα έντονης ποδηλασίας ή τρεξίματος (8 ώρες MET) στις 2 από τις τρεις μέρες, σύνολο $\mathbf{4+8=12}$ ώρες MET.

Αυτό το σενάριο μπορεί να γίνει με $\mathbf{3\cdot 2\cdot 2=12}$ τρόπους στις 3 ημέρες (αφού έχει 3 επιλογές για την μέρα χαλαρής ποδηλασίας, στη συνέχεια 2 επιλογές για την μέρα της 2ης δραστηριότητας και 2 επιλογές για την δεύτερη δραστηριότητα).

Τελικά έχουμε $\mathbf{1+12=13}$ (διαφορετικά εβδομαδιαία προγράμματα)

11) Η 21η Δεκεμβρίου είναι η $\mathbf{t=354}$ με $\mathbf{F(354)=F_{min}\Rightarrow 29,4=\alpha-b}$

Έχω $\mathbf{b=\frac{\alpha+b-(\alpha-b)}{2}=\frac{F_{max}-F_{min}}{2}=\frac{30,5-29,4}{2}=\boxed{0,55}}$ άρα $\mathbf{\alpha=29,4+0,55=\boxed{29,95}}$

Έχω $\mathbf{T=\frac{2\pi}{c}\Rightarrow 365=\frac{2\pi}{c}\Rightarrow c=\frac{2\pi}{365}\Rightarrow c=\boxed{0,01721}}$

Άρα $\mathbf{F(t)=29,95+0,55\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-d)\right)\xRightarrow{F(354)=29,4}29,4=29,95+0,55\sin\left(\frac{2\pi}{365}(354-d)\right)\Rightarrow}$ $\mathbf{-1=\sin\left(\frac{2\pi}{365}(354-d)\right)\Rightarrow\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{365}(354-d)\Rightarrow 273,75=354-d\Rightarrow d=80,25\approx\boxed{80}}$.

12) Έχω $\mathbf{\frac{G_{max}-G_{min}}{G_{min}}=\frac{83,87+0,24-(83,87-0,24)}{83,87-0,24}=\frac{2*0,24}{83,63}=0,0057=0,57\%}$

Ομοίως έχω $\mathbf{\frac{C_{max}-C_{min}}{C_{min}}=\frac{2005+45-(2005-45)}{2005-45}=\frac{2*45}{1960}=0,0459=4,59\%>0,57\%}$

13) Έστω t_c και t_G η μέρα του χρόνου που το μέσο βάρος και η μέση πρόσληψη θερμίδων αντίστοιχα φτάνουν στο μέγιστο. Αφού η συνάρτηση του ημιτόνου φτάνει στο μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$, **έχω** $\mathbf{\frac{\pi}{2}=0,0172t_c+2,3756=0,0172t_G+1,1017\Rightarrow 2,3756-1,1017=0,0172(t_G-t_c)\Rightarrow t_G-t_c=\frac{2,3756-1,1017}{0,0172}=74,063\approx\boxed{74}}$. Άρα το μέσο βάρος φτάνει στο μέγιστο 74 μέρες αργότερα από τη μέση πρόσληψη θερμίδων.

Πεταλούδες στην Ολλανδία

Το Ίδρυμα Πεταλούδων στην Ολλανδία διεξάγει ετήσιες μετρήσεις πεταλούδων.

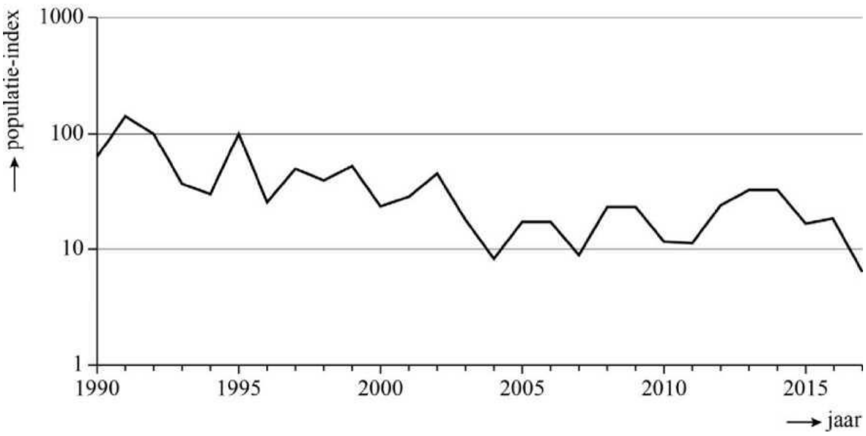
Ο συνολικός αριθμός των πεταλούδων μειώθηκε κατά 40% την περίοδο 1992-2017. Εδώ υπάρχει υποψία εκθετικής τάσης.

14) Υπολογίστε την ετήσια ποσοστιαία μείωση σε αυτή την περίοδο, υποθέτοντας η εκθετική τάση. Δώστε την απάντησή σας με ένα δεκαδικό ψηφίο. 4π

Η πεταλούδα ρείκι είναι ένα από τα είδη πεταλούδων των οποίων ο αριθμός έχει μειωθεί απότομα. Δείτε το σχήμα 1.

Στο σχήμα 1, χρησιμοποιείται μια λογαριθμική κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα. Αυτός ο άξονας δεν δείχνει τον αριθμό των πεταλούδων ρείκι αλλά τον πληθυσμιακό δείκτη .

Αυτός ο δείκτης δείχνει το ποσοστό των πεταλούδων ρείκι σε σύγκριση με τον συνολικό αριθμό των πεταλούδων αυτών το 1992.



σχήμα 1 πεταλούδες ρείκι

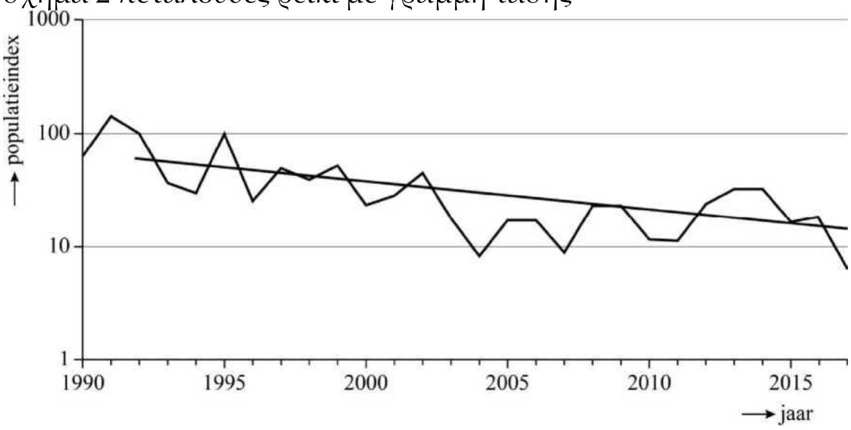
Ο πληθυσμιακός δείκτης για το έτος 1992 είναι επομένως 100. Το 1995 ο πληθυσμιακός δείκτης είναι και πάλι (περίπου) 100. Με άλλα λόγια: το 1995 υπήρχαν (περίπου) τόσες πεταλούδες όσες και το 1992.

Αφού ο αριθμός των πεταλούδων ρείκι φαινόταν σταθερός από το 2003 και μετά φαινόταν να ανακάμπτει κάπως την περίοδο 2011 -2013, το 2017 ήταν μια άλλη καταστροφική χρονιά για την πεταλούδα αυτή.

15) Χρησιμοποιώντας το σχήμα, υπολογίστε το ποσοστό των πεταλούδων ρείκι το 2017 σε σύγκριση με τον αριθμό των πεταλούδων πασσάλων το 1992. Δώστε την απάντησή σας με ένα δεκαδικό ψηφίο. 3π

Στο σχήμα 2 βλέπετε το ίδιο γράφημα όπως στο σχήμα 1, αλλά τώρα έχει προστεθεί μια γραμμή τάσης.

σχήμα 2 πεταλούδες ρείκι με γραμμή τάσης



Η γραμμή τάσης στο σχήμα 2 ανήκει σε ένα εκθετικό μοντέλο για τη μείωση του δείκτη πληθυσμού.
Η γραμμή τάσης μπορεί να περιγράφει με τον ακόλουθο τύπο: $\mathbf{log\,(P) = -0,026t + 1,8}$
Όπου **P** είναι ο πληθυσμιακός δείκτης και **t** είναι ο αριθμός των ετών μετά το 1992.
Εάν η τάση συνεχιστεί με τον ίδιο τρόπο, ο αριθμός των πεταλούδων ρείκι που καταμετρήθηκαν σε ένα δεδομένο έτος θα είναι μικρότερος από το 2% του αριθμού των πεταλούδων πασσάλων που καταμετρήθηκαν το 1992.
16) Υπολογίστε σε ποιο έτος θα συμβεί αυτό για πρώτη φορά σύμφωνα με τον δεδομένο τύπο. 2π
Ο τύπος $\mathbf{log\,(P) = -0,026t + 1,8}$ μπορεί να αναχθεί σε τύπο της μορφής $\mathbf{P = b \cdot g^t}$ που δίνει τον πληθυσμιακό δείκτη σε ένα δεδομένο έτος.
17) Βρείτε το **b** σε ακέραια μορφή και το **g** με τρία δεκαδικά ψηφία. 4π

Λύση

14) Αν **α**% είναι η ετήσια ποσοστιαία μείωση τότε έχω $\mathbf{100\% - 40\% = 100\%(100\% - \alpha)^{2017-1992}} \Rightarrow \mathbf{0,6 = (100\% - \alpha)^{25} \Rightarrow 100\% - \alpha = \sqrt[25]{0,6} = 0,9797} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2,0\%}$
15) Η μέτρηση στο σχήμα 1 για το 2017 δίνει 1,6 cm (με κλίμακα 4 cm για δείκτη ίσο με 100)
Άρα ο πληθυσμιακός δείκτης το 2017 είναι $\mathbf{100^{1,6/4} = 6,309} \approx \boxed{6,3(\%)}$
16) Έχω $\mathbf{P < 2 \Rightarrow log\,(P) < log\;2 = 0,301 \Rightarrow -0,026t + 1,8 < 0,301 \Rightarrow 1,499 < 0,026t \Rightarrow t > 57,65}$ άρα 58 χρόνια μετά το 1992 δηλαδή το 2050.
17) έχω $\mathbf{lo\,g(P) = -0,026t + 1,8 \Rightarrow P = 10^{-0,026t+1,8} = 10^{1,8}10^{-0,026t} = 63,09 * 0.94188^t} \approx \boxed{\mathbf{63 \cdot 0.942^t}}$

Χρόνοι κολύμβησης και πόντοι FINA

Στην αγωνιστική κολύμβηση, υπάρχουν διάφορα αγωνίσματα κολύμβησης, για παράδειγμα τα 50 μέτρα ύπτιο για τους άνδρες και τα 200 μέτρα πρόσθιο για τις γυναίκες. Για να συγκριθούν οι επιδόσεις σε διαφορετικά αγωνίσματα κολύμβησης, χρησιμοποιούνται οι βαθμοί FINA(FINA είναι η διεθνής κολυμβητική ένωση: Federation Internationale de Natation). Όσο περισσότεροι πόντοι FINA, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση κάποιου κολυμβητή.

Ο αριθμός των πόντων FINA υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$\mathbf{P = 1000\left(\frac{B}{T}\right)^3}$ (τύπος 1)

$\mathbf{P}$ είναι ο αριθμός των πόντων FINA, $\mathbf{T}$ είναι ο χρόνος κολύμβησης σε δευτερόλεπτα έως δύο δεκαδικά ψηφία και $\mathbf{B}$ είναι ο βασικός χρόνος σε δευτερόλεπτα έως δύο δεκαδικά ψηφία.

Ο βασικός χρόνος είναι το παγκόσμιο ρεκόρ κολυμβητικής διοργάνωσης στην αρχή της χρονιάς.

Ο αριθμός των πόντων FINA είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός. Εάν το αποτέλεσμα του τύπου δεν είναι ακέραιος αριθμός, μετατρέπεται σε ακέραιο αριθμό παραλείποντας όλα τα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Για παράδειγμα, το 345.798 γίνεται 345.

Σημείωση: Αυτή η εργασία χρησιμοποιεί τους βασικούς χρόνους από το 2021.

Δίνονται οι ακόλουθοι (βασικοί) χρόνοι: Ο Maarten Brzoskowski κολύμπησε τα 50 μέτρα ελεύθερο τον Νοέμβριο του 2021 σε 22,26 δευτερόλεπτα, ο αντίστοιχος χρόνος βάσης είναι 20,16 δευτερόλεπτα. Στις 16 Δεκεμβρίου 2021, η Anne Louise Palmans κολύμπησε τα 100 μέτρα πρόσθιο σε 1 λεπτό και 10,25 δευτερόλεπτα, ο αντίστοιχος χρόνος βάσης είναι 1 λεπτό και 4,13 δευτερόλεπτα.

18) Προσδιορίστε ποιος από τους δύο κολυμβητές που αναφέρονται σημείωσε τον μεγαλύτερο αριθμό πόντων FINA. 2π

Επειδή ο αριθμός των πόντων FINA είναι πάντα ακέραιος, είναι πιθανό διαφορετικοί χρόνοι που κολυμπούν με τον ίδιο βασικό χρόνο να δίνουν τον ίδιο αριθμό πόντων FINA.

Εάν κολυμπήσετε 0,01 δευτερόλεπτα πιο γρήγορα από τον βασικό χρόνο, υπάρχουν δύο εκδοχές για την αντίστοιχη βαθμολογία:

1) 1000 πόντοι FINA (αυτό ισχύει για μεγαλύτερους βασικούς χρόνους)

2) 1001 ή περισσότερους βαθμούς FINA (αυτό ισχύει για μικρότερους βασικούς χρόνους)

19) Υπολογίστε τον μεγαλύτερο βασικό χρόνο όπου η κολύμβηση 0,01 δευτ. ταχύτερα από τον βασικό χρόνο οδηγεί σε βαθμολογία τουλάχιστον 1001 πόντων FINA. Δώστε την απάντησή σας σε δευτερόλεπτα και με δύο δεκαδικά ψηφία. 4π

Οι βαθμοί FINA χρησιμοποιούνται, μεταξύ άλλων, για να καθοριστεί ποιοι κολυμβητές μπορούν να συμμετάσχουν στο NJK (ολλανδικό πρωτάθλημα νεανίδων). Δημιουργείται μία λίστα κατάταξης για το NJK υπολογίζοντας τον αριθμό των πόντων FINA για κάθε κολυμβητή για 6 διαφορετικά αγωνίσματα κολύμβησης και προσθέτοντας αυτούς τους πόντους μαζί. Το άτομο με τους περισσότερους πόντους FINA συνολικά θα τοποθετηθεί στην κορυφή της λίστας, ακολουθούμενο από το άτομο με το δεύτερο υψηλότερο σύνολο κ.λπ. Η λίστα αυτή καθορίζει ποιος μπορεί να συμμετέχει στο NJK.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο 1, ο αριθμός των πόντων FINA μπορεί να υπολογιστεί με βάση έναν χρόνο κολύμβησης και έναν χρόνο βάσης. Εάν, ως κολυμβητής, σας απασχολεί η θέση σας στη λίστα κατάταξης, είναι χρήσιμο να υπολογίσετε τον χρόνο που χρειάζεστε για να κολυμπήσετε για να πετύχετε έναν συγκεκριμένο αριθμό βαθμών FINA. Αυτό μπορεί να γίνει με τον τύπο:

$\mathbf{T = \frac{10B}{\sqrt[3]{P}}}$ (τύπος 2)

20) Δείξτε ότι ο τύπος 1 και ο τύπος 2 είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους. 3π

Η ταχύτερη φορά που έχει κολυμπήσει ποτέ ένας κολυμβητής ονομάζεται ατομικό ρεκόρ αυτού του κολυμβητή. Ένα από τα αγωνίσματα κολύμβησης που χρησιμοποιούνται για τη λίστα κατάταξης του NJK είναι τα 100 μέτρα ελεύθερο. Στα 100 μέτρα ελεύθερο κοριτσιών, ο βασικός χρόνος είναι 50,25 δευτερόλεπτα. Έτσι: $\mathbf{T = 502{,}5 \cdot P^{-1/3}}$ (τύπος 3)

Στην επόμενη ερώτηση συγκρίνουμε δύο κολυμβητές. Ο ένας έχει την καλύτερη επίδοση με χρόνο με βαθμολογία 300 βαθμών FINA, ο άλλος χρόνο με βαθμολογία 500 βαθμών FINA.
Αγνοούμε την απαίτηση οι πόντοι FINA να είναι πάντα ακέραιος.
21) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της παραγώγου, δείξτε ότι $T'(300) \approx 2 \cdot T'(500)$ και εξηγήστε την πρακτική σημασία αυτού. 3π

Λύση

18) Για τον Maarten έχω $\mathbf{P = 1000\left(\frac{20,16}{22,26}\right)^3 = 742,84 \approx \boxed{742}}$ ενώ για την Anne έχω $\mathbf{P = 1000\left(\frac{64,13}{70,26}\right)^3 = 760,43 \approx \boxed{760}}$ Άρα η Anne έχει πιο πολλούς πόντους FINA από τον Maarten.

19) Έχω $\mathbf{T = B - 0,01}$. Θέλω $\mathbf{P > 1001 \Rightarrow 1000\left(\frac{B}{B-0,01}\right)^3 > 1001 \Rightarrow \frac{B}{B-0,01} > \sqrt[3]{1,001} = 1,000333222 \Rightarrow B > 1,000333222(B - 0,01) \Rightarrow 0,01000333222 > 0,000333222B \Rightarrow B < 30,0200}$.

Έχω $\mathbf{P(30,02) = 1000\left(\frac{30,02}{30,01}\right)^3 = 1000,999999925}$ άρα 1000 πόντοι FINA

Και $\mathbf{P(30,01) = 1000\left(\frac{30,01}{30,00}\right)^3 = 1001,000333}$ άρα 1001 πόντοι FINA

Άρα ο μεγαλύτερος βασικός χρόνος όπου η κολύμβηση 0,01 δευτ. ταχύτερα από τον βασικό χρόνο οδηγεί σε βαθμολογία τουλάχιστον 1001 πόντων FINA, είναι $\boxed{\mathbf{30,01}}$ δευτερόλεπτα.

20) Έχω $\mathbf{P = 1000\left(\frac{B}{T}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{P} = \sqrt[3]{1000}\frac{B}{T} = 10\frac{B}{T} \Leftrightarrow T = 10\frac{B}{\sqrt[3]{P}}}$ τύπος 2.

21) Έχω $\mathbf{T(P) = 502,5 \cdot P^{-1/3} \Rightarrow T'(P) = 502,5 \cdot (-1/3)P^{-4/3} = -167,5P^{-4/3}}$

Άρα $\mathbf{\frac{T'(300)}{T'(500)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-4/3} = 1,976 \approx 2 \Rightarrow T'(300) \approx 2 \cdot T'(500)}$.

Που σημαίνει ότι η μεταβολή του χρόνου που απαιτείται σε έναν αθλητή με 300 πόντους FINA για να πάρει έναν πόντο FINA είναι διπλάσια από αυτή του αθλητή με 500 πόντους FINA.

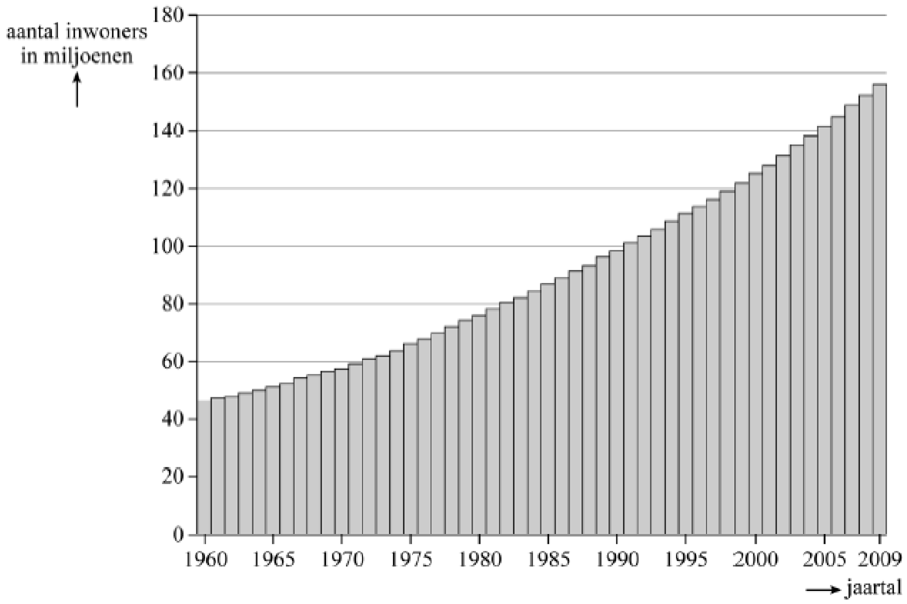
Μωρά στη Νιγηρία

Η Νιγηρία είναι μια πυκνοκατοικημένη χώρα στην Αφρική, με έντονη πληθυσμιακή αύξηση. Κατά τη διάρκεια του Παγκοσμίου Κυπέλλου FIFA 2018, η Νιγηρία ήταν η χώρα που συμμετείχε με τους περισσότερους κατοίκους μετά τη Βραζιλία και η Ισλανδία η συμμετέχουσα χώρα με τους λιγότερους κατοίκους. Κατά τη διάρκεια του αγώνα μεταξύ της Ισλανδίας και της Νιγηρίας, ο Ολλανδός ρεπόρτερ Frank Wielaard έκανε την εξής δήλωση:

«Η Νιγηρία θα έχει τουλάχιστον τόσα μωρά κατά τις $\mathbf{26}$ ημέρες αυτού του Παγκοσμίου Κυπέλλου όσο ο συνολικός πληθυσμός της Ισλανδίας» .

Το ερώτημα είναι φυσικά αν αυτή η δήλωση είναι σωστή. Για να το ανακαλύψετε χρειάζεστε κάποιες πληροφορίες. Αυτές ακολουθούν παρακάτω.

Την περίοδο του Παγκοσμίου Κυπέλλου, η Ισλανδία είχε $\mathbf{341.000}$ κατοίκους. Το σχήμα δείχνει τον πληθυσμό της Νιγηρίας για τα έτη 1960 έως 2009. Υποθέστε ότι η αύξηση του πληθυσμού είναι εκθετική και ότι αυτή η εκθετική αύξηση συνεχίστηκε μέχρι και το Παγκόσμιο Κύπελλο 2018.



Τη χρονιά αυτού του Παγκοσμίου Κυπέλλου, υπήρχε πλεόνασμα ανδρών στη Νιγηρία. Αυτό σημαίνει ότι οι άνδρες ήταν περισσότεροι από τις γυναίκες. Υπήρχαν $\mathbf{1,04}$ άνδρες για κάθε γυναίκα. Κατά μέσο όρο $\mathbf{0,09}$ μωρά γεννήθηκαν ανά γυναίκα στη Νιγηρία το έτος 2018. Ο μέσος όρος έχει υπολογιστεί για όλες τις γυναίκες, συμπεριλαμβανομένων των μωρών, των νηπίων και των πολύ ηλικιωμένων. Ας υποθέσουμε ότι οι γεννήσεις στη Νιγηρία κατανέμονται ομοιόμορφα στις ημέρες του έτους.

22) Διερευνήστε χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα και το σχήμα αν η δήλωση του Frank Wielaard είναι σωστή. 7π

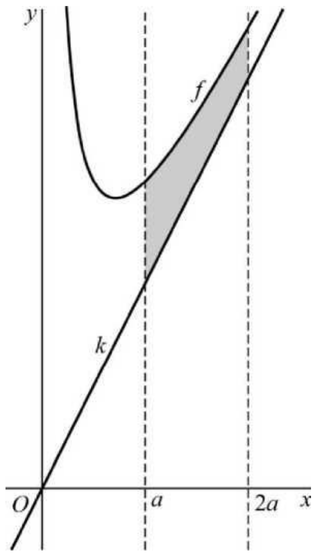
Λύση

22) Αφού ο πληθυσμός είναι εκθετική συνάρτηση του χρόνου έχω $\mathbf{P(t) = ka^t}$, όπου t τα έτη μετά το 1960. Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι ο αριθμός των κατοίκων στη Νιγηρία, το 1960 ήταν 46 (εκατομμύρια) και το 2009, 156 (εκατομμύρια). Άρα $\mathbf{P(0) = 46 \Rightarrow k = 46, P(49) = 156 \Rightarrow 46a^{49} = 156 \Rightarrow a^{49} = \frac{156}{46} \Rightarrow \alpha = \sqrt[49]{\frac{156}{46}} = 1,025235}$. Άρα το 2018 ο πληθυσμός στη Νιγηρία ήταν $\mathbf{P(58) = 46 * 1,025235^{58} = 195,226}$ εκατομμύρια. Από αυτά οι γυναίκες είναι $\mathbf{195,226 * \frac{1}{1+1,04} = 95,699}$ εκατομμύρια. Οπότε το 2018 γεννήθηκαν $\mathbf{0,09 * 95,699 = 8,612}$ εκατομμύρια μωρά. Αναλογικά στις 26 μέρες του Παγκοσμίου Κυπέλλου γεννήθηκαν $\mathbf{8,612 * \frac{26}{365} = 0,613}$ εκατομμύρια μωρά ή περίπου 613.000 μωρά που είναι όντως περισσότερα από τον πληθυσμό της Ισλανδίας.

Εξετάσεις VWO περίοδος 1
Πέμπτη 11 Μαΐου 2023 13:30-16:30
μαθηματικά Β
Αυτή η εξέταση αποτελείται από 19 ερωτήσεις.
Για αυτήν την εξέταση μπορούν να ληφθούν το πολύ 76 πόντους.
Κάθε αριθμός ερώτησης δείχνει πόσους πόντους μπορούν να κερδίσουν με μια σωστή απάντηση.
Εάν μια ερώτηση απαιτεί εξήγηση, επεξήγηση ή υπολογισμό, η απάντηση συνήθως δεν βαθμολογείται εάν λείπει αυτή η εξήγηση, η εξήγηση ή ο υπολογισμός.
Μην δίνετε περισσότερες απαντήσεις (λόγοι, παραδείγματα κ.λπ.) από αυτές που ζητούνται. Για παράδειγμα, εάν ζητηθούν δύο λόγοι και παρέχετε περισσότερους από δύο λόγους, μόνο οι δύο πρώτοι θα προσμετρηθούν στην αξιολόγηση.
τριγωνομετρία
Μαθηματικοί τύποι

$$\mathbf{\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)}$$
$$\mathbf{\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)}$$
$$\mathbf{\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)}$$
$$\mathbf{\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)}$$
$$\mathbf{\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)}$$
$$\mathbf{\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)}$$

Ασυνεχές γράφημα



Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ δίνεται για $\mathbf{x > 0}$ από τον τύπο $\mathbf{f(x) = 2x + \frac{1}{x}}$

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ έχει ένα ελάχιστο.

1) Υπολογίστε ακριβώς αυτό το ελάχιστο. 3π.

Η ευθεία $\mathbf{k}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$.

Το χωρίο $\mathbf{V}$ περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$, την ευθεία $\mathbf{k}$ και τις ευθείες με εξίσωση $\mathbf{x = a}$ και $\mathbf{x = 2a}$ με a 0 . Στο σχήμα, αυτή η περιοχή είναι γκριζαρισμένη για μια ορισμένη τιμή ενός $\mathbf{a}$.

Το εμβαδόν αυτού του χωρίου είναι ανεξάρτητο από την τιμή του a.

2) Αποδείξτε το. 5π

Επιπλέον, δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = 3$. Αυτή η ευθεία και η γραφική παράσταση της f περικλείουν ένα τμήμα του επιπέδου W που περιστρέφεται γύρω από την ευθεία με την εξίσωση $y = 3$.

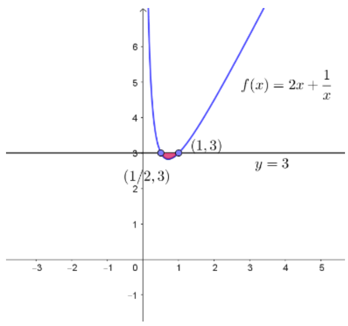
3) Υπολογίστε τον όγκο του στερεού περιστροφής που σχηματίζεται έτσι. Δώστε την τελική σας απάντηση με δύο δεκαδικά ψηφία 4π

Λύση

1) Έχουμε $\mathbf{f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}}$ με $\mathbf{f'(x) = 0}$ για $\mathbf{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (η $\mathbf{x = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0}$ απορρίπτεται)

Οπότε εύκολα έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ έχει ελάχιστο την τιμή $\mathbf{f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}}$

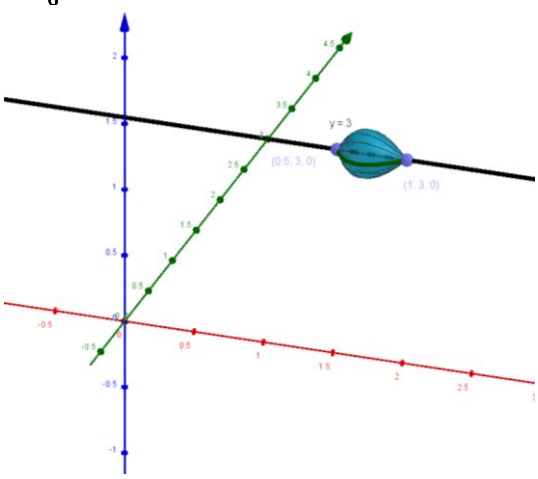
2) Έχουμε $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = 0}$ Άρα η $\mathbf{f}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\mathbf{k\colon y = 2x}$. Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\mathbf{\int_a^{2a}\left(2x + \frac{1}{x} - 2x\right)dx = \int_a^{2a}\frac{1}{x}dx = [\ln x]_\alpha^{2\alpha} = \ln(2a) - \ln(a) = \ln 2}$ και είναι ανεξάρτητο του $\boldsymbol{\alpha}$.



3) Βρίσκουμε αρχικά τα σημεία τομής της f με την ευθεία $y = 3$ λύνοντας την εξίσωση $\mathbf{2x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}}$ ή x=1. Συνεπώς η περιοχή W είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

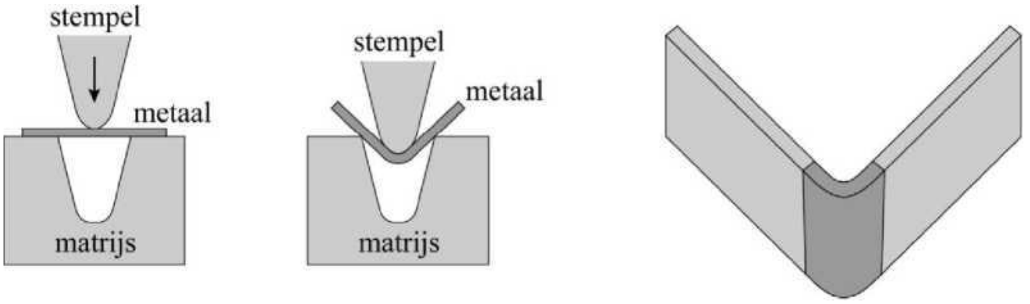
Ο όγκος τους στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της ως προς την ευθεία W $y = 3$ δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$\mathbf{\pi\int_{0,5}^{1}((f(x) - 3)^2)dx = \pi\int_{0,5}^{1}\left(\left(2x + \frac{1}{x} - 3\right)^2\right)dx = \pi\int_{0,5}^{1}\left(4x^2 - 12x - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} + 13\right)dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3} - 6x^2 - 6\ln|x| - \frac{1}{x} + 13x\right]_{0.5}^{1} = \pi\left(\frac{4}{3} - 6 - 1 + 13 - \left(\frac{1}{6} - \frac{6}{4} + 6\ln 2 - 2 + \frac{13}{2}\right)\right) = \pi\frac{25 - 36\ln 2}{6} \approx \boxed{0.0244}}$$



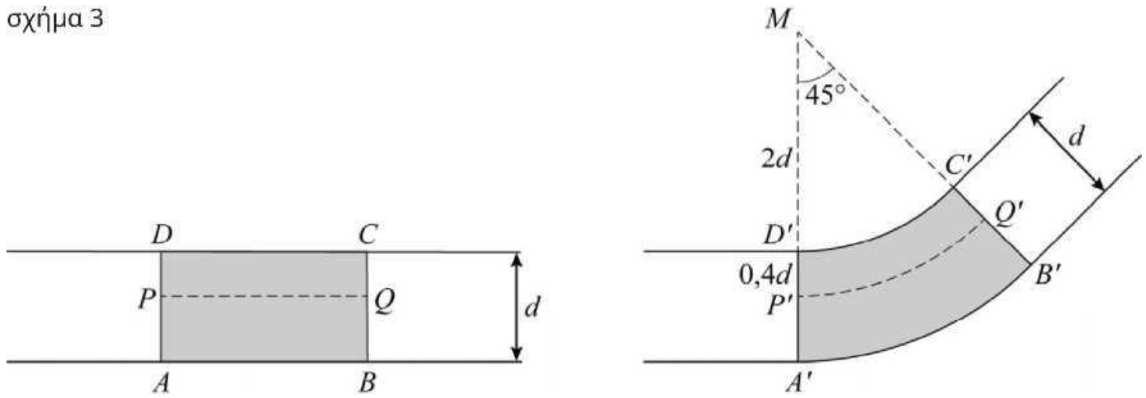
Κάμψη μεταλλικών πλακών

Στη μηχανολογία, οι μεταλλικές πλάκες πρέπει συχνά να κάμπτονται σε μια ορισμένη γωνία. Μια από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι η ελεύθερη κάμψη. Η μεταλλική πλάκα βρίσκεται σε ένα καλούπι με συγκεκριμένο σχήμα. Μετά από αυτό, μια στάμπα πιέζει με δύναμη την μεταλλική πλάκα, ώστε να πάρει το επιθυμητό σχήμα. Το σχήμα 1 δείχνει αυτό σε μια μπροστινή όψη. Το σχήμα 2 δείχνει ένα παράδειγμα μεταλλικής πλάκας μετά από κάμψη.



Κατά την ελεύθερη κάμψη, εμφανίζεται παραμόρφωση: εξωτερικά το μέταλλο τεντώνεται ελαφρά και στο εσωτερικό συμπιέζεται. Η ουδέτερη-διακεκομμένη γραμμή βρίσκεται μέσα στη μεταλλική πλάκα : το μήκος της παραμένει το ίδιο μετά την παραμόρφωση. Σε αυτή την εργασία, υποθέτουμε ότι το πάχος της πλάκας παραμένει το ίδιο κατά την κάμψη.

4) Υπολογίστε αλγεβρικά κατά ποιο ποσοστό το εμβαδόν του τμήματος επιφάνειας $\boldsymbol{A'B'C'D'}$ είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τμήματος επιφάνειας **ABCD**. Δώστε την τελική σας απάντηση ως ακέραιο αριθμό. 5π



Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί σε ένα μεταλλικό φύλλο για να το λυγίσει εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου, το πάχος του μετάλλου και το πλάτος του ανοίγματος της πλάκας. Ο τύπος για τον υπολογισμό αυτής της δύναμης είναι:

$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{R \cdot d^2}}{\mathbf{V}}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{4d}}{\mathbf{V}}\right)$ (τύπος 1)

Εδώ:

F είναι η απαιτούμενη δύναμη (σε kN/m);

R μία σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου.

d το πάχος του μετάλλου (σε mm).

V το πλάτος του ανοίγματος της πλάκας (σε mm).

Η κάμψη μίας μεταλλικής πλάκας με πάχος 10 mm σε μία πλάκα με άνοιγμα 200 mm απαιτεί δύναμη 420 kN/m.

Εάν λυγίζατε αυτή τη μεταλλική πλάκα με άνοιγμα 100 mm, θα απαιτούνταν περισσότερη δύναμη.

5) Υπολογίστε αλγεβρικά πόση δύναμη απαιτείται για να κάμψετε αυτή τη μεταλλική πλάκα σε ένα καλούπι με άνοιγμα πλάτους 100 mm. Δώστε την τελική σας απάντηση ως ακέραιο αριθμό. 3π

Για τον υπολογισμό του πλάτους του ανοίγματος του καλουπιού για ένα δεδομένο πάχος φύλλου, χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$\mathbf{V = d^{1,75}}$ (τύπος 2)
Συνδυάζοντας τον τύπο 1 και τον τύπο 2 παίρνετε έναν τύπο που εκφράζει την απαιτούμενη δύναμη **F** ως προς **R** και **d**.
Υπάρχει ένα πάχος πλάκας **d** στο οποίο η απαιτούμενη δύναμη **F** είναι ελάχιστη.
6) Υπολογίστε ακριβώς αυτή την τιμή του d. 4π

Λύση

4) Έχω $\mathbf{(ABCD) = PQ \cdot d = P'Q' \cdot d = 2\pi \cdot 2,4d \cdot \frac{45}{360} \cdot d = \pi d^2 \cdot \frac{3}{5}}$

$\mathbf{(A'B'C'D') = \pi(3d)^2 \cdot \frac{45}{360} - \pi(2d)^2 \cdot \frac{45}{360} = \pi d^2 \cdot \frac{5}{8}}$

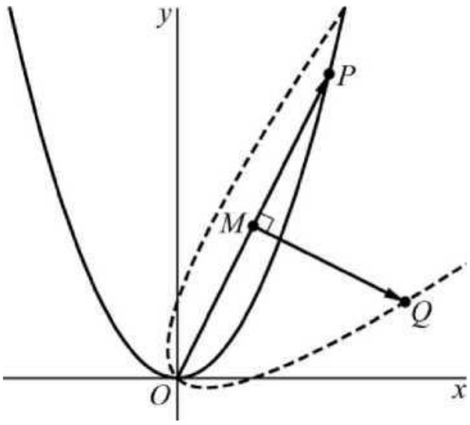
Έχουμε $\mathbf{\frac{(A'B'C'D')}{(ABCD)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{24} = 104,166\%}$ Άρα αύξηση του εμβαδού κατά $\boxed{\mathbf{4,166\%}}$

5) έχουμε $\mathbf{420 = \frac{R \cdot 10^2}{200}(1 + \frac{40}{200}) \Rightarrow 420 = \frac{R}{2}\frac{6}{5} \Rightarrow R = 700}$

Άρα για την μεταλλική πλάκα 100mm απαιτείται δύναμη $\mathbf{F = \frac{700 \cdot 10^2}{100}(1 + \frac{40}{100}) = 700 \cdot 1,4 =}$ $\boxed{\mathbf{980\ kN/m}}$

6) Έχουμε με αντικατάσταση του τύπου 2 στον τύπο 1 ότι $\mathbf{F = \frac{R \cdot d^2}{d^{1,75}}\left(1 + \frac{4d}{d^{1,75}}\right) = R \cdot d^{0,25}\left(1 + 4d^{-0,75}\right) = R \cdot \left(d^{0,25} + 4d^{-0,5}\right)}$ με $\mathbf{F'(d) = R \cdot \left(0,25d^{-0,75} - 2d^{-1,5}\right)}$. Για το ακρότατο πρέπει $\mathbf{F'(d) = 0}$ ή $\mathbf{0,25d^{-0,75} - 2d^{-1,5} = 0 \Rightarrow d^{0,75} = 8 \Rightarrow d^{3/4} = 2^3 \Rightarrow d^{1/4} = 2 \Rightarrow}$ $\boxed{\mathbf{d = 16mm}}$

Στριμμένη παραβολή



Οι εξισώσεις κίνησης ενός σημείου P δίνονται από: $\begin{cases} x_P(t) = 2t \\ y_P(t) = 2t^2 \end{cases}$

Το σημείο M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος 0P. Το διάνυσμα $\overrightarrow{MP}$ περιστρέφεται δεξιόστροφα κατά 90° . Αυτό δημιουργεί το διάνυσμα $\overrightarrow{MQ}$. Το σχήμα 1 δείχνει την κατάσταση για μια τιμή t.

Κατά την κίνηση του P, το σημείο Q περιγράφει επίσης μια τροχιά. Αυτή η διαδρομή φαίνεται με διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 1.

Οι εξισώσεις κίνησης του Q δίνονται από:

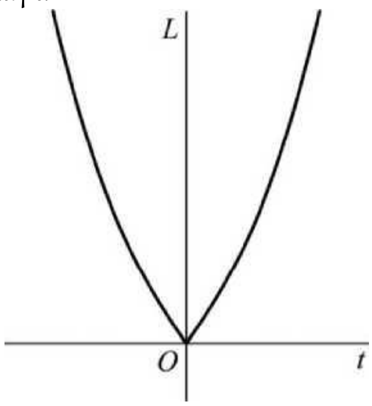
$$\begin{cases} \mathbf{x_Q(t) = t + t^2} \\ \mathbf{y_Q(t) = t^2 - t} \end{cases}$$

7) Αποδείξτε ότι αυτές είναι πράγματι οι εξισώσεις κίνησης του Q. 3π

Η ταχύτητα με την οποία κινείται το P δίνεται από τον τύπο $\sqrt{4 + 16t^2}$. Για κάθε τιμή του t, αυτή η ταχύτητα είναι ένας παράγοντας c επί την ταχύτητα του Q.

8) Υπολογίστε ακριβώς την τιμή του c. 3π

Το μήκος L του ευθύγραμμου τμήματος PQ προσδιορίζεται για κάθε τιμή t.



Ισχύουν τα εξής:

$$\mathbf{L = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2}}$$

9) Αποδείξτε το. 3π

Το σχήμα 2 δείχνει το γράφημα του L.

Στην αρχή, στο t = 0, βλέπουμε μια συστροφή.

Καθώς το t πλησιάζει το 0 από αριστερά ή από δεξιά, η τιμή του L προσεγγίζει επίσης και στις δύο περιπτώσεις στο 0. Ωστόσο, η κλίση του γραφήματος του L δεν προσεγγίζει την ίδια τιμή και στις δύο περιπτώσεις.

10) Υπολογίστε ακριβώς σε ποια τιμή προσεγγίζει η κλίση της γραφικής παράστασης του L καθώς το t πλησιάζει το 0 από αριστερά. 4π

Λύση

7) Για το μέσο M έχω $\begin{cases} \mathbf{x_M(t) = x_P(t)/2 = t} \\ \mathbf{y_M(t) = y_M(t)/2 = t^2} \end{cases}$

Αφού το διάνυσμα $\overrightarrow{MQ}$ προκύπτει από περιστροφή κατά 90° του $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM}$ έχω: $\overrightarrow{\mathbf{MQ}} = (\mathbf{y_M(t)}, -\mathbf{x_M(t)}) = (\mathbf{t^2}, -\mathbf{t})$**.** Άρα για το σημείο Q έχω $\begin{cases} \mathbf{x_Q(t) = x_M(t) + x_{\overrightarrow{MQ}}(t) = t + t^2} \\ \mathbf{y_Q(t) = y_M(t) + y_{\overrightarrow{MQ}}(t) = t^2 - t} \end{cases}$, όπως θέλαμε.

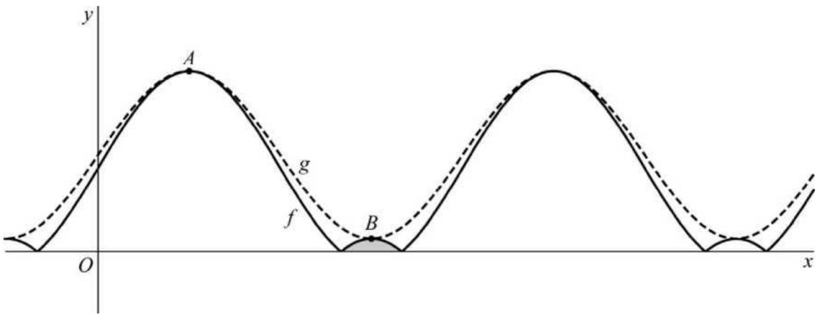
8) Η ταχύτητα του Q είναι $\sqrt{\left(\mathbf{x_Q'(t)}\right)^2 + \left(\mathbf{y_Q'(t)}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{(1 + 2t)^2 + (2t - 1)^2}} = \sqrt{\mathbf{2 + 8t^2}}$, όμως $\sqrt{\mathbf{4 + 16t^2}} = \sqrt{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{2 + 8t^2}}$, άρα $\boxed{\mathbf{c = \sqrt{2}}}$

9) έχω $\mathbf{L} = \sqrt{\left(\mathbf{x_Q(t) - x_P(t)}\right)^2 + \left(\mathbf{y_Q(t) - y_P(t)}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{(t + t^2 - 2t)^2 + (t^2 - t - 2t^2)^2}} = \sqrt{\mathbf{(t^2 - t)^2 + (-t - t^2)^2}} = \sqrt{\mathbf{2t^4 + 2t^2}} = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2}$

10) για $\mathbf{t < 0}$, έχουμε $\mathbf{L(t) = -t \cdot \sqrt{2t^2 + 2}}$ με $\mathbf{L'(t)} = -\sqrt{\mathbf{2t^2 + 2}} - \mathbf{t} \cdot \left(\sqrt{\mathbf{2t^2 + 2}}\right)' = -\sqrt{\mathbf{2t^2 + 2}} - \mathbf{t} \cdot \frac{\mathbf{4t}}{\mathbf{2\sqrt{2t^2+2}}}$ με $\lim\limits_{\mathbf{t \to 0^-}} \mathbf{L'(t)} = -\sqrt{\mathbf{2}} + \mathbf{0} = -\sqrt{\mathbf{2}}$. Άρα η κλίση της γραφικής παράστασης του L καθώς το t πλησιάζει το 0 από αριστερά είναι ίση με $\boxed{-\sqrt{2}}$

Απόλυτο με ημίτονο

Η συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο $\mathbf{f(x) = \left|\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right|}$. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της **f** ως συμπαγή γραμμή.
Το σχήμα δείχνει τις κορυφές **A** και **B** της γραφικής παράστασης της **f**.



Τα **A** και **B** είναι οι κορυφές που σχετίζονται με τα δύο πρώτα μέγιστα της **f** στα δεξιά του άξονα **y**. Υπάρχει μια ημιτονοειδής συνάρτηση που δίνεται από το $\mathbf{g(x) = a + b\sin(x)}$ για την οποία δύο, διαδοχικές κορυφές συμπίπτουν με τα σημεία **A** και **B**.
Η γραφική παράσταση του g φαίνεται με κουκκίδες στο σχήμα.
11) Υπολογίστε ακριβώς την τιμή των ***a*** και ***b***. 3π
Η γραφική παράσταση της ***f*** και ο άξονας ***x*** περιλαμβάνουν δύο τύπους περιοχών: μικρές επιφάνειες και μεγάλες επιφάνειες. Στο σχήμα μία από τις μικρές περιοχές είναι γκριζαρισμένη.
12) Υπολογίστε ακριβώς το εμβαδόν μιας μικρής περιοχής. 5π

Λύση

11) Η κορυφή A έχει συντεταγμένες $\mathbf{A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$ ενώ η κορυφή B έχει συντεταγμένες $\mathbf{B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, \left|-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right|\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$, αφού η $\mathbf{\sin(x)}$ παρουσιάζει τα δυο πρώτα τοπικά ακρότατά της για $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$. Έχω $\mathbf{y_A - y_B = 2b \Rightarrow 2b = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} \Rightarrow} \boxed{b = \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Άρα $\mathbf{g(x) = a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)}$ και αφού $\mathbf{B\left(\frac{3\pi}{2}, g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$ έχουμε $\mathbf{g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow} a - \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1 -} \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

12) $\mathbf{f(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}}$ ή $\mathbf{x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3}}$

Προκύπτει ότι τα δύο πρώτα σημεία τομής της f με τον άξονα των x που βρίσκονται ακριβώς πριν και μετά την κορυφή B είναι τα $\mathbf{\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)}$ και $\mathbf{\left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)}$.

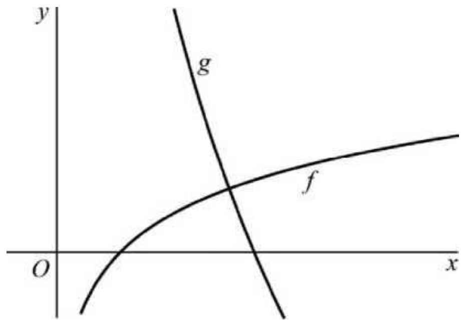
Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι το ολοκλήρωμα $\mathbf{\int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} f(x)dx = \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left|\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right| dx = \int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} -\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) dx = [\cos(x)]_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{5}{3}\pi) - \cos(\frac{4}{3}\pi) - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} =} \boxed{\mathbf{1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}}$

Λογαριθμικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ δίνεται από: $f(x) = \ln(x)$

Η συνάρτηση $\mathbf{g}$ δίνεται από: $\mathbf{g(x) = 1 + e^2 \cdot (1 - \ln(x))}$

Το σχήμα 1 δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$. Οι εφαπτομένες στις γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ τέμνονται κάθετα στο σημείο τομής.



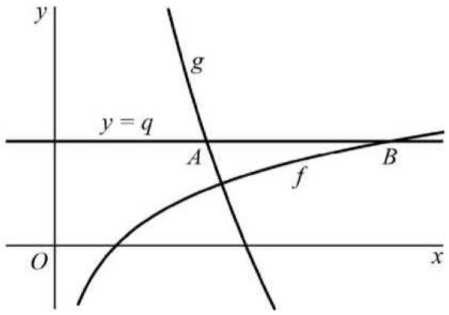
13) Αποδείξτε το. 6π

Το σχήμα 2 δείχνει τα γραφήματα του $\mathbf{f}$ και του $\mathbf{g}$ ξανά.

Η ευθεία με την εξίσωση $\mathbf{y = q}$ εμφανίζεται για μια τιμή $\mathbf{q}$.

Αυτή η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της $\mathbf{g}$ στο σημείο $\mathbf{A}$ και τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{B}$, όπου το σημείο $\mathbf{A}$ βρίσκεται, στα αριστερά του σημείου $\mathbf{B}$.

Ισχύει ότι $\mathbf{AB = 3}$.



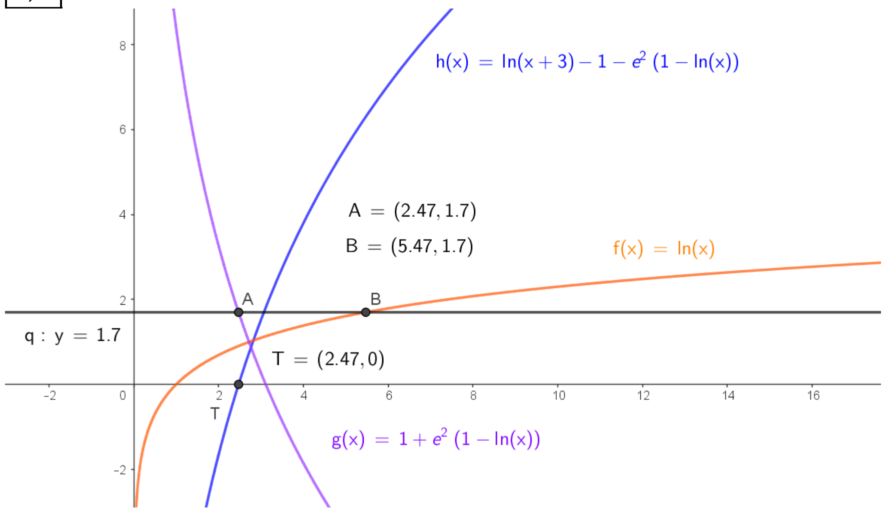
14) Υπολογίστε την αντίστοιχη τιμή του q. Δώστε την τελική σας απάντηση με ένα δεκαδικό ψηφίο. 4π

Λύση

13) Για το σημείο τομής έχω $\mathbf{f(x)} = g(x) \Longrightarrow \mathbf{\ln(x)} = 1 + e^2 \cdot (1 - \ln(x)) \Longrightarrow (\mathbf{\ln(x)} - 1) - e^2 \cdot (1 - \ln(x)) = 0 \Longrightarrow \mathbf{\ln(x)} - 1 \Longrightarrow x = e$

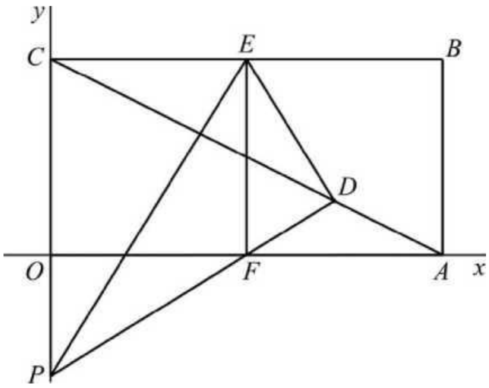
Ακόμα έχω $\mathbf{f'(x) = \frac{1}{x}}$, $\mathbf{g'(x) = -\frac{e^2}{x}}$, $\mathbf{f'(e) = \frac{1}{e}}$, $\mathbf{g'(e) = -\frac{e^2}{e} = -e}$ και $\mathbf{f'(e)g'(e) = -1}$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ τέμνονται κάθετα στο σημείο τομής.

14) Έχω $\mathbf{x_B - x_A = 3}$ και $\mathbf{q = y_B = y_A \Longrightarrow q = f(x_B) = g(x_A) \Longrightarrow f(x_A + 3) = g(x_A)} \Longrightarrow \ln(\mathbf{x_A + 3}) = \mathbf{1 + e^2 \cdot (1 - \ln(x_A))}$ Για τη λύση αυτής της εξίσωσης απαιτείται λογισμικό ή κομπιουτεράκι. Στο geogebra βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της $\mathbf{h(x)} = \ln(\mathbf{x + 3}) - \mathbf{1 - e^2 \cdot (1 - \ln(x))}$ τέμνει τον άξονα των x στο T με τετμημένη $\mathbf{x = 2.47 \Longrightarrow x_A = 2.47 \Longrightarrow q = f(x_A + 3) = \ln(5.47) = 1,6998} \approx \boxed{\mathbf{1,7}}$

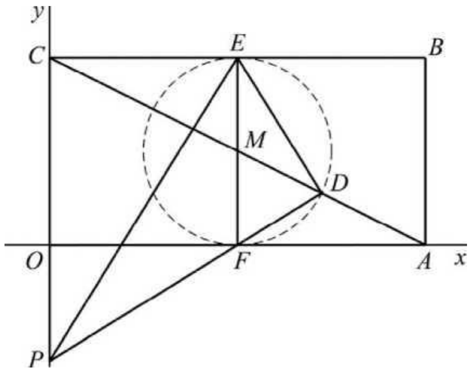


Διχοτόμος γωνίας σε ορθογώνιο

Δίνεται το ορθογώνιο OABC με O(0,0), A(8,0) και C(0,4).
Τα σημεία F και E είναι τα μέσα των OA και BC, αντίστοιχα.
Το σημείο $P(0,\rho)$ βρίσκεται στον αρνητικό άξονα y. Το σημείο D είναι η τομή της προέκτασης του ευθύγραμμου τμήματος PF και του ευθύγραμμου τμήματος AC. Δείτε το σχήμα 1.



Η ευθεία που διέρχεται από E και F είναι η διχοτόμος της γωνίας PED.
15) Να το αποδείξετε για την περίπτωση $\boldsymbol{\rho = -2}$. 5π
Το σημείο M(4, 2) είναι η τομή των AC και EF. Ο κύκλος c έχει κέντρο το M και διέρχεται από το D. Ανάλογα με τη θέση του σημείου P (άρα και με την τιμή του ρ), ο κύκλος είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος. Υπάρχει ακριβώς μία τιμή του ρ για την οποία ο κύκλος c εφάπτεται στο OA και BC. Το σχήμα 2 δείχνει αυτή την κατάσταση.
16) Υπολογίστε ακριβώς αυτή την τιμή του ρ. 6π



Λύση

15) Έχω $\mathbf{P(0,-2)}$, $\mathbf{E(4,4)}$, $\overrightarrow{\mathbf{EP}} = (-4,-6)$, $\mathbf{F(4,0)}$, $\overrightarrow{\mathbf{EF}} = (0,-4)$, $\overrightarrow{\mathbf{PF}} = (4,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{CA}} = (8,-4)$
Η εξίσωση της ευθείας $\mathbf{PF}$: $\mathbf{y - y_P = \lambda_{\overrightarrow{PF}}(x - x_P) \Rightarrow y + 2 = 0.5x}$
Η εξίσωση της ευθείας $\mathbf{AC}$: $\mathbf{y - y_C = \lambda_{\overrightarrow{CA}}(x - x_C) \Rightarrow y - 4 = -0.5x}$
Άρα για το σημείο τομής τους, D, έχω $\mathbf{y + 2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1, x = 6 \Rightarrow D(6,1) \Rightarrow \overrightarrow{ED} = (2,-3)}$
Έχουμε τώρα ότι
$\mathbf{cos}\,(\angle(\overrightarrow{\mathbf{EP}},\overrightarrow{\mathbf{EF}})) = \frac{(-4,-6)\cdot(0,-4)}{|(-4,-6)|\cdot|(0,-4)|} = \frac{24}{4\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ και $\mathbf{cos}\,(\angle(\overrightarrow{\mathbf{ED}},\overrightarrow{\mathbf{EF}})) = \frac{(2,-3)\cdot(0,-4)}{|(2,-3)|\cdot|(0,-4)|} = \frac{12}{4\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ –
Άρα $\angle(\overrightarrow{\mathbf{EP}},\overrightarrow{\mathbf{EF}}) = \angle(\overrightarrow{\mathbf{ED}},\overrightarrow{\mathbf{EF}})$ και επομένως το EF είναι διχοτόμος της γωνίας PED.
16) Η ακτίνα του κύκλου θα είναι ίση με 2. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $\mathbf{(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4}$ και για την τομή του με την ευθεία $\mathbf{AC}$: $\mathbf{y = 4 - 0.5x}$ έχω $\mathbf{(x-4)^2 + (4 - 0.5x - 2)^2 = 4 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}}$, δεχόμαστε την $\mathbf{x = 4 + \frac{4\sqrt{5}}{5} > 4}$ που είναι δεξιότερα της EF.
Άρα για το σημείο D έχω $\mathbf{y = 4 - 0.5(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}) = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$. Δηλαδή $\mathbf{D\left(4 + \frac{4\sqrt{5}}{5}, 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$, $\overrightarrow{\mathbf{FD}} = \mathbf{\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, 2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας $\mathbf{DF}$: $\mathbf{y - y_F = \lambda_{\overrightarrow{FD}}(x - x_F) \Rightarrow y = \frac{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}(x-4)}$ οπότε για το σημείο $\mathbf{P(0,p)}$ έχουμε $\mathbf{p = \frac{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}(0-4) = \frac{10-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(-4) = (2\sqrt{5}-2)(-1) = \boxed{2-2\sqrt{5}}}$

Εκθετικό κλάσμα

Η συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^x+1}}$.

Η γραφική παράσταση της f έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.

17) Υπολογίστε ακριβώς την απόσταση μεταξύ αυτών των δύο οριζόντιων ασυμπτώτων. 3π

Μία αντιπαράγωγος της f είναι η $\boldsymbol{F(x) = x - ln\,(e^x + 1)}$

18) Αποδείξτε το. 3π

Η ευθεία k έχει εξίσωση x = a με $\alpha > 0$.

Η γραφική παράσταση της f, ο άξονας x, ο άξονας y και η ευθεία k περικλείουν ένα μέρος του επιπέδου. Το εμβαδόν αυτού του τμήματος επιφάνειας είναι μικρότερο από ln2 για κάθε τιμή του a.

19) Αποδείξτε το. 4π

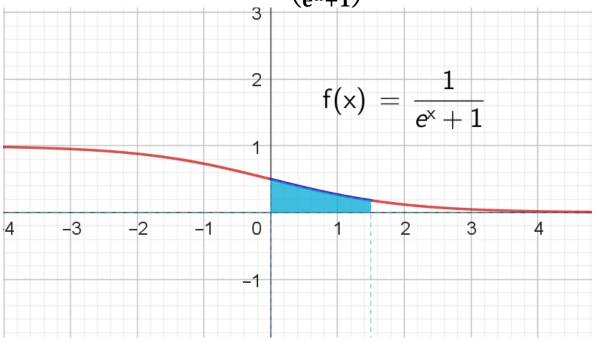
Λύση

17) Έχω $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{0+1} = \mathbf{1}$ Άρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $\mathbf{y = 1}$ και $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x+1} = \mathbf{0}$ Άρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $\mathbf{y = 0}$. Η απόστασή των δυο αυτών ασύμπτωτων ευθειών είναι ίση με $\boxed{\mathbf{1}}$

18) Έχω $\mathbf{F'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}} = f(x)$ Άρα η F είναι μια αντιπαράγωγος της f.

19) Έχω ότι το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$\boldsymbol{\int_0^a f(x)dx = F(\alpha) - F(0) = \alpha - \ln(e^\alpha + 1) - 0 + \ln(e^0 + 1) = \alpha - \ln(e^\alpha + 1) + \ln(2) = \ln(e^\alpha) - \ln(e^\alpha + 1) + \ln 2 = \ln\left(\frac{e^\alpha}{e^\alpha+1}\right) + \ln 2 < \ln 1 + \ln 2 = \ln 2}$

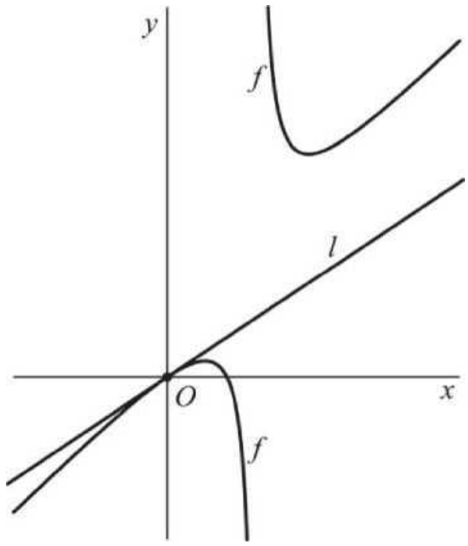


Εξετάσεις VWO 2023 περίοδος 2
διάρκεια: 3 ώρες
μαθηματικά Β
Αυτή η εξέταση αποτελείται από 17 ερωτήσεις.
Για αυτήν την εξέταση μπορούν να ληφθούν το πολύ 79 πόντοι.
Κάθε αριθμός ερώτησης δείχνει πόσους πόντους μπορούν να κερδίσουν με μια σωστή απάντηση.
Εάν μια ερώτηση απαιτεί εξήγηση, επεξήγηση ή υπολογισμό, η απάντηση συνήθως δεν βαθμολογείται εάν λείπει αυτή η εξήγηση, η εξήγηση ή ο υπολογισμός.
Μην δίνετε περισσότερες απαντήσεις (λόγοι, παραδείγματα κ.λπ.) από αυτές που ζητούνται.
Για παράδειγμα, εάν ζητηθούν δύο λόγοι και παρέχετε περισσότερους από δύο λόγους, μόνο οι δύο πρώτοι προσμετρούν στην αξιολόγηση.
Μαθηματικοί τύποι
Τριγωνομετρία

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$
$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Ασυνεχές γράφημα

Η συνάρτηση **f** δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-2x}{x-3}}$
Η ευθεία **l** είναι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της **f** στο **0**. Δείτε το σχήμα.



1) Υπολογίστε ακριβώς την κλίση της **l**. 3π
Η γραφική παράσταση της **f** έχει μια πλάγια ασύμπτωτη και μια κάθετη ασύμπτωτη.
Αυτές οι δύο ασύμπτωτες τέμνονται στο σημείο **S**.
Η γραφική παράσταση της **f** υφίσταται μετατόπιση προς τα δεξιά κατά **2** μονάδες και προς τα επάνω κατά **b** μονάδες.
Το γράφημα που προκύπτει ανήκει στη συνάρτηση **g**. Η τιμή του **b** επιλέγεται έτσι ώστε το **S** να βρίσκεται στη γραφική παράσταση του **g** .
2) Υπολογίστε την ακριβή τιμή του b. 6π

Λύση

1) Έχουμε $\mathbf{f'(x)=\frac{(2x-2)(x-3)-(x^2-2x)\cdot 1}{(x-3)^2}}$ με $\mathbf{f'(0)=\frac{6}{9}}$ άρα η κλίση της **l** είναι $\boxed{\frac{2}{3}}$

2) Έχω $\mathbf{f(x)=\frac{x^2-2x}{x-3}=x+1+\frac{3}{x-3}}$, . Άρα η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η $\mathbf{y=x+1}$ και η κάθετη ασύμπτωτη είναι η $\mathbf{x=3}$ αφού $\mathbf{\lim_{x\to\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-3}=0}$ και $\mathbf{\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty}$.
Οι ασύμπτωτες τέμνονται στο σημείο $\mathbf{S(3,4)}$. Για την συνάρτηση g έχω $\mathbf{g(x)=f(x-2)+b}$ $\mathbf{\xRightarrow{S\in C_g,\Rightarrow g(3)=4} 4=f(1)+b \Rightarrow 4=\frac{1}{2}+b \Rightarrow b=\boxed{\frac{7}{2}}}$

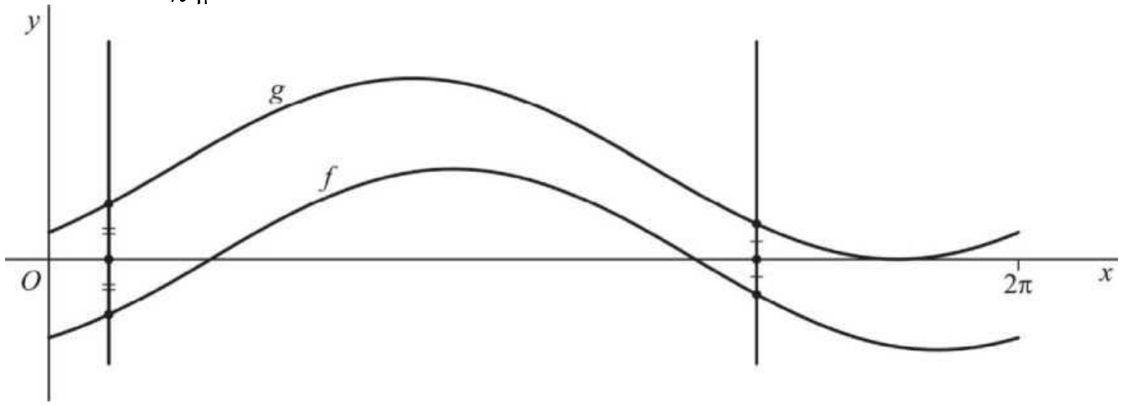
Μετασχηματισμοί ημίτονου και συνημίτονου

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ δίνεται από τον τύπο $\mathbf{f(x) = 2sin\,(x - \frac{1}{3}\pi)}$. Το ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{AB}$ συνδέει τα σημεία $\mathbf{A(12\,,1)}$ και $\mathbf{B(16, 1)}$.

Η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ τέμνει αυτό το ευθύγραμμο τμήμα σε πολλά σημεία.

3) Υπολογίστε ακριβώς τις συντεταγμένες $\mathbf{x}$ αυτών των σημείων τομής. 4π

Η συνάρτηση $\mathbf{g}$ δίνεται από τον τύπο $\mathbf{g(x) = 2cos\,(x - \frac{3}{4}\pi) + 2}$. Για κάθε τιμή του $\mathbf{a}$, η κάθετη ευθεία με την εξίσωση $\mathbf{x = a}$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ σε ένα σημείο η καθεμία. Το μέσο αυτών των δύο σημείων βρίσκεται στον άξονα $\mathbf{x}$. Στο διάστημα $[\mathbf{0, 2\pi}]$ αυτό ισχύει για δύο τιμές του $\mathbf{a}$. Δείτε το σχήμα 1.

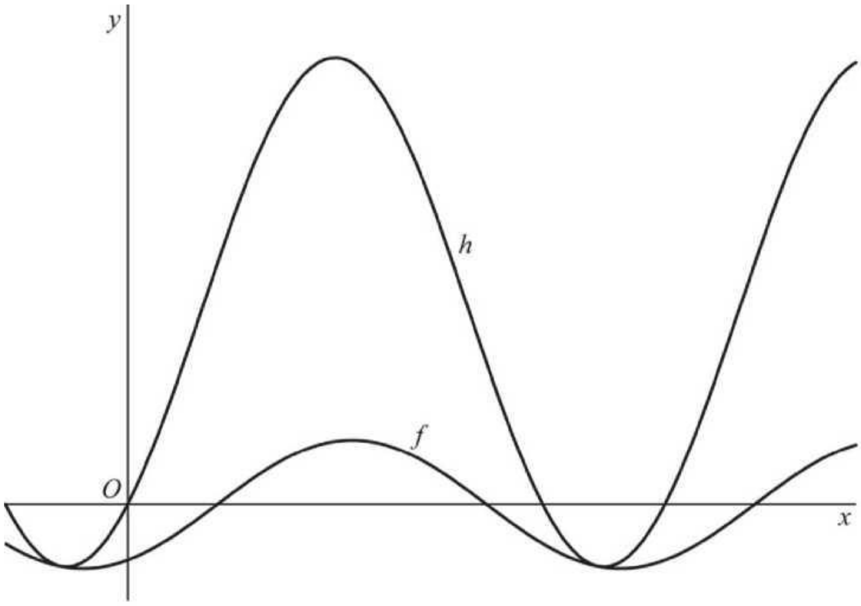


4) Υπολογίστε για ποιες δύο τιμές του $\mathbf{a}$ ισχύει. Να δώσετε τελική απάντηση με δύο δεκαδικά ψηφία. 3π

Η συνάρτηση $\mathbf{h}$ δίνεται από τον τύπο $\mathbf{h(x) = f(x) + 3 \cdot g(x)}$. Στο σχήμα 2 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$.

Μπορείτε να δημιουργήσετε το γράφημα της $\mathbf{h}$ από το γράφημα της $\mathbf{f}$ μέσω πολλαπλών μετατοπίσεων και ενός πολλαπλασιασμού ως προς τον άξονα $\mathbf{x}$.

Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται για πολλαπλασιασμό με τον παράγοντα $\boldsymbol{\rho}$. Εκ τούτου ισχύει ότι $\boldsymbol{\rho > 0}$.



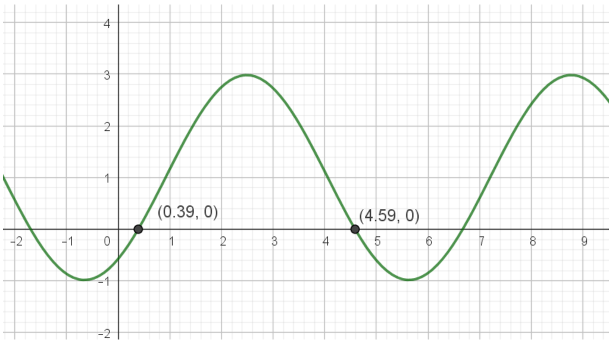
5) Υπολογίστε αυτή την τιμή του ρ. Δώστε την τελική σας απάντηση με δύο δεκαδικά ψηφία. 4π

Λύση

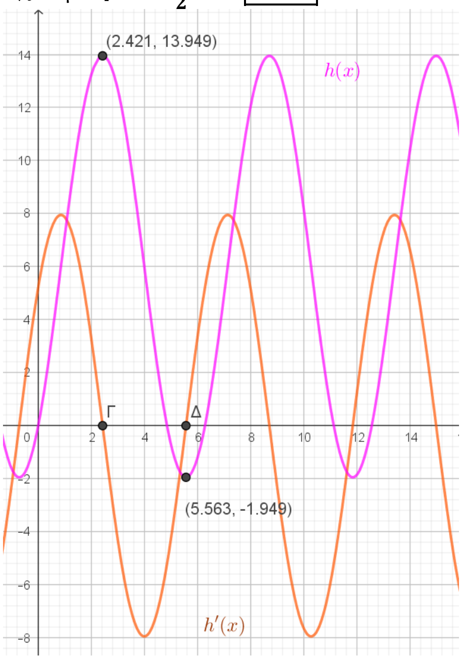
3) Έχω $\mathbf{f(x) = 1 \Rightarrow sin\,(x - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} = sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$ ή $\mathbf{x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ή $\mathbf{x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}}$. Αφού $\mathbf{x \in [12\pi, 16\pi]}$ έχω $\boxed{\mathbf{x = 12\pi + \frac{\pi}{2}, 14\pi + \frac{\pi}{2}, 12\pi + \frac{7\pi}{6}\,, 14\pi + \frac{7\pi}{6}}}$ δηλαδή 4 σημεία.

4) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{\frac{f(\alpha)+g(\alpha)}{2} = 0 \Leftrightarrow sin\,(\alpha - \frac{1}{3}\pi) + cos\,(\alpha - \frac{3}{4}\pi) + 1 = 0, \alpha \in [0, 2\pi]}$

Όπως βλέπουμε παρακάτω, το γράφημα της συνάρτησης $\mathbf{sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + 1}$ τέμνει τον άξονα των $\mathbf{x}$ στο διάστημα $[\mathbf{0, 2\pi}]$ στα σημεία με $\mathbf{x} = \boxed{\mathbf{0,39}}$ και $\boxed{\mathbf{4,59}}$



5) Έχω $\mathbf{h'(x) = f'(x) + 3 \cdot g'(x) = 2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 6\sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)}$. Όπως παρατηρούμε στο παρακάτω σχήμα $\mathbf{h'(2,421) = h'(5,563) = 0}$. Τα αντίστοιχα μέγιστα και ελάχιστα της $\mathbf{h}$ είναι τα $\mathbf{h(2,421) = 13,949}$ και $\mathbf{h(5,563) = -1,949}$. Άρα το πλάτος της ημιτονοειδούς συνάρτησης που θέλουμε είναι ίσο με $\frac{\boldsymbol{max-min}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{13,949-(-1,949)}}{\mathbf{2}} = \mathbf{7,949}$. Λόγω του πολλαπλασιαστικού παράγοντα 2 της $\mathbf{f}$ τελικά έχουμε $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{7,949}}{\mathbf{2}} = \boxed{\mathbf{3,97}}$



Προβολή σε μια γραμμή

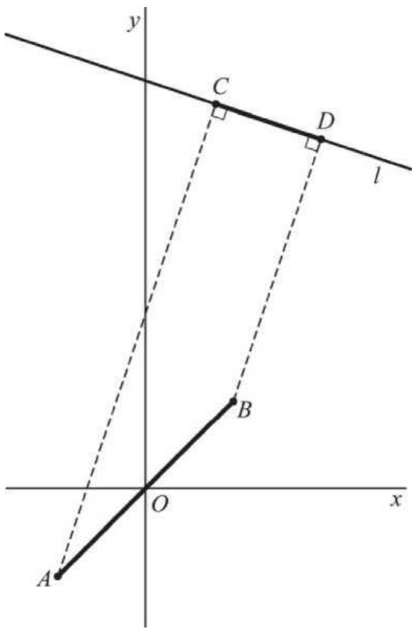
Δίνονται τα σημεία $\mathbf{A(-2,2)}$, $\mathbf{B(2,2)}$ και $\mathbf{C(1\frac{3}{5}, 8\frac{4}{5})}$.

Η ευθεία **l** είναι η γραμμή με διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{9} \end{pmatrix} + \mathbf{t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Το σημείο **C** είναι η κάθετη προβολή του **A** στην ευθεία **l** και το σημείο **D** είναι η κάθετη προβολή του **B** στην ευθεία **l**.

Δείτε το σχήμα.



Το ευθύγραμμο τμήμα **AB** είναι $\sqrt{\mathbf{k}}$ φορές όσο το ευθύγραμμο τμήμα **CD**. Όπου **k** είναι ένας
ακέραιος αριθμός.

6) Υπολογίστε την ακριβή τιμή του **k**. 7π

Λύση

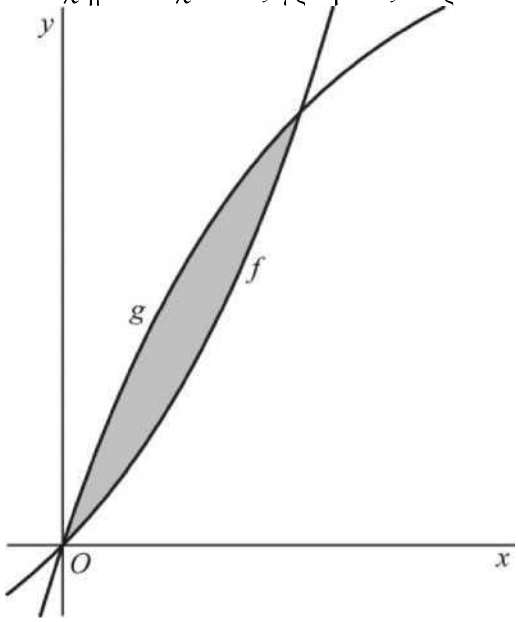
6) Έχω $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\mathbf{2}-(-\mathbf{2}), \mathbf{2}-(-\mathbf{2})) = (\mathbf{4},\mathbf{4})$ και $\overrightarrow{\mathbf{CD}} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{3},-\mathbf{1}), \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$

Ακόμα έχω $\mathbf{AB} = \sqrt{\mathbf{k}}\mathbf{CD} \Longrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{k}}} = \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{AB}} = \mathbf{cos}(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{CD}}\ \overrightarrow{\mathbf{AB}}}) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}}}{|\overrightarrow{\mathbf{CD}}|\,|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|} = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{3},-\mathbf{1})\cdot(\mathbf{4},\mathbf{4})}{\boldsymbol{\lambda}\sqrt{\mathbf{10}}\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{20}}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{20}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{k = 5}}$

Δύο εκθετικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ δίνονται από τους τύπους $\mathbf{f(x) = e^x - 1}$ και $\mathbf{g(x) = 3(1 - e^{-x})}$

Το σχήμα δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$.



Οι συντεταγμένες $\mathbf{x}$ των δύο μόνο τομών των γραφημάτων των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ είναι $\mathbf{x = 0}$ και $\mathbf{x = ln(3)}$.

7) Να αποδείξετε ότι αυτό είναι σωστό λύνοντας ακριβώς την εξίσωση f(x) = g(x). 4π

Τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων περικλείουν ένα μέρος του επιπέδου. Στο σχήμα αυτή η περιοχή είναι γκρι.

8) Υπολογίστε ακριβώς το εμβαδόν αυτού του τμήματος του επιπέδου. 4π

Η συνάρτηση $\mathbf{h}$ δίνεται από τον τύπο : $\mathbf{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$

Η γραφική παράσταση της $\mathbf{h}$ έχει μία διάτρηση.

9) Υπολογίστε ακριβώς τις συντεταγμένες αυτής της διάτρησης. 3π

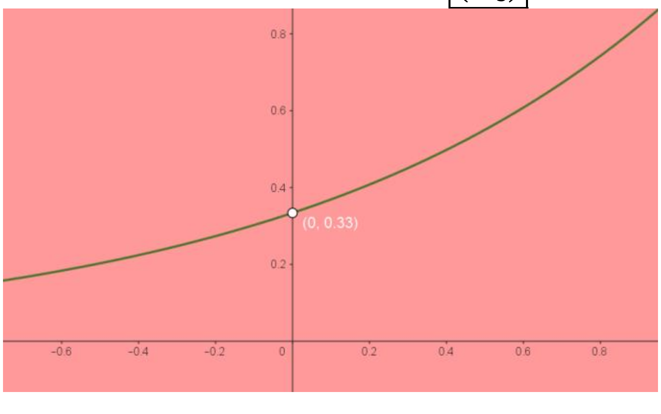
Λύση

7) Έχω για τα σημεία τομής ότι $\mathbf{f(x) = g(x) \Rightarrow e^x - 1 = 3 - 3e^{-x} \Rightarrow e^x - 4 + 3e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Rightarrow (e^x - 1)(e^x - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}}$ ή $\mathbf{\boxed{x = ln3}}$

8) Το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $\mathbf{\int_0^{ln3} (4 - 3e^{-x} - e^x)dx = [4x + 3e^{-x} - e^x]_0^{ln3} = 4ln3 + \frac{3}{3} - 3 - 0 - 3 + 1 = \boxed{4ln3 - 4}}$

9) Έχω για $\mathbf{x \neq 0}$ ότι $\mathbf{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - 1}{3(1 - e^{-x})} = \frac{e^x(e^x - 1)}{3(e^x - 1)} = \frac{e^x}{3}}$ και $\mathbf{\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}}$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{\boxed{\left(0, \frac{1}{3}\right)}}$ βλέπε σχήμα



Μπάσκετ

Σε αυτό το πρόβλημα θα δούμε την τροχιά μιας μπάλας του μπάσκετ καθώς ο παίκτης τη στοχεύει στο καλάθι, τον κυκλικό στόχο. Χρησιμοποιούμε ένα μαθηματικό μοντέλο για αυτό, όπου θεωρούμε τη μπάλα ως ένα σημείο.

Υποθέτουμε ότι η μπάλα ελευθερώνεται από ύψος 2,55 μέτρων.

Για την τροχιά της μπάλας ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = v \cdot \cos(\alpha) \cdot t} \\ \mathbf{y(t) = v \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55} \end{cases}$$

όπου

- **t** είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα από τη στιγμή της απελευθέρωσης,
- **x** είναι η οριζόντια απόσταση της μπάλας από τον παίκτη σε μέτρα,
- **y** είναι το ύψος της μπάλας σε μέτρα.
- **ν** είναι η ταχύτητα σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο της μπάλας τη στιγμή της απελευθέρωσης
- **α** είναι το μέγεθος της γωνίας σε μοίρες μεταξύ της κατεύθυνσης ρίψης και της οριζόντιας γραμμής τη στιγμή της απελευθέρωσης.

Το σχήμα του ίχνους εξαρτάται από τις παραμέτρους **ν** και **α**.

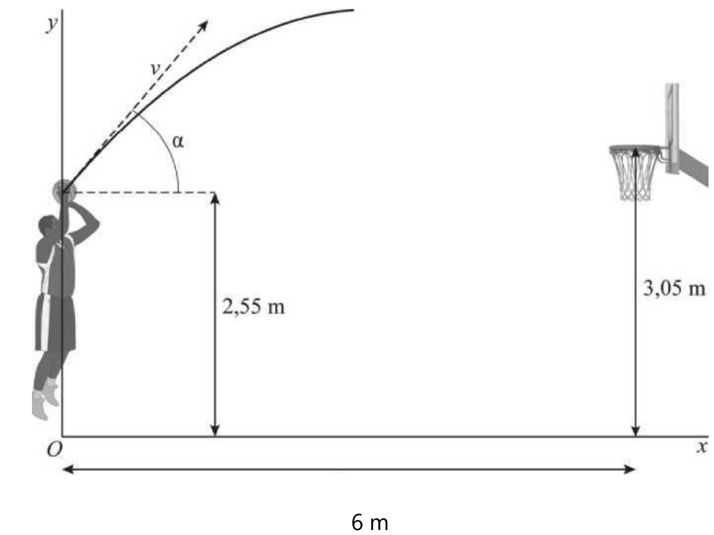
Δείτε το σχήμα 1, στο οποίο σχεδιάζεται μέρος της διαδρομής.

Ο μπασκετμπολίστας ρίχνει τη μπάλα υπό γωνία **60°** με συγκεκριμένη ταχύτητα. Σε αυτή την κατάσταση:

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = v \cdot \cos(60^\circ) \cdot t} \\ \mathbf{y(t) = v \cdot \sin(60^\circ) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55} \end{cases}$$

Εάν η μπάλα έχει ύψος **3,05** μέτρα σε οριζόντια απόσταση **6** μέτρων από τον παίκτη, αυτός σκοράρει.

10) Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίστε αλγεβρικά την ταχύτητα **ν** της μπάλας τη στιγμή της αποχώρησης. Δώστε την τελική σας απάντηση σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο έως ένα δεκαδικό ψηφίο. 5π

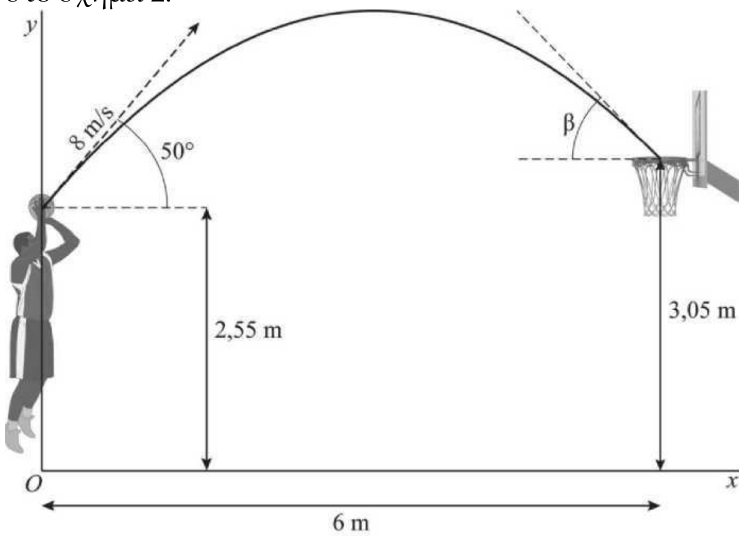


Ένας μπασκετμπολίστας στέκεται σε οριζόντια απόσταση 6 μέτρων από το κέντρο

Σε άλλο σημείο, ο μπασκετμπολίστας στέκεται και πάλι σε οριζόντια απόσταση **6** μέτρων από το κέντρο του καλαθιού. Πετά τη μπάλα σε γωνία **50°**, τώρα με ταχύτητα 8 μέτρων το δευτερόλεπτο. Σε αυτή την κατάσταση:

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = 8cos\,(50°) \cdot t} \\ \mathbf{y(t) = 8sin\,(50°) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55} \end{cases}$$

Στη συνέχεια η μπάλα περνά μέσα από το καλάθι σε μια ορισμένη γωνία . Αυτή η γωνία φαίνεται στο σχήμα 2.



11) Να υπολογίσετε αλγεβρικά το μέγεθος της γωνίας σε μοίρες. Να δώσετε τελική απάντηση ως ακέραιο αριθμό. 5π

Λύση

10)

Έχω

$$\begin{cases} \mathbf{6 = \nu \cdot cos\,(60°) \cdot t} \\ \mathbf{3,05 = \nu \cdot sin\,(60°) \cdot t - 4,9t^2 + 2,55} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{12 = \nu \cdot t} \\ \mathbf{3,05 = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4,9t^2 + 2,55} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{12 = \nu \cdot t} \\ \mathbf{4,9t^2 = 6\sqrt{3} - 0,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{t = 1,42} \\ \boxed{\mathbf{v = 8,4m/s}} \end{cases}$$

11) Έστω τ η χρονική στιγμή που η μπάλα φτάνει στο καλάθι. Τότε έχω $\mathbf{x(\tau) = 8cos\,(50°) \cdot \tau \Rightarrow 6 = 8cos\,(50°) \cdot \tau \Rightarrow \tau = 1,166}$

Έχω ακόμα $\begin{cases} \mathbf{x'(t) = 8cos\,(50°)} \\ \mathbf{y'(t) = 8sin\,(50°) - 9,8t} \end{cases}$ οπότε $\mathbf{tan(\omega) = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\tau} = \frac{y\prime(\tau)}{x\prime(\tau)} = \frac{8sin\,(50°) - 9,8\tau}{8cos\,(50°)} = \frac{8*0,766 - 9,8*1,166}{8*0,642} = -1,03 = tan(-45,83°) \approx tan(-46°)}$ άρα $\boxed{\mathbf{\widehat{\beta} \approx 46°}}$

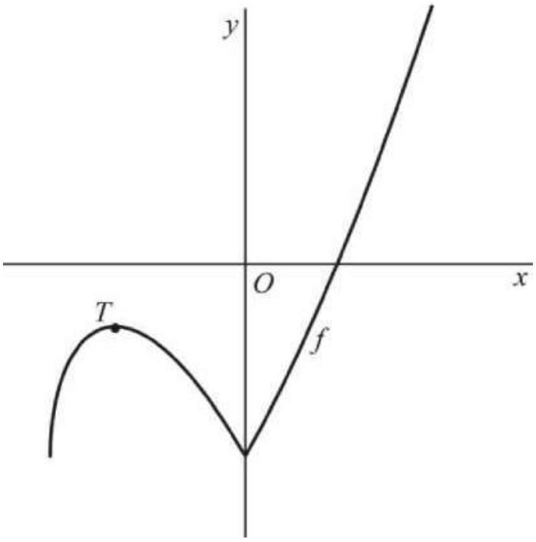
Απόλυτη τιμή και τετραγωνική ρίζα

Η συνάρτηση **f** δίνεται από τον τύπο $\mathbf{f(x) = -3 + |x| \cdot \sqrt{x+3}}$ με $\mathbf{x \geq -3}$

Η γραφική παράσταση της **f** έχει μια κορυφή **T** στα αριστερά του άξονα **y**. Δείτε το σχήμα 1.

12) Υπολογίστε τη συντεταγμένη **x** του σημείου **T**. 5π

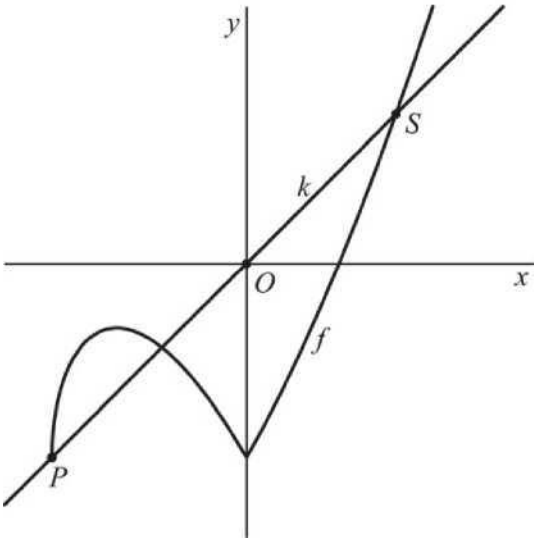
Η ευθεία **k** είναι η ευθεία που διέρχεται από το ακραίο σημείο $\mathbf{P(-3, -3)}$ της γραφικής παράστασης



της **f** και την αρχή **O**.

Η ευθεία **k** τέμνει τη γραφική παράσταση της **f** στα δεξιά του άξονα **y** στο σημείο **S**. Δείτε το σχήμα 2.

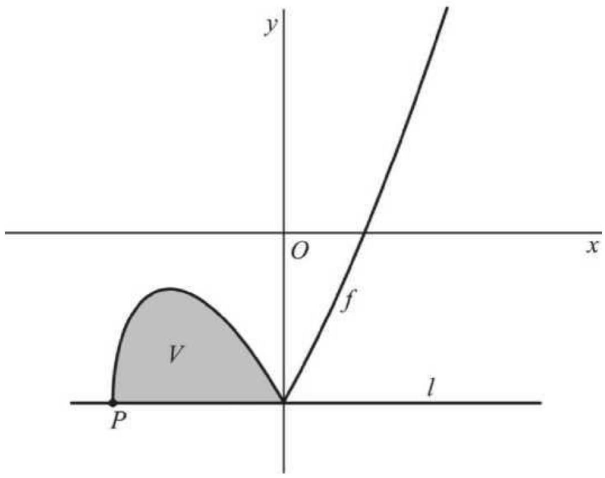
Σχήμα 2



13) Υπολογίστε τη συντεταγμένη **x** του σημείου **S**. 5π

Η οριζόντια ευθεία $\boldsymbol{l}$ έχει εξίσωση $\boldsymbol{y = -3}$. Αυτή η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$, δηλαδή $\boldsymbol{P(-3, -3)}$ και $(\mathbf{0}, \mathbf{-3})$ Η περιοχή $\boldsymbol{V}$ περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ και την ευθεία **l**. Στο Σχήμα 3 αυτή η περιοχή είναι γκριζαρισμένη.

σχήμα 3



Η περιοχή **V** περιστρέφεται γύρω από τη γραμμή **l**.

14) Υπολογίστε ακριβώς τον όγκο του στερεού περιστροφής που σχηματίζεται έτσι. 5π

Λύση

12) Για $\mathbf{-3 \leq x < 0}$ ισχύει ότι $\mathbf{f(x) = -3 - x \cdot \sqrt{x+3}}$ με $\mathbf{f'(x) = -\sqrt{x+3} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-2(x+3)-x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{-3x-6}{2\sqrt{x+3}}}$.
Για το ακρότατο έχουμε $\mathbf{f'(x) = 0 \Rightarrow -3x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}}$

13) Η ευθεία k περνά από τα σημεία $\mathbf{P(-3,-3)}$ και $\mathbf{O(0,0)}$ άρα έχει εξίσωση $\mathbf{y = x}$. Για το κοινό σημείο της ευθείας αυτής και της $\mathbf{C_f}$ έχουμε $\mathbf{x > 0}$ και $\mathbf{f(x) = x \Rightarrow -3 + x\sqrt{x+3} = x \Rightarrow -(x+3) + x\sqrt{x+3} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+3}(-\sqrt{x+3} + x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x+3} \Rightarrow x^2 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}}$
$\mathbf{\overset{x>0}{\Longrightarrow} \boxed{x_S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}}}$

14) Ο ζητούμενος όγκος είναι ο ίδιος με τον όγκο του στερεού από περιστροφή της $\mathbf{f(x) + 3}$ ως προς τον άξονα των $\mathbf{x}$. Άρα $\mathbf{V = \pi \int_{-3}^{0} (f(x)+3)^2 dx = \pi \int_{-3}^{0} \left(|x|\sqrt{x+3}\right)^2 dx = \pi \int_{-3}^{0} x^2(x+3)dx = \pi \int_{-3}^{0} x^3 + 3x^2 dx = \pi[\frac{x^4}{4} + x^3]_{-3}^{0} = \pi(0 - \frac{81}{4} + 27) = \boxed{\frac{27\pi}{4}}}$

Τοξωτή γέφυρα

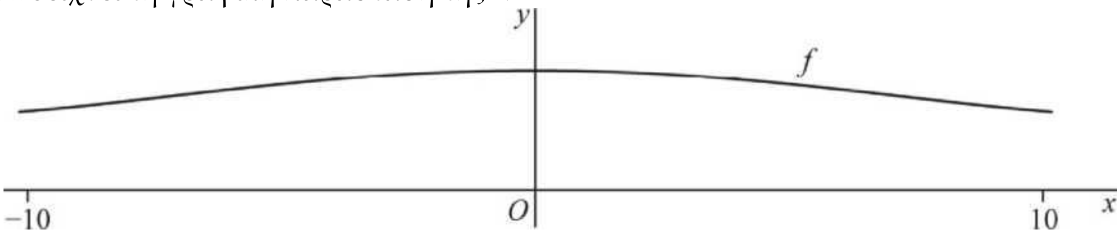
Τοξωτές γέφυρες εμφανίζονται στο Άμστερνταμ. Δείτε την εικόνα.

Μια παρόμοια γέφυρα θα έπρεπε να κατασκευαστεί σε άλλη πόλη.

Η απόσταση του οδοστρώματος από το νερό περιγράφεται από το ακόλουθο μοντέλο:

$\mathbf{f(x) = 0,00004x^4 - 0,012x^2 + 2,3}$ με $\mathbf{t - 10 \leq x \leq 10}$

Όπου $\mathbf{x}$ είναι σε μέτρα και $\mathbf{f(x)}$ το ύψος του οδοστρώματος σε μέτρα σε σύγκριση με το νερό. Το σχήμα 1 δείχνει τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$.



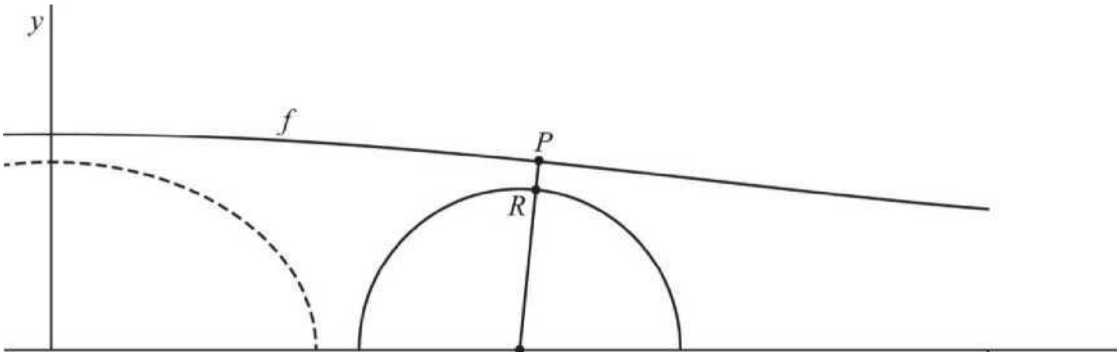
Ο μελετητής έχει θέσει ως απαίτηση η κλίση του οδοστρώματος να μην υπερβαίνει το **12%**. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της κλίσης του $\mathbf{f}$ πρέπει να είναι παντού μικρότερη ή ίση με $\mathbf{0,12}$. Μπορείτε να το ελέγξετε προσδιορίζοντας πόσο μεγάλο είναι το μέγιστο της απόλυτης τιμής της κλίσης.

15) Εξετάστε αλγεβρικά εάν το μοντέλο πληροί αυτήν την απαίτηση. 5π

Ο σχεδιαστής θέλει να δημιουργήσει τρία περάσματα κάτω από το οδόστρωμα. Θα υπάρχει ένα φαρδύ πέρασμα στη μέση. Επιπλέον, θα υπάρχει δίοδος σε σχήμα ημικυκλίου και από τις δύο πλευρές. Στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα δούμε μόνο το δεξί τμήμα της γέφυρας.

Το κέντρο **M** του περάσματος είναι **5** μέτρα δεξιά από την αρχή.

Το σημείο

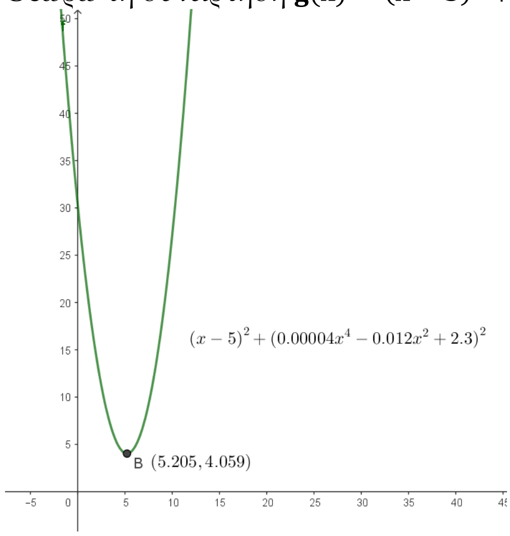


$\mathbf{P(p, f(p))}$βρίσκεται στην επιφάνεια του δρόμου. Για τον υπολογισμό της ακτίνας της

διόδου, ο μελετητής λαμβάνει υπόψη την απαίτηση ότι το σημείο στο οδόστρωμα με τη μικρότερη απόσταση από το πέρασμα πρέπει να απέχει $\mathbf{0,30}$ μέτρα από τη δίοδο.
Το σχήμα 2 δείχνει το απόσπασμα που πληροί αυτήν την απαίτηση. Σε αυτήν την περίπτωση: το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **PM** είναι τουλάχιστον ένα μέτρο, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος **PR** είναι $\mathbf{0,30}$ μέτρα, όπου **R** είναι η τομή του **PM** με το ημικύκλιο.

16) Υπολογίστε την ακτίνα **MR** του κυκλικού περάσματος σε μέτρα. Να δώσετε τελική απάντηση με δύο δεκαδικά ψηφία. 6π

Λύση
15) Έχουμε ότι για την κλίση της f ότι $\mathbf{f'(x) = 0,00016x^3 - 0,024x}$ (περιττή συνάρτηση).Για να βρω τη μέγιστη κλίση της **f'** βρίσκουμε την παράγωγό της που είναι η $\mathbf{f''(x) = 0,00048x^2 - 0,024}$ με $\mathbf{f''(x) = 0}$ όταν $\mathbf{0,00048x^2 - 0,024 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}}$. Αλλά τότε το απόλυτο της κλίσης είναι ίσο με $\mathbf{|f'(-5\sqrt{2})| = |f'(5\sqrt{2})| = |0,00016(5\sqrt{2})^3 - 0,024(5\sqrt{2})| = |0,04\sqrt{2} - 0,12\sqrt{2}| = 0,08\sqrt{2} < 0,12}$ αφού $\mathbf{0,08\sqrt{2} < 0,12 \Leftarrow \sqrt{2} < \frac{0,12}{0,08} = \frac{3}{2} \Leftarrow 2 < \frac{9}{4}}$, που ισχύει.
16) Έχω $\mathbf{MP = \sqrt{(p-5)^2 + (f(p))^2} = \sqrt{(p-5)^2 + (0,00004p^4 - 0,012p^2 + 2,3)^2}}$. Έχω $\mathbf{MR = MP - 0,30}$, άρα όταν μεγιστοποιείται το **MP**, τότε μεγιστοποιείται και το **MR**.
Θεωρώ τη συνάρτηση $\mathbf{g(x) = (x-5)^2 + (0,00004x^4 - 0,012x^2 + 2,3)^2}$



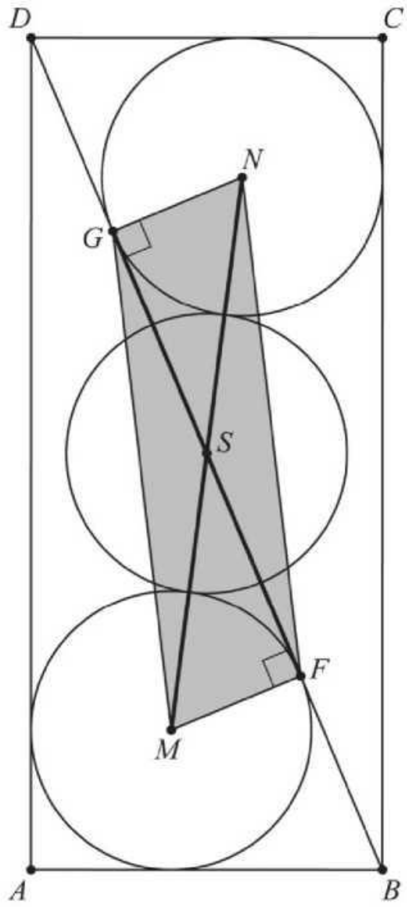
Όπως βλέπουμε αυτή μεγιστοποιείται για $\mathbf{x = 5,205}$ οπότε $\mathbf{MP = \sqrt{4.059} = 2.014 \Rightarrow MR = MP - 0,30 = \boxed{1,71}}$

Ορθογώνιο με τρεις κύκλους

Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο **ABCD** που περιέχει τρεις κύκλους. Σχεδιάζεται και η διαγώνιος **BD** . Αυτό δημιουργεί τα τρίγωνα **ABD** και **BCD**. Επιπλέον, δίνεται:

- οι τρεις κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα **r**.
- ο κάτω κύκλος έχει κέντρο **M** και εφάπτεται σε κάθε πλευρά του τρίγωνου **ABD**. Αυτός ο κύκλος αγγίζει την πλευρά **BD** στο σημείο **F**. Άρα το **MF** είναι κάθετο στην πλευρά **BD** .
- ο επάνω κύκλος έχει κέντρο **N** και εφάπτεται σε κάθε πλευρά του τρίγωνου **BCD**. Αυτός ο κύκλος αγγίζει την πλευρά **BD** στο σημείο **G**. Άρα το **NG** είναι κάθετο στην πλευρά **BD**.
- το κέντρο **S** του μεσαίου κύκλου είναι η τομή του **FG** και **MN**.
- ο μεσαίος κύκλος εφάπτεται στον επάνω και τον κάτω κύκλο.

Στο σχήμα, υποδεικνύεται το τετράπλευρο **MFNG**. Αυτό το τετράπλευρο μπορεί να χωριστεί σε δύο ορθογώνια τρίγωνα **MFG** και **FNG**.



17) Διερευνήστε εάν το εμβαδόν του τετράπλευρου **MFNG** είναι μεγαλύτερο από, μικρότερο ή ίσο με το εμβαδόν ενός από τους κύκλους. 5π

Λύση

17) Το εμβαδόν κάθε κύκλου είναι $\mathbf{E_c = \pi r^2}$

Το εμβαδόν του τετράπλευρου είναι

$\mathbf{(MFNG) = 2(MFG) = 2\frac{1}{2}MF \cdot FG = r \cdot FG}$.

Αλλά $\mathbf{FG = 2SG = 2\sqrt{NS^2 - GN^2} = 2\sqrt{4r^2 - r^2} = 2\sqrt{3}r}$

Άρα $\mathbf{(MFNG) = r \cdot FG = 2\sqrt{3}r^2 > \pi r^2}$ (αφού $\mathbf{12 > \pi^2 \approx 10}$)

Άρα $\boxed{\mathbf{(MFNG) > E_c}}$

Εξετάσεις VWO 2023 περίοδος 2
Παρασκευή 23 Ιουνίου 2023 διάρκεια: 3 ώρες
μαθηματικά C
Αυτή η εξέταση αποτελείται από 23 ερωτήσεις.
Για αυτήν την εξέταση μπορούν να ληφθούν το πολύ 74 πόντοι.
Κάθε αριθμός ερώτησης δείχνει πόσους πόντους μπορούν να κερδίσουν με μια σωστή απάντηση.
Εάν μια ερώτηση απαιτεί εξήγηση, επεξήγηση ή υπολογισμό, η απάντηση συνήθως δεν βαθμολογείται εάν λείπει αυτή η εξήγηση, η εξήγηση ή ο υπολογισμός.
Μην δίνετε περισσότερες απαντήσεις (λόγοι, παραδείγματα κ.λπ.) από αυτές που ζητούνται.
Για παράδειγμα, εάν ζητηθούν δύο λόγοι και παρέχετε περισσότερους από δύο λόγους, μόνο οι δύο πρώτοι θα προσμετρηθούν στην αξιολόγηση.

Εκθεσιακός χώρος

Στη φωτογραφία βλέπετε τον εκθεσιακό χώρο μιας εταιρείας αυτοκινήτων στο Lochem. Το βέλος στη φωτογραφία δείχνει το μπροστινό μέρος του εκθεσιακού χώρου.

φωτογραφία

Ο εκθεσιακός χώρος έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 18 επί 18 επί 2,8 μέτρα στην κορυφή του οποίου βρίσκεται μια κανονική πυραμίδα με την ίδια τετράγωνη βάση και ύψος 5,6 μέτρα.

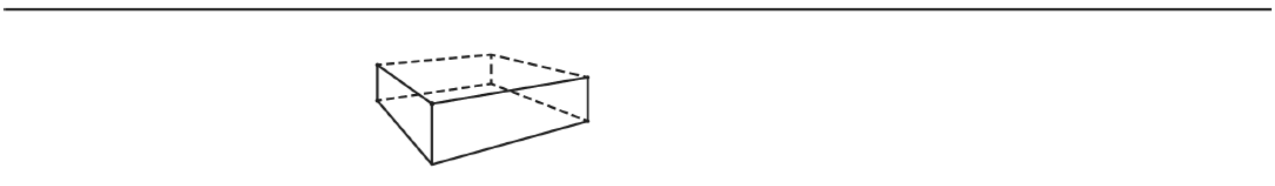
1) Υπολογίστε τον όγκο του εκθεσιακού χώρου. Δώστε την απάντησή σας σε ακέραιο αριθμό m^3. 3π

Μια εντυπωσιακή πτυχή του σχεδιασμού του εκθεσιακού χώρου είναι ότι οι νευρώσεις-ακμές της οροφής σε σχήμα πυραμίδας έχουν επεκταθεί στο έδαφος. Αυτό σημαίνει ότι οι τέσσερις σιδερένιες δοκοί εκτείνονται από την κορυφή μέχρι το έδαφος. Στο μπροστινό αριστερό μέρος της φωτογραφίας φαίνεται καθαρά το τμήμα ενός από αυτά τα σιδερένια δοκάρια που βρίσκεται έξω από τον εκθεσιακό χώρο.

Το οικόπεδο στο οποίο είναι χτισμένο ο εκθεσιακός χώρος αναφέρεται στο παρακάτω σχήμα.

2) Σχεδιάστε την μπροστινή όψη του εκθεσιακού χώρου συμπεριλαμβανομένων των σιδερένιων δοκών στο φύλλο εργασίας σε κλίμακα 1:200. Μην εξετάζετε τα παράθυρα, τις πόρτες και τα παρόμοια. 3π

Το κάτω μέρος του εκθεσιακού χώρου σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι σχεδιασμένο σε προοπτική στο παρακάτω σχήμα. Η ευθεία γραμμή είναι ο ορίζοντας.



3) Σχεδιάστε τις τρεις σιδερένιες δοκούς που φαίνονται σε αυτό το σχέδιο. Υποδείξτε σαφώς τα τελικά σημεία των σιδερένιων δοκών στο έδαφος. 6π

Λύση

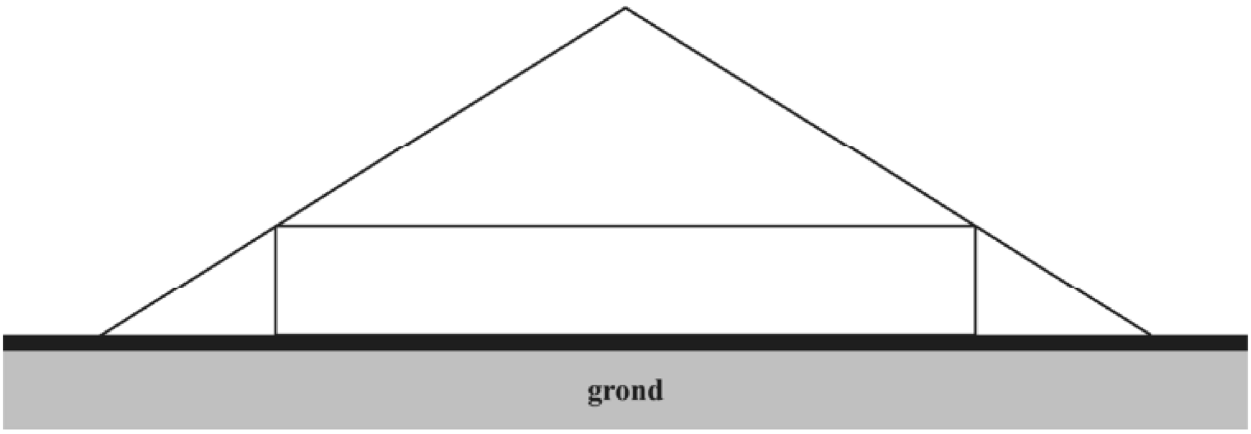
1) Έχω για τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου $\mathbf{V_1 = 18 \cdot 18 \cdot 2,8 = 907,2\ m^3}$ ενώ για τον όγκο της πυραμίδας από πάνω έχω $\mathbf{V_2 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 18 \cdot 5,6 = 604,8\ m^3}$. Άρα ο συνολικός όγκος του εκθεσιακού χώρου είναι $\mathbf{V_1 + V_2 = 907,2 + 604,8 =} \boxed{\mathbf{1512\ m^3}}$

2) Σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο με μήκος $\mathbf{18m/200 = 9\ cm}$ και ύψος από το έδαφος $\mathbf{2,8m/200 = 1,4\ cm}$

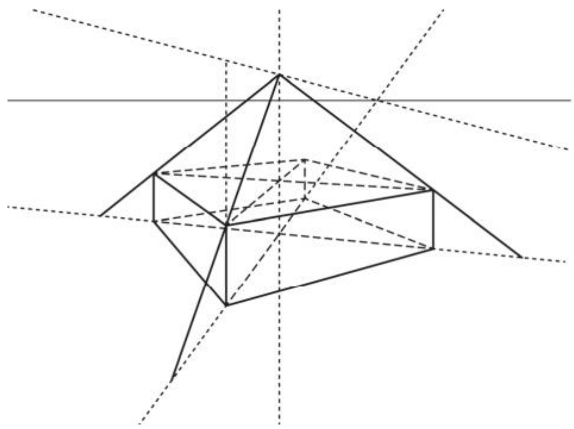
Μετά σχεδιάζουμε το ισοσκελές τρίγωνο με ύψος πάνω από αυτό $\mathbf{5,6m/200 = 2,8\ cm}$

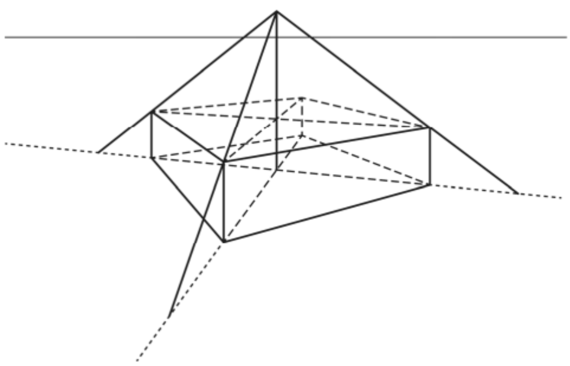
Τέλος επεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ως το έδαφος.

Τελικά έχουμε



3) Μια πρώτη προσέγγιση:





• Σχεδιάζουμε και επεκτείνουμε τις διαγώνιους του πατώματος, με τη διαγώνιο που εκτείνεται από το μπροστινό αριστερό γωνιακό σημείο να τέμνει τον ορίζοντα στο σημείο φυγής.

• Συνδέουμε το σημείο που βρίσκεται σε διπλάσιο ύψος πάνω από το τμήμα της κατακόρυφης ακμής μπροστά αριστερά με το σημείο φυγής στον ορίζοντα της διαγωνίου

• Τραβάμε μια κάθετη γραμμή που περνά από τομή των διαγωνίων στο κάτω επίπεδο. Το σημείο που τέμνει την γραμμή του προηγούμενου βήματος θα είναι η κορυφή της πυραμίδας.

• Σχεδιάζουμε την γραμμή εκτεταμένη προς τα εμπρός που συνδέει την κορυφή της πυραμίδας με το πάνω γωνιακό σημείο μπροστά δεξιά ώστε να σχηματίσουμε τη σιδερένια δοκό μπροστά δεξιά

• Ομοίως, για τις δοκούς σιδήρου αριστερά εμπρός και αριστερά πίσω

• Τα ακραία σημεία των σιδερένιων δοκών τέμνουν τις επεκτάσεις των διαγωνίων του πατώματος

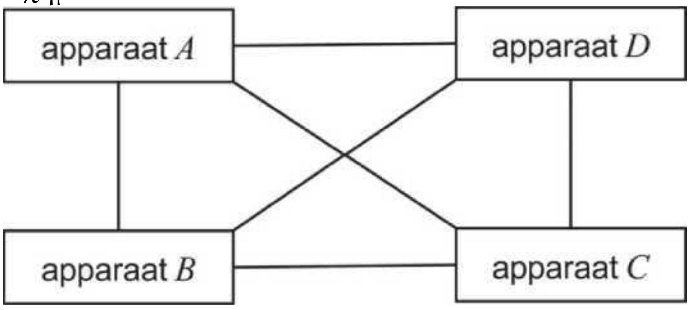
Μια δεύτερη προσέγγιση:

• Σχεδιάζουμε τις διαγώνιους του πατώματος

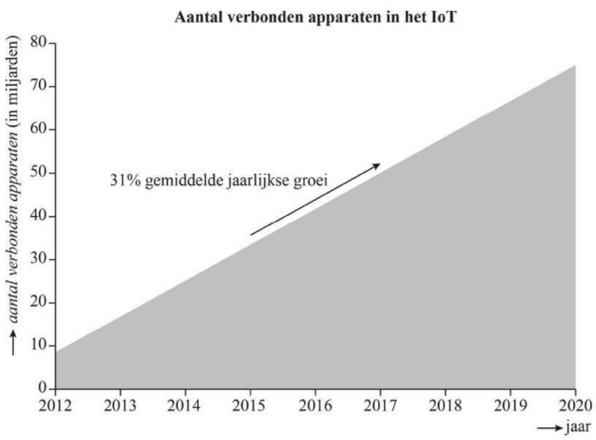
• Σχεδιάζουμε τις διαγώνιους του ταβανιού

• Συνδέουμε τα δύο σημεία τομής που προκύπτουν στα προηγούμενα βήματα και επεκτείνουμε το τμήμα αυτό προς τα πάνω σε ύψος διπλάσιο από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των δύο σημείων τομής, ώστε να έχουμε την κορυφή της πυραμίδας

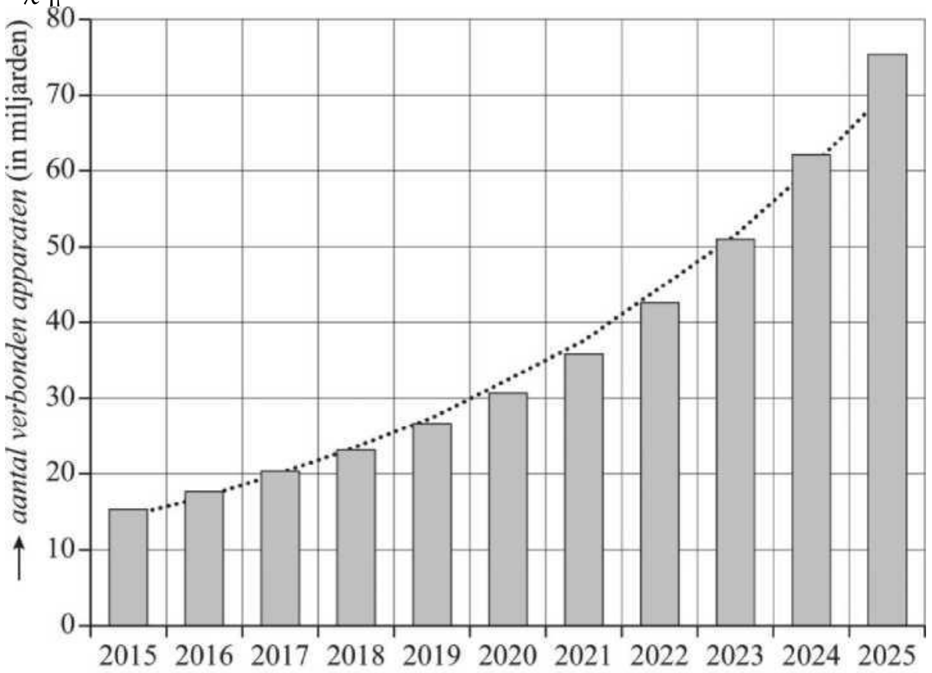
Τα επόμενα τρία βήματα όπως πριν.

Το Διαδίκτυο των Πραγμάτων
Στις μέρες μας υπάρχουν όλο και περισσότερες συσκευές που μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους μέσω του διαδικτύου. Σκεφτείτε, για παράδειγμα, τα smartphone και τα έξυπνα ρολόγια, αλλά και το «έξυπνο» κουδούνι και θερμοστάτη κ.λπ.
Εάν τέσσερις συσκευές A, B, C και D είναι πλήρως διασυνδεδεμένες -δηλαδή κάθε συσκευή είναι συνδεδεμένη με κάθε άλλη συσκευή- τότε αυτό θα απαιτούσε έξι συνδέσεις. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 1, όπου οι γραμμές αντιπροσωπεύουν τις διασυνδέσεις.
Σχήμα 1


4) Υπολογίστε τον ελάχιστο αριθμό πλήρως συνδεδεμένων συσκευών απαιτούν περισσότερες από εκατό συνδέσεις. 3π
4) Έστω $\mathbf{N}$ ο αριθμός των πλήρως συνδεδεμένων συσκευών. Αφού κάθε συσκευή συνδέεται με κάθεμια από τις υπόλοιπες $\mathbf{N-1}$ συσκευές θα λέγαμε ότι υπάρχουν $\mathbf{N(N-1)}$ συνδέσεις. Όμως με αυτόν τον τρόπο μετρούμε δυο φορές την κάθε διασύνδεση άρα έχουμε $\mathbf{\frac{N(N-1)}{2}}$ διασυνδέσεις. Θέλουμε $\mathbf{\frac{N(N-1)}{2} > 100}$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{\frac{14(14-1)}{2} = 91 < 100}$ και $\mathbf{\frac{15(15-1)}{2} = 105 > 100}$ άρα $\boxed{\mathbf{15}}$ είναι ο ελάχιστος αριθμός πλήρως συνδεδεμένων συσκευών που απαιτούν περισσότερες από εκατό συνδέσεις.
Κάθε συσκευή που είναι συνδεδεμένη στο διαδίκτυο χρειάζεται τη δική της μοναδική διεύθυνση IP . Οι διευθύνσεις IP μπορούν να γραφτούν ως οκτώ ομάδες από τέσσερα δεκαεξαδικά ψηφία η καθεμία, που χωρίζονται με άνω και κάτω τελείες. Για το σκοπό αυτό, τα γνωστά ψηφία 0 έως 9 επεκτείνονται με τα ψηφία A (=10) έως F (=15). Άρα το A έως το F είναι επίσης ψηφία και όχι γράμματα σε αυτήν την εφαρμογή.
παράδειγμα έγκυρης διεύθυνσης IP:
2001:0DB8:85A3:0000:1319:8A2E:0370:7344
5) Υπολογίστε πόσες διευθύνσεις IP είναι θεωρητικά δυνατές. Δώστε την απάντησή σας με τη μορφή $\mathbf{a \cdot 10^b}$ με το $\boldsymbol{\alpha}$ σε ένα δεκαδικό ψηφίο και το $\boldsymbol{\beta}$ ως ακέραιο αριθμό. 3π
5) Έχουμε $\mathbf{8 \cdot 4 = 32}$ ψηφία με $\mathbf{16}$ επιλογές για το κάθε ψηφίο άρα συνολικά $\mathbf{16^{32}} = \boxed{\mathbf{3,4 \cdot 10^{38}}}$
Ο συνολικός αριθμός συσκευών («πράγματα») που έρχονται σε επαφή με άλλες συσκευές ή συστήματα μέσω συνδέσεων στο Διαδίκτυο και ανταλλάσσουν δεδομένα μαζί τους ονομάζεται Internet of Things. Το Διαδίκτυο των πραγμάτων συντομεύεται σε IoT (στα Αγγλικά: Internet of Things).
Το Σχήμα 2, από ένα άρθρο στο Διαδίκτυο από τον Νοέμβριο του 2013, υποθέτει 31% ετήσια αύξηση του IoT.
Σχήμα 2: αριθμός συνδεδεμένων συσκευών (σε δισεκατομμύρια) ανά έτος.



Το γράφημα στο σχήμα 2 από το άρθρο του Διαδικτύου και η υπόθεση της ετήσιας αύξησης 31 % από το ίδιο άρθρο έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους.
6) Εξηγήστε την αντίφαση αυτή. 2π
7) Υπολογίστε μετά από πόσες ολόκληρες εβδομάδες το IoT έχει διπλασιαστεί με ετήσιο ρυθμό 31 %. 4π
Η ετήσια αύξηση 31 % από το προαναφερθέν άρθρο στο διαδίκτυο έχει πλέον προσαρμοστεί προς τα κάτω. Το Σχήμα 3 δείχνει πώς έχει αναπτυχθεί το IoT από το 2015, σύμφωνα με άλλη μελέτη. Εδώ τα στοιχεία για τα έτη μετά το 2018 είναι δεδομένα προβλέψεων. Η γραμμή τάσης εμφανίζεται διακεκομμένη.
σχήμα 3



Τον Δεκέμβριο του 2015, το μέγεθος του IoT ήταν $\mathbf{15,41}$ δισεκατομμύρια συσκευές. Τον Δεκέμβριο του 2025 αυτό θα είναι (σύμφωνα με την πρόβλεψη) $\mathbf{75,44}$ δις.
Επίσης, σύμφωνα με τα δεδομένα στο Σχήμα 3, το IoT αυξάνεται περίπου με σταθερό ρυθμό ανά έτος.
8) Υπολογίστε αυτό το ποσοστό χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των ετών 2015 και 2025. Δώστε την απάντησή σας με ένα δεκαδικό ψηφίο. 3π
Η γραμμή τάσης στο σχήμα 3 μπορεί να προσεγγιστεί με τον ακόλουθο τύπο: $\mathbf{I = 14,7 \cdot 1,17^t}$

Όπου $\mathbf{I}$ είναι το μέγεθος του IoT σε δισεκατομμύρια και $\mathbf{t}$ είναι ο χρόνος σε χρόνια με $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ τον Δεκέμβριο του 2015. Έστω ότι ο τύπος για το **I** ισχύει και μετά το 2025.
9) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το **I**, υπολογίστε σε ποιο έτος το IoT θα περιέχει για πρώτη φορά περισσότερες από τρεις φορές περισσότερες συσκευές από ό,τι στο τέλος του 2025. 4π

Λύση
6) Το γράφημα δείχνει γραμμική αύξηση του IoT και όχι εκθετική που λέει το άρθρο. Εξάλλου αν είχαμε εκθετική αύξηση 31% κάθε χρόνο το 2013 θα είχαμε $\mathbf{1,31 * 9 = 11,79}$ δισεκατομμύρια συσκευές στο IoT που είναι λιγότερο από τα περίπου **17** δις του σχήματος.
7) Θέλω $\mathbf{1,31^t = 2 \Rightarrow t = \frac{ln2}{ln1,31}}$ έτη ή $\mathbf{52 \cdot \frac{ln2}{ln1,31} = 133,48 \approx \boxed{134}}$ εβδομάδες.
8) Έχω $\mathbf{\frac{75,44}{15,41} = \alpha^{10} \Rightarrow \alpha = \sqrt[10]{\frac{75,44}{15,41}} = 1,172}$ άρα ετήσια αύξηση $\mathbf{17,2}$%
9) Αρκεί $\mathbf{3 = 1,17^t \Rightarrow t = \frac{ln3}{ln1,17} = 6,997 \approx 7}$ χρόνια μετά το 2025 δηλαδή το 2032.

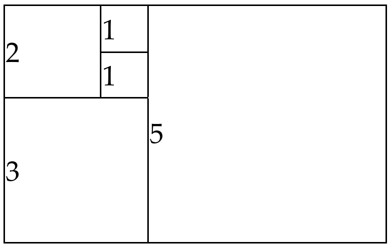
Ρολόι Fibonacci

Ένα ειδικό ρολόι πωλείται στο διαδίκτυο: το ρολόι Fibonacci. Δείτε την εικόνα.

Το ρολόι βασίζεται σε μία γνωστή μαθηματική ακολουθία: την ακολουθία Fibonacci. Οι πρώτοι δέκα όροι αυτής της σειράς είναι οι αριθμοί:

1-1-2-3-5-8-13-21-34-55

Στη φωτογραφία μπορείτε να δείτε ότι το ρολόι αποτελείται από πέντε τετράγωνα. Αυτά τα τετράγωνα αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς από την ακολουθία Fibonacci. Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Οι αριθμοί στο σχήμα δείχνουν ένα μέτρο του μήκους των πλευρών των τετραγώνων στο σχήμα.

10) Υπολογίστε πόσες φορές είναι το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου από το εμβαδόν του δεύτερου μεγαλύτερου τετραγώνου. Δώστε την απάντησή σας με ένα δεκαδικό ψηφίο. 2π

Τρία φώτα κρύβονται πίσω από κάθε ένα από τα τετράγωνα: ένα κόκκινο, ένα πράσινο και ένα μπλε. Το πολύ ένα από αυτά τα φώτα είναι πάντα αναμμένο.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν 4 επιλογές για κάθε τετράγωνο: το τετράγωνο είναι "σβηστό-off" ή το τετράγωνο έχει χρώμα: κόκκινο, πράσινο ή μπλε. Μπορείτε να διαβάσετε την ώρα χρησιμοποιώντας αυτά τα χρώματα.

Ένα άλλο ρολόι λειτουργεί σύμφωνα με τη σημειογραφία των 12 ωρών. Το 12,00 εμφανίζεται ως 0,00.

Το ρολόι αυτό αλλάζει κάθε 5 λεπτά. Για παράδειγμα, εάν η πραγματική ώρα είναι 2:50 ή 2:53, το ρολόι θα δείχνει 2:50 και τις δύο φορές.

Το ρολόι Fibonacci έχει πολύ περισσότερες ενδείξεις από όσες μπορεί να εμφανίσει το δεύτερο ρολόι.

11) Υπολογίστε πόσες φορές περισσότερο. Δώστε την απάντησή σας ως ακέραιο αριθμό. 4π

Μπορείτε να διαβάσετε την ώρα στο ρολόι ως εξής:

Προσθέστε μαζί τις τιμές των αριθμών στα τετράγωνα του μπλε και του κόκκινου χρώματος.

Αυτές είναι οι ώρες. Μετρήστε τις τιμές των αριθμών με μπλε και πράσινο χρώμα, προσθέστε τα χρωματιστά τετράγωνα μαζί και πολλαπλασιάστε το αποτέλεσμα επί 5. Αυτά είναι τα λεπτά.

Επομένως, τα μπλε τετράγωνα μετρούν τόσο για τις ώρες όσο και για τα λεπτά. Στον πίνακα 1 βλέπετε έναν τρόπο εμφάνισης της ώρας 7.25 χρησιμοποιώντας μόνο κόκκινα και πράσινα τετράγωνα.

Πίνακας 1

τετράγωνο	1	1	2	3	5
χρώμα	κόκκινο	κόκκινο	κόκκινο	κόκκινο	πράσινο

Σε μια συγκεκριμένη ώρα τα φώτα στο ρολόι θα ανάψουν όπως φαίνεται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2

τετράγωνο	1	1	2	3	5
χρώμα	μπλε	σβηστό-off	πράσινος	κόκκινο	κόκκινο

12) Υπολογίστε την ώρα που δείχνει το ρολόι σύμφωνα με τον πίνακα 2. 3π

Πολλές φορές η ώρα μπορεί να εμφανιστεί με περισσότερους από έναν τρόπους σε αυτό το ρολόι. Ο Πίνακας 3 δείχνει δύο διαφορετικούς τρόπους εμφάνισης της ώρας 7.25.

πίνακας 3

τετράγωνο	1	1	2	3	5
χρώμα	κόκκινο	κόκκινο	κόκκινο	κόκκινο	πράσινο
χρώμα	σβηστό-off	σβηστό-off	το κόκκινο	σβηστό-off	μπλε

13) Δώστε δύο άλλους τρόπους για να αναπαραστήσετε την ώρα 7,25. 4π

Κάποιος θέλει να φτιάξει ένα παρόμοιο ρολόι Fibonacci με πράσινα, κόκκινα και μπλε φώτα, τα οποία μπορούν να εμφανίζουν τους πραγματικούς χρόνους στο λεπτό σε μορφή 24 ωρών (δηλαδή από 0:00 έως 23:59). Αυτό το ρολόι πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις:

1. Ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός πρέπει να είναι άθροισμα (τουλάχιστον) 59.
2. Πρέπει να είναι δυνατός ο σχηματισμός όλων των αριθμών από το 0 έως το 59.

Για να φτιάξετε ένα τέτοιο ρολόι, πρέπει να προστεθούν στο ρολόι τετράγωνα που αντιπροσωπεύουν αριθμούς Fibonacci όπως είδαμε στο σχήμα.

14) Εξετάστε ποιοι διαδοχικοί αριθμοί από την ακολουθία Fibonacci πρέπει τουλάχιστον να προστεθούν στο ρολόι και να εξηγηθεί ότι το ρολόι όντως πληροί και τις δύο απαιτήσεις. 4π

Λύση

10) Είναι $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9} = \mathbf{2,777} \approx \boxed{\mathbf{2,8}}$ φορές μεγαλύτερο.

11) Έχω 5 τετράγωνα με 4 επιλογές για το καθένα άρα $\mathbf{4^5 = 1024}$ επιλογές- ενδείξεις στο ρολόι Fibonacci. Στο άλλο ρολόι έχω 12*12=144 ενδείξεις. Άρα έχουμε $\frac{\mathbf{1024}}{\mathbf{144}} = \mathbf{7,11} \approx \boxed{7}$ φορές περισσότερες ενδείξεις.

12) Τα τετράγωνα με μπλε και κόκκινο χρώμα δίνουν άθροισμα $\mathbf{1+3+5=9}$, ενώ τα τετράγωνα με μπλε και πράσινο χρώμα δίνουν άθροισμα $\mathbf{1+2=3}$. Άρα η ώρα που δείχνει το ρολόι είναι 9.15 ή (21.15).

13)

τετράγωνο	1	1	2	3	5
χρώμα	κόκκινο	κόκκινο	σβηστό-off	σβηστό-off	μπλε
χρώμα	κόκκινο	κόκκινο	μπλε	μπλε	σβηστό-off

Σημείωση: Υπάρχουν άλλοι 5 τρόποι!

τετράγωνο	1	1	2	3	5
χρώμα	(σβηστό-off)	(σβηστό-off)	μπλε	πράσινο	κόκκινο
χρώμα	πράσινο	πράσινο	κόκκινο	πράσινο	κόκκινο
χρώμα	κόκκινο	κόκκινο	πράσινο	πράσινο	κόκκινο
χρώμα	μπλε	μπλε	(σβηστό-off)	πράσινο	κόκκινο
χρώμα	μπλε	μπλε	κόκκινο	μπλε	(σβηστό-off)

14) Έχω $\mathbf{1+1+2+3+5+8+13+21+34=88>59}$ δηλαδή πρέπει να προστεθούν στο ρολόι τα τετράγωνα που αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς Fibonacci 8,13,21 και 34.

Το αρχικό ρολόι μπορεί να δώσει τους αριθμούς 0 έως 12. Με την προσθήκη του τετραγώνου 8, παίρνουμε και τους αριθμούς από το 13 έως το 20. Με την προσθήκη του τετραγώνου 13, παίρνουμε και τους αριθμούς από το 21 έως το 34. Με την προσθήκη του τετραγώνου 21, παίρνουμε και τους αριθμούς από το 35 έως το 55. Με την προσθήκη του τετραγώνου 34, παίρνουμε και τους αριθμούς από το 56 έως το 59. Άρα, πράγματι, όλοι οι αριθμοί από το 0 έως το 59 μπορούν να σχηματιστούν.

Μοναδικές λέξεις

Τα κείμενα αποτελούνται από λέξεις (και σημεία στίξης, αλλά θα τα αγνοήσουμε σε αυτήν την εργασία). Αυτές οι λέξεις δεν είναι όλες διαφορετικές. Δηλαδή, δεν είναι όλα μοναδικά. Όσο πιο μοναδικές λέξεις συναντάς αναλογικά, τόσο πιο δύσκολο είναι το κείμενο.

Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε το ποσοστό των μοναδικών λέξεων σε ένα κείμενο. Το ποσοστό αυτό προσδιορίζεται με βάση δύο ποσότητες:

U: ο αριθμός των μοναδικών λέξεων σε ένα κομμάτι κειμένου.

T: ο συνολικός αριθμός λέξεων σε αυτό το κομμάτι κειμένου.

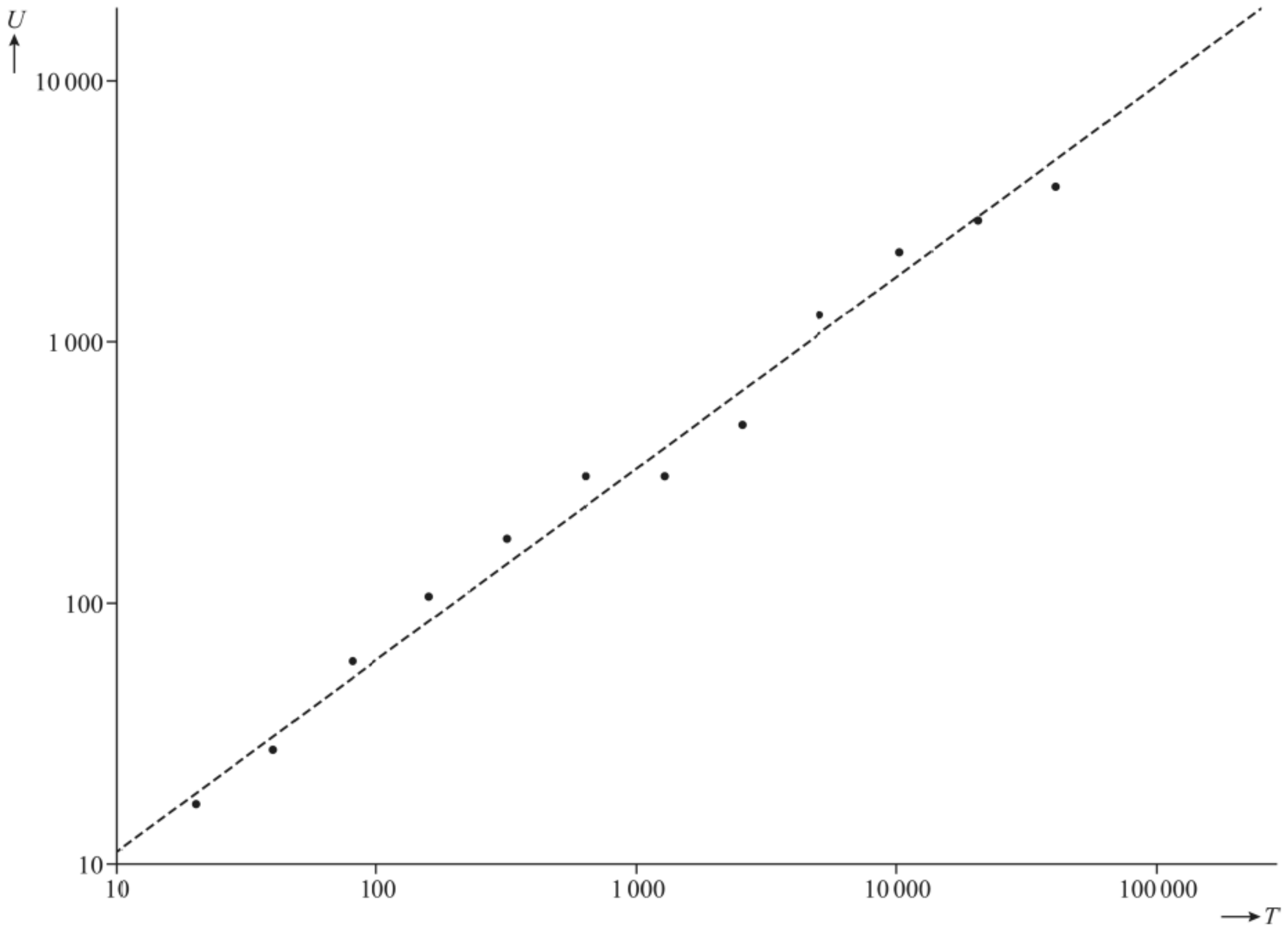
Ας δούμε στα ολλανδικά τις δύο πρώτες προτάσεις αυτού του προβλήματος:

«Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend.»

15) Προσδιορίστε το ποσοστό των μοναδικών λέξεων στις δύο πρώτες προτάσεις αυτής της εργασίας. Δώστε την απάντησή σας ως ακέραιο αριθμό. 2π

Η σύνδεση μεταξύ U και T καθορίστηκε από το βιβλίο του Charles Darwin «On The Origin of Species».

Σχήμα 1



Στο σχήμα 1, χρησιμοποιείται μια λογαριθμική κλίμακα και στους δύο άξονες. Η διακεκομμένη γραμμή προσεγγίζει τη σχέση μεταξύ U και T. (σ.σ. οι αριθμοί 10,100,1000 κλπ είναι ανά 4 cm).

Το «On The Origin of Species» περιέχει συνολικά 191.740 λέξεις και περιέχει 8.842 μοναδικές λέξεις. Καθώς διαβάζετε, θα συναντάτε όλο και λιγότερες νέες μοναδικές λέξεις. Εάν έχετε διαβάσει το ένα τέταρτο αυτού του βιβλίου, θα έχετε ήδη συναντήσει περισσότερες από τις μισές μοναδικές λέξεις.

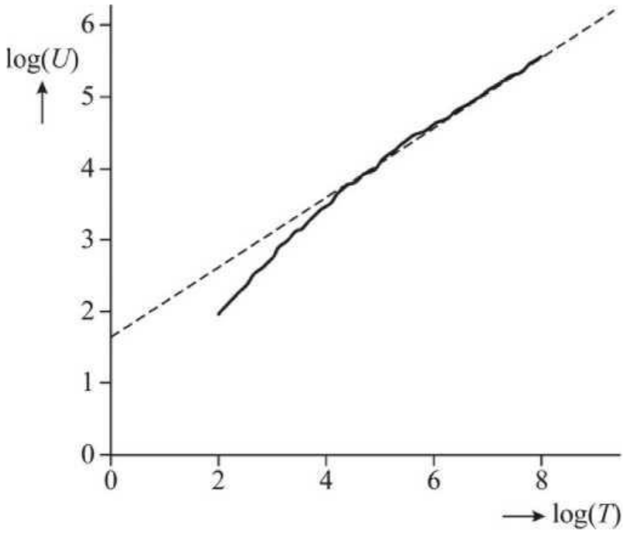
16) Υπολογίστε τότε χρησιμοποιώντας τη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα στο φύλλο εργασίας, ποιο ποσοστό από τον συνολικό αριθμό μοναδικών λέξεων έχετε ήδη συναντήσει. Δώστε την απάντησή σας ως ακέραιο αριθμό. 5π

Ο γλωσσολόγος Gustav Herdan ανακάλυψε μια γενική σχέση μεταξύ του U και T για μεγαλύτερα κείμενα. Αυτή η σχέση ανακοινώθηκε από τον Harold Stanley Heap και ονομάζεται νόμος Herdan-Heap .

Η διεθνής υπηρεσία ειδήσεων Reuters έκανε διαθέσιμη μια βάση δεδομένων - τη λεγόμενη RCV1 - για γλωσσική έρευνα.

Οι ερευνητές έχουν καθορίσει τη σχέση μεταξύ U και T για την RCV1 .

Δείτε το σχήμα 2, το οποίο απεικονίζει το $\mathbf{log(U)}$ έναντι του $\mathbf{log(T)}$.



Το γράφημα στο Σχήμα 2 δείχνει την πραγματική σχέση μεταξύ U και T στο RCV1 και η διακεκομμένη γραμμή δίνει μια προσέγγιση σύμφωνα με τον νόμο Herdan-Heap. Κάποιος διαβάζει ένα κείμενο που αποτελείται από τις πρώτες 7432 λέξεις από το RCV1.

17) Χρησιμοποιώντας το σχήμα 2, ελέγξτε αν αυτό το κείμενο συμμορφώνεται με τον νόμο Herdan-Heap. 2π

Ένας τύπος για τη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 2 είναι : $\mathbf{log\,(U) = 0,49log\,(T) + 1,64}$

18) Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο, υπολογίστε κατά προσέγγιση τον αριθμό των μοναδικών λέξεων στις πρώτες 1.000.000 λέξεις στο RCV1. Δώστε την απάντησή σας σε χιλιάδες. 3π

Ο τύπος $\mathbf{log\,(U) = 0,49log\,(T) + 1,64}$ μπορεί να γραφτεί ως $\mathbf{U = 43,65 \cdot T^{0,49}}$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να διαβάσετε το RCV1 στο σύνολό του. Εάν έχετε φτάσει τρεις φορές πιο μακριά, αυτό δεν σημαίνει ότι έχετε συναντήσει επίσης τρεις φορές περισσότερες μοναδικές λέξεις. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\mathbf{U = 43,65 \cdot T^{0,49}}$ μπορείτε να υπολογίσετε πόσο τοις εκατό περισσότερες μοναδικές λέξεις έχετε συναντήσει.

19) Υπολογίστε αυτό το ποσοστό. Δώστε την απάντησή σας ως ακέραιο αριθμό. 4π

Λύση

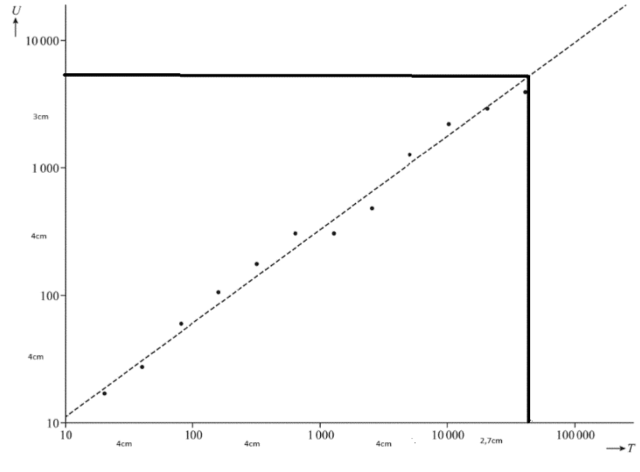
15) Έχουμε $\mathbf{T = 21}$ και $\mathbf{U = 19}$ (αφού οι λέξεις woorden και deze δεν είναι μοναδικές). Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι $\mathbf{\frac{19}{21} = 0,9047} \approx \boxed{90\%}$

Παρατήρηση: Εάν ένας υποψήφιος υποθέσει U=17 και άρα καταλήγει στην τελική απάντηση ποσοστό 81, μην αφαιρέσετε βαθμούς για αυτό.

Εξήγηση: Αυτή η ερώτηση μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σχετικά με τη σημασία των μοναδικών λέξεων και πώς πρέπει να μετρηθούν.

Σας ζητώ να περάσετε αυτό το μήνυμα στους διορθωτές μαθηματικών C VWO.

16) Το ένα τέταρτο του βιβλίου είναι $\mathbf{\frac{191.740}{4} = 47935}$ λέξεις. Έχω $\mathbf{logT = log47935 = 4,68}$. Άρα θα πάρω στο οριζόντιο άξονα το σημείο που βρίσκεται $\mathbf{0,68 * 4 = 2,7cm}$ δεξιά του 10000 και θα φέρω εκεί μια κάθετη ευθεία. Από το σημείο τομής αυτής της κάθετης με τη γραμμή τάσης, θα φέρουμε οριζόντια ευθεία. Παρατηρούμε ότι αυτή τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε σημείο που βρίσκεται 3 cm πάνω από το σημείο με ένδειξη 1000. Άρα $\mathbf{U = 10^{3+3/4} = 5623}$ μοναδικές λέξεις. Το ζητούμενο λοιπό ποσοστό θα είναι ίσο με $\mathbf{\frac{5623}{8.842} = 0,6359} \approx \boxed{64\%}$.



17) Έχουμε $\mathbf{7432 < 10000 = 10^4}$ (ή: $\mathbf{log(7432) = 3.87 < 4}$) οπότε πρέπει να πάμε στα αριστερά της τιμής $\mathbf{log(T) = 4\ T}$. Εκεί το γράφημα και η διακεκομμένη γραμμή απέχουν μεταξύ τους, άρα το κείμενο δεν συμμορφώνεται στον νόμο Herdan-Heap

18) Έχω $\mathbf{log\,(U) = 0,49 log\,(1.000.000) + 1,64 = 0,49 \cdot 6 + 1,64 = 4,58 \Longrightarrow U = 10^{4,58} = 38018 \approx \boxed{38000}}$

19) Έχω $\frac{\mathbf{43,65 \cdot (3T)^{0,49} - 43,65 \cdot T^{0,49}}}{\mathbf{43,65 \cdot T^{0,49}}} = \mathbf{(3)^{0,49} - 1 = 0,7131} = \boxed{\mathbf{71\%}}$

Διαδικασία Εξετάσεων

Υπάρχουν αυστηροί κανόνες για να διασφαλιστεί ότι όλα λειτουργούν δίκαια και όσο το δυνατόν πιο ισότιμα σε όλη την Ολλανδία κατά τη διάρκεια μίας κεντρικής εξέτασης.

Παρακάτω μπορείτε να δείτε ένα παράδειγμα ορισμένων κανόνων που περιλαμβάνονται στους κανονισμούς εξετάσεων ενός σχολείου στην Ολλανδία.

Η διαδικασία της κεντρικής εξέτασης

«1. Η αρμόδια αρχή διασφαλίζει ότι διεξάγεται η απαραίτητη εποπτεία της κεντρικής εξέτασης.

…

7. Υποψήφιος που προσέρχεται καθυστερημένα μπορεί, να προσέλθει το αργότερο μισή ώρα μετά τη λήξη της προθεσμίας που επιτρέπεται κατά την έναρξη της εξέτασης. (Παραδίδει το γραπτό του ταυτόχρονα με τους άλλους υποψήφιους.)

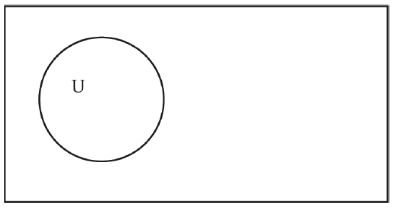
8. Ο υποψήφιος δεν μπορεί να παραδώσει το γραπτό του κατά την πρώτη ώρα της συνεδρίας και να φύγει από την αίθουσα των εξετάσεων.

9. Ο υποψήφιος δεν μπορεί να παραδώσει το γραπτό του τα τελευταία δεκαπέντε λεπτά και να βγει από την αίθουσα εξετάσεων»

Στην παρούσα άσκηση δεν λαμβάνουμε υπόψη το δικαίωμα παράτασης χρόνου, το οποίο ισχύει για έναν αριθμό υποψηφίων. Υποθέτουμε επίσης ότι όλοι οι υποψήφιοι θα προσέλθουν στην ώρα τους.

Η συνεδρία της κεντρικής εξέτασης για τα μαθηματικά C της προ-πανεπιστημιακής εκπαίδευσης διαρκεί 180 λεπτά.

20) Έχουμε $\frac{\mathbf{180-60-15}}{\mathbf{180}} = \mathbf{0,583} \approx \boxed{\mathbf{58\%}}$



Εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

H: η πρώτη μισή ώρα της εξέτασης βρίσκεται σε εξέλιξη.

U: η πρώτη ώρα της της εξέτασης βρίσκεται σε εξέλιξη.

K: τα τελευταία δεκαπέντε λεπτά της εξέτασης βρίσκονται σε εξέλιξη.

Έχει γίνει μία αρχή σε ένα διάγραμμα Venn μίας εξέτασης στο φύλλο εργασίας. Το ορθογώνιο αντιπροσωπεύει ολόκληρη τη διάρκεια της εξέτασης και η περιοχή για εσάς έχει ήδη σχεδιαστεί.

21) Συμπληρώστε σωστά το διάγραμμα Venn στο φύλλο εργασίας με τις περιοχές για H και K. 2π

Εισάγουμε επίσης τους ακόλουθους συμβολισμούς:

E: ο υποψήφιος φεύγει από την αίθουσα.

I: ο υποψήφιος υποβάλει την εργασία του.

O Johan μεταφράζει τον κανόνα 8 με τον ακόλουθο τύπο: $\mathbf{U} \Rightarrow (\neg\mathbf{I} \vee \mathbf{V})$. Ωστόσο, αυτή δεν είναι η πρόθεση του κανόνα 8, επειδή η πρόθεση του κανόνα 8 είναι να μην επιτρέπεται στον υποψήφιο να παραδώσει οποιαδήποτε εργασία ή να εγκαταλείψει την αίθουσα εξέτασης κατά την πρώτη ώρα της εξέτασης.

Εάν ο τύπος του Johan ήταν σωστός, θα μπορούσαν να προκύψουν δύο καταστάσεις που δεν προβλέπονται από τον κανόνα 8.

22) Δώστε τη μετάφραση του τύπου του Johan και μετά δώστε τις δύο καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν σύμφωνα με αυτόν τον τύπο, αλλά δεν είναι η πρόθεση του κανόνα 8. 3π

Για το τελευταίο μέρος, υποθέτουμε ότι ο κανόνας 8 λέει "Ο υποψήφιος δεν μπορεί να παραδώσει την εργασία του ή να εγκαταλείψει την αίθουσα εξέτασης κατά την πρώτη ώρα της συνεδρίας."

Σύμφωνα με τους κανόνες 8 και 9, ακριβώς το ίδιο ισχύει για την πρώτη ώρα και τα τελευταία δεκαπέντε λεπτά. Μέσω μιας λογικής δήλωσης για τα U, K, V και I, οι κανόνες 8 και 9 μπορούν να εκφραστούν ταυτόχρονα.

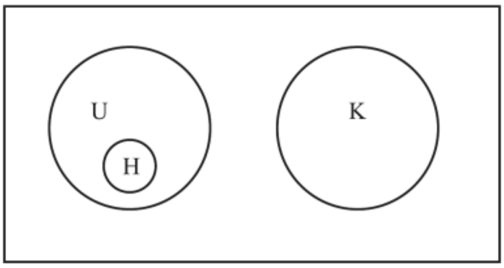
23) Γράψτε αυτή τη δήλωση χρησιμοποιώντας λογικά σύμβολα. 3π

Λύση

20) Υπολογίστε το ποσοστό του χρόνου που επιτρέπεται στους υποψηφίους να εγκαταλείψουν την αίθουσα εξέτασης. Δώστε την απάντησή σας σε ακέραια ποσοστά. 2π

21) Σχεδιάζουμε και ονομάζουμε H μια περιοχή ολόκληρη μέσα στην περιοχή U .

Σχεδιάζουμε και ονομάζουμε K μια περιοχή ολόκληρη έξω από την περιοχή U και εντός του ορθογώνιου. άρα έχουμε το εξής διάγραμμα Venn



22) Ο τύπος του Johan δηλώνει ότι ο υποψήφιος την 1η ώρα δεν μπορεί να παραδώσει το γραπτό του ή ότι μπορεί να φύγει.

1η Κατάσταση : ο υποψήφιος την 1η ώρα εγκαταλείπει την αίθουσα και δεν παραδίδει το γραπτό του. Άρα $\mathbf{I} = \mathbf{False}, \mathbf{V} = \mathbf{True}$ οπότε $(\neg\mathbf{F} \vee \mathbf{T}) = \mathbf{T}$, ο τύπος $\mathbf{U} \Rightarrow (\neg\mathbf{I} \vee \mathbf{V})$ θα αληθεύει αλλά ο κανόνας 8 δεν τηρήθηκε.

2η Κατάσταση: ο υποψήφιος την 1η ώρα εγκαταλείπει την αίθουσα και παραδίδει το γραπτό του.

Άρα $\mathbf{I} = \mathbf{True}, \mathbf{V} = \mathbf{True}$ οπότε $(\neg\mathbf{T} \vee \mathbf{T}) = \mathbf{T}$, ο τύπος $\mathbf{U} \Rightarrow (\neg\mathbf{I} \vee \mathbf{V})$ θα αληθεύει αλλά ο κανόνας 8 δεν τηρήθηκε.

23) $(\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{K}) \Rightarrow (\neg\boldsymbol{I} \wedge \neg\boldsymbol{V})$ αφού ο συνδυασμός της πρώτης ώρας και των τελευταίων 15 λεπτών δίνεται από τον τύπο $(\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{K})$ ενώ ο τύπος $(\neg\mathbf{I} \wedge \neg\mathbf{V})$ δηλώνει την εφαρμογή του κανόνα 8 που ζητείται.

[Πηγές]

Ολλανδία - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)
Προγράμματα σπουδών HAVO και VWO | Επισκόπηση εξετάσεων (examenoverzicht.nl)
Τι μπορείτε να φέρετε μαζί σας στις εξετάσεις; | Μόλυβδος SSL (sslleiden.nl)
Εξέταση εξάσκηση vwo μαθηματικά A | AlleExamens.nl