

[Η Νότια Κορέα]

Η Νότια Κορέα, επίσημα Δημοκρατία της Κορέας (κορεάτικα: 대한민국), είναι κράτος της ανατολικής Ασίας, στο νότιο μέρος της Κορεατικής χερσονήσου. Στα βόρεια, συνορεύει με τη Βόρεια Κορέα, με την οποία ήταν μια ενιαία χώρα μέχρι το 1945. Στα δυτικά, πέρα από την Κίτρινη θάλασσα, βρίσκεται η Κίνα, και στο νοτιοανατολικό σημείο, πέρα από τα Στενά της Κορέας, βρίσκεται η Ιαπωνία. Η συντριπτική πλειοψηφία του πληθυσμού είναι Κορεάτες, ενώ ζουν και αρκετές κοινότητες μεταναστών στη χώρα.

Το 2023 ο πληθυσμός της χώρας ανέρχεται σε 51.558.034 κατοίκους. Ως προς τον πληθυσμό η Νότια Κορέα κατέχει την 27η θέση στον κόσμο. Περίπου ο μισός πληθυσμός της Νότιας Κορέας ζει μέσα ή κοντά στην πρωτεύουσα και μεγαλύτερη πόλη, Σεούλ, της οποίας η μητροπολιτική περιοχή είναι η τρίτη μεγαλύτερη στον κόσμο.

Από την ίδρυσή της, το 1948, η χώρα έχει αγωνιστεί για να ξεπεράσει τις συνέπειες 35 ετών ιαπωνικής κατοχής, έχει γνωρίσει έναν σοβαρό πόλεμο μετά την εισβολή της Βόρειας Κορέας και δεκαετίες στρατιωτικού νόμου. Οι δημοκρατικές μεταρρυθμίσεις κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '80 οδήγησαν σε ελεύθερες εκλογές το 1987, και η Νότια Κορέα είναι τώρα μια πολυκομματική δημοκρατία. Η νοτιοκορεατική οικονομία έχει αναπτυχθεί γρήγορα από τη δεκαετία του '50 και είναι πλέον η 10η μεγαλύτερη οικονομία στον κόσμο. Η Νότια Κορέα είναι, επίσης, μια από της πιο τεχνολογικά προηγμένες χώρες. Έχει το δεύτερο υψηλότερο αριθμό ευρυζωνικών συνδέσεων με το διαδίκτυο κατά κεφαλή στον κόσμο και είναι στην πρώτη θέση παγκοσμίως στις εξαγωγές παιχνιδιών υπολογιστών, ψηφιακών οθονών και κινητών τηλεφώνων. Τέλος, αποτελεί ένα βαρύ όνομα στον χώρο της μηχανοκίνησης και ιδιαίτερα στην κατηγορία του αυτοκινήτου.

[Εκπαίδευση στην Νότια Κορέα]

Ανάμεσα στις περισσότερες ασιατικές χώρες, η Νότια Κορέα ξεχωρίζει για τις ακραίες-αλλά επιτυχημένες-εκπαιδευτικές πρακτικές της. Οι Κορεάτες έχουν καταφέρει ένα αξιόλογο επίτευγμα: η χώρα έχει μειώσει τον αναλφαβητισμό στο 100%. Αλλά η επιτυχία έρχεται με κόστος. Οι μαθητές τίθενται κάτω από τεράστια, αβάσταχτη πίεση για την απόδοσή τους. Το εκπαιδευτικό σύστημα της Κορέας είναι ένα από τα πιο αμείλικτα, ανταγωνιστικά και εξοντωτικά συστήματα στον κόσμο. Η κουλτούρα της Κορέας δεν πιστεύει στο ταλέντο αλλά μόνο στη σκληρή δουλειά και την εργατικότητα. Δεν υπάρχει δικαιολογία για αποτυχία. Τα παιδιά διαβάζουν ένα ολόκληρο χρόνο και στο σχολείο και με ιδιωτικούς δασκάλους. Οι Κορεάτες πιστεύουν ότι, αν διαβάσεις αρκετά σκληρά, μπορείς να γίνεις αρκετά έξυπνος. Αυτό λοιπόν είναι ένα σύντομο πλάνο της εκπαιδευτικής χρονιάς στην Κορέα. 1. Η σχολική χρονιά στη Νότια Κορέα ξεκινά τον Μάρτιο και διαρκεί έως τον Φεβρουάριο. 2. Η χρονιά διαιρείται σε δύο εξάμηνα: από τον Μάρτιο έως τον Ιούλιο και από τον Σεπτέμβριο έως τον Φεβρουάριο. 3. Τα μαθήματα ξεκινούν στις 8.00 και τελειώνουν στις 16.00, αν και οι μαθητές μένουν στο σχολείο μέχρι αργότερα το απόγευμα. 4. Όλοι οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να συμμετέχουν στον καθαρισμό της τάξης τα απογεύματα. 5. Κατά μέσο όρο, σε κάθε τάξη υπάρχουν τριάντα μαθητές και δέκα υπολογιστές. 6. Τα μαθήματα περιλαμβάνουν την κορεατική γλώσσα, μαθηματικά, φυσική, αγγλικά, κοινωνική αγωγή, ηθική εκπαίδευση, φυσική αγωγή, μουσική και καλλιτεχνικά. 7. Το σχολείο διαρκεί δώδεκα χρόνια.

[Νότια Κορέα: Οι διαβόητες Suneung, τα ακριβά hagwon και η... υπογεννητικότητα]



Μαθητές νηπιαγωγείου στη Νότια Κορέα

Γιατί οι εξαιρετικά υψηλής δυσκολίας εξετάσεις εισαγωγής στο πανεπιστήμιο θεωρούνται υπεύθυνες για δεινά από τις ψυχικές ασθένειες έως την κατακόρυφη πτώση του ποσοστού γονιμότητας.

Η ανατροφή ενός παιδιού στη Νότια Κορέα δεν είναι εύκολη υπόθεση. Από τη στιγμή που τα νήπια τους μπορούν να περπατήσουν, πολλοί γονείς έχουν ήδη αρχίσει να αναζητούν ελίτ ιδιωτικά νηπιαγωγεία.

Ο στόχος τους; Όπως αναφέρει σε αναλυτικό ρεπορτάζ το CNN, οι γονείς επιθυμούν να δουν στα 18 έτη τα παιδιά τους να περνούν τις περιβόητες (ή διαβόητες κατά άλλους) δωρες εξετάσεις για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Γνωστές ως **Suneung** δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να κερδίσουν μία θέση σε ένα πανεπιστήμιο κύρους.

Για να φτάσουν εκεί όμως πρέπει παιδιά και γονείς να περάσουν ένα επίπονο και άκρως δαπανηρό ταξίδι. Εκπαιδευτικοί, γονείς, ερευνητές, έχουν επανειλημμένα καταγγείλει το σύστημα των εξετάσεων εισαγωγής ως ακατάλληλο, ως παράγοντα που οξύνει τις ανισότητες στην εκπαίδευση, αλλά και που ευθύνεται για άλλα δεινά, από τις ψυχικές ασθένειες στους εφήβους έως την κατακόρυφη πτώση του ποσοστού γονιμότητας στη χώρα.

Ελπίζοντας να λύσει ορισμένα από αυτά τα ζητήματα, η κυβέρνηση της Νότιας Κορέας έκανε ένα αμφιλεγόμενο βήμα αυτή την εβδομάδα: αποφάσισε να κάνει τις εισαγωγικές εξετάσεις λιγότερο δύσκολες. Θα αφαιρεθούν οι γνωστές ως «δολοφονικές ερωτήσεις» από τις Suneung.

Αυτές οι διαβόητα δύσκολες ερωτήσεις περιλαμβάνουν μερικές φορές υλικό που δεν καλύπτεται στα προγράμματα σπουδών των δημόσιων σχολείων, όπως εξήγησε ο υπουργός Παιδείας, Λι Τζου – χο, γεγονός που προσδίδει ένα αθέμιτο πλεονέκτημα στους μαθητές με πρόσβαση σε ιδιωτικό φροντιστήριο. Πρόσθεσε ότι ενώ ήταν «προσωπική επιλογή» για γονείς και παιδιά να αναζητήσουν φροντιστήριο, πολλοί αισθάνονται αναγκασμένοι να το κάνουν λόγω του έντονου ανταγωνισμού για να τα πάνε καλά στις εξετάσεις.

Το υπουργείο «επιδιώκει να σπάσει τον φαύλο κύκλο της ιδιωτικής εκπαίδευσης που αυξάνει το βάρος για τους γονείς και στη συνέχεια διαβρώνει τη δικαιοσύνη στην εκπαίδευση», υποσχέθηκε ο Λι.

Μέχρι τη στιγμή που οι Νοτιοκορεάτες έφηβοι μπαίνουν στο λύκειο μεγάλο μέρος της ζωής τους περιστρέφεται γύρω από τα ακαδημαϊκά αποτελέσματα και την προετοιμασία για την ημέρα των

εξετάσεων – μια ημερομηνία που θεωρείται ευρέως στη χώρα ότι δημιουργεί ή καταστρέφει το μέλλον κάποιου.

Έχουν καλό λόγο να είναι ανήσυχοι. Οι «δολοφονικές ερωτήσεις» κυμαίνονται από προχωρημένους λογισμούς που προκαλούν πονοκέφαλο έως σκοτεινά λογοτεχνικά αποσπάσματα. Το υπουργείο δημοσίευσε αρκετά δείγματα ερωτήσεων αυτήν την εβδομάδα, προερχόμενα από τις εξετάσεις για να καταδείξει τους τύπους προβλημάτων που θα αφαιρεθούν σε μελλοντικές δοκιμασίες.

Μια ερώτηση μαθηματικών κρίθηκε «σαφώς πιο περίπλοκη από αυτές που καλύπτονται στα δημόσια σχολεία, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει ψυχολογική επιβάρυνση στους συμμετέχοντες στις εξετάσεις», έγραψε το υπουργείο. Ένα άλλο δείγμα ερώτησης ζήτησε από τους εξεταζόμενους να αναλύσουν ένα εκτενές απόσπασμα σχετικά με τη φιλοσοφία της συνείδησης.

Από το σχολείο στο φροντιστήριο και μετά σπίτι για διάβασμα

Οι περισσότεροι Κορεάτες μαθητές εγγράφονται σε ιδιωτικά φροντιστήρια που είναι γνωστά ως «hagwon». Είναι σύνηθες για τους μαθητές να πηγαίνουν από τα κανονικά μαθήματα του σχολείου τους κατευθείαν στα απογευματινά μαθήματα των hagwon και στη συνέχεια να συνεχίζουν να μελετούν μόνοι τους μέχρι τις πρώτες πρωινές ώρες.

Ως αποτέλεσμα, η βιομηχανία hagwon στη Νότια Κορέα είναι τεράστια και κερδοφόρα και οι Νοτιοκορεάτες έφηβοι εξαντλημένοι. Το 2022, οι Νοτιοκορεάτες ξόδεψαν συνολικά 26 τρισεκατομμύρια γουόν (σχεδόν 20 δισεκατομμύρια δολάρια) στην ιδιωτική εκπαίδευση, σύμφωνα με το Υπουργείο Παιδείας. Το ποσό αντιστοιχεί στο ΑΕΠ οικονομικών του μεγέθους της Ισλανδίας ή της Αϊτής.

Πέρυσι, ο μέσος μαθητής σε δημοτικά, γυμνάσια και λύκεια ξόδεψε 410.000 γουόν Κορέας (περίπου 311 \$) το μήνα σε φροντιστήρια. Το ποσό είναι το υψηλότερο από τότε που το υπουργείο Παιδείας άρχισε να παρακολουθεί τα στοιχεία το 2007.

Τα Hagwons έχουν γίνει τόσο διαδεδομένα στη Νότια Κορέα που πέρυσι το 78,3% όλων των μαθητών από το δημοτικό έως το λύκειο συμμετείχε στην ιδιωτική εκπαίδευση, σύμφωνα με το υπουργείο Παιδείας. Αυτό ασκεί τεράστια πίεση στις οικογένειες και μαθητές που δεν μπορούν να αντέξουν οικονομικά τα επιπλέον μαθήματα.

7 στους 10 μαθητές στη Νότια Κορέα εισέρχονται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, όταν το ποσοστό στις ΗΠΑ είναι 51% και στο Ηνωμένο Βασίλειο 57%. Υπάρχει ευρέως η αντίληψη πως ένα παιδί που δεν θα περάσει στο πανεπιστήμιο έχει αποτύχει, δεν έχει ουσιαστικές εναλλακτικές. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο πολλοί γονείς από τη Νότια Κορέα, σε διάφορα εισοδηματικά κλιμάκια, δίνουν όλη τους την παρουσία στην εκπαίδευση των παιδιών τους, φοβούμενοι ότι διαφορετικά αυτά θα μείνουν πίσω.

Αλλά αυτό το σύστημα βαθαίνει και διακονίζει την εκπαιδευτική ανισότητα, τονίζουν οι ειδικοί.

[Σχολικό σύστημα στην Νότια Κορέα]

Το εκπαιδευτικό σύστημα της Νότιας Κορέας περιλαμβάνει:

- Προσχολική μόρφωση, είναι προαιρετικό,
- Δημοτικό, 6 χρόνια στοιχειώδους εκπαίδευσης,
- Γυμνάσιο, 3 χρόνια σπουδών,
- Λύκειο υψηλότερο επίπεδο, διάρκειας επίσης 3 ετών,

Στο δημοτικό σχολείο, τα παιδιά σπουδάζουν κορεάτικα, μαθηματικά, ηθική, πολιτικά, φυσικές επιστήμες, ξένες γλώσσες (συμπεριλαμβανομένων των αγγλικών), φυσική αγωγή, καλές τέχνες και μουσική. Στα δημόσια σχολεία οι στολές και τα χτενίσματα ελέγχονται αυστηρά.

Στα ιδιωτικά σχολεία δεν υπάρχουν τόσο αυστηροί κανόνες σχετικά με το ντύσιμο, η εκπαίδευση που λαμβάνεται σε τέτοια σχολεία θεωρείται υψηλότερης ποιότητας, ωστόσο είναι επίσης σημαντικά πιο ακριβή. Στο τέλος του δημοτικού, τα παιδιά περνούν στο γυμνάσιο.

Αυτά τα 9 χρόνια εκπαίδευσης είναι υποχρεωτικά. Το πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βασίζεται στη μελέτη 11 βασικών μαθημάτων, πολλών θεμάτων για επιλογή, καθώς και εξωσχολικών δραστηριοτήτων. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην υλοποίηση Τεχνολογίες πληροφορικής στη μαθησιακή διαδικασία, ώστε όλα τα σχολεία να είναι πλήρως εξοπλισμένα με υπολογιστές και πρόσβαση στο Διαδίκτυο.

Τα σχολεία ανώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης χωρίζονται σε 2 τύπους: γενικό και επαγγελματικό. Σε σχολεία με γενικό προφίλ σπουδάζουν ανθρωπιστικές, κοινωνικές και φυσικές επιστήμες, τέχνη και

ξένες γλώσσες. Οι επαγγελματικές σχολές παρέχουν γνώσεις στην τεχνολογία των υπολογιστών, τη διοίκηση επιχειρήσεων, τη γενική μηχανική, τη γεωργία και τις ναυτιλιακές επιστήμες. Αλλά η κύρια κατεύθυνση σπουδών σε σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ανώτατου επιπέδου είναι η προετοιμασία για την είσοδο στο πανεπιστήμιο. Οι βαθμοί αποφοίτησης έχουν σημαντικό αντίκτυπο στις πιθανότητες εισαγωγής φοιτητών στα πανεπιστήμια της δημοκρατίας. Πολλοί μαθητές παρακολουθούν πρόσθετα προπαρασκευαστικά μαθήματα ή καθηγητές μετά το σχολείο. Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στη μελέτη των Αγγλικών και των μαθηματικών.

[Τα καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας]

Τρία από τα καλύτερα πανεπιστήμια της χώρας που ενώνονται με τη συντομογραφία SKY:

- Σεούλ Εθνικό Πανεπιστήμιο(Εθνικό Πανεπιστήμιο της Σεούλ)- το πρώτο πανεπιστήμιο στην Κορέα, ένα από τα 50 ισχυρότερα πανεπιστήμια στον κόσμο, είναι το καλύτερο τεχνικό πανεπιστήμιο της χώρας. Ανάμεσα στους αποφοίτους του μεγαλύτερου εκπαιδευτικού ιδρύματος διάσημοι πολιτικοί και παγκοσμίου φήμης εταιρικά στελέχη (LG, Samsung, Kim Yongsam και άλλοι). Περισσότεροι από 30.000 φοιτητές και μεταπτυχιακοί φοιτητές που σπουδάζουν τεχνικά, περιβαλλοντικά, κοινωνικά, μηχανικά και ιατρικά προγράμματα μπορούν ταυτόχρονα να ζήσουν στην πανεπιστημιούπολη.
- Πανεπιστήμιο Κορέας- ένα ιδιωτικό πανεπιστήμιο με έμφαση στις φιλελεύθερες τέχνες, προσφέρει την καλύτερη νομική εκπαίδευση στη Νότια Κορέα. Εκτός από τα μαθηματικά, την ηλεκτρική μηχανική, τη βιοτεχνολογία και τις τεχνολογίες πληροφορικής, δίνεται μεγάλη προσοχή στις ανθρωπιστικές επιστήμες. Ένα ιδιωτικό πανεπιστήμιο στο Daejeon εκπαιδεύει δικηγόρους και πολιτικούς επιστήμονες υψηλής ειδίκευσης. Υποχρεωτικό μέρος της πολιτιστικής ζωής είναι τα προγράμματα φεστιβάλ και συναυλιών.
- Πανεπιστήμιο Yonsei- ένα ελίτ πανεπιστήμιο, η κύρια εξειδίκευση του οποίου είναι η ιατρική. Ένα ιδιωτικό εκπαιδευτικό ίδρυμα έχει αρκετές εκατοντάδες περιοχές μελέτης. Σπουδαστές από όλο τον κόσμο σπουδάζουν τέχνη, πολιτισμό, κοινωνιολογία και τεχνικές επιστήμες. Υπάρχουν αρκετά εκπαιδευτικά μαθήματα στα αγγλικά, ένα καλοκαιρινό σχολείο.

[Εισαγωγή στο Πανεπιστήμιο]

Οι πολίτες της Κορέας μετά την αποφοίτησή τους από το γυμνάσιο για να εισέλθουν στο πανεπιστήμιο δίνουν μια τυπική εισαγωγική εξέταση που ονομάζεται "sunun" (수능), η οποία δίνεται μία φορά το χρόνο, αποτελείται από τρία μέρη: μητρική γλώσσα (κορεατικά), μαθηματικά και αγγλική γλώσσα, καθώς και επιπρόσθετα επιλεγμένα θέματα από κοινωνικούς ή φυσικούς κλάδους και, εάν επιθυμείτε, μια δεύτερη ξένη γλώσσα. (η επιλογή των κλάδων εξαρτάται από τις απαιτήσεις του πανεπιστημίου στο οποίο πρόκειται να εισαχθεί ο υποψήφιος).

Οι σπουδές στα πανεπιστήμια οργανώνονται με δίδακτρα, μερικές φορές οι Κορεάτες φοιτητές μπορούν να λάβουν υποτροφία για καλές ακαδημαϊκές επιδόσεις, καλύπτοντας το 50% των διδάκτρων. Οι αλλοδαποί μπορούν να σπουδάσουν σε κορεατικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, τόσο επί πληρωμή όσο και δωρεάν (επιχορήγηση).

Υπάρχει ειδική μορφή στήριξης για αιτούντες από πολυπολιτισμικές οικογένειες, καθώς και ειδική εξέταση για αλλοδαπούς, σε περίπτωση που και οι δύο γονείς είναι αλλοδαποί.

[Τι είναι η εξέταση sunun (수능);]

To College Scholastic Ability Test ή CSAT (Κορεάτικα: 대학수학능력시험, Hanja: 大學修學能力試驗), επίσης συντομογραφία Suneung (Κορεάτικα: 수능, Hanja: 修能), είναι ένα τυποποιημένο τεστ που αναγνωρίζεται από πανεπιστήμια της Νότιας Κορέας. Το Ινστιτούτο Προγράμματος Σπουδών και Αξιολόγησης της Κορέας (KICE) διαχειρίζεται το ετήσιο τεστ την τρίτη Πέμπτη του Νοεμβρίου.

Παρόλο που το CSAT σχεδιάστηκε αρχικά για να αξιολογήσει τη σχολική ικανότητα που απαιτείται για το κολέγιο, είναι επί του παρόντος μια εθνική δοκιμασία αποφοίτησης για μαθητές γυμνασίου. Καθορίζοντας το πανεπιστήμιο στο οποίο μπορεί να εισέλθει ένας φοιτητής, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση της Νότιας Κορέας. Το τεστ έχει αναφερθεί για την αποτελεσματικότητά του, την

έμφαση στην αξία και τα καλά διεθνή αποτελέσματα. Από τους μαθητές που συμμετείχαν στο τεστ, το 20% είναι απόφοιτοι λυκείου που δεν πέτυχαν την επιθυμητή βαθμολογία τους το προηγούμενο έτος.

Την ημέρα των δοκιμών, το χρηματιστήριο KRX ανοίγει αργά και τα δρομολόγια λεωφορείων και μετρό αυξάνονται για να αποφευχθεί η κυκλοφοριακή συμφόρηση και να επιτραπεί στους μαθητές να φτάσουν πιο εύκολα στους χώρους δοκιμών. Τα αεροπλάνα καθλώνονται κατά τη διάρκεια του τμήματος ακρόασης του αγγλικού τμήματος, ώστε ο θόρυβος τους να μην ενοχλεί τους μαθητές. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι μαθητές που καθυστερούν για το τεστ μπορεί να συνοδεύονται στο χώρο εξέτασής τους από αστυνομικούς μέσω μοτοσυκλέτας. Οι νεότεροι μαθητές και τα μέλη των οικογενειών των μαθητών συγκεντρώνονται έξω από τους χώρους δοκιμών για να τους επευφημήσουν.

Το CSAT έχει σχεδιαστεί για να δοκιμάσει την ικανότητα ενός υποψηφίου να σπουδάσει στο κολέγιο, με ερωτήσεις που βασίζονται στο πρόγραμμα σπουδών γυμνασίου της Κορέας. Τυποποιεί τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παρέχει ακριβή, αντικειμενικά δεδομένα για την εισαγωγή στο πανεπιστήμιο.

Ενότητες

Το CSAT αποτελείται από έξι τμήματα: εθνική γλώσσα (κορεατικά), μαθηματικά, αγγλικά, κορεατική ιστορία, δευτερεύοντα μαθήματα (κοινωνικές σπουδές, επιστήμες και επαγγελματική εκπαίδευση) και δεύτερη ξένη γλώσσα / κινεζικούς χαρακτήρες και κλασικά. Όλα τα τμήματα είναι προαιρετικά εκτός από την κορεατική ιστορία, αλλά οι περισσότεροι υποψήφιοι λαμβάνουν όλα τα άλλα τμήματα εκτός από τη δεύτερη ξένη γλώσσα / κλασικά κινέζικα.

Στην ενότητα των μαθηματικών, οι υποψήφιοι καλούνται να παρακολουθήσουν τα Μαθηματικά I (τα οποία αποτελούνται από Λογάριθμους, Ακολουθίες και Τριγωνομετρία) και τα Μαθηματικά II (τα οποία αποτελούνται από Όρια και Λογισμό σε πολυώνυμα) και επιτρέπεται να επιλέξουν ένα μεταξύ Πιθανοτήτων και Στατιστικής, Γεωμετρίας και Λογισμού.

Τα δευτερεύοντα μαθήματα χωρίζονται σε τρία τμήματα: κοινωνικές σπουδές, επιστήμη και επαγγελματική εκπαίδευση. Οι υποψήφιοι μπορούν να επιλέξουν μέχρι δύο μαθήματα, αλλά δεν μπορούν να επιλέξουν από διαφορετικές ενότητες ταυτόχρονα. Η Φυσική II και η Βιολογία I μπορούν να επιλεγούν για το δευτερεύον τμήμα, δεδομένου ότι και οι δύο είναι επιστήμες, αλλά η Παγκόσμια Ιστορία και οι Αρχές της Λογιστικής δεν μπορούν - η πρώτη είναι στο τμήμα κοινωνικών σπουδών και η δεύτερη στην επαγγελματική εκπαίδευση. Μόνο απόφοιτοι επαγγελματικού λυκείου μπορούν να επιλέξουν το τμήμα επαγγελματικής εκπαίδευσης.

[Υλη στα Μαθηματικά]

Όλοι οι υποψήφιοι μαθηματικοί παίρνουν τα Μαθηματικά I και II και επιλέγουν μία από τρεις επιλογές: Λογισμός, Γεωμετρία ή Πιθανότητες και Στατιστική. Ο λογισμός προτιμάται περισσότερο από τους φοιτητές που υποβάλλουν αίτηση για φυσικές επιστήμες, ενώ οι πιθανότητες και η στατιστική προτιμώνται από τους φοιτητές που υποβάλλουν αίτηση για τις ανθρωπιστικές επιστήμες. Η γεωμετρία είναι η λιγότερο δημοφιλής, με μόνο το 4,1% των φοιτητών να την επιλέγουν ως μάθημα επιλογής.

Βασικό θέμα

- Μαθηματικά I
 - ✓ Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις
 - ✓ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
 - ✓ Ακολουθίες
- Μαθηματικά II
 - ✓ Όρια και συνέχεια συναρτήσεων
 - ✓ Παραγωγή
 - ✓ Ολοκλήρωση

Μάθημα επιλογής

- Λογισμός
 - ✓ Όριο ακολουθίας
 - ✓ Μέθοδοι Παραγωγής
 - ✓ Μέθοδοι Ολοκλήρωσης
- Πιθανότητες και Στατιστική

- ✓ Συνδυαστική
- ✓ Πιθανότητες
- ✓ Στατιστική
- Γεωμετρία
 - ✓ Κωνικές τομές
 - ✓ Διάνυσμα σε επίπεδο
 - ✓ Τρισδιάστατα στερεά και συντεταγμένες

[Κορεάτικες εξετάσεις 2024 (17/11/2023)]

1. Η τιμή του $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ είναι A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Λύση

$$\text{Είναι } \sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} \times 3^{\frac{2}{3}} = 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 2 \times 3 = 6 \text{ Άρα A}$$

2. Αν $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ η τιμή του $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ είναι A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = 6x^2 - 10x. \text{ Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = 24 - 20 = 4 \text{ Άρα D}$$

3. Αν $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ και $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ τότε η τιμή του $\tan(\theta)$ είναι A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Λύση

$$\text{Έχω } \tan(\theta) < 0 \text{ για } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi. \text{ Και ότι } \frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \sin^2(\theta) = \frac{1}{9} \Rightarrow \tan^2(\theta) = \frac{1}{8} \Rightarrow \tan(\theta) = -\sqrt{\frac{1}{8}} = -\sqrt{\frac{2}{16}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ Άρα B}$$

4. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$ τότε η τιμή του a για να είναι η f συνεχής είναι A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Λύση

$$\text{Αρκεί } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 6 - a = 4 + a \Leftrightarrow a = 1 \text{ Άρα A}$$

5. Έστω f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x(x-2)$, $f(1) = 6$ τότε $f(2) =$ A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Λύση

$$\text{Έχω } f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + c \xrightarrow{f(1)=6} 6 = 1 - 3 + c \Rightarrow c = 8 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 8 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 = 8 - 12 + 8 = 4 \text{ Άρα D}$$

6. Αν $\{a_n\}$ γεωμετρική πρόοδος με άθροισμα των n πρώτων όρων S_n και $S_4 - S_2 = 3a_4$, $a_5 = \frac{3}{4}$ τότε η τιμή του $a_1 + a_2$ είναι ίση με A) 27 B) 24 C) 21 D) 18 E) 15

Λύση

$$\text{Έχω } S_4 - S_2 = 3a_4 \Rightarrow a_3 + a_4 = 3a_4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}. \text{ Άρα από } a_5 = \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 = 12 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 = 6 \Rightarrow a_1 + a_2 = 18 \text{ Άρα D}$$

7. Αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ έχει τοπικό μέγιστο για $x = \alpha$ και τοπικό ελάχιστο για $x = \beta$ τότε η τιμή του $\beta - \alpha$ είναι A) -4 B) -1 C) 2 D) 5 E) 8

Λύση

$$\text{Έχω } f'(x) = x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6) < 0 \text{ αν } -2 < x < 6 \Rightarrow f \downarrow [-2, 6], f \uparrow (-\infty, -2] \cup [6, +\infty). \text{ Άρα } \alpha = -2, \beta = 6, \beta - \alpha = 8 \text{ Άρα E}$$

8. Έστω η κυβική συνάρτηση $f(x)$ με $xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x$, τότε η τιμή του $\int_{-2}^2 f(x)dx$ είναι A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

Λύση

$$\text{Έχω } xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x \Rightarrow (x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow f(x) = 3x(x^2+x+1) \Rightarrow f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 3x^3 + 3x^2 + 3 dx = 0 + 2 \int_0^2 3x^2 dx + 0 = 2[x^3]_0^2 = 16 \text{ Άρα B}$$

9. Αν οι τετμημένες των σημείων P, Q είναι $\log_5 3, \log_5 12$ αντίστοιχα, το σημείο που χωρίζει το τμήμα PQ εσωτερικά σε λόγο m : $(1-m)$ έχει τετμημένη 1, τότε η τιμή του 4^m είναι A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{11}{6}$

Λύση

$$\text{Έχω } \frac{1-\log_5 3}{\log_5 12-1} = \frac{m}{1-m} \Rightarrow 1-m-\log_5 3 + m \log_5 3 = m \log_5 12 - m = m \log_5 3 + m \log_5 4 - m \Rightarrow$$

$$1 - \log_5 3 = +m \log_5 4 \Rightarrow \log_5 \frac{5}{3} = \log_5 4^m \Rightarrow 4^m = \frac{5}{3} \text{ Άρα D}$$

10. Την στιγμή $t = 0$, δυο σημεία P και Q αναχωρούν ταυτόχρονα από την αρχή των αξόνων και κινούνται ευθύγραμμα με ταχύτητες $v_1(t) = t^2 - 6t + 5$, $v_2(t) = 2t - 7$, $t > 0$ αντίστοιχα. Αν η

απόσταση των δυο αυτών σημείων την στιγμή t είναι $f(t)$, η $f(t)$ είναι αύξουσα στο $[0, \alpha]$, φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, και αύξουσα στο $[\beta, +\infty)$, τότε πόση απόσταση διάνυσε το σημείο Q από την στιγμή $t = \alpha$ ως την στιγμή $t = \beta$; A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{17}{2}$ C) $\frac{19}{2}$ D) $\frac{21}{2}$ E) $\frac{23}{2}$

Λύση

Έχω $f(t) = s(P) - s(Q) \Rightarrow f'(t) = v_1(t) - v_2(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$. Άρα $\alpha = 2, \beta = 6$.

Οπότε $d = \int_2^6 |v_2(t)| dt = \int_2^6 |2t-7| dt = \int_2^{\frac{7}{2}} -2t+7 dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 2t-7 dt = [-t^2+7t]_2^{\frac{7}{2}} + [t^2-7t]_{\frac{7}{2}}^6 = -\frac{49}{4} + \frac{49}{2} + 4 - 14 + 36 - 42 - \frac{49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{2} - 16 = \frac{17}{2}$ Άρα B

11. Σε μια αριθμητική πρόοδο $\{a_n\}$ με $\omega \neq 0$ έχουμε $|a_6| = a_8, \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$. Ποια η τιμή του $\sum_{k=1}^{15} a_k$;

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

Λύση

Αν $a_6 > 0$, τότε $-a_6 = a_8 = a_6 + 2\omega \Rightarrow \omega = 0$ άτοπο. Άρα $a_6 < 0$ οπότε $-a_6 = a_8 = a_6 + 2\omega \Rightarrow \omega = -a_6 = -a_1 - 5\omega \Rightarrow a_1 = -6\omega, a_6 = -\omega, \omega = -a_6 > 0$

$$\begin{aligned} \text{Έχω ακόμα } \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k(a_k + \omega)} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + \omega} \right) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + \omega} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + \omega} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 + \omega} + \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_4 + \omega} + \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_5 + \omega} \right) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_5 + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6} \right) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{-6\omega} + \frac{1}{\omega} \right) = \frac{5}{6\omega^2} \Rightarrow \frac{5}{96} = \frac{5}{6\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = 16 \stackrel{\omega > 0}{\Rightarrow} \omega = 4 \end{aligned}$$

Άρα $\sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{15(2a_1 + 14\omega)}{2} = \frac{15(-12\omega + 14\omega)}{2} = 15\omega = 60$ Άρα A

12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ και παράμετρος t με $0 < t < 6$ και συνάρτηση

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$. Ποια η μέγιστη τιμή του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται

από την γραφική παράσταση της g και τον άξονα των x ; A) $\frac{125}{4}$ B) $\frac{127}{4}$ C) $\frac{129}{4}$ D) $\frac{131}{4}$ E) $\frac{133}{4}$

Λύση

Η γραφική παράσταση της κυβικής συνάρτησης $f(x)$ είναι στο διπλανό σχήμα

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο t και η γραφική της παράσταση αποτελείται από δυο μέρη. Αρχικά για $x < t$ ταυτίζεται με την $f(x)$. Στη συνέχεια είναι ευθεία γραμμή με κλίση -1. Συνεπώς η περιοχή που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g και τον άξονα των x αποτελείται από τις δυο περιοχές που φαίνονται στο 2^ο σχήμα.

Για το σημείο A έχω

$$g(x_A) = 0 \Rightarrow -(x_A - t) + f(t) = 0 \Rightarrow x_A - t = f(t)$$

Έχω $E_1(t) = \int_0^t f(x) dx$ και $E_2(t) = \frac{1}{2}(x_A - t)f(t) = \frac{1}{2}f^2(t)$

Άρα $E(t) = E_1(t) + E_2(t), 0 < t < 6$.

Έχω

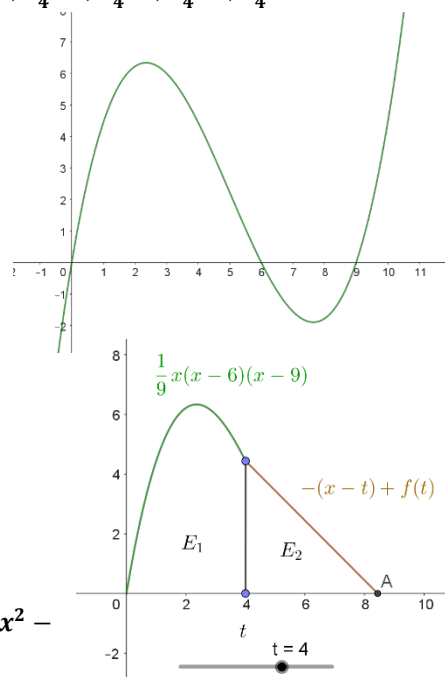
$$E'(t) = E'_1(t) + E'_2(t) = f(t) + f'(t)f(t) = f(t)(1 + f'(t))$$

Με $f'(x) = \frac{1}{9}(x-6)(x-9) + \frac{1}{9}x(x-9) + \frac{1}{9}x(x-6) = \frac{1}{9}(x^2 -$

$$15x + 54 + x^2 - 9x + x^2 - 6x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 30x + 54).$$

Άρα

$$\begin{aligned} E'(t) &= f(t) \left(1 + \frac{1}{9}(3t^2 - 30t + 54) \right) = f(t) \frac{1}{9}(3t^2 - 30t + 63) = f(t) \frac{3}{9}(t^2 - 10t + 21) \\ &= \frac{f(t)}{3}(t-7)(t-3) \end{aligned}$$



Άρα για $0 < t < 6$, έχω $f(t) > 0$, $t - 7 < 0$ ενώ το πρόσημο του $t - 3$ αλλάζει εκατέρωθεν. Άρα $E(t)$ παρουσιάζει μέγιστο για $t = 3$, με $E_1(3) = \int_0^3 \frac{1}{9} x(x-6)(x-9) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 x(x^2 - 15x + 54) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 x^3 - 15x^2 + 54x dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^4}{4} - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 = \frac{1}{9} \left(\frac{3^4}{4} - 5 \cdot 3^3 + 27 \cdot 3^2 \right) = \frac{9}{4} - 15 + 27 = \frac{9}{4} + 12 = \frac{57}{4}$

Ακόμα έχω $f(3) = \frac{1}{9} 3(-3)(-6) = 6$ άρα $E_2(3) = \frac{1}{2} f^2(3) = 18$

Άρα $E(3) = E_1(3) + E_2(3) = \frac{57}{4} + 18 = \frac{129}{4}$ άρα C

13. Στο σχήμα έχουμε $AB = 3, BC = \sqrt{13}, AD \times CD = 9, \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Αν $(ABC) = S_1, (ACD) = S_2$,

η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ACD είναι R και $S_2 = \frac{5}{6} S_1$, τότε $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$ ίσο με

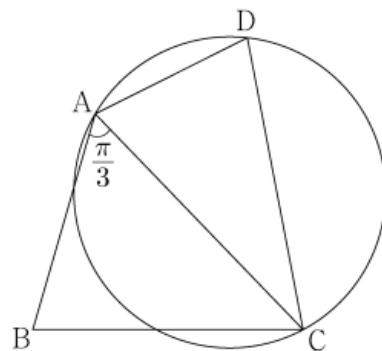
A) $\frac{54}{25}$ B) $\frac{117}{50}$ C) $\frac{63}{25}$ D) $\frac{27}{10}$ E) $\frac{72}{25}$

Λύση

Έχουμε $S_2 = \frac{AD \times CD \sin(\widehat{ADC})}{2} = \frac{9 \sin(\widehat{ADC})}{2}$ αλλά και $S_2 = \frac{AD \times CD \times CA}{4R} = \frac{9CA}{4R}$ άρα $\frac{\sin(\widehat{ADC})}{2} = \frac{CA}{4R} \Rightarrow \sin(\widehat{ADC}) = \frac{CA}{2R}$. Ακόμα έχουμε

$S_1 = \frac{AB \times AC \sin(\widehat{BAC})}{2} = \frac{3 \times AC \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} AC \Rightarrow \frac{6}{5} S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} AC \Rightarrow \frac{6}{5} \frac{9CA}{4R} = \frac{3\sqrt{3}}{4} AC \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{3}}{5}$. Από το νόμο συνημίτονων έχουμε $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}) \Rightarrow 13 = 9 + AC^2 - 6AC \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow AC^2 - 3AC - 4 = 0 \Rightarrow (AC - 4)(AC + 1) = 0 \Rightarrow AC = 4$

Άρα $\frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{R}{\frac{CA}{2R}} = \frac{R^2}{CA} = \frac{\left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^2}{4} = \frac{108}{100} = \frac{54}{25}$ άρα A



14. Για δυο μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς a, b η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

Για έναν πραγματικό αριθμό t ας είναι $g(t)$ ο αριθμός των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ τέμνει την ευθεία $y = t$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $a + b$, όπου (a, b) ένα διατεταγμένο ζεύγος μη μηδενικών φυσικών αριθμών a, b τέτοιο, ώστε το πλήθος των πραγματικών αριθμών k , που ικανοποιούν την σχέση

$g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = 9$, να είναι 1; A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Λύση

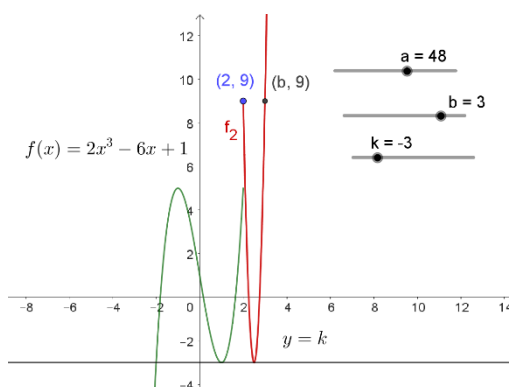
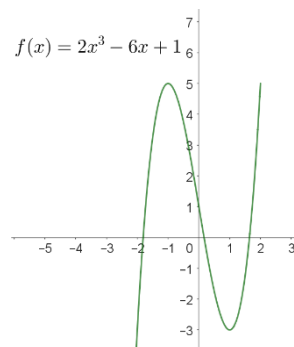
Έχω $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$, $x \leq 2$, με τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 5$, τοπικό ελάχιστο το $f(1) = -3$, ενώ $f(2) = 5 = f(-1)$. Οπότε η γραφική παράσταση της f , για $x \leq 2$ είναι ως εξής

Έστω $g_1(t)$ ο αριθμός των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x), x \leq 2$ τέμνει την ευθεία $y = t$.

Τότε έχουμε $g_1(t) = \begin{cases} 1 & (t < -3) \\ 2 & (t = -3) \\ 3 & (-3 < t < 5) \\ 2 & (t = 5) \\ 0 & (t > 5) \end{cases}$

Για το δεύτερο σκέλος της f έχουμε ότι η αντίστοιχη γραφική της παράσταση είναι τμήμα παραβολής και $f(2) = f(b) = 9$ με την «μύτη» της παραβολής στο $f\left(\frac{b+2}{2}\right)$. Έστω $g_2(t)$ ο αριθμός των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x), x > 2$ τέμνει την ευθεία $y = t$. Προφανώς $g_2(t) \in \{0, 1, 2\}$ για τις διάφορες τιμές των t, a, b και $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$.

Θέλουμε $g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = 9(*)$.



Παρατηρούμε ότι για $k < -3$ έχουμε $g_1(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g_1(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g_1(t) = 1 + 1 + 1 = 3$ και αφού $g_2(k) \in \{0, 1, 2\}$ η (*) είναι αδύνατη.

Όμοια για $k > 5$ έχουμε $g_1(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g_1(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g_1(t) = 0 + 0 + 0 = 0$ και αφού $g_2(k) \in \{0, 1, 2\}$ η (*) είναι αδύνατη.

Για $-3 < k < 5$ έχουμε $g_1(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g_1(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g_1(t) = 3 + 3 + 3 = 9$

Αφού ο φυσικός $\alpha > 0$, η παραβολή είναι κυρτή.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $b = 2$, τότε $f(x) > f(2), x > 2 \Rightarrow g_2(t) = 0$, για $-3 < k < 5$, άρα η (*) έχει άπειρες λύσεις.

Αν $b = 1$, ομοίως.

Αν $b > 2$, τότε η κορυφή της κυρτής παραβολής είναι δεξιά της γραφικής παράστασης του πρώτου κλάδου της f . Οπότε αν $f\left(\frac{b+2}{2}\right) < -3$, η παραβολή θα τέμνεται από την $y = k$ δύο φορές και η (*) είναι πάλι αδύνατη. Αν $f\left(\frac{b+2}{2}\right) \geq 5$, τότε η (*) θα ισχύει για κάθε $k \in (-3, 5)$. Ατοπο, αφού θέλουμε μια μόνο λύση για την (*).

Αν $5 > f\left(\frac{b+2}{2}\right) > -3$, τότε η (*) θα ισχύει για κάθε $k \in \left(-3, f\left(\frac{b+2}{2}\right)\right)$. Ατοπο, αφού θέλουμε μια μόνο λύση για την (*).

Αν $f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3$, τότε για $k = -3$ έχω $g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = 3 + 1 + 5 = 9$, για $k \neq -3$ η (*) δεν ισχύει.

Άρα πρέπει $f\left(\frac{b+2}{2}\right) = -3$. Έχω $f\left(\frac{b+2}{2}\right) = a\left(\frac{b+2}{2} - 2\right)\left(\frac{b+2}{2} - b\right) + 9 = a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{-b+2}{2}\right) + 9 = -a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2 + 9$.

Άρα έχουμε $-a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2 + 9 = -3 \Rightarrow a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2 = 12 \Rightarrow a(b-2)^2 = 48 = 48 * 1^2$ ή $3 * 4^2$ ή $12 * 2^2 \Rightarrow \alpha = 48, \beta = 3, \alpha + \beta = 51$ ή $\alpha = 3, \beta = 6, \alpha + \beta = 9$ ή $\alpha = 12, \beta = 4, \alpha + \beta = 16$

Άρα η μέγιστη τιμή του $\alpha + \beta = 51$ άρα Α.

15. Αν για την ακολουθία $\{a_n\}$, $a_1 \in \mathbb{N}$, για $n > 0$ έχω $a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (\text{αν } a_n \text{ περιττός}) \\ \frac{1}{2} a_n & (\text{αν } a_n \text{ άρτιος}) \end{cases}$ και

επιπλέον $a_6 + a_7 = 3$, τότε το άθροισμα όλων των πιθανών τιμών του a_1 είναι Α) 139 Β) 146 C) 153 D) 160 E) 167

Λύση

Έχω, επαγωγικά, ότι $a_n \in \mathbb{N}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $a_1 \in \mathbb{N}$. Αν a_n άρτιος τότε $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \in \mathbb{N}$, ενώ αν a_n περιττός, τότε $a_{n+1} = 2^{a_n} \in \mathbb{N}$. Άρα $a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς από την $a_6 + a_7 = 3$, προκύπτει ότι $(a_6, a_7) = (1, 2)$ ή $(a_6, a_7) = (2, 1)$.

Αν $a_6 = 1$ τότε $a_5 = 2$, τότε

1. $a_4 = 1$, τότε $a_3 = 2$, τότε

a. $a_2 = 1$, τότε $a_1 = \boxed{2}$

b. $a_2 = 4$, τότε $a_1 = \boxed{8}$

2. $a_4 = 4$, τότε $a_3 = 8$, τότε

a. $a_2 = 3$, τότε $a_1 = \boxed{6}$

b. $a_2 = 16$, τότε $a_1 = \boxed{32}$

Αν $a_6 = 2$ τότε

1. $a_5 = 1$, τότε $a_4 = 2$, τότε

a. $a_3 = 1$ τότε $a_2 = 2$, τότε

i. $a_1 = \boxed{1}$

ii. $a_1 = \boxed{4}$

b. $a_3 = 4$, τότε $a_2 = 8$, τότε

i. $a_1 = \boxed{3}$

ii. $a_1 = \boxed{16}$

$2.a_5 = 4$, τότε $a_4 = 8$, τότε

a. $a_3 = 3$, τότε $a_2 = 6$, $a_1 = \boxed{12}$

b. $a_3 = 16$, τότε $a_2 = 32$, τότε

i. $a_1 = \boxed{5}$

ii. $a_1 = \boxed{64}$

Άρα το άθροισμα των πιθανών τιμών του a_1 , είναι $2 + 8 + 6 + 32 + 1 + 4 + 3 + 16 + 5 + 64 = 153$
Αρα C.

16. Να λυθεί η εξίσωση $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

Λύση

$$\text{Έχω } 3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \Leftrightarrow 3^{x-8} = 3^{-3x} \Leftrightarrow x-8 = -3x \Leftrightarrow x = \boxed{2}$$

17. Βρείτε την $f'(1)$ αν $f(x) = (x+1)(x^2+3)$.

Λύση

$$\text{Είναι } f'(x) = (x^2+3) + (x+1)(2x), \text{ άρα } f'(1) = (1^2+3) + (1+1)(2) = \boxed{8}$$

18. Αν για τις ακολουθίες $\{a_n\}, \{b_n\}$ ισχύουν ότι $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1)$, $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$ τότε βρείτε το $\sum_{k=1}^{10} b_k$

Λύση

Έστω $A = \sum_{k=1}^{10} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{10} b_k$. Τότε έχουμε $A = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1) = 2B - 10$ και από την $\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$ ότι $3A + B = 33 \Rightarrow 3(2B - 10) + B = 33 \Rightarrow B = \boxed{9}$

19. Αν $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ τότε οι φυσικοί αριθμοί x με $0 < x < 16$ που ικανοποιούν την σχέση $f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$ έχουν άθροισμα ____

Λύση

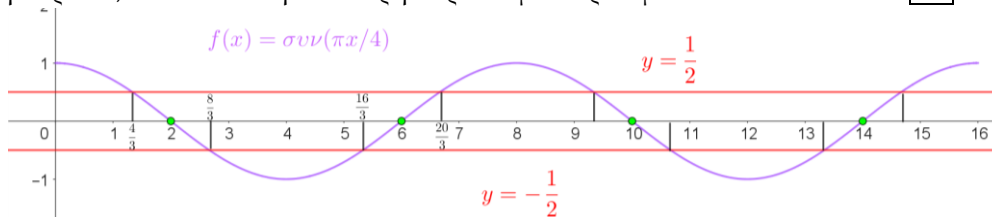
Έχω $f(2+x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(2+x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ και $f(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(2-x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. Άρα $f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) < \frac{1}{2}$.

Η $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

$$\text{Έχουμε } \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{\pi x}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{4}{3} + 4k$$

$$\text{Ομοίως } \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{\pi x}{4} = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{8}{3} + 4k$$

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι οι ζητούμενοι φυσικοί αριθμοί είναι οι 2 και 6 στην πρώτη περίοδο, 10 και 14 στην δεύτερη περίοδο με άθροισμα $2 + 6 + 10 + 14 = \boxed{32}$



20. Έστω πραγματικός αριθμός $\alpha > \sqrt{2}$ και συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + 2x$. Έστω A το σημείο τομής της εφαπτομένης της $y = f(x)$ στο σημείο $O(0,0)$, διάφορο της αρχής των αξόνων. Έστω B το σημείο τομής της εφαπτομένης της $y = f(x)$ στο A με τον άξονα των x . Αν το A βρίσκεται σε κύκλο διαμέτρου OB , να βρείτε την τομή του γινομένου $OA \times AB$

Λύση

Έχω για την εφαπτομένη στο $O(0,0)$ $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ με $f'(x) = -3x^2 + 2\alpha x + 2$, $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$, άρα $\varepsilon: y = 2x$. Άρα για το σημείο A έχουμε $y_A = 2x_A \Rightarrow -x_A^3 + \alpha x_A^2 + 2x_A = 2x_A \Rightarrow x_A = \alpha$, $y_A = 2\alpha$. Έχω $f'(\alpha) = -\alpha^2 + 2$, οπότε για την εφαπτομένη στο σημείο A έχουμε $\varepsilon': y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y - 2\alpha = (2 - \alpha^2)(x - \alpha) \Rightarrow y = (2 - \alpha^2)x + \alpha^3$. Για το B έχουμε $y_B = 0$, άρα $0 = (2 - \alpha^2)x_B + \alpha^3 \Rightarrow x_B = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - 2}$. Αφού το A βρίσκεται σε κύκλο διαμέτρου OB έχω $OA \perp AB \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (\alpha, 2\alpha) \cdot \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2 - 2} - \alpha, 0 - 2\alpha\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^4}{\alpha^2 - 2} - \alpha^2 - 4\alpha^2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 2} = 5 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{5}{2}$

Έχω

$$OA \times AB = \sqrt{a^2 + (2a)^2} \sqrt{\left(\frac{a^3}{a^2-2} - a\right)^2 + (-2a)^2} = \sqrt{5}a \sqrt{\left(\frac{2a}{a^2-2}\right)^2 + (2a)^2} =$$

$$\sqrt{5}a(2a) \sqrt{\left(\frac{1}{a^2-2}\right)^2 + 1} = 2\sqrt{5}a^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^2-2}\right)^2 + 1} = 5\sqrt{5} \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{5}{2}-2}\right)^2 + 1} = 5\sqrt{5}\sqrt{5} = \boxed{25}$$

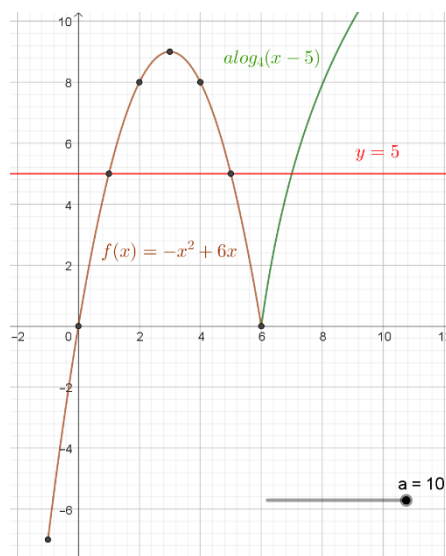
21. Έστω θετικός πραγματικός αριθμός α και για $x \geq -1$ έχω

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ a \log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

Για τον πραγματικό αριθμό $t \geq 0$ έστω ότι η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[t-1, t+1]$ είναι η $g(t)$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του α ώστε η ελάχιστη της $g(t)$ στο $(0, +\infty)$ να είναι το 5.

Λύση

Η γραφική παράσταση της f θα είναι της μορφής του σχήματος. Έχω $f(1) = 5, f(2) = 8, f(3) = 9, f(4) = 8, f(5) = 5$. Άρα $g(0) = \max f([-1, 1]) = 5$ και $g(t) > 5$ για $0 < t < 5$. Η f είναι αύξουσα στο $(6, +\infty)$ άρα για να έχω $g(6) = 5$ αρκεί $f(7) = 5 \Leftrightarrow a \log_4(2) = 5 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 5 \Leftrightarrow \alpha = \boxed{10}$. Αν $\alpha < 10$ τότε θα υπήρχε $g(t) < 5$ για κάποιο $t \approx 6^+$.



22. Η πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού $f(x)$, ο

μεγιστοβάθμιος συντελεστής της οποίας ισούνται με 1, ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

Για την συνάρτηση $f(x)$, δεν υπάρχει ακέραιος k , που ικανοποιεί την $f(k-1)f(k+1) < 0$.

Αν $f'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}, f'(\frac{1}{4}) < 0$, να βρείτε την τιμή $f(8)$.

Λύση

Έστω $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, με $f'(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \frac{3}{16} - \frac{a}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{a}{2} - \frac{7}{16}$. Ακόμα έχω $f'(\frac{1}{4}) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16} + \frac{a}{2} + b < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{7}{16} < 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{4}, b < -\frac{5}{16}$.

Η παράγωγος της συνάρτησης έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0 < x_2$ στις οποίες αλλάζει πρόσημο ... $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$.

Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) \leq 0$ τότε $f(0) < 0, f(x_2) < 0$ και η συνάρτηση θα έχει μία ρίζα ρ στο $[x_2, +\infty)$. Τότε όμως θα είναι:

$f([\rho]) < 0$ και $f([\rho] + 2) > 0$, το οποίο είναι αδύνατο από την υπόθεση της άσκησης.

(Με το σύμβολο $[\rho]$ εννοούμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος του ρ)

Άρα $f(x_1) > 0$ και ομοίως $f(x_2) < 0$

Έτσι, η συνάρτηση θα έχει τρεις ρίζες: $r_1 \in (-\infty, x_1), r_2 \in (x_1, x_2), r_3 \in (x_2, +\infty)$.

Έχουμε $0 \in (r_1, r_3)$ και αν υποθέσουμε ότι $r_2 \neq 0$ τότε $0 \in (r_1, r_2)$ ή $0 \in (r_2, r_3)$.

Έστω ότι $0 \in (r_1, r_2)$: Αν k ο μικρότερος ακέραιος του (r_1, r_2) τότε $f(k) > 0$ και $f(k-2) < 0$ άτοπο. Άρα $0 \notin (r_1, r_2)$ και ομοίως $0 \notin (r_2, r_3)$.

Συνεπώς $r_2 = 0$ δηλαδή $f(0) = 0$

Έστω ότι $1 \in (r_2, r_3)$: Αν m ο μεγαλύτερος ακέραιος του (r_2, r_3) , τότε $f(m) < 0$ και $f(m+2) > 0$ άτοπο.

Συνεπώς $r_3 \leq 1$ δηλαδή $f(1) \geq 0$ και όμοια ... $f(-1) \leq 0$

Έτσι, θα πρέπει $f(1) = 0$ ή $f(-1) = 0$

Αν $f(-1) = 0$ τότε προκύπτει: $a = \frac{9}{8} > \frac{1}{4}$ αδύνατο.

Τελικά $f(1) = 0$ και $f(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{8}x$. Άρα $f(8) = 512 - 24 - 5 = \boxed{483}$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια σειρά ερωτήσεων σχετικά με το «Μάθημα επιλογής (Πιθανότητες και Στατιστική)».

23. Με πόσους τρόπους μπορώ να διατάξω τους αριθμούς x, x, y, y, z A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Λύση

Έχουμε $\frac{5!}{2!2!1!} = \frac{120}{4} = \boxed{30}$ διατάξεις, άρα C

24. Αν A, B δυο ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A^c) = 2P(A)$ τότε η τιμή του $P(B)$ είναι A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{8}$

Λύση

Έχω $1 - P(A) = 2P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$. Αφού Αν A, B δυο ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα έχουμε $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{3}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$ Άρα D

25. Έχω 6 αριθμημένες κάρτες με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6. Αν και οι 6 κάρτες χρησιμοποιηθούν από μια φορά και μπουν σε σειρά ποια η πιθανότητα να διαταχθούν έτσι ώστε το άθροισμα των ακριανών καρτών να είναι λιγότερο ή ίσο από 10. A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{19}{30}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{14}{15}$

Λύση

Όλες οι διατάξεις είναι $6! = 720$. Άθροισμα ακριανών καρτών περισσότερο από 10 αν έχω διατάξεις της μορφής 6...5 ή 5...6 που συμβαίνει με $2 \cdot 4! = 48$ τρόπους. Άρα $p = 1 - \frac{48}{720} = \frac{672}{720} = \frac{14}{15}$ άρα E

26. Όταν στρίβουμε 4 νομίσματα το πλήθος των κεφαλών είναι η τυχαία μεταβλητή X και για τη

διακριτή μεταβλητή Y ισχύει ότι $Y = \begin{cases} X & (\text{αν } X=0 \text{ ή } 1) \\ 2 & (\text{αν } X \geq 2) \end{cases}$.

Τότε $E(Y)$ είναι ίσο με A) $\frac{25}{16}$ B) $\frac{13}{8}$ C) $\frac{27}{16}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{29}{16}$

Λύση

Έχω $P(X=x) = \frac{\binom{4}{x}}{4^2} \Rightarrow p(X=0) = \frac{\binom{4}{0}}{4^2} = \frac{1}{16} = p(X=4)$, $p(X=1) = p(X=3) = \frac{\binom{4}{1}}{4^2} = \frac{1}{4}$, $p(X=2) = \frac{\binom{4}{2}}{4^2} = \frac{6}{16}$. Άρα $E(Y) = \sum_{y=0}^2 yp(Y=y) = 1p(Y=1) + 2p(Y=2) = p(X=1) + 2(p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)) = \frac{1}{4} + 2(\frac{6}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{11}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$ Άρα B

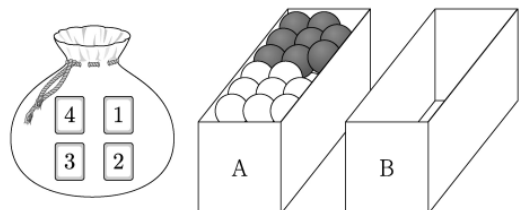
27. Αν ο δειγματικός μέσος $\bar{x}$ που προκύπτει από την τυχαία δειγματοληψία δείγματος μεγέθους 49 ενός πληθυσμού που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(m, 5^2)$, ποια είναι η τιμή του $\bar{x}$ αν με διάστημα εμπιστοσύνης 95% έχω $a \leq m \leq \frac{6}{5}a$. (Δίνεται ότι αν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την κανονική κατανομή, έχω $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$). A) 15.2 B) 15.4 C) 15.6 D) 15.8 E) 16

Λύση

Έχω $a = \bar{x} - 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{49}}$, $\bar{x} + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{49}} = \frac{6}{5}a$ άρα $\frac{1}{5}a = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}} \Rightarrow a = 14$. Άρα $\bar{x} = a + 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{49}} = 14 + 1.4 = 15.4$ άρα B

28. Έστω μια σακούλα και δυο κουτιά A και B. Η σακούλα έχει 4 κάρτες με τους αριθμούς 1,2,3,4, το κουτί A περιέχει τουλάχιστον 8 άσπρες και τουλάχιστον 8 μαύρες μπάλες, το κουτί B είναι άδειο. Στη συνέχεια κάνει το εξής:

«Πάρε μια κάρτα από την σακούλα τυχαία, σημείωσε τον αριθμό και βάλε την κάρτα πίσω στην σακούλα. Αν ο αριθμός είναι ο 1 βάλε μία άσπρη μπάλα στο δοχείο B. Αν ο αριθμός είναι ο 2 ή 3, βάλε μία άσπρη και μία μαύρη μπάλα στο δοχείο B. Αν ο αριθμός είναι ο 4 βάλε δύο άσπρες μπάλες και μία μαύρη μπάλα στο δοχείο B.»



Μετά από 4 επαναλήψεις της παραπάνω διαδικασίας, η πιθανότητα οι μαύρες μπάλες στο δοχείο B να είναι 2 όταν συνολικά αυτό περιέχει 8 μπάλες είναι A) $\frac{3}{70}$ B) $\frac{2}{35}$ C) $\frac{1}{14}$ D) $\frac{3}{35}$ E) $\frac{1}{10}$

Λύση

Σε κάθε επανάληψη οι μπάλες που προστίθενται στο δοχείο B είναι 0 ή 1 ή 2. Για να έχω μετά από 4 επαναλήψεις, 8 μπάλες στο κουτί B, έχω τα εξής δυνατά σενάρια: $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ ή $8 = 1 + 2 + 3 + 2$ ή $8 = 1 + 1 + 3 + 3$ όπου ο κάθε όρος των αθροισμάτων δηλώνει το πλήθος των μπαλών που μπήκαν στο κουτί B. Αν σε μια επανάληψη, μπήκαν 2 μπάλες στο κουτί τότε η μια από αυτές ήταν άσπρη και η άλλη μαύρη. Άρα στο 1^ο σενάριο που $8=2+2+2+2$, προκύπτει ότι στο κουτί θα είναι 4 μαύρες μπάλες από τις 8. Με το ίδιο σκεπτικό στο 2^ο σενάριο που $8=1+2+3+2$, προκύπτει ότι στο κουτί θα είναι 3 μαύρες μπάλες από τις 8 και στο 3^ο σενάριο που $8=1+1+3+3$, προκύπτει ότι στο κουτί θα είναι 2 μαύρες μπάλες από τις 8, που είναι το ευνοϊκό σενάριο.

Το 1^ο σενάριο μπορεί να συμβεί με $4^2 = 16$ τρόπους αφού συμβαίνει αν κληρωθούν οι αριθμοί 2 ή 3 και στις 4 επαναλήψεις. Το 2^ο σενάριο μπορεί να συμβεί με $2^2 \frac{4!}{2!} = 48$ τρόπους αφού συμβαίνει αν κληρωθούν οι αριθμοί 2 ή 3 στις 2 από 4 επαναλήψεις, ο παράγοντας $\frac{4!}{2!}$ έχει να κάνει με τις διατάξεις των κληρώσεων. Το 3^ο σενάριο μπορεί να συμβεί με $\frac{4!}{2!2!} = 6$ τρόπους αφού συμβαίνει τόσες φορές όσες οι διατάξεις των κληρώσεων 1,1,4,4. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p = \frac{6}{16+48+6} = \frac{3}{35}$ άρα D

28. Βρείτε το πλήθος των διατεταγμένων τετράδων (a, b, c, d) των φυσικών αριθμών $a, b, c, d \leq 6$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες: $a \leq c \leq d$ και $b \leq c \leq d$

Λύση

Έστω $c = 1$ τότε $a = b = 1, 1 \leq d \leq 6$, άρα 6 τετράδες.

Έστω $c = 2$ τότε $a, b = 1$ ή $2, 2 \leq d \leq 6$, άρα $2^2 * 5 = 20$ τετράδες.

Έστω $c = 3$ τότε $a, b = 1$ ή 2 ή $3, 3 \leq d \leq 6$, άρα $3^2 * 4 = 36$ τετράδες.

Έστω $c = 4$ τότε $a, b = 1$ ή 2 ή 3 ή $4, 4 \leq d \leq 6$, άρα $4^2 * 3 = 48$ τετράδες.

Έστω $c = 5$ τότε $a, b = 1$ ή 2 ή 3 ή 4 ή $5, 5 \leq d \leq 6$, άρα $5^2 * 2 = 50$ τετράδες.

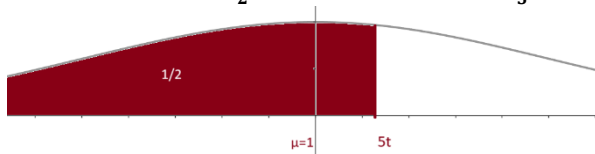
Έστω $c = 6$ τότε $a, b \leq 6, d = 6$, άρα $6^2 * 1 = 36$ τετράδες. Σύνολο $6 + 20 + 36 + 48 + 50 + 36 =$

196

29. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(1, t^2)$. Αν για $t \in \mathbb{R}$, $P(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2}$ και k η μέγιστη τιμή της πιθανότητας $P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$, να βρείτε την τιμή του 1000k με την βοήθεια του πίνακα.

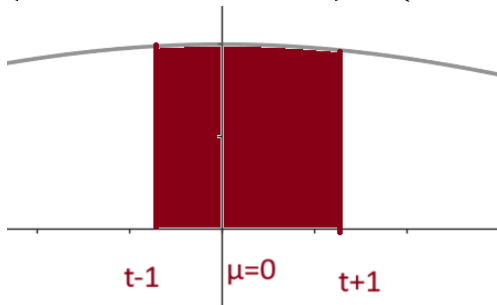
Λύση

Αφού $P(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 5t > \mu = 1 \Rightarrow t > \frac{1}{5}$



Θέτω $U = \frac{X-1}{t} \Rightarrow U = N(0, 1)$. Για $X = t^2 + t + 1 \Rightarrow \frac{X-1}{t} = t + 1$, Για $X = t^2 - t + 1 \Rightarrow \frac{X-1}{t} = t - 1$.

Άρα $P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1) = P(t - 1 \leq U \leq t + 1)$.

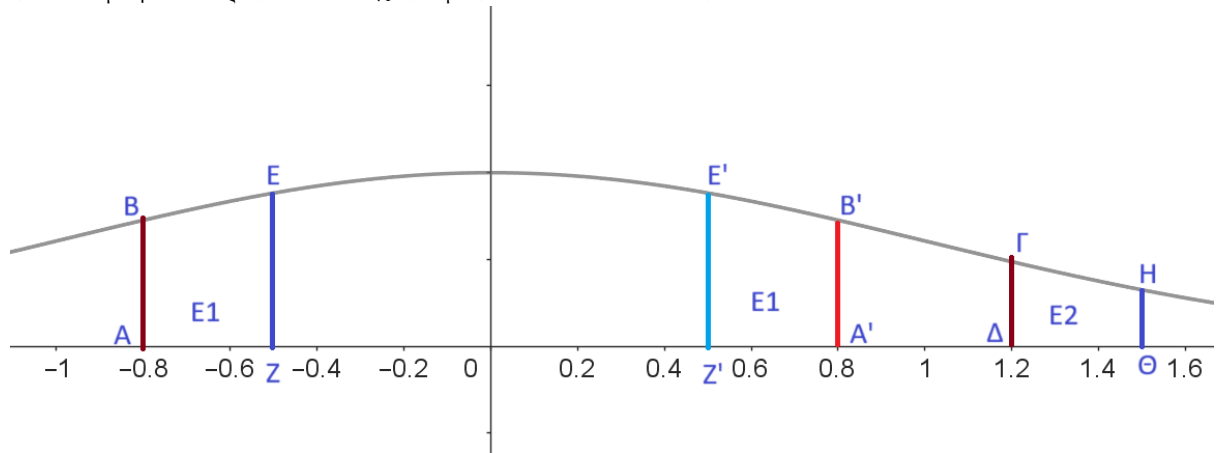


Θα δείξουμε ότι η παραπάνω πιθανότητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $t = 0, 2$.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

Έστω $k = P(0,2 - 1 \leq U \leq 0,2 + 1) = P(-0,8 \leq U \leq 1,2) = (AB\Gamma\Delta)$

Και $P(t - 1 \leq U \leq t + 1) = (EZ\Theta H)$. Έχω $P(-0,8 \leq U \leq 1,2) > P(t - 1 \leq U \leq t + 1) \Leftrightarrow (AB\Gamma\Delta) > (EZ\Theta H) \Leftrightarrow E1 + (EZ\Delta\Gamma) > (EZ\Delta\Gamma) + E2 \Leftrightarrow E1 > E2 \xLeftrightarrow^{E1=E'1} E'1 > E2$ που ισχύει αφού έχουν το ίδιο πλάτος αλλά μεγαλύτερες αντίστοιχες τιμές στο E'1 από αυτές στο E2.



Άρα $k = P(-0,8 \leq U \leq 1,2) = P(-0,8 \leq U \leq 0) + P(0 \leq U \leq 1,2) = 0,288 + 0,385 = 0,673$. Άρα $1000k = \boxed{673}$.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια σειρά ερωτήσεων σχετικά με το «Μάθημα επιλογής (Λογισμός)».

23. Ποια η τιμή του $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$; A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{5}{1+5x}} = \frac{3}{5} \text{ Άρα C}$$

24. Για την παραμετρική καμπύλη $x = \ln(t^3 + 1)$, $y = \sin \pi t$ με παράμετρο $t > 0$ ποια η $\frac{dy}{dx}$ στο $t = 1$; A) $-\frac{1}{3}\pi$ B) $-\frac{2}{3}\pi$ C) $-\pi$ D) $-\frac{4}{3}\pi$ E) $-\frac{5}{3}\pi$

Λύση

$$\text{Έχω } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}} \text{ Άρα για } t = 1 \text{ έχω } \frac{\pi \cos \pi}{\frac{3}{1+1}} = -\frac{2}{3}\pi \text{ άρα B}$$

25. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}^+$, η g είναι η αντίστροφη της f , η g' συνεχής στο $\mathbb{R}^+$, για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$ ισχύει ότι $\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$ και $f(1) = 8$, ποια η τιμή του $f(2)$; A) 36 B) 40 C) 44 D) 48 E) 52

Λύση

Έχω μετά από παραγωγήσιση ότι $\frac{1}{g'(f(x))f(x)} = (2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2)' \Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = (2\ln a + \ln(a+1))' \Rightarrow (\ln f(a))' = (\ln[a^2(a+1)])' \Rightarrow \ln f(a) = \ln[a^2(a+1)] + c \xrightarrow{f(1)=8} \ln 8 = \ln 2 + c \Rightarrow c = \ln 4 \Rightarrow \ln f(a) = \ln[a^2(a+1)] + \ln 4 \Rightarrow f(a) = 4a^2(a+1) \Rightarrow f(2) = 48$ άρα D.

26. Δίνεται στερεό με βάση που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{(1-2x)\cos x}$ ($\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$), τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$. Αν όλες οι τομές του σχήματος με επίπεδο κάθετο στον άξονα Ox είναι τετράγωνα, ποιος είναι ο όγκος του στερεού;

A) $\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}\pi - 1$ C) $2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}\pi - 1$ E) $2\sqrt{2}\pi$

Λύση

$$V = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (f(x))^2 dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1-2x) \cos x dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x - 2x \cos x dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - 2[x \sin x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + 2 \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2(-\frac{5\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}) - 2[\cos x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi - 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi$$
 άρα C

27. Έστω $f(t)$ η κλίση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της καμπύλης $y = \frac{1}{e^x} + e^t$, για t πραγματικό αριθμό. Ποια η τιμή της $f'(a)$ για μια σταθερά a , που ικανοποιεί την σχέση $f(a) = -e\sqrt{e}$; [3 μόρια]

Λύση

Έχω $y'(x) = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, άρα η εφαπτομένη ευθεία σ' ένα τυχαίο σημείο x_0 δίνεται από την σχέση $y - y_0 = -e^{-x_0}(x - x_0)$, με κλίση $f(t) = -\frac{1}{e^{x_0}} = -e^{-x_0}$.

Αφού περνά από την αρχή των αξόνων έχουμε: $-y_0 = e^{-x_0}x_0 \Rightarrow e^{-x_0} + e^t = -e^{-x_0}x_0 \Rightarrow e^t = -e^{-x_0}x_0 - e^{-x_0} = e^{-x_0}(-x_0 - 1) \Rightarrow t(x_0) = -x_0 + \ln(-x_0 - 1) \Rightarrow t'(x_0) = -1 + \frac{1}{x_0+1} = \frac{-x_0}{x_0+1}$

$$\text{Έχω } f(a) = -e\sqrt{e} \Rightarrow -e^{-a} = -e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Με τύπους Leibniz } f'(t) = \frac{df}{dx_0} \frac{dx_0}{dt} = e^{-x_0} \frac{1}{\frac{dx_0}{dt}} = e^{-x_0} \frac{1}{\frac{-x_0}{x_0+1}} = e^{-x_0} \frac{-x_0-1}{x_0},$$

$$\text{άρα } f'(a) = f'(-\frac{3}{2}) = e^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}} = \frac{e\sqrt{e}}{3}.$$

28. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών και επίσης ισχύει $f(x) \geq 0$, και για $x < 0$ είναι $f(x) = -4xe^{4x^2}$. Για όλους τους θετικούς ακέραιους t , ο αριθμός των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = t$, ως προς x , είναι 2. Έστω ότι η μικρότερη από τις δυο ρίζες

είναι η $g(t)$ και η μεγαλύτερη $h(t)$. Οι δυο συναρτήσεις $g(t), h(t)$ ικανοποιούν την σχέση $2g(t) + h(t) = k$ (όπου k μια σταθερά) για όλους τους θετικούς ακέραιους.

Ποια είναι η τιμή του $\frac{f(9)}{f(8)}$ αν $\int_0^7 f(x) dx = e^4 - 1$; [4 μόρια]

Λύση

Έχω $f'(x) = -4e^{4x^2} - 4x(8x)e^{4x^2} = e^{4x^2}(-4 - 32x^2) < 0$ για $x < 0$. Άρα φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με σύνολο τιμών $[0, \infty)$. Άρα η μία ρίζα x_1 της εξίσωσης $f(x) = t$ είναι στο $(-\infty, 0]$ και η άλλη ρίζα x_2 , αναγκαστικά θα είναι στο $(0, \infty)$. Έχω λοιπόν ότι $x_1 < 0 < x_2$, $2x_1 + x_2 = k \Rightarrow 0 > x_1 = \frac{k-x_2}{2} \Rightarrow x_2 > k$

Έχω ακόμα ότι $f(x_1) = t = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(\frac{k-x_2}{2}) = -4(\frac{k-x_2}{2})e^{4(\frac{k-x_2}{2})^2} = 2(x_2 - k)e^{(x_2-k)^2}$, $x_2 > k$. Άρα $f(x) = 2(x - k)e^{(x-k)^2}$, $x > k$ αύξουσα στο (k, ∞) με σύνολο τιμών $(0, \infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = t > 0$ έχει μια δεύτερη ρίζα στο (k, ∞) .

Προφανώς, $f(x) = 0$, $0 \leq x \leq k$ διότι σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε και τρίτη ρίζα.

Έχω τώρα $\int_0^7 f(x) dx = e^4 - 1 \Rightarrow \int_0^k 0 dx + \int_k^7 2(x - k)e^{(x-k)^2} dx = e^4 - 1 \Rightarrow [e^{(x-k)^2}]_k^7 = e^4 - 1 \Rightarrow e^{(7-k)^2} - 1 = e^4 - 1 \Rightarrow 7 - k = \pm 2 \Rightarrow k = 5$ ή $k = 9$. Αν $k = 9$, τότε $\int_0^7 f(x) dx = \int_0^7 0 dx = 0$ απορρίπτεται.

Άρα $f(x) = 2(x - 5)e^{(x-5)^2}$, $x > 5$ και τελικά $\frac{f(9)}{f(8)} = \frac{2(9-5)e^{(9-5)^2}}{2(8-5)e^{(8-5)^2}} = \frac{4}{3}e^7$

29. Για τις δυο γεωμετρικές προόδους (ακολουθίες) $\{a_n\}, \{b_n\}$, των οποίων ο πρώτος όρος και ο λόγος είναι μη μηδενικοί, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα συγκλίνουν και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n), \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|.$$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$, να βρείτε την τιμή του $120S$. [4 μόρια]

Λύση

Έχω προφανώς $|a_n| < 1, |b_n| < 1$. Έστω $c_n = a_n b_n = a_1 \lambda_a^{n-1} b_1 \lambda_b^{n-1} = a_1 b_1 (\lambda_a \lambda_b)^{n-1}$, με $|\lambda_a \lambda_b| < 1$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n) \Rightarrow \frac{a_1 b_1}{1 - \lambda_a \lambda_b} = \frac{a_1}{1 - \lambda_a} \frac{b_1}{1 - \lambda_b} \Rightarrow 2\lambda_a \lambda_b = \lambda_a + \lambda_b (*)$

Ακόμα $3 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| \Rightarrow 3 \frac{|a_2|}{1 - |\lambda_a|^2} = 7 \frac{|a_3|}{1 - |\lambda_a|^3} \Rightarrow 3 \frac{1}{1 - |\lambda_a|^2} = 7 \frac{|\lambda_a|}{1 - |\lambda_a|^3} \Rightarrow 3 - 3|\lambda_a|^3 = 7|\lambda_a| - 7|\lambda_a|^3 \Rightarrow 4|\lambda_a|^3 - 7|\lambda_a| + 3 = 0 \Rightarrow (|\lambda_a| - 1)(4|\lambda_a|^2 + 4|\lambda_a| - 3) = 0 \Rightarrow (|\lambda_a| - 1)(2|\lambda_a| - 1)(2|\lambda_a| + 3) = 0 \Rightarrow |\lambda_a| = 1$ απορρίπτεται αφού $|\lambda_a| < 1$ ή $|\lambda_a| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda_a = \pm \frac{1}{2}$. Αν $\lambda_a = \frac{1}{2}$, τότε $(*) \Rightarrow \lambda_b = \frac{1}{2} + \lambda_b$ άτοπο. Άρα $\lambda_a = -\frac{1}{2}$ και $(*) \Rightarrow -\lambda_b = -\frac{1}{2} + \lambda_b \Rightarrow \lambda_b = \frac{1}{4}$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}}{b_n} + \frac{b_{3n+1}}{b_n}$.

Έστω $d_n = \frac{b_{2n-1}}{b_n}$, τότε $d_1 = \frac{b_1}{b_1} = 1$, $d_n = \frac{b_{2n-1}}{b_n} = \frac{b_1 \lambda_b^{2n-2}}{b_1 \lambda_b^{n-1}} = \lambda_b^{n-1} \Rightarrow \lambda_d = \lambda_b = \frac{1}{4}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}}{b_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Έστω $e_n = \frac{b_{3n+1}}{b_n}$, τότε $e_1 = \frac{b_4}{b_1} = \lambda_b^3 = \frac{1}{64}$, $e_n = \frac{b_{3n+1}}{b_n} = \frac{b_1 \lambda_b^{3n}}{b_1 \lambda_b^{n-1}} = \lambda_b^{2n+1} \Rightarrow \lambda_e = \lambda_b^2 = \frac{1}{16}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{3n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{60}$

Άρα $120S = 120 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{60} \right) = 162$

30. Η παράγωγος $f'(x)$ της παραγωγίσιμης σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών συνάρτησης $f(x)$ είναι $f'(x) = |\sin x| \cos x$. Για θετικό αριθμό a ως είναι $y = g(x)$ η εξίσωση της εφαπτόμενης από το σημείο $(a, f(a))$ προς την καμπύλη $y = f(x)$. Όταν απαριθμούμε κατά αύξουσα σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους θετικούς ακέραιους a τέτοιους, ώστε η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ να παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο (τοπικά) για $x = a$, ως είναι a_n ο n -ιστός.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{100}{\pi} (a_6 - a_2)$. [4 μόρια]

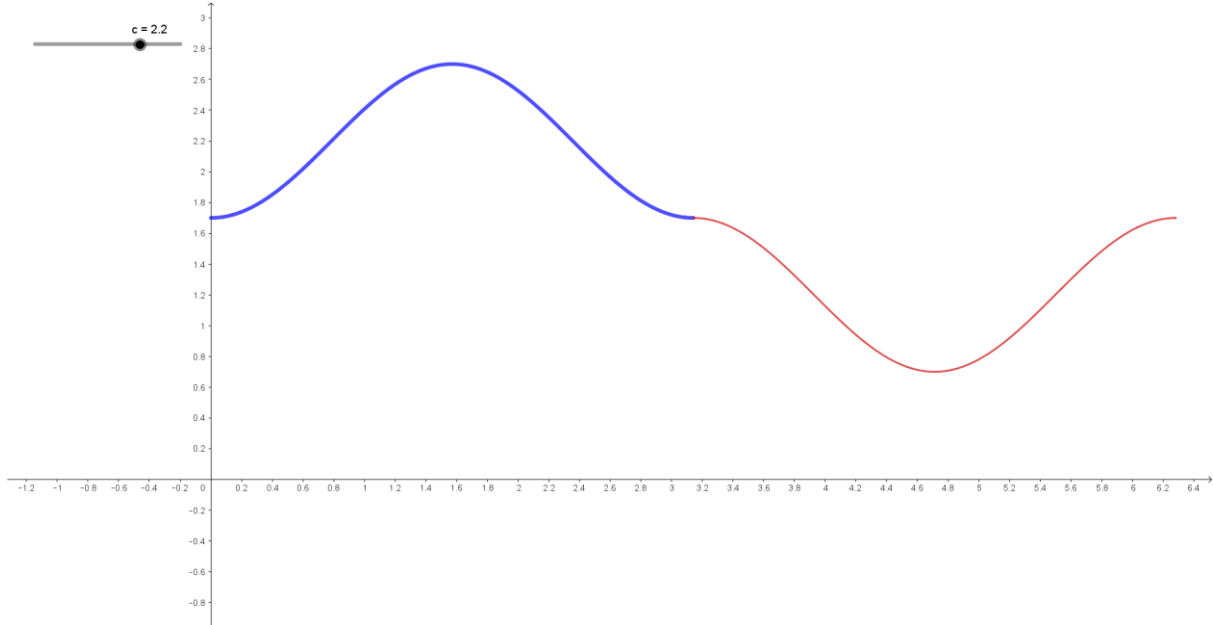
Λύση

$$\text{Έχω } f'(x) = \begin{cases} \sin x \cos x, & x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi) \\ -\sin x \cos x, & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{2}, & x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi) \\ -\frac{\sin 2x}{2}, & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow f(x) =$$

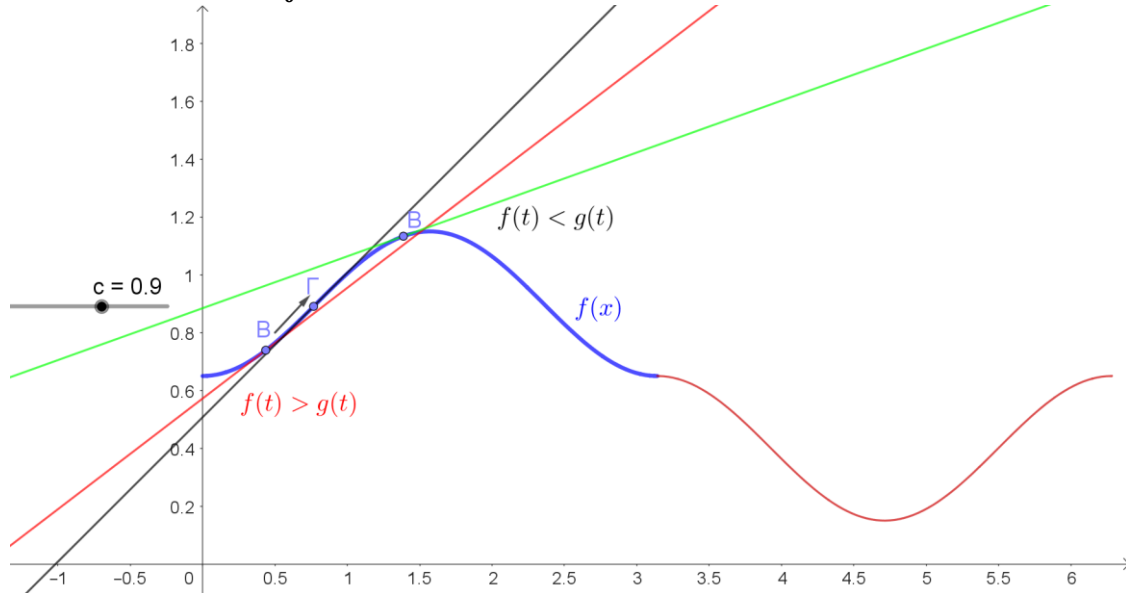
$$\begin{cases} \frac{-\cos 2x}{4} + c, & x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi) \\ \frac{\cos 2x}{4} + c', & x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi) \end{cases} \text{ προφανώς η } f(x) \text{ είναι συνεχής άρα } c = c' + \frac{1}{2}$$

$$c - \frac{1}{4}, \text{ αλλού}$$

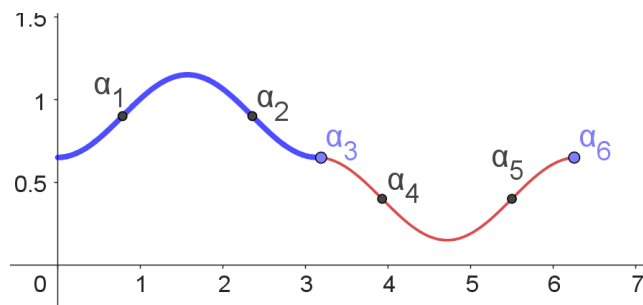
Η γραφική της παράσταση είναι κάπως έτσι:



Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ παρουσιάζει ακρότατο στα σημεία καμπής της $f(x)$!



Πραγματικά, έστω Γ το σημείο καμπής όπως στο δεύτερο σχήμα. Έστω ένα δεύτερο σημείο B αριστερά του Γ . Η συνάρτηση $h(x)$ εκφράζει το προσημασμένο εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης της f , της εφαπτομένης στο B και του άξονα των y . Καθώς το B πλησιάζει στο σημείο Γ η τιμή της $h(x)$ διαρκώς αυξάνεται, αφού διαρκώς προτίθενται θετικές ποσότητες ($f(t) - g(t) > 0$ αφού στο $(0, x_r)$ η f είναι κυρτή). Στη συνέχεια, καθώς το B απομακρύνεται από το Γ , αφού αλλάζει η καμπυλότητα, διαρκώς προτίθενται αρνητικές ποσότητες ($f(t) - g(t) < 0$). Άρα στο x_r η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (μέγιστο). Όμοια και για τα άλλα σημεία καμπής.



Τα πρώτα 6 σημεία καμπής είναι όπως φαίνεται και στο τρίτο σχήμα τα εξής:

$$a_1 = \frac{\pi}{4}, a_2 = \frac{3\pi}{4}, a_3 = \pi, a_4 = \frac{5\pi}{4}, a_5 = \frac{7\pi}{4}, a_6 = 2\pi$$

$$\text{Άρα } \frac{100}{\pi} (a_6 - a_2) = \frac{100}{\pi} \left(2\pi - \frac{3\pi}{4} \right) = \boxed{125}$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια σειρά ερωτήσεων σχετικά με το «Μάθημα επιλογής (γεωμετρίας)»

23. Αν το μέσο του AB είναι το $(4, 0, 7)$, όπου $A(a, -2, 6)$, $B(9, 2, b)$ τότε $a + b$ είναι ίσο με Α) 1 Β) 3 Γ) 5 Δ) 7 Ε) 9

Λύση

$$\text{Έχω } 4 = \frac{a+9}{2}, 0 = \frac{-2+b}{2}, 7 = \frac{6+b}{2} \Rightarrow a = -1, b = 8 \Rightarrow a + b = 7 \text{ άρα Δ}$$

24. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(\sqrt{3}, -2)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6} = 1$, $a > 0$ είναι Α) $\sqrt{3}$ Β) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Δ) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ Ε) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Λύση

Έχω $\frac{3^2}{a^2} + \frac{(-2)^2}{6} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$. Άρα η εφαπτομένη στο σημείο $(\sqrt{3}, -2)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ είναι η $\frac{\sqrt{3}x}{9} + \frac{-2y}{6} = 1$ με κλίση $\frac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ άρα Γ

25. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ έχουμε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{11}$, $|\vec{b}| = 3$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$, το $|\vec{a} - \vec{b}|$ είναι ίσο με Α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Β) $\sqrt{2}$ Γ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ Δ) $2\sqrt{2}$ Ε) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Λύση

Έχω $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17} \Rightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 17 \Rightarrow 44 - 4\vec{a}\vec{b} + 9 = 17 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 9$. Άρα $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 11 - 18 + 9 = 2 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$ άρα Β

26. Έστω ένα επίπεδο (α) στο σύστημα συντεταγμένων. Έστω οι ορθές προβολές των A, B που δεν ανήκουν στο επίπεδο (α) είναι τα σημεία A', B' αντίστοιχα και ότι $AB = A'B' = 6$. Αν M' η ορθή προβολή στο (α) του μέσου M του AB και σημείο P του (α) τ.ω $PM \perp A'B'$ και $PM' = 6$, τότε το εμβαδόν της ορθογώνιας προβολής του τριγώνου $A'B'P$ στο επίπεδο ABP είναι $\frac{9}{2}$. Βρείτε το PM Α) 12 Β) 15 Γ) 18 Δ) 21 Ε) 24

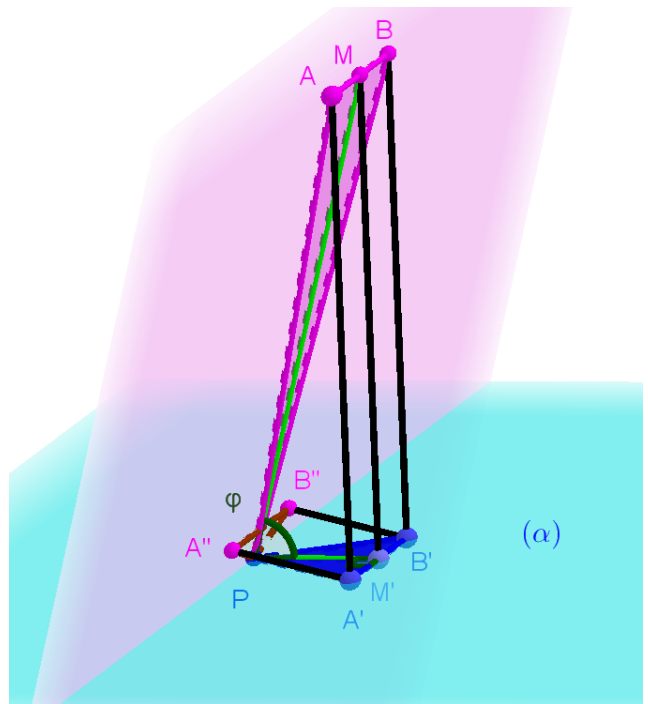
Λύση

$$\text{Έχω } (A'B'P) = \frac{1}{2} PM' \cdot A'B' = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$$

Έστω $\varphi = \widehat{M'PM}$, $A''B''$ η προβολή του $A'B'$ στο επίπεδο ABP . Έχω $(A''B''P) = \frac{9}{2}$ και $\cos \varphi = \frac{(A'B'P)}{(A''B''P)} = \frac{\frac{9}{2}}{18} = \frac{1}{4}$.

$$\text{Έχω ακόμα } \cos \widehat{M'PM} = \cos \varphi = \frac{(A'B'P)}{(ABP)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{18}{\frac{1}{2} PM \cdot AB} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{18}{3PM} \Rightarrow PM = 24 \text{ άρα Ε}$$

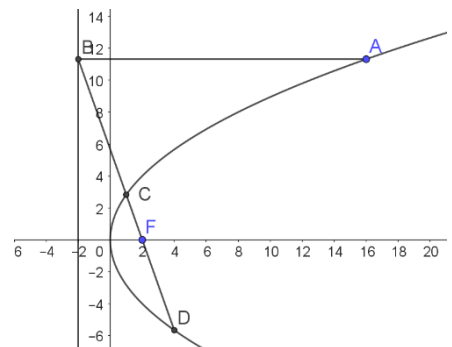


27. Στο σημείο A της παραβολής $y^2 = 8x$, που έχει εστία το σημείο F , ας ονομάσουμε την ορθή προβολή του A στην διευθετούσα, B , και έχω C, D τα σημεία τομής της BF με την παραβολή. Αν $BC = CD$, ποιο το εμβαδόν του ABD ; (Δίνεται ότι $CF < DF$ και το A δεν είναι η αρχή των αξόνων). Α) $100\sqrt{2}$ Β) $104\sqrt{2}$ Γ) $108\sqrt{2}$ Δ) $112\sqrt{2}$ Ε) $116\sqrt{2}$

Λύση

Έχω $y^2 = 8x = 2 \cdot 4x$, άρα $p = 4, F = (\frac{p}{2}, 0) = (2, 0), \delta: x = -2, x_B = -2, y_B = y_A = \sqrt{8x_A}$

Άρα $BF: y - 0 = \lambda(x - 2)$. Αφού C μέσο του BD έχω $x_C = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 2x_C = x_D - 2$. Αφού τα σημεία C, F, D είναι συνευθειακά



$$\begin{aligned} \text{έχω } \lambda &= \frac{y_C - y_F}{x_C - x_F} = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} \Rightarrow \frac{y_C}{x_C - 2} = \frac{y_D}{x_D - 2} = \frac{y_D}{2x_C} \Rightarrow \frac{y_C^2}{(x_C - 2)^2} = \frac{y_D^2}{4x_C^2} \Rightarrow \frac{x_C}{(x_C - 2)^2} = \frac{x_D}{4x_C^2} \Rightarrow \frac{x_C}{(x_C - 2)^2} = \frac{2x_C + 2}{4x_C^2} \Rightarrow 4x_C^3 = (x_C - 2)^2(2x_C + 2) \Rightarrow 2x_C^3 = (x_C^2 - 4x_C + 4)(x_C + 1) \Rightarrow 2x_C^3 = x_C^3 - 4x_C^2 + 4x_C + x_C^2 - 4x_C + 4 \Rightarrow \\ x_C^3 + 3x_C^2 - 4 &= 0 \Rightarrow (x_C - 1)(x_C^2 + 4x_C + 4) = 0 \xrightarrow{x_C > 0} x_C = 1 \end{aligned}$$

Αρα $x_D = 2x_C + 2 = 4, y_D = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$. Αρα $\lambda = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} = \frac{-\sqrt{32}}{4 - 2} = -2\sqrt{2}$, $BF: y = -2\sqrt{2}(x - 2)$ Αρα για το σημείο B έχω $y_B = -2\sqrt{2}(-2 - 2) = 8\sqrt{2}$, άρα $y_A = y_B = 8\sqrt{2} \Rightarrow y_A^2 = 128 \Rightarrow 8x_A = 128 \Rightarrow x_A = 16$. Αρα $(ABD) = \frac{1}{2}|AB||y_B - y_D| = \frac{1}{2} \cdot |16 - (-2)| \cdot |8\sqrt{2} - (-4\sqrt{2})| = 108\sqrt{2}$ άρα C

28. Έστω, όπως φαίνεται στο σχήμα, ότι τα δύο σημεία τομής A, B των δύο επιπέδων (α) και (β) είναι τέτοια ώστε $AB = 18$. Ένας κύκλος C_1 με διάμετρο AB είναι στο επίπεδο (α) και μια έλλειψη C_2 με μεγάλο άξονα το AB , εστίες τα σημεία F, F' στο επίπεδο (β) . Έστω η ορθή προβολή του σημείου P του κύκλου C_1 στο επίπεδο (β) είναι το H , $HF' < HF, H\hat{F}F' = \frac{\pi}{6}$. Από το σημείο που η ευθεία HF τέμνει την έλλειψη, έστω Q το πλησιέστερο στο H , οπότε έχω $FH < FQ$. Ένας κύκλος στο επίπεδο (β) με κέντρο το H που περνά από το Q έχει ακτίνα 4 και εφαπτεται στην AB . Αν η γωνία των δυο επιπέδων είναι θ τότε το $\cos\theta$ είναι ίσο με Α) $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ Β) $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ Ε) $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

Λύση

Στο επίπεδο (β) η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ αφού το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $2a = 18 \Rightarrow a = 9$. Αφού $H\hat{F}F' = \frac{\pi}{6} \Rightarrow HF = 2TH = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow FQ = 12$ Αρα $F'Q = 18 - FQ = 6$. Έχω $\gamma = \sqrt{81 - b^2}$ και έστω $F(-\gamma, 0), F'(\gamma, 0)$

Έχουμε τώρα ότι $FQ^2 = 144 \Rightarrow (x_Q + \gamma)^2 + (y_Q - 0)^2 = 144$ (1)

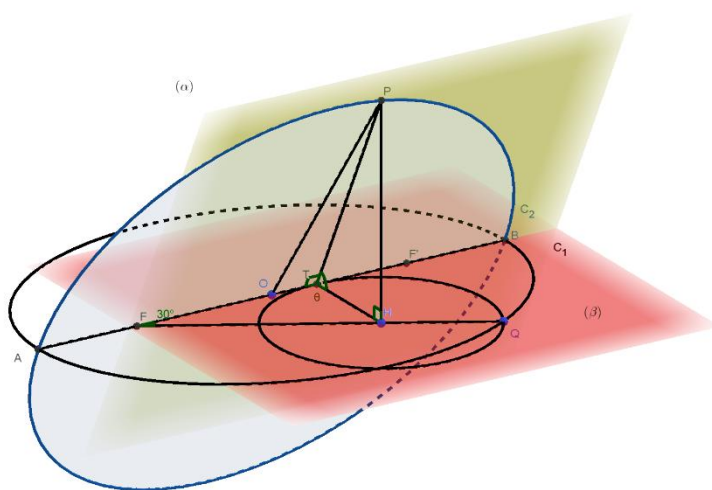
Από την κλίση της FQ έχουμε $\lambda_{FQ} = -\tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{y_Q - y_F}{x_Q - x_F} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{y_Q}{x_Q + \gamma} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{y_Q^2}{(x_Q + \gamma)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow (x_Q + \gamma)^2 = 3y_Q^2$ οπότε η

προηγούμενη σχέση γίνεται $3y_Q^2 + y_Q^2 = 144 \Rightarrow y_Q^2 = 36 \xrightarrow{y_Q < 0} y_Q = -6, (x_Q + \gamma)^2 = 3 \cdot 36 \Rightarrow x_Q + \gamma = \pm 6\sqrt{3} \Rightarrow x_Q = \pm 6\sqrt{3} - \gamma \xrightarrow{x_Q > 0} x_Q = 6\sqrt{3} - \gamma$ (2)

Έχουμε ακόμα ότι $F'Q^2 = 36 \Rightarrow (x_Q - \gamma)^2 + (y_Q - 0)^2 = 36$. Με αφαίρεση από την (1) κατά μέλη έχουμε $4x_Q\gamma = 108 \Rightarrow x_Q\gamma = 27 \xrightarrow{(2)} (6\sqrt{3} - \gamma)\gamma = 27 \Rightarrow \gamma^2 - 6\sqrt{3}\gamma + 27 = 0 \Rightarrow (\gamma - 3\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \gamma = 3\sqrt{3}, x_Q = 3\sqrt{3} > 0$.

Το σημείο H χωρίζει εσωτερικά το τμήμα FQ σε λόγο 8:4 άρα $x_H = \frac{8x_Q + 4x_F}{8 + 4} = \frac{24\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3}$, Αρα αν T η ορθή προβολή του H στον μεγάλο άξονα της έλλειψης, δηλαδή τον άξονα x'x έχουμε $x_T = x_H = \sqrt{3}, y_T = 0$. Από Π.Θ στο τρίγωνο PTO ($\hat{T} = 90^\circ$) έχουμε $PT = \sqrt{(AB/2)^2 - OT^2} = \sqrt{81 - 3} = \sqrt{78}$ άρα $\cos\theta = \frac{HT}{PT} = \frac{4}{\sqrt{78}} = \frac{4\sqrt{78}}{78} = \frac{2\sqrt{78}}{39}$ Αρα Ε

29. Έστω πραγματικός αριθμός $c > 0$, υπερβολή με εστίες $F(c, 0), F'(-c, 0)$ και κύριο άξονα μήκους 6. Βρείτε το άθροισμα όλων των τιμών του c τ.ω. τα διαφορετικά σημεία P και Q της υπερβολής να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:



α) το P είναι στο 1° τεταρτημόριο, το Q στην ευθεία PF' β) το τρίγωνο $PF'F$ είναι ισοσκελές γ) η περίμετρος του PQF είναι **28**.

Λύση

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις για το ισοσκελές $PF'F$

α) $PF' = F'F = 2c$.

Από τον ορισμό της υπερβολής έχω $QF - QF' = 2a = 6 \Rightarrow QF = 6 + QF'$ και $PF' - PF = 6 \Rightarrow PF = PF' - 6 = F'F - 6 = 2c - 6$. Για την περίμετρο του PQF έχω $PF + QF + PQ = 28 \Rightarrow 2c - 6 + 6 + QF' + PQ = 28 \Rightarrow 2c + PF' = 28 \Rightarrow 2c + 2c = 28 \Rightarrow c = 7$

β) $PF = F'F = 2c$. Όπως πριν $PF' - PF = 6 \Rightarrow PF' = 6 + PF = 6 + 2c$, ακόμα $QF = 6 + QF'$

Για την περίμετρο του PQF έχω $PF + QF + PQ = 28 \Rightarrow 2c + 6 + QF' + PQ = 28 \Rightarrow 2c + 6 + PF' = 28 \Rightarrow 2c + 6 + 2c = 28 \Rightarrow c = 4$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι $7 + 4 = \boxed{11}$

30. Έστω ισόπλευρο ABC πλευράς **4** στο καρτεσιανό επίπεδο. Έστω D σημείο που χωρίζει εσωτερικά το τμήμα AB σε λόγο **1:3**, E σημείο που χωρίζει εσωτερικά το τμήμα BC σε λόγο **1:3**, F σημείο που χωρίζει εσωτερικά το τμήμα CA σε λόγο **1:3**. Τέσσερα σημεία P, Q, R, X ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{FR} = \mathbf{1}$ β) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA}$.

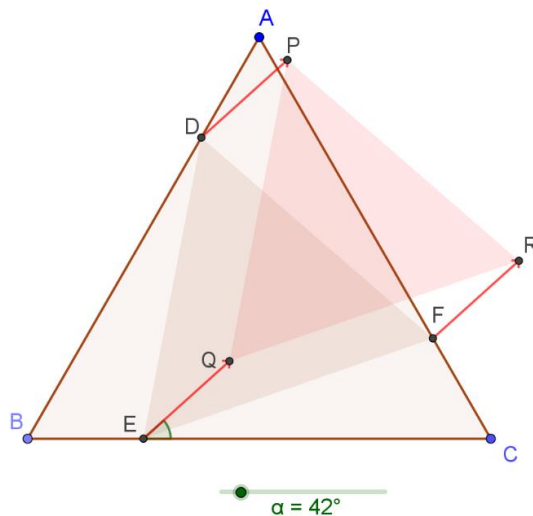
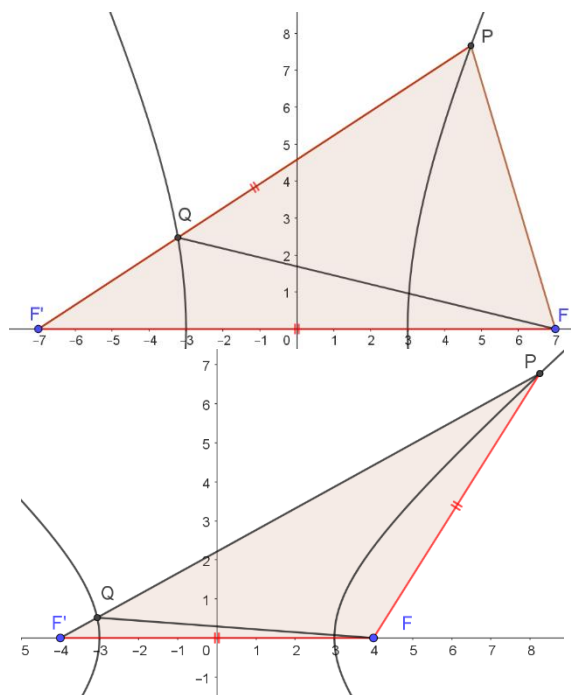
Όταν το μέτρο $|\overrightarrow{AX}|$ μεγιστοποιείται, το εμβαδόν του (PQR) είναι ίσο με S . Βρείτε το **$16S^2$**

Λύση

Έχουμε $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{EQ} - \overrightarrow{FR} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF}$. Άρα από τριγωνική ανισότητα για διανύσματα έχουμε ότι $|\overrightarrow{AX}| \leq |\overrightarrow{PD}| + |\overrightarrow{QE}| + |\overrightarrow{RF}| = 3$ με την μέγιστη τιμή όταν $\overrightarrow{PD} \uparrow \overrightarrow{QE} \uparrow \overrightarrow{RF}$. Αφού έχουν ίσα μέτρα έχω $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{FR}$.

Άρα τα σημεία P, Q, R προκύπτουν από παράλληλη μετατόπιση των σημείων D, E, F κατά διάνυσμα μέτρου **1**. Κατά την παράλληλη μετατόπιση του τριγώνου DEF στο PQR το εμβαδόν του τριγώνου δεν μεταβάλλεται, άρα αρκεί να βρω το εμβαδόν του ισόπλευρου DEF , δηλαδή αρκεί να βρω την πλευρά του ED . Έχω $BE = 1, BD = 3$, οπότε από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο DBE έχω

$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2DB \cdot BE \cdot \cos 60^\circ = 9 + 1 - 3 = 7$. Άρα $s = (PQR) = (DEF) = \frac{\sqrt{3}DE^2}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4s = 7\sqrt{3} \Rightarrow 16s^2 = \boxed{147}$



[Πηγές]

https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9D%CF%8C%CF%84%CE%B9%CE%B1_%CE%9A%CE%BF%CF%81%CE%AD%CE%B1

[3-Λίγα-λόγια-για-το-εκπαιδευτικό-σύστημα-στην-Κορέα.pdf \(sch.gr\)](#)

[Νότια Κορέα: Οι διαβόητες Suneung, τα ακριβά hagwon και η... υπογεννητικότητα \(naftemporiki.gr\)](#)

[Τεστ Σχολικών Ικανοτήτων Κολλεγίου - Βικιπαίδεια \(wikipedia.org\)](#)

[Πολυωνυμική με αντι-Bolzano συνθήκη - mathematica.gr](#)

<http://cdn.kice.re.kr/20su24neung/index.html>

<https://www.suneung.re.kr/boardCnts/list.do?boardID=5000004&s=kice#contents>

<https://namu.wiki/w/%EB%8C%80%ED%95%99%EC%88%98%ED%95%99%EB%8A%A5%EB%A0%A5%EC%8B%9C%ED%97%98/%EC%88%98%ED%95%99%20%EC%98%81%EC%97%AD?from=%EC%88%98%ED%95%99%20%EC%98%81%EC%97%AD>

<https://www.class.orbi.kr/00065168993>

https://www.youtube.com/watch?v=dyKFxoy4MDc&ab_channel=%EC%A4%80%EA%B5%90%EC%8C%A4%EC%88%98%ED%95%99%EA%B5%90%EC%8B%A4%5B%EC%A0%84%EA%B5%901%EB%93%B1%EB%8C%80%EC%B9%98%EB%8F%99%EC%8A%A4%ED%83%80%EA%B0%95%EC%82%AC%5D

<https://m.mk.co.kr/amp/10882121>

https://www.youtube.com/watch?v=n61zPThMI88&list=PLwH3r8RrI9wHzLie0rAb_iCF_d5QpIXxk&index=3&ab_channel=%EB%AA%A8%EC%88%98_%EB%AA%A8%EB%91%90%EC%9D%98%EC%88%98%ED%95%99