[Η Κίνα]
Η Κίνα (κινέζικα: 中国, πινγίν: Zhōngguó, Τζονγκγκουό), επίσημα Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας (κινέζικα: 中华人民共和国, πινγίν: Zhōnghuá Rénmín Gònghéguó, Τζονγκχουά Ρένμίν Γκονγκχέγκουό), είναι χώρα της Ανατολικής Ασίας και η δεύτερη με τον μεγαλύτερο πληθυσμό στον κόσμο μετά την Ινδία, 1.411.778.724 σύμφωνα με την απογραφή του 2020. Η έκτασή της είναι 9.596.961 τ.χλμ.. Πρωτεύουσα της Κίνας είναι το Πεκίνο. Γεωγραφικά είναι η μεγαλύτερη χώρα στην περιοχή της Ανατολικής Ασίας και η τέταρτη μεγαλύτερη στον κόσμο μετά τη Ρωσία, τον Καναδά και τις ΗΠΑ.
Η Κίνα ήταν ένας από τους πρώτους πολιτισμούς του κόσμου. Το κέντρο του πρωτοκινεζικού πολιτισμού ήταν η εύφορη λεκάνη του Κίτρινου Ποταμού στην πεδιάδα της Βόρειας Κίνας. Η Κίνα ήταν μια από τις σημαντικότερες οικονομικές δυνάμεις στις τελευταίες δύο χιλιετίες από τον 1ο έως τον 19ο αιώνα, όταν και προσωρινά εκτοπίστηκε από τη Δύση και την Ιαπωνία. Σήμερα είναι η δεύτερη μεγαλύτερη οικονομία στον κόσμο μετά τις ΗΠΑ, με το ΑΕΠ της να ανέρχεται στα 17,73 τρισεκατομμύρια δολάρια, σύμφωνα με εκτιμήσεις του 2021.

[Εκπαίδευση στην Κίνα]
Η Κίνα, γνωστή ως Δημοκρατία της Κίνας, είναι μια χώρα στην Ανατολική Ασία. Η Κίνα έχει τον μεγαλύτερο πληθυσμό στον κόσμο και την τέταρτη μεγαλύτερη χώρα. Το σχολικό σύστημα αυτής της χώρας είναι επίσης μια από τις κορυφαίες χώρες. Το επίπεδο εκπαίδευσης στην Κίνα είναι πολύ υψηλό, καθώς τα τελευταία χρόνια η οικονομία της Κίνας έχει αναπτυχθεί τόσο γρήγορα. Αυτή η χώρα είναι πολύ γνωστή για την παραγωγή ηλεκτρονικών ειδών. Η εκπαίδευση στην Κίνα είναι υποχρεωτική μέχρι την ηλικία των 15 ετών.

[Σχολικό σύστημα στην Κίνα]
Το σχολικό σύστημα στην Κίνα χωρίζεται σε διάφορα μέρη που πρέπει να περάσουν για να προαχθούν σε μια νέα τάξη. Χωρίζεται σε τρία χρόνια Νηπιαγωγείου. Επίσης πέντε έως έξι χρόνια δημοτικού και τρία έως έξι χρόνια γυμνασίου. Αυτά είναι τα υποχρεωτικά επίπεδα εκπαίδευσης για κάθε μαθητή. Μετά από αυτά, οι φοιτητές μπορούν να επιλέξουν την τριτοβάθμια εκπαίδευση σε διάφορους τομείς.

- Προσχολική εκπαίδευση - 2 έως 6-7 χρόνια
- Πρωτοβάθμια εκπαίδευση - 6-7 έως 12 ετών
- Γυμνάσιο - 12 έως 15 ετών
- Γυμνάσιο - 15 έως 18 ετών

[Μέση Εκπαίδευση]
Η Μέση Εκπαίδευση ξεκινά από την ηλικία των 12 έως 18 ετών. Χωρίζεται σε γυμνάσιο και ανώτερο γυμνάσιο στο δημόσιο σχολείο της Κίνας. Η κατώτερη μέση εκπαίδευση είναι υποχρεωτική για όλους τους μαθητές και μετά την ολοκλήρωση αυτής οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τη μέση εκπαίδευση, την επαγγελματική σχολή ή μια επαγγελματική σχολή.
Μερικά από τα καλύτερα διεθνή σχολεία στην Κίνα:

- Αμερικανική Διεθνής Σχολή του Γκουάνγκτζου
- Αμερικανική Σχολή της Σαγκάης
- Διεθνές Σχολείο Utahloy
- Διεθνές σχολείο Yew Chung
- Διεθνές σχολείο του Πεκίνου

[10 πράγματα για την εκπαίδευση στην Κίνα]
1.Πολλά από τα σχολεία στην Κίνα δεν έχουν κεντρική θέρμανση, οπότε μαθητές και καθηγητές πρέπει να φοράνε τα παλτό τους κατά την διάρκεια του χειμώνα. Κεντρική θέρμανση υπάρχει μόνο στα σχολεία στην Βόρεια Κίνα. Οι σχολικές στολές είναι όλες ίδιες με εξαίρεση τα χρώματα και το

σύμβολο του κάθε σχολείου στο στήθος. Όλα τα σχολεία είναι περικυκλωμένα από σιδερένιες πύλες, που είναι πάντα κλειστές και ανοίγουν μόνο όταν πρόκειται να φύγουν οι μαθητές.
2.Σε όλα τα σχολεία γίνεται καθημερινή προθέρμανση, όχι μόνο μια φορά την ημέρα. Ένα τυπικό πρωινό στο σχολείο περιλαμβάνει πρωινή προθέρμανση και μετά οι μαθητές μπαίνουν στην σειρά και μαθαίνουν τα νέα της ημέρας, βλέποντας την σημαία να ανυψώνεται. Όλα τα παιδιά κάνουν ασκήσεις για τα μάτια μετά την τρίτη ώρα- πιέζουν ειδικά σημεία στο σώμα τους και ακούνε χαλαρωτική μουσική μαζί με ηχογραφημένες οδηγίες. Εκτός από τις πρωινές ασκήσεις, υπάρχει και μεσημεριανή γυμναστική στις 2 το μεσημέρι.
3.Το μεγάλο διάλειμμα, που τα παιδιά τρώνε το μεσημεριανό τους, διαρκεί μια ώρα. Κατά την διάρκεια αυτής της ώρας, τα παιδιά μπορούν να φάνε, να παίξουν και να φωνάξουν, όπως όλα τα υπόλοιπα παιδιά. Το μεσημεριανό είναι παραδοσιακό: κρέας, λαχανικά, ρύζι και σούπα. Τα ακριβά ιδιωτικά σχολεία προσφέρουν, επίσης, γιαούρτι και φρούτα. Σε μερικά δημοτικά σχολεία υπάρχει και ώρα ύπνου μετά το μεσημεριανό.
4.Οι καθηγητές αντιμετωπίζονται με σεβασμό. Οι δάσκαλοι πάντα προσφωνούνται με το επίθετό τους. Μάλιστα, σε μερικά σχολεία οι μαθητές κάνουν υπόκλιση μπροστά στους καθηγητές.
5.Σε πολλά σχολεία οι σωματικές τιμωρίες θεωρούνται δεδομένες. Ο καθηγητής μπορεί να χτυπήσει έναν μαθητή με το χέρι του ή έναν χάρακα. Όσο πιο απλό και απόμακρο είναι το σχολείο, τόσο πιο συχνά συμβαίνουν αυτές οι τιμωρίες.
6.Σε κάθε τάξη υπάρχει κρεμασμένη μια αφίσα με την ακαδημαϊκή κατάταξη των μαθητών, που τους δίνει κίνητρο να μελετήσουν περισσότερο. Οι βαθμοί πάνε από το A μέχρι το F. Η ενθάρρυνση της καλής συμπεριφοράς είναι σημαντικό μέρος της εκπαίδευσης.
7.Οι μαθητές στην Κίνα διαβάζουν για περισσότερο από 10 ώρες την ημέρα. Τα μαθήματα ξεκινούν στις 8 το πρωί και διαρκούν μέχρι τις 3-4 το απόγευμα. Μετά, τα παιδιά γυρίζουν σπίτι και συνεχίζουν την μελέτη μέχρι τις 9-10 το βράδυ. Στις μεγάλες πόλεις τα παιδιά μετά το σχολείο έχουν πολλά ιδιαίτερα μαθήματα και άλλες δραστηριότητες μετά το σχολείο.
8.Τα σχολεία διαχωρίζονται σε δημόσια και ιδιωτικά. Το κόστος στα ιδιωτικά σχολεία μπορεί να φτάσει τα 1000 δολάρια τον μήνα, αλλά το επίπεδο εκπαίδευσης είναι πολύ υψηλότερο. Επίσης, η εκμάθηση ξένων γλωσσών είναι ιδιαίτερα σημαντική. Στα καλά ιδιωτικά σχολεία, οι μαθητές μιλούν άπταιστα Αγγλικά στην πέμπτη ή έκτη δημοτικού.
9.Το εκπαιδευτικό σύστημα βασίζεται στην αποστήθιση. Οι μαθητές πρέπει να μάθουν πολλά πράγματα κατά λέξη και οι καθηγητές απαιτούν την αυτόματη αναπαραγωγή των όσων είπαν, χωρίς να νοιάζονται για το αν οι μαθητές καταλαβαίνουν τι λένε.
10.Τα παιδιά από φτωχές οικογένειες, που δεν θέλουν να σπουδάσουν ή είναι πολύ άτακτα, σύμφωνα με τους γονείς τους, αποβάλλονται από τα σχολεία και πηγαίνουν σε σχολές κουνγκ φου. Εκεί προπονούνται από το πρωί μέχρι το βράδυ και αν είναι αρκετά τυχεροί θα λάβουν την βασική εκπαίδευση.
Οι καθηγητές χτυπούν τα παιδιά με κάποιο κομμάτι ξύλο ή τα κλωτσάνε. Όταν τελειώσει η εκπαίδευσή τους, οι γονείς βλέπουν πειθαρχημένους νέους, που μπορούν να εργαστούν ως δάσκαλοι Κουνγκ Φου και να ζήσουν αξιοπρεπώς.
Σε όποιο σχολείο και αν πάνε τα παιδιά στην Κίνα, υπάρχουν 3 πράγματα που μαθαίνουν όλοι: σκληρή δουλειά, πειθαρχία και σεβασμός στους ανωτέρους.
Μαθαίνουν από πολύ νεαρή ηλικία, ότι πρέπει να είναι οι καλύτεροι σε αυτό που κάνουν.

[Κίνα: Το Πεκίνο επαναπροσδιορίζει το εκπαιδευτικό σύστημα]
Η Κίνα απαγορεύει τις εξετάσεις για παιδιά ηλικίας έξι ετών καθώς το Πεκίνο επαναπροσδιορίζει το εκπαιδευτικό σύστημα. Το σύστημα προσανατολισμένο στις εξετάσεις της Κίνας κορυφώνεται με την φοβερή εισαγωγική εξέταση πανεπιστημίου σε ηλικία 18 ετών γνωστή ως gaokao. Το Πεκίνο απαγόρευσε τη γραπτή εξέταση για παιδιά ηλικίας έξι και επτά ετών, στο πλαίσιο των σαρωτικών εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων που αποσκοπούν στην ανακούφιση των πιέσεων σε μαθητές και γονείς στο υπερανταγωνιστικό σχολικό σύστημα της Κίνας. Το σύστημα προσανατολισμένο στις

εξετάσεις της Κίνας απαιτούσε από τους μαθητές να δίνουν εξετάσεις από την πρώτη τάξη και μετά, με αποκορύφωμα την φοβερή εισαγωγική εξέταση στην ηλικία των 18 ετών, γνωστή ως gaokao, όπου μια βαθμολογία μπορεί να καθορίσει την τροχιά της ζωής ενός παιδιού.
"Υπερβολικά συχνές εξετάσεις … που προκαλούν υπερφορτώσεις και πιέσεις των μαθητών", έχουν αποκοπεί από το Υπουργείο Παιδείας, σύμφωνα με τις νέες κατευθυντήριες γραμμές που δόθηκαν στη δημοσιότητα τη Δευτέρα. Το υπουργείο ανέφερε ότι η πίεση στους μαθητές από νεαρή ηλικία «βλάπτει την ψυχική και σωματική τους υγεία». Οι κανονισμοί περιορίζουν επίσης τις εξετάσεις υποχρεωτικής εκπαίδευσης σε μία περίοδο, με ενδιάμεσες και ψευδείς εξετάσεις να επιτρέπονται στο γυμνάσιο.
Τα μέτρα εντάσσονται σε ευρύτερες κυβερνητικές μεταρρυθμίσεις στον τομέα της εκπαίδευσης της Κίνας, οι οποίες περιλαμβάνουν καταστολή των σχολείων με κακή κατάσταση – που θεωρούνται από τους γονείς ως ένας τρόπος για να διογκώσουν την εκπαιδευτική περιουσία των παιδιών τους.
Στα τέλη Ιουλίου, η Κίνα διέταξε όλες τις ιδιωτικές εταιρείες φροντιστηρίου να γίνουν μη κερδοσκοπικές και απαγόρευσε στα πρακτορεία φροντιστηρίων να παραδίδουν μαθήματα σε βασικά θέματα τα Σαββατοκύριακα και τις αργίες, ουσιαστικά ακρωτηριάζοντας έναν τομέα 100 δισεκατομμυρίων δολαρίων.
Ο στόχος είναι να μειωθεί η ανισότητα στην εκπαίδευση της Κίνας, όπου ορισμένοι γονείς της μεσαίας τάξης αποδίδουν πρόθυμα 100.000 γιουάν (15.400 δολάρια) ή περισσότερο ετησίως σε ιδιωτικά φροντιστήρια για να πάνε τα παιδιά τους σε κορυφαία σχολεία.
Πολλοί επίσης αποκτούν ακίνητα κοντά σε σχολεία, αυξάνοντας τις τιμές των κατοικιών.
«Δεν υπάρχει καμία άλλη χώρα που να έχει τόσο ισχυρή κουλτούρα διδασκαλίας (όπως η Κίνα)», δήλωσε η Claudia Wang, συνεργάτης και επικεφαλής της εκπαίδευσης για την Ασία στην εταιρεία συμβούλων Oliver Wyman με έδρα τη Σαγκάη.
Οι αρχές του Πεκίνου την περασμένη εβδομάδα ανακοίνωσαν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να εναλλάσσουν τα σχολεία κάθε έξι χρόνια, για να αποτρέψουν τη συγκέντρωση κορυφαίων ταλέντων σε ορισμένα σχολεία.
Τα στελέχη της εκπαίδευσης επανέλαβαν τη Δευτέρα την απαγόρευση στα σχολεία να δημιουργούν μαθήματα «προτεραιότητας» για χαρισματικούς μαθητές.
Το Υπουργείο Παιδείας απαγόρευσε επίσης τις γραπτές εργασίες για μαθητές πρώτης και δεύτερης τάξης νωρίτερα φέτος και περιόρισε τις εργασίες για μαθητές γυμνασίου σε 1,5 ώρες το βράδυ.
Ωστόσο, πολλοί Κινέζοι γονείς εξακολουθούν να θεωρούν την εκπαίδευση ως ένα δρόμο προς την κοινωνική κινητικότητα. Η εισαγωγική εξέταση πανεπιστημίου gaokao είναι ένας από τους λίγους τρόπους με τους οποίους οι φτωχοί αγροτικοί φοιτητές μπορούν να έχουν καλύτερη εκπαιδευτική ευκαιρία και προοπτικές εργασίας σε κορυφαία πανεπιστήμια.

[Η εκπαίδευση στην Κίνα έχει ιδιαίτερη βαρύτητα και σημασία.]
Βασικά, η σχολική χρονιά χωρίζεται σε 2 εξάμηνα. Συγκεκριμένα, το πρώτο εξάμηνο διαρκεί από το Σεπτέμβριο μέχρι το τέλος Ιανουαρίου και το δεύτερο από το Μάρτιο μέχρι το τέλος Ιουνίου.
Τα μαθήματα ξεκινούν στις 8 το πρωί. Οι δε μαθητές παραμένουν στο σχολείο μέχρι τις 5.30 το απόγευμα. Μέσα σε αυτό το διάστημα, περιλαμβάνεται μια ώρα για το γεύμα. Επίσης, μια ώρα εξωσχολικής δραστηριότητας. Συγκεκριμένα, υπάρχει δυνατότητα επιλογής ανάμεσα σε ποδόσφαιρο, γυμναστική, πινγκ-πονγκ, μπάσκετ, κιθάρα και τραγούδι.
Εξάλλου, επειδή ο ανταγωνισμός για την εισαγωγή στα Πανεπιστήμια είναι ιδιαίτερα μεγάλος, πολλά σχολεία κάνουν επιπλέον μαθήματα. Έτσι, οι μαθητές εξειδικεύονται π.χ. στη φυσική ή στα μαθηματικά το Σάββατο το πρωί, για 3 ή 4 ώρες.
Η εκπαίδευση στην Κίνα προβλέπει εισαγωγικές εξετάσεις στα Πανεπιστήμια, που ονομάζονται Gaokao. Διεξάγονται μια φορά το χρόνο, στις αρχές Ιουνίου και διαρκούν 2 ημέρες. Όλοι οι μαθητές προετοιμάζονται εντατικά. Μάλιστα, κατά τη διάρκεια των εξετάσεων, η χώρα σχεδόν παραλύει. Αξίζει να αναφέρουμε ότι όποιος υποψήφιος επιχειρήσει να αντιγράψει, αποκλείεται για τρεις συνεχείς χρονιές από τις εξετάσεις.

Τα σημαντικότερα Πανεπιστήμια της Κίνας είναι τα εξής :

- Το Πανεπιστήμιο του Πεκίνου που ιδρύθηκε το 1898
- Το Πανεπιστήμιο Hangzhou (1952)
- Το Πανεπιστήμιο Fudan της Σαγκάης (1905)
- Το Πανεπιστήμιο Nankai της Tianjin (1919)
- Το Πανεπιστήμιο της Nanchino (1902)
- Το Πανεπιστήμιο Επιστημών και Τεχνολογίας της Κίνας στη Hefei (1958)

Τέλος, σημειώνουμε ότι τα κυριότερα κέντρα της κινέζικης κουλτούρας είναι το Πεκίνο, η Σαγκάη και η Canton όπου φιλοξενούνται και καλλιτεχνικά ινστιτούτα.

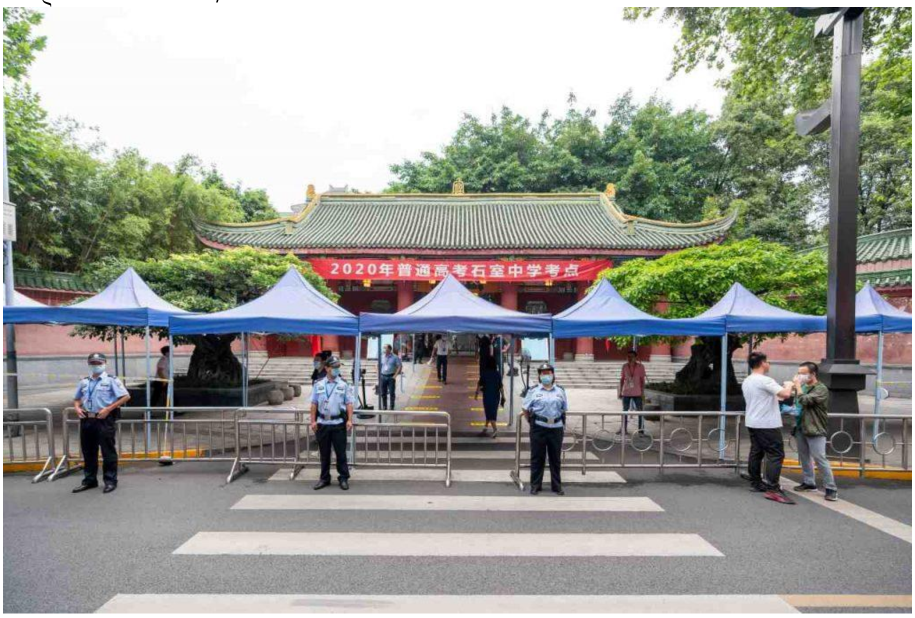
[Τι είναι η εξέταση Gaokao;]

Το gaokao («υψηλό τεστ») είναι μια ετήσια Εθνική Εξέταση Εισόδου στο Κολλέγιο (NCEE) που διαρκεί 9 ώρες σε 2 ημέρες στις αρχές Ιουνίου. Είναι το αποκορύφωμα και το κύριο σημείο εστίασης των σπουδών γυμνασίου ενός μαθητή.

Οι εξετάσεις Gaokao αποτελούνται από 4 τεστ με μια συγκεντρωτική βαθμολογία 750 μορίων ;

- Επεξεργασία γραπτού κειμένου στην κινέζικη γλώσσα (150 μόρια)
- Μια ξένη γλώσσα (αγγλικά, ρώσικα, ιαπωνικά, γερμανικά, γαλλικά, ισπανικά) (150 μόρια)
- Μαθηματικά (150 μόρια)
- Ιστορία, πολιτικές επιστήμες και γεωγραφία ή φυσική, χημεία και βιολογία (300 μόρια)

Οι ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής. Οι δε μαθητές, εστιάζουν τη δυσκολία τους στην κινέζικη γλώσσα Καλύπτει πολλά θέματα και η βαθμολογία του ορίζει την ακαδημαϊκή σταδιοδρομία ενός μαθητή. Ένας μαθητής πρέπει να είναι καλά προετοιμασμένος και αρκετά γρήγορος για να το ολοκληρώσει. Πρέπει να φτάσει 5 λεπτά πριν από την έναρξη της εξέτασης, διαφορετικά θα αποκλειστείτε. Δεν υπάρχουν επαναλήψεις. Είναι μια αγχωτική εβδομάδα για τους υποψηφίους gaokao και τους γονείς τους για να πούμε το λιγότερο. Για πολλούς Κινέζους πολίτες, αυτό είναι κάτι περισσότερο από μια εισαγωγική εξέταση στο κολέγιο - είναι ένα εισιτήριο για την ανοδική κοινωνική κινητικότητα. Σχετικά με την παραλλαγή STEM, οι υποψήφιοι θα γράψουν δοκίμια στα κινέζικα και τα αγγλικά. Τα μαθήματα κυμαίνονται από τη Χημεία, τη Φυσική και τα Μαθηματικά και τα Αγγλικά. Οι υποψήφιοι θα πρέπει να γράψουν μαθηματικές αποδείξεις και δοκίμια στα κινέζικα και τα αγγλικά. Ασκήσεις συμπλήρωσης του κενού και πολλαπλής επιλογής είναι επίσης δημοφιλής επειδή είναι τόσο εύκολο να διορθωθούν. Η υψηλότερη βαθμολογία που μπορείτε να πάρετε είναι 750/750.



Φωτογραφία της εισόδου στις εξετάσεις Gaokao, που τραβήχτηκε στις 7 Ιουλίου 2020, Chengdu, επαρχία Sichuan, Κίνα.

[Εκατομμύρια μαθητές παίρνουν το τεστ Gaokao κάθε χρόνο]
Ένας αριθμός ρεκόρ φοιτητών εγγράφηκαν για να το λάβουν φέτος, πάνω από 12 εκατομμύρια. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι ότι κάθε επαρχία έχει την επιλογή να χρησιμοποιήσει τη δική της εξέταση ή να χρησιμοποιήσει μια τυπική από το Πεκίνο. Οι εξετάσεις κάθε επαρχίας θα έχουν διαφορετικούς στόχους για να επιτύχουν οι μαθητές. Στην παραλλαγή STEM του τεστ οι τρεις κύριες εξετάσεις είναι στα κινέζικα, στα μαθηματικά και στα αγγλικά. Για να αποκτήσετε πρόσβαση σε πανεπιστήμια μεσαίας ή κορυφαίας βαθμίδας, θα πρέπει να επιτύχετε βαθμολογία 500 βαθμών ή περισσότερο. Οι βαθμολογίες από 330 έως 375 είναι αρκετά καλές για πρόσβαση σε πανεπιστήμια μεσαίας βαθμίδας.

[Ποια είναι η διαφορά μεταξύ του Gaokao και του SAT;]
Ενώ το gaokao και το SAT είναι και οι δύο εξετάσεις τύπου NCEE, το gaokao είναι σίγουρα πολύ πιο δύσκολο. Μία από τις κύριες διακρίσεις είναι το γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν να ξαναγράψουν τις εξετάσεις SAT. Θα μπορούσαν να το πάρουν όσες φορές θέλουν, αλλά να παρουσιάσουν μόνο το υψηλότερο αποτέλεσμά τους στην αίτησή τους για κολέγιο. Έχουμε δει μαθητές να χρησιμοποιούν καθηγητές για να βελτιώσουν το SAT τους κατά 200 πόντους. Το gaokao δεν μπορεί να ξαναγραφτεί, οπότε οι μαθητές δεν θα έχουν την ευκαιρία να βελτιωθούν. Σε αυτές τις δύο πιστές ημέρες της Κινεζικής Άνοιξης, αυτό που παίρνετε είναι αυτό που παίρνετε.
[Μπορείτε να επαναλάβετε το τεστ Gaokao;]
Τι γίνεται αν αποτύχετε, αναρωτιέστε; Λοιπόν, ίσως μπορέσετε να επαναλάβετε το τεστ το επόμενο έτος. Ή τουλάχιστον αυτό συνέβαινε πριν από την καταστολή των επαναλήψεων. Σε μια προσπάθεια να γίνει το τεστ πιο δίκαιο, η επαρχία Chongqing απαγόρευσε τις επαναλήψεις gaokao (όχι άλλοι μαθητές «fudu»). Παραδόξως, το 15% των πάνω από 240.000 μαθητών που πήραν το gaokao στο Chongqing το 2017 ήταν δεύτεροι ή ακόμα και τρίτοι καθήμενοι.
[Ποια είναι η υψηλότερη βαθμολογία Gaokao;]
Ο κ. Yang Chenyu από την επαρχία Guangxi πήρε 730/750 (υψηλότερο ποτέ) και πήγε να σπουδάσει στο διάσημο Πανεπιστήμιο του Πεκίνου Το 2021, ο Rui Yun σημείωσε την υψηλότερη βαθμολογία στο gaokao. Πήρε 723/750 συν επιπλέον 5 πόντους επειδή θεωρείται εθνική μειονότητα. Το τελικό του σκορ ήταν 728/750.
Χωρίς αριθμομηχανές στο χέρι, οι ερωτήσεις μαθηματικών θα πρέπει να γίνουν με στυλό και χαρτί. Μην σκεφτείτε ούτε την εξαπάτηση επειδή είναι παράνομη. Οι απατεώνες θα μπορούσαν να αντιμετωπίσουν έως και επτά χρόνια φυλάκισης. Σύμφωνα με πηγές, 275 ύποπτοι έχουν συλληφθεί για το αδίκημα μόνο το 2021! Οι βαθμολογίες δεν είναι κανονικοποιημένες ή "καμπάνες" για να συγκριθούν από επαρχία σε επαρχία. Έτσι, αυτό που παίρνετε είναι αυτό που παίρνετε.

[Ύλη στα Μαθηματικά]
Σύνολα και πράξεις συνόλων. Συναρτήσεις και συχνά χρησιμοποιούμενες στοιχειώδεις συναρτήσεις. 3-D Ευκλείδεια γεωμετρία. Επίπεδη αναλυτική γεωμετρία. Βασικά στοιχεία αλγορίθμων. Βασικά στοιχεία στατιστικής. Βασικά στοιχεία πιθανοτήτων. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και σχετικές ταυτότητες. Επίλυση τριγώνων. Ακολουθίες και σειρές. Στοιχειώδεις ανισότητες. Βασικά στοιχεία λογικής. Κωνικές τομές και σχετικές εξισώσεις. 3-διάστατα διανύσματα και οι εφαρμογές τους στη γεωμετρία. Παράγωγοι και εφαρμογές τους. Λογική και αποδείξεις, συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής επαγωγής. Μιγαδικοί αριθμοί και εφαρμογές τους. Απαρίθμηση και το διωνυμικό θεώρημα. Κατανομές πιθανοτήτων και στατιστικοί έλεγχοι. Συστήματα συντεταγμένων ακτίνας και εξισώσεις παραμέτρων. (προαιρετικό) Ανισότητα AM-GM και ανισότητα Cauchy-Schwartz. (προαιρετικό)

[Κινεζικές εισαγωγικές εξετάσεις 2016].

Οι μαθητές των θεωρητικών επιστημών πρέπει να λύσουν τα θέματα των ενοτήτων 1 και 2 (προβλήματα 1-20, σύνολο 160 μόρια, χρόνος 2 ώρες). Οι μαθητές των θετικών επιστημών πρέπει να λύσουν και τις τρεις ενότητες (προβλήματα 1-23, σύνολο 200 μόρια, χρόνος δυόμιση ώρες).

[Ενότητα 1]. Συμπληρώστε τα κενά (14 ερωτήσεις, 5 μόρια η καθεμία, σύνολο 70 μόρια).

1. Δίνονται τα σύνολα $\boldsymbol{A} = \{-1,2,3,6\}$ και $\boldsymbol{B} = \{x, -2 < x < 3\}$, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} =$……

Λύση

Προφανής $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boxed{\{-1,2\}}$

2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (1+2i)(3-i)$, όπου i η μιγαδική μονάδα. Το πραγματικό μέρος του z είναι ……

Λύση

$z = (1+2i)(3-i) = 3 - 2i^2 + 5i = 5 + 5i \Rightarrow Re(z) = \boxed{5}$

3. Στο καρτεσιανό επίπεδο xOy η απόσταση μεταξύ των εστιών της υπερβολής $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$ είναι …..

Λύση

Έχω $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 3 + 7 = 10 \Rightarrow \gamma = \sqrt{10}$. Άρα η απόσταση μεταξύ των εστιών της υπερβολής είναι $|E'E| = 2\gamma = \boxed{2\sqrt{10}}$

4. Δεδομένου των δειγμάτων $4,7$, $4,8$, $5,1$, $5,4$, $5,5$ η τυπική απόκλιση ισούται με ……

Λύση

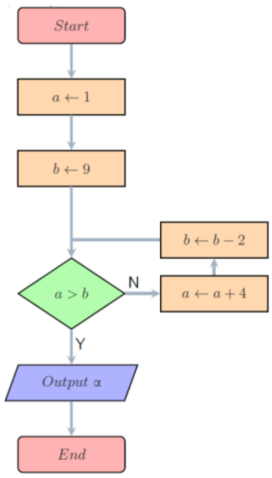
Έχω $\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n} = \frac{4,7+4,8+5,1+5,4+5,5}{5} = 5,1$ και $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{0,4^2+0,2^2+0+0,3^2+0,4^2}{5} = 2\frac{0,4^2+0,2^2}{5}$
$= 2\frac{0,5^2}{5} = 2\frac{0,25}{5} = 0,1$ άρα $\boxed{\sigma = \sqrt{0,1}}$

5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ είναι ……

Λύση

Πρέπει $3 - 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$ άρα πεδίο ορισμού το $[-3, 1]$

6. Δεδομένου του διαγράμματος ροής του παρακάτω αλγορίθμου, η έξοδος είναι ίση με ……



Λύση

	1ο βήμα	2ο βήμα	3ο βήμα	Output
a	1	5	9	$\boxed{9}$ ←
b	9	7	5	

7. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι (κύβο με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 σε κάθε έδρα) δυο φορές. Η πιθανότητα του αθροίσματος των αριθμών της πάνω έδρας να είναι μικρότερο του 10 είναι ……

Λύση

Έχω $P(\text{το άθροισμα των αριθμών της πάνω έδρας να είναι μικρότερο του } 10) =$
$1 - P(\text{το άθροισμα των αριθμών της πάνω έδρας να είναι Μεγαλύτερο ή ίσο του } 10)$
$= 1 - P(\text{το άθροισμα των αριθμών της πάνω έδρας να είναι } 10 \text{ ή } 11 \text{ ή } 12) = 1 - \frac{3}{36} - \frac{2}{36} - \frac{1}{36} = \frac{30}{36}$
$= \boxed{\frac{5}{6}}$

Αφού τα ευνοϊκά ενδεχόμενα από τα 36 πιθανά ενδεχόμενα είναι:$10 = 6 + 4 = 5 + 5 = 4 + 6$, $11 = 6 + 5 = 5 + 6$, $12 = 6 + 6$

8. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\{\boldsymbol{a_n}\}$, $\boldsymbol{S_n}$ είναι το άθροισμα των πρώτων n όρων της. Αν $\boldsymbol{a_1 + a_2^2 = -3}$, $\boldsymbol{S_5 = 10}$, τότε η τιμή του $\boldsymbol{a_9}$ είναι ..... .

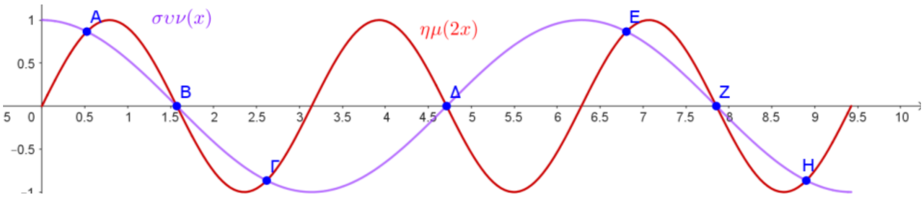
Λύση

$\boldsymbol{a_1 + a_2^2 = -3 \Leftrightarrow a_1 + (a_1+\omega)^2 = -3, S_5 = 10 \Leftrightarrow \frac{5}{2}[2a_1 + 4\omega] = 10 \Leftrightarrow a_1 + 2\omega = 2 \Leftrightarrow a_1 = 2 - 2\omega}$

Άρα $\boldsymbol{2 - 2\omega + (2-\omega)^2 = -3 \Leftrightarrow \omega^2 - 6\omega + 9 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 3, a_1 = -4, a_9 = a_1 + 8\omega = -4 + 24 = \boxed{20}}$

9. Ο αριθμός των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $\boldsymbol{y = \sin 2x}$ και $\boldsymbol{y = \cos x}$ στο διάστημα $[\boldsymbol{0, 3\pi}]$ είναι ......

Λύση

Γραφικά 

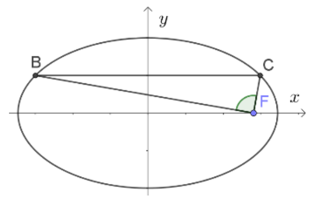
Διαφορετικά λύνουμε την εξίσωση: $\boldsymbol{\sin 2x = \cos x}$ στο $[\boldsymbol{0, 3\pi}]$

Έχω, $\boldsymbol{\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow\ 2\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x = 1}$ ή $\boldsymbol{\cos x = 0}$ στο $[\boldsymbol{0, 3\pi}]$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}}$ ή $\boldsymbol{\cos x = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ ή $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi}$ ή $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ στο $[\boldsymbol{0, 3\pi}]$

που δίνουν τις λύσεις: $\boldsymbol{x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}. \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$ Δηλαδή, ο αριθμός των σημείων τομής είναι: $\boxed{7}$

10. Στο παρακάτω σχήμα, $\boldsymbol{F}$ είναι η δεξιά εστία της έλλειψης $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $(\boldsymbol{a > 0, b > 0})$. Η ευθεία $\boldsymbol{y = \frac{b}{2}}$ τέμνει την έλλειψη στα σημεία $\boldsymbol{B, C}$ και $\boldsymbol{\angle BFC = 90^0}$. Τότε η εκκεντρότητα της έλλειψης ισούται ......



Λύση

Για τα σημεία τομής B,C της ευθείας και της έλλειψης:

Αφού $\mathbf{y = \frac{b}{2}}$ έχω $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4} = 1}$ άρα $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{4}}$ άρα $\mathbf{x = \pm\frac{\sqrt{3}a}{2}}$

και επομένως οι συντεταγμένες των σημείων είναι:

$\mathbf{B\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{b}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{b}{2}\right)}$ και $\mathbf{F(\gamma, 0) = \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0\right)}$.

Αφού $\mathbf{\angle BFC = 90^o}$ έχουμε $\mathbf{\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{FC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FC} = 0}$ οπότε

$$\mathbf{\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \frac{b}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow \frac{3a^2}{4} - (\alpha^2 - \beta^2) - \frac{b^2}{4} = 0}$$

Άρα $\mathbf{\alpha^2 = 3\beta^2}$ και $\mathbf{\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 2\beta^2}$

Τελικά $\mathbf{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\beta^2}{3\beta^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}}$.

11. Έστω $\boldsymbol{f(x)}$ περιοδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και περίοδο $\mathbf{2}$. Στο διάστημα $[\mathbf{-1, 1})$

$$\boldsymbol{\begin{cases} f(x) = x + a, & -1 \le x < 0 \\ f(x) = \left|\frac{2}{5} - x\right|, & 0 \le x < 1 \end{cases}}$$

Όπου $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Αν $\boldsymbol{f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right)}$, τότε $\boldsymbol{f(5a)}$ ισούται ......

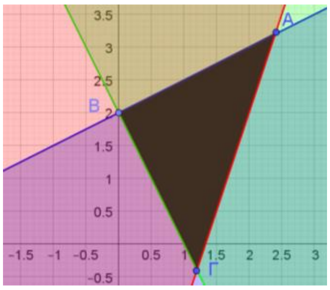
Λύση

Έχω $\boldsymbol{f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right) \overset{T=2}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{5}{2} + 2\right) = f\left(\frac{9}{2} - 2\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + a = \left|\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + a = \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{6}{10}}$ Άρα $\boldsymbol{f(5a) = f(3) = f(1+2) = f(1) = f(-1+2) = f(-1) = -1 + \frac{6}{10} = -\frac{4}{10} = \boxed{-0.4}}$

12. Οι πραγματικοί αριθμοί $\boldsymbol{x, y}$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\boldsymbol{\begin{cases} x - 2y + 4 \ge 0, \\ 2x + y - 2 \ge 0 \\ 3x - y - 4 \le 0 \end{cases}}$$

Τότε το εύρος τιμών της παράστασης x^2+y^2 είναι ......



Λύση

Έχω

$$\begin{cases} x-2y+4\geq 0, \\ 2x+y-2\geq 0 \\ 3x-y-4\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq \frac{x}{2}+2, \text{ημιεπίπεδο κάτω από } BA \\ y\geq -2x+2, \text{ημιεπίπεδο δεξιά από } B\Gamma \\ y\geq 3x-4, \text{ημιεπίπεδο αριστερά από } A\Gamma \end{cases}$$

Άρα τα σημεία που ικανοποιούν το σύστημα βρίσκονται στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Η παράσταση x^2+y^2 εκφράζει το τετράγωνο της απόστασης ενός σημείου (x,y) από την αρχή των αξόνων. Το πιο απομακρυσμένο σημείο είναι το A που είναι η τομή των AB και $A\Gamma$ άρα η λύση του συστήματος $\begin{Bmatrix} y=\frac{x}{2}+2 \\ y=3x-4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A(x,y)=A\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$

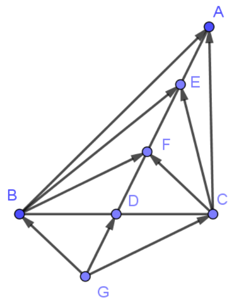
Άρα $max(x^2+y^2)=AO^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2=\left(\frac{20}{5}\right)^2=16$

Η ελάχιστη απόσταση του $O(0,0)$ από τα σημεία του τριγώνου είναι ίση με την ελάχιστη απόσταση από την πλευρά ΒΓ με εξίσωση $2x+y-2=0$. Άρα $min(x^2+y^2)=d^2(O,B\Gamma)=\left(\frac{|2*0+0-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2=\frac{4}{5}$

Άρα το εύρος τιμών της παράστασης x^2+y^2 είναι $\boxed{\left[\frac{4}{5},16\right]}$

13. Στο παρακάτω τρίγωνο ABC το σημείο D είναι το μέσο του τμήματος BC. Τα σημεία E,F χωρίζουν το AD σε τρία ίσα μέρη. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4, \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$. Τότε $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=$.....

Λύση



Από την $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$ έχουμε $(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA})\cdot(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA})=4$ άρα $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})+\overrightarrow{FA}^2=4$.

Αλλά $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{FA}$ (αφού το F βαρύκεντρο του ABC και το GBFC παραλληλόγραμμό, βλέπε σχήμα).

Άρα $-1+\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FA}^2=4$ και τελικά $\overrightarrow{FA}^2=2,5$ οπότε $\overrightarrow{FE}^2=\frac{\overrightarrow{FA}^2}{4}=0,625$ (αφού Ε μέσο του FA).

Άρα $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE})\cdot(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE})=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FE}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})+\overrightarrow{FE}^2=-1+\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FA}+0,625=-1+1,25+0,625=0,875=\boxed{\frac{7}{8}}$.

14. Αν σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC ισχύει $\sin A=2\sin B\sin C$, τότε η ~~μέγιστη~~ ελάχιστη τιμή της παράστασης $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ είναι .....

Λύση

Έχω $\sin A=\sin(\pi-B-C)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

Ακόμα $\tan A=\tan(\pi-B-C)=-\tan(B+C)$

Άρα $\sin A=2\sin B\sin C\Leftrightarrow \sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C \xRightarrow{:\cos B\cos C} \tan B+\tan C=2\tan B\tan C\Leftrightarrow$ $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$

Άρα $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=-\tan(B+C)\cdot\tan B\cdot\tan C=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}\tan B\cdot\tan C=-\frac{2\tan B\tan C}{1-\tan B\cdot\tan C}\tan B\cdot\tan C=-\frac{2(\tan B\tan C)^2}{1-\tan B\cdot\tan C}$ Θέτω $\tan B\cdot\tan C=x$ και έχω

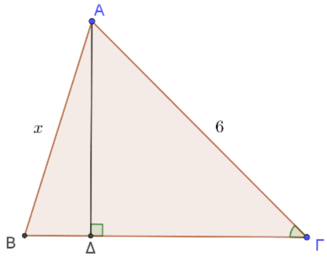
$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=-\frac{2x^2}{1-x}=\frac{2x^2}{x-1}$. Αφού το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο έχω: $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 0\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow x>1$.

Έχω $\frac{2x^2}{x-1}=\frac{2x^2-2+2}{x-1}=\frac{2x^2-2}{x-1}+\frac{2}{x-1}=2x+2+\frac{2}{x-1}=2\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)=2\left(2+x-1+\frac{1}{x-1}\right)=4+2\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)\geq 4+2\cdot 2=8$ με την ισότητα για $x-1=1\Leftrightarrow x=2$ (θυμίζω $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$ όταν $\alpha>0$ με την ισότητα για $\alpha=1$)

Άρα $\min(tanA \cdot tanB \cdot tanC) = \boxed{8}$

[Ενότητα 2]. Λύστε τα παρακάτω ερωτήματα (6 ερωτήσεις, σύνολο 90 μόρια).

15. [14 μόρια] Στο τρίγωνο ABC είναι $AC = 6$, $\cos B = \frac{4}{5}, C = \frac{\pi}{4}$.



(1) Πόσο ισούται το μήκος του τμήματος AB;

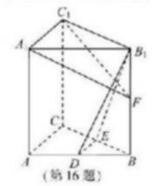
(2) Ποια η τιμή του $\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$;

Λύση

(1) Έχω $\cos B = \frac{4}{5}$ Άρα $sinB = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC\,sinC}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{6\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \boxed{5\sqrt{2}}$

(2) Έχω $\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(A)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(A)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - B - C)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi - B - C)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos(B + C)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(B + C)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(cos(B)cos(C) - sin(B)sin(C)\right) + \frac{1}{2}\left(sin(B)cos(C) + cos(B)sin(C)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{-\sqrt{3}}{10} + \frac{7}{10}\right] = \boxed{\frac{7\sqrt{2} - \sqrt{6}}{20}}$

16. [14 μόρια] Στο ορθό τριγωνικό πρίσμα $ABCA_1B_1C_1$ παρακάτω D, E είναι τα μέσα των ακμών AB, BC αντίστοιχα. Το σημείο F βρίσκεται στο $BB_1, B_1D \perp A_1F, A_1C_1 \perp A_1B_1$. Να αποδείξετε ότι:



(1) DE παράλληλη στο επίπεδο A_1C_1F. (2) Το επίπεδο B_1DE είναι κάθετο στο επίπεδο A_1C_1F.

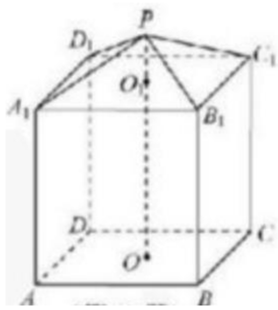
(1) Αφού D, E είναι τα μέσα των ακμών AB, BC αντίστοιχα έχω $DE//AC//A_1C_1 \in A_1C_1F$ ***επίπεδο***

(2) Έχω $A_1C_1 \perp A_1B_1$(στο A_1). Και $A_1C_1 \perp A_1A$ (στο A_1). Άρα $A_1C_1 \perp$ ***επίπεδο*** $AA_1B_1B = \pi$

Ακόμα $B_1D \in \pi$ άρα $A_1C_1 \perp B_1D$ και $B_1D \perp A_1F$. άρα $B_1D \perp A_1C_1F$ ***επίπεδο*** $= \pi'$

Αφού $B_1D \in$ ***επίπεδο***(B_1DE) έχω ***επίπεδο***$(B_1DE) \perp \pi'$

17. [14 μόρια] Θέλουμε να σχεδιάσουμε μια αποθήκη που αποτελείται από δυο μέρη. Το άνω μέρος είναι μια τετραγωνική πυραμίδα $PA_1B_1C_1D_1$ και το κάτω μέρος ένα τετραγωνικό ορθό πρίσμα $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (όπως στο σχήμα παρακάτω). Το ύψος OO_1 της ορθής τετραγωνικής πυραμίδας πρέπει να είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερο από το ύψος PO_1 της τετραγωνικής πυραμίδας.



(1) Αν $AB = 6m, PO_1 = 2m$ πόσο είναι ο όγκος της αποθήκης;

(2) Αν η παράπλευρη ακμή της τετραγωνικής πυραμίδας είναι 6m, ποιο είναι το μήκος του PO_1 που μεγιστοποιεί τον όγκο της αποθήκης;

Λύση

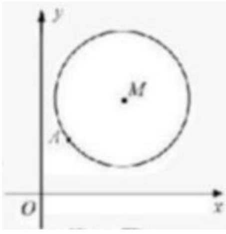
(1) Έχω $OO_1 = 4 * 2 = 8m$. $V = V_{πυραμίδας} + V_{παρ/δου} = \frac{1}{3}(A_1B_1C_1D_1)PO_1 + (ABCD)OO_1 = \frac{1}{3}6^2 2 + 6^2 2 = 312m^3$

(2) Έστω $PO_1 = x$, από Π.Θ στο A_1PO_1 έχω : $PA_1{}^2 = PO_1{}^2 + A_1O_1{}^2 \Rightarrow 6^2 = x^2 + \left(A_1B_1\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow 36 = x^2 + \frac{(A_1B_1)^2}{2} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = 2(36 - x^2)$.

$$V(x) = V_{πυραμίδας} + V_{παρ/δου} = \frac{1}{3}(A_1B_1)^2 x + (A_1B_1)^2 4x = 2(36 - x^2)\left(\frac{x}{3} + 4x\right) = \frac{26}{3}(36x - x^3)$$

$V'(x) = \frac{26}{3}(36 - 3x^2)$ ($= 0$ ***αν*** $x = 2\sqrt{3}$) Άρα μέγιστο για $PO_1 = x = \boxed{2\sqrt{3}}$

18. [16 μόρια] Στο καρτεσιανό επίπεδο $\boldsymbol{xOy}$ ο κύκλος $\boldsymbol{M}$ με κέντρο $\boldsymbol{M}$ περιγράφεται από την εξίσωση $\boldsymbol{x^2+y^2-12x-14y+60=0}$ και $\boldsymbol{A(2,4)}$ σημείο του $\boldsymbol{M}$.



(1) Έστω ο κύκλος $\boldsymbol{N}$ εφάπτεται του άξονα $\boldsymbol{x}$ και εξωτερικά του κύκλου $\boldsymbol{M}$. Το κέντρο του $\boldsymbol{N}$ βρίσκεται στην ευθεία $\boldsymbol{x=6}$. Ποια η εξίσωση του κύκλου $\boldsymbol{N}$;

(2) Έστω $\boldsymbol{l}$ ευθεία παράλληλη στο $\boldsymbol{OA}$ και τέμνει τον $\boldsymbol{M}$ στα σημεία $\boldsymbol{B,C}$. Εξάλλου $\boldsymbol{AO=BC}$. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας $\boldsymbol{l}$;

(3) Έστω το σημείο $\boldsymbol{T(t,0)}$ ικανοποιεί τις εξής συνθήκες: υπάρχουν σημεία $\boldsymbol{P,Q}$ στον $\boldsymbol{M}$, ώστε $\boldsymbol{\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}}$. Ποιο είναι το σύνολο τιμών των τιμών του $\boldsymbol{t}$;

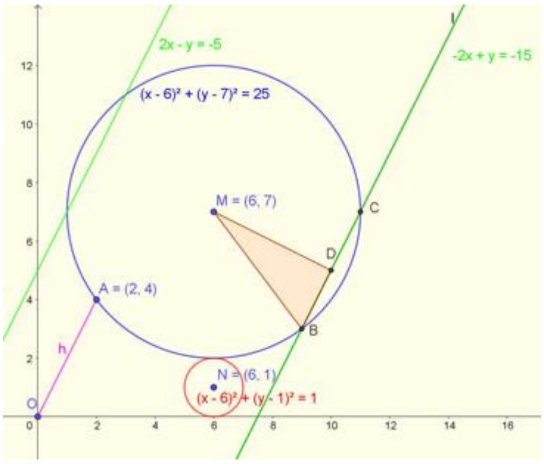
Λύση

A) Από την εξίσωση $\mathbf{x^2+y^2-12x-14y+60=0}$ έχω με συμπλήρωση τετραγώνου την εξίσωση $\mathbf{(x-6)^2-36+(y-7)^2-49+60=0}$, άρα $\boxed{\mathbf{(x-6)^2+(y-7)^2=5^2}}$

Άρα κύκλος με κέντρο το M(6, 7) και ακτίνα 5.

Το σημείο $\boldsymbol{N}$ έχει λοιπόν την ίδια τετμημένη με το $\boldsymbol{M}$. για να εφάπτονται εξωτερικά οι δύο κύκλοι πρέπει η διάκεντρος να είναι ίση με το άθροισμα των ακτινών τους, επομένως

$\mathbf{d(M,N)=r_M+r_N}$ άρα $\mathbf{|y_M-y_N|=5+r_N}$ άρα $\mathbf{7-y_N=5+r_N}$



Ο κύκλος $\boldsymbol{N}$ εφάπτεται στον άξονα x άρα $\mathbf{y_N=r_N}$ και τελικά $\mathbf{y_N=r_N=1}$

Άρα ο κύκλος $\boldsymbol{N}$ έχει εξίσωση $\mathbf{(x-6)^2+(y-1)^2=1^2}$

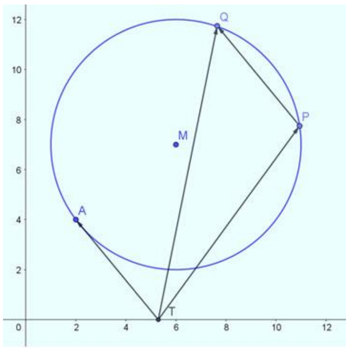
B) έχουμε $\mathbf{BC//OA}$ άρα $\mathbf{\lambda_{BC}=\lambda_{OA}=\frac{4}{2}=2}$ άρα $\mathbf{l:y=2x+k \implies l:2x-y+k=0}$

Φέρουμε το απόστημα MD στη χορδή BC. Οπότε από Πυθαγόρειο θεώρημα στο MBD έχουμε:

$\mathbf{MD^2=AB^2-BD^2=25-\left(\frac{OA}{2}\right)^2=25-\frac{2^2+4^2}{4}=25-5=20 \implies MD=2\sqrt{5}}$

Το MD είναι η απόσταση του M(6, 7) από την ευθεία $\mathbf{l:2x-y+k=0}$

Άρα $\mathbf{MD=\frac{|2\cdot 6-7+\kappa|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}}$ άρα $\mathbf{2\sqrt{5}=\frac{|5+\kappa|}{\sqrt{5}}}$ και τελικά $\mathbf{\kappa=5}$ ή $\mathbf{\kappa=-15}$



Άρα η ευθεία είναι η $\boxed{\mathbf{l:2x-y+5=0}}$ ή $\boxed{\mathbf{l:2x-y-15=0}}$

Γ) έχουμε $\mathbf{\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}}$ άρα $\mathbf{\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TQ}-\overrightarrow{TP}}$ άρα $\mathbf{\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}}$ με $\mathbf{|\overrightarrow{PQ}|\le 2r_M=10}$

Άρα $\mathbf{|\overrightarrow{TA}|\le 10}$ οπότε $\mathbf{|\overrightarrow{TA}|^2\le 100}$ άρα $\mathbf{(t-2)^2+(0-4)^2\le 100}$ άρα $\mathbf{|t-2|\le\sqrt{84}}$

Και τελικά $\boxed{\mathbf{2-2\sqrt{21}\le t\le 2+2\sqrt{21}}}$

19. [16 μόρια] Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)}$.

(1) Έστω $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$. (a) Λύστε την εξίσωση $\boldsymbol{f(x)=2}$. (b) Για κάθε $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ ισχύει $\boldsymbol{f(2x)\ge mf(x)-6}$. Ποια η μέγιστη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{m}$;

(2) Αν $\boldsymbol{0<a<1}$, $\boldsymbol{b>1}$ και η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x)=f(x)-2}$ μηδενίζεται σε ένα μόνο σημείο, ποια η τιμή του γινομένου $\boldsymbol{ab}$;

Λύση

(1) (α) Έχω $\boldsymbol{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=2 \Leftrightarrow 2^x+\frac{1}{2^x}=2 \Leftrightarrow (2^x)^2+1-2*2^x=0 \Leftrightarrow (2^x-1)^2=0 \Leftrightarrow 2^x-1 \Leftrightarrow}$ $\boxed{\boldsymbol{x=0}}$

(β) Έχω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f(2x) \geq mf(x) - 6 \Leftrightarrow 4^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq m\left(2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) - 6 \Leftrightarrow \left(2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^2 - 2 \geq m\left(2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) - 6$ Θέτω $\lambda = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ οπότε έχω $\lambda^2 - 2 \geq m\lambda - 6 \Leftrightarrow \lambda^2 - m\lambda + 4 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Αυτό ισχύει αν $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4$ Άρα η μέγιστη δυνατή τιμή του $\boxed{m = 4}$.

(2) Έχω $g(0) = f(0) - 2 = 0$. $g'(x) = f'(x) = a^x lna + b^x lnb$ με $lna < 0, lnb > 0$. $g'(0) = lna + lnb = \ln ab$. έχω $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x + b^x - 2 = +\infty$ αφού $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} b^x - 2 = 0 - 2 = -2$. Όμοια $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

Έχω $g''(x) = a^x ln^2 a + b^x ln^2 b > 0$ Άρα g κυρτή και έστω ότι παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) σε σημείο $x_0 \neq 0$. Τότε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow a^{x_0} lna + b^{x_0} lnb = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{x_0} = -\frac{lnb}{lna} \Leftrightarrow x_0 = \ln\left(-\frac{lnb}{lna}\right) / ln\left(\frac{\alpha}{b}\right)$.

Έστω $g(x_0) \neq 0$ τότε

αν $g(x_0) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άτοπο αφού $g(0) = 0$

αν $g(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\ \xi_1 \in (-\infty, x_0)\ \tau.\omega.\ g(\xi_1) = 0, \exists\ \xi_2 \in (x_0, +\infty)\ \tau.\omega.\ g(\xi_2) = 0$ άτοπο αφού η συνάρτηση $g(x)$ μηδενίζεται σε ένα μόνο σημείο.

Άρα $g(x_0) = 0 = g(0) \Leftrightarrow x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(-\frac{lnb}{lna}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{lnb}{lna} = 1 \Leftrightarrow lnb = -lna \Leftrightarrow b = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \boxed{ab = 1}$

20. [16 μόρια] Έστω $U = \{1, 2, \ldots, 100\}$ και $\{a_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ μια ακολουθία. Έστω T ένα υποσύνολο του U. Ορίζουμε $S_T = 0$ αν $T = \varnothing$ και $S_T = a_{t_1} + a_{t_2} + \cdots + a_{t_k}$ αν $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$. Για παράδειγμα, αν $T = \{1, 3, 66\}$, τότε $S_T = a_1 + a_3 + a_{66}$. Τώρα υποθέστε ότι η ακολουθία $\{a_n\}(n \in \mathbb{N}^+)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο 3. Εξάλλου $S_T = 30$ για $T = \{2, 4\}$.

(1) Ποιος είναι ο τύπος της ακολουθίας $\{a_n\}$;

(2) Αποδείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $1 \leq k \leq 100$, αν $T \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, τότε $S_T < a_{k+1}$.

(3) Έστω $C \subset U, D \subset U, S_C \geq S_D$. Να αποδείξετε ότι $S_C + S_{C\cap D} \geq 2S_D$.

Λύση

(1) Έχω $30 = a_2 + a_4 = 3a_1 + 3^3 a_1 = 30a_1$ Άρα $a_1 = 1$. Άρα $a_n = 3^{n-1} a_1 \Leftrightarrow \boxed{a_n = 3^{n-1}}$

(2) Έχω $S_T \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 \frac{3^k - 1}{3 - 1} = \frac{3^k - 1}{2} < \frac{3^k}{2} < 3^k = a_{k+1}$

(3) Έστω $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_\lambda\}$, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_\mu\}$, σε αύξουσα σειρά.

Αν $C \subset D$ τότε $C \cap D = C$ και $S_C + S_{C\cap D} = S_C + S_C = 2S_C \geq 2S_D$ αφού $S_C \geq S_D$

Αν $D \subset C$ τότε $C \cap D = D$ και $S_C + S_{C\cap D} = S_C + S_D \geq S_D + S_D = 2S_D$

Έστω $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\} = C \backslash D$, $\quad F = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\} = D \backslash C$

Αφού $S_C \geq S_D \Rightarrow S_E + S_{C\cap D} \geq S_F + S_{C\cap D} \Rightarrow S_E \geq S_F \Rightarrow S_F \leq S_E$

Έστω k ο μεγαλύτερος δείκτης του E, l ο μεγαλύτερος δείκτης του F, έχω $k \geq 1, l \geq 1, k \neq l$ (μη κοινό)

Από ερώτημα (2) έχω $S_E \leq a_{k+1}$άρα $3^{l-1} = a_l \leq S_F \leq S_E < a_{k+1} = 3^k$ άρα $l - 1 < k \Rightarrow l \leq k \overset{k\neq l}{\Longrightarrow} l < k \Rightarrow l \leq k - 1$

Άρα $S_F \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_l = a_1 \frac{3^l - 1}{3 - 1} = \frac{3^l - 1}{2} \leq \frac{3^{k-1} - 1}{2} = \frac{a_k - 1}{2} < \frac{S_E - 1}{2}$.

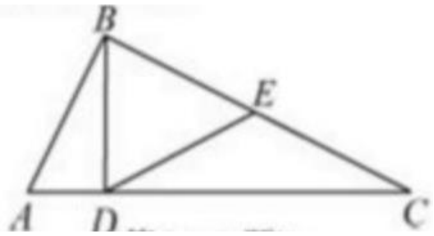
Άρα $2S_F < S_E - 1 \Rightarrow 2S_F + 2S_{C\cap D} < S_E + 2S_{C\cap D} - 1 \Rightarrow 2S_D < S_C + S_{C\cap D} - 1 \Rightarrow S_C + S_{C\cap D} > 2S_D + 1 \Rightarrow S_C + S_{C\cap D} \geq 2S_D$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχω $S_C + S_{C\cap D} \geq 2S_D$.

[Ενότητα 3]. Επιπλέον προβλήματα για τους μαθητές των θετικών επιστημών (σύνολο 40 μόρια).

21. Διαλέξτε δύο από τα τέσσερα ερωτήματα.

(A) (Άσκηση πάνω σε γεωμετρικές αποδείξεις, 10 μόρια)
Στο τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ είναι $\angle \boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{90^0}, \boldsymbol{BD} \perp \boldsymbol{AC}$. $\boldsymbol{E}$ είναι το μέσο της $\boldsymbol{BC}$. Να αποδείξετε ότι $\angle \boldsymbol{EDC} = \angle \boldsymbol{ABD}$.



Λύση
Έχω $\boldsymbol{DE}$ διάμεσος του ορθογωνίου $\boldsymbol{BDC}$ άρα $\boldsymbol{DE} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{EC} \Rightarrow \angle \boldsymbol{EDC} = \angle \boldsymbol{ECD} = \widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{90} - \angle \boldsymbol{BAD} = \angle \boldsymbol{ABD}$

(B) (Άσκηση πάνω στους πίνακες και μετασχηματισμούς, 10 μόρια)
Δίνεται ο πίνακας $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ και ο αντίστροφος πίνακας του $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$. Πόσο ισούται το γινόμενο $\boldsymbol{AB}$;
Λύση
Έστω $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{AB\,B^{-1}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \boldsymbol{B^{-1}} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + 0 & \alpha - \frac{\beta}{2} \\ \gamma + 0 & -\frac{\gamma}{2} + 2\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = 0, \delta = -1, \alpha = 1,\ 2 = 1 - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = \frac{5}{4}, \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}}$

(C) (Σύστηματα συντεταγμένων και παραμετρικές εξισώσεις, 10 μόρια)
Στο καρτεσιανό σύστημα $\boldsymbol{xOy}$ δίνεται η παραμετρική εξίσωση της ευθείας $\boldsymbol{l} : \boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}$, όπου $\boldsymbol{t}$ παράμετρος. Η παραμετρική εξίσωση της έλλειψης $\boldsymbol{C}$ είναι $\boldsymbol{x} = \mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y} = \mathbf{2sin}\boldsymbol{\theta}$, όπου $\boldsymbol{\theta}$ παράμετρος. Έστω ότι η ευθεία $\boldsymbol{l}$ τέμνει την έλλειψη $\boldsymbol{C}$ σε δυο σημεία $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Πόσο είναι το μήκος του τμήματος $\boldsymbol{AB}$;
Λύση
Με απαλοιφή του $\boldsymbol{t}$ έχω εύκολα για την ευθεία $\mathbf{l}: \mathbf{x} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{y}$
Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\mathbf{cos^2\theta} + \mathbf{sin^2\theta} = \mathbf{1}$ έχουμε για την έλλειψη $\mathbf{C}:\ \mathbf{x^2} + \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$
Για τα κοινά σημεία των δυο γραμμών έχω $\left(\mathbf{1} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{y}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$ οπότε
$\mathbf{1} + \mathbf{2}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{y} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1}$ οπότε $\mathbf{2}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{y} + \frac{\mathbf{7y^2}}{\mathbf{12}} = \mathbf{0}$ και τελικά $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{2}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{7y}}{\mathbf{12}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{y} = -\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{3}}}$
Άρα $|\mathbf{\Delta y}| = |\mathbf{y_A} - \mathbf{y_B}| = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{3}}}$. Έχουμε ακόμα $|\mathbf{\Delta x}| = |\mathbf{x_A} - \mathbf{x_B}| = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}|\mathbf{y_A} - \mathbf{y_B}| = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}$
Άρα $|\mathbf{AB}| = \sqrt{|\mathbf{\Delta x}|^{\mathbf{2}} + |\mathbf{\Delta y}|^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{49}} + \frac{\mathbf{576}}{\mathbf{49\cdot 3}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{49}}}\sqrt{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}} \cdot \mathbf{2} = \boxed{\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{7}}}$

(D) (ασκήσεις στις ανισότητες, 10 μόρια)
Έστω $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, $|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| < \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{3}}, |\boldsymbol{y} - \mathbf{2}| < \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{3}}$. Αποδείξτε ότι $|\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{4}| < \boldsymbol{a}$.

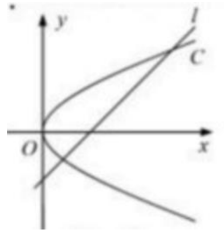
Λύση

Έχω $-\frac{\alpha}{3} < x - 1 < \frac{\alpha}{3} \Rightarrow -\frac{2\alpha}{3} < 2x - 2 < \frac{2\alpha}{3}$ και $-\frac{\alpha}{3} < y - 2 < \frac{\alpha}{3}$

άρα $-\alpha < 2x + y - 4 < \alpha \Rightarrow |2x + y - 4| < \alpha$.

Αλλιώς $|2x + y - 4| = |2x - 2 + y - 2| \leq |2x - 2| + |y - 2| = 2|x - 1| + |y - 2| \leq \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \alpha$

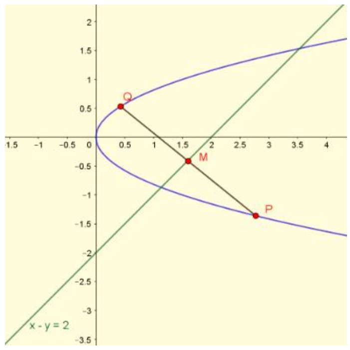
22. [10 μόρια] Στο καρτεσιανό σύστημα xOy δίνονται η ευθεία l με εξίσωση $x - y - 2 = 0$ και η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 2px (p > 0)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(1) Αν η ευθεία l διέρχεται από την εστία της παραβολής C, ποια η εξίσωσή της;

(2) Υπάρχουν δυο σημεία P, Q της C έτσι, ώστε τα P, Q να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία l. (a) Να αποδείξετε ότι το μέσο του τμήματος PQ είναι $(2 - p, -p)$. (b) Ποιο είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου p;

Λύση



(1) Η εστία $\mathbf{E(p, 0)}$ ανήκει στην ευθεία l με εξίσωση $\mathbf{x - y - 2 = 0}$ άρα $\mathbf{p - 0 - 2 = 0}$ ή $\boxed{\mathbf{p = 2}}$

(2)

(a) Έστω $\mathbf{P(x_p, y_p)}$, $\mathbf{Q(x_q, y_q)}$ οπότε το μέσο του PQ είναι το σημείο $\mathbf{M\left(\frac{x_p + x_q}{2}, \frac{y_p + y_q}{2}\right)}$

Αφού η l είναι άξονας συμμετρίας του PQ έχουμε $\mathbf{PQ \perp l}$ άρα $\mathbf{\lambda_{PQ} \cdot \lambda_l = -1}$

άρα $\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \cdot 1 = -1$ οπότε $\frac{y_p - y_q}{\frac{y_p^2}{2p} - \frac{y_q^2}{2p}} = -1$ άρα $\frac{2p}{y_p + y_q} = -1$ άρα $\frac{y_p + y_q}{2} = -p$ και

τελικά $\mathbf{y_M = -p}$.

Αφού το M είναι σημείο της l με εξίσωση $\mathbf{x - y - 2 = 0}$ έχουμε ότι $\mathbf{x_M - y_M - 2 = 0}$ άρα $\mathbf{x_M = 2 - p}$

Τελικά το σημείο M είναι το $\mathbf{M(2 - p, -p)}$

(b)

Προφανώς θα πρέπει το σημείο M να βρίσκεται δεξιά του άξονα $y'y$ και ανάμεσα στους δυο κλάδους της παραβολής.

Οπότε πρέπει $\mathbf{x_M > 0}$ **και** $\mathbf{y_M \in \left[-\sqrt{2px_M}, \sqrt{2px_M}\right]}$ άρα $\mathbf{2 - p > 0}$ **και** $\mathbf{-\sqrt{2px_M} \leq -p \leq \sqrt{2px_M}}$ άρα $\mathbf{0 < p < 2}$ **και** $\mathbf{p \leq \sqrt{2p \cdot (2 - p)}}$ ή $\mathbf{0 < p < 2}$ **και** $\mathbf{p^2 \leq 2p \cdot (2 - p)}$ ή $\mathbf{0 < p < 2}$ **και** $\mathbf{p^2 \leq 4p - 2p^2}$ ή $\mathbf{0 < p < 2}$ **και** $\mathbf{3p^2 \leq 4p}$ ή $\mathbf{0 < p < 2}$ **και** $\mathbf{3p \leq 4}$.

Άρα $\boxed{\mathbf{0 < p \leq \frac{4}{3}}}$

23. [10 μόρια] (1) Ποια η τιμή της έκφρασης $7C_6^3 - 4C_7^4$;

(2) Έστω $m, n \in \mathbb{N}^+, n \geq m$. Να αποδείξετε, ότι

$(m + 1)C_m^m + (m + 2)C_{m+1}^m + (m + 3)C_{m+2}^m + \cdots + nC_{n-1}^m + (n + 1)C_n^m = (m + 1)C_{n+2}^{m+2}$.

Λύση

(1) $7C_6^3 - 4C_7^4 = 7\binom{6}{3} - 4\binom{7}{4} = 7\frac{6!}{3!3!} - 4\frac{7!}{4!3!} = \frac{7!}{3!3!} - \frac{7!}{3!3!} = \boxed{0}$

(2) Για $n = m$ ισχύει αφού έχω ότι $(m + 1)C_m^m = m + 1 = (m + 1)C_{n+2}^{m+2}$

Έστω ότι ισχύει για τυχαίο $n = k > m$,

οπότε $(m + 1)C_m^m + (m + 2)C_{m+1}^m + (m + 3)C_{m+2}^m + \cdots + kC_{k-1}^m + (k + 1)C_k^m = (m + 1)C_{k+2}^{m+2}$.(*)

Θα δείξω ότι ισχύει και για $n = k + 1$

δηλαδή

$(m + 1)C_m^m + (m + 2)C_{m+1}^m + (m + 3)C_{m+2}^m + \cdots + kC_{k-1}^m + (k + 1)C_k^m + (k + 2)C_{k+1}^m = (m + 1)C_{k+3}^{m+2} \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$$(m+1)C_{k+2}^{m+2} + (k+2)C_{k+1}^{m} = (m+1)C_{k+3}^{m+2} \Leftrightarrow$$
$$(m+1)C_{k+2}^{m+2} - (m+1)C_{k+3}^{m+2} + (k+2)C_{k+1}^{m} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(m+1)\left(C_{k+2}^{m+2} - C_{k+3}^{m+2}\right) + (k+2)C_{k+1}^{m} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(m+1)\left(\frac{(k+2)!}{(m+2)!\,(k-m)!} - \frac{(k+3)!}{(m+2)!\,(k-m+1)!}\right) + (k+2)\frac{(k+1)!}{m!\,(k-m+1)!} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(m+1)(k+2)!}{(m+2)!\,(k-m)!}\left(1 - \frac{k+3}{k-m+1}\right) + \frac{(k+2)!}{m!\,(k-m+1)!} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(m+1)(k+2)!}{(m+2)!\,(k-m)!}\left(\frac{k-m+1-k-3}{k-m+1}\right) + \frac{(k+2)!}{m!\,(k-m+1)!} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(m+1)(k+2)!}{(m+2)!\,(k-m)!}\left(\frac{-(m+2)}{k-m+1}\right) + \frac{(k+2)!}{m!\,(k-m+1)!} = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{(k+2)!}{m!(k-m+1)!}(-1) + \frac{(k+2)!}{m!(k-m+1)!} = 0$ που ισχύει.

[Ακολουθούν οι πραγματικές ερωτήσεις μαθηματικών από τον Τόμο Ι του νέου εθνικού προτύπου προγράμματος σπουδών για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις Κολλεγίου 2023. Vol 1]

Νέο Πρότυπο Προγράμματος Σπουδών Τόμος Ι

Πεδίο εφαρμογής: Hubei, Shandong, Guangdong, Jiangsu, Hebei, Hunan, Fujian, Zhejiang

Μέρος 1. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής: Υπάρχουν 8 ερωτήσεις, κάθε ερώτηση είναι 5 βαθμοί, συνολικά 40 βαθμοί.

1. Αν $\boldsymbol{M=\{-2,-1,0,1,2\}, N=\{x \mid x^2-x-6 \geqslant 0\}}$, τότε $\boldsymbol{M \cap N=}$

A. $\{\boldsymbol{-2,-1,0,1}\}$ B. $\{\boldsymbol{0,1,2}\}$ C. $\{\boldsymbol{-2}\}$ D. $\{\boldsymbol{2}\}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{x^2-x-6 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [3,+\infty) = N}$, Άρα $\boldsymbol{M \cap N = \{-2\}}$ Άρα C

2. Αν $\boldsymbol{z=\frac{1-i}{2+2i}}$, τότε $\boldsymbol{z-\bar{z}=}$ A. $\boldsymbol{-i}$ B. $\boldsymbol{i}$ C. $\boldsymbol{0}$ D. $\boldsymbol{1}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{z=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{1-i}{2i(-i+1)}=\frac{1}{2i}=\frac{-i}{2} \Rightarrow \bar{z}=\frac{i}{2} \Rightarrow z-\bar{z}=\frac{-i}{2}-\frac{i}{2}=-I}$ Άρα A

3. Αν $\boldsymbol{\vec{a}=(1,1), \vec{b}=(1,-1)}$ και $\boldsymbol{(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp (\vec{a}+\mu\vec{b})}$ τότε

A. $\boldsymbol{\lambda+\mu=1}$ B. $\boldsymbol{\lambda+\mu=-1}$ C. $\boldsymbol{\lambda\mu=1}$ D. $\boldsymbol{\lambda\mu=-1}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp (\vec{a}+\mu\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a}+\lambda\vec{b})(\vec{a}+\mu\vec{b})=0 \Rightarrow \vec{a}^2+(\lambda+\mu)\vec{a}\vec{b}+\lambda\mu\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow 2+(\lambda+\mu)0+2\lambda\mu=0 \Rightarrow \lambda\mu=-1}$ Άρα D

4. Δεδομένου ότι η $\boldsymbol{f(x)=2^{x(x-a)}}$ είναι φθίνουσα στο $\boldsymbol{(0,1)}$ το σύνολο τιμών του α είναι:

A. $\boldsymbol{(-\infty,-2]}$ B. $\boldsymbol{[-2,0)}$ C. $\boldsymbol{(0,2]}$ D. $\boldsymbol{[2,+\infty)}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{f'(x)=2^{x(x-a)}ln2\,(2x-\alpha) \leq 0, x \in (0,1) \Rightarrow 2x-\alpha \leq 0, x \in (0,1) \Rightarrow x \leq \frac{\alpha}{2}, max\,(x)<1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \geq 1 \Rightarrow \alpha \geq 2}$ Άρα D

5. Έστω οι ελλείψεις $\boldsymbol{C_1: \frac{x^2}{a^2}+y^2=1 (a>1)}$, $\boldsymbol{C_2: \frac{x^2}{4}+y^2=1}$ με εκκεντρότητες $\boldsymbol{e_1, e_2}$ αντίστοιχα, $\boldsymbol{e_2=\sqrt{3}e_1}$, τότε $\boldsymbol{a=}$

A. $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ B. $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ C. $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ D. $\boldsymbol{\sqrt{6}}$

Λύση

Έχω γενικά $\boldsymbol{e=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}, \beta>\alpha}$. Άρα $\boldsymbol{e_1=\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}, \alpha>1, e_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{e_2=\sqrt{3}e_1} \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4}=\alpha^2-1 \Rightarrow 3\alpha^2=4 \Rightarrow \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ άρα A

6. Η γωνία (α) των εφαπτομένων του κύκλου $\boldsymbol{x^2+y^2-4x-1=0}$ που περνούν από το σημείο $\boldsymbol{A(0,-2)}$ είναι τέτοια ώστε $\boldsymbol{sin\,\alpha=}$

A. $\boldsymbol{1}$ B. $\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$ C. $\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{4}}$ D. $\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{x^2+y^2-4x-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=5}$. Άρα κύκλος με κέντρο $\boldsymbol{K(2,0)}$ και ακτίνα $\boldsymbol{R=\sqrt{5}}$. Αν $\boldsymbol{AM, AN}$ τα εφαπτόμενα τμήματα τότε $\boldsymbol{AM=AN=\sqrt{AK^2-R^2}=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}}$, οπότε $\boldsymbol{sin\,\alpha=2sin\,\frac{\alpha}{2}cos\,\frac{\alpha}{2}=2\frac{KN}{AK}\frac{AN}{AK}=2\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}}$ Άρα B

7. Έστω $\boldsymbol{S_n}$το άθροισμα των $\boldsymbol{n}$ πρώτων όρων της ακολουθίας $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$. Αν έχουμε τις προτάσεις:

A: η ακολουθία $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ είναι αριθμητική πρόοδος και

B: η ακολουθία $\boldsymbol{\left\{\frac{S_n}{n}\right\}}$ είναι αριθμητική πρόοδος

Τότε

A. Το A είναι επαρκής αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για το B

B. Το A είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για το B

C. Το A είναι επαρκής προϋπόθεση για το B

D. Το A δεν είναι ούτε επαρκής ούτε αναγκαία συνθήκη για το B

Λύση

Έστω $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ είναι αριθμητική πρόοδος με πρόοδο $\boldsymbol{\omega}$. Έχω $\boldsymbol{S_n} = \frac{n[2\alpha_1+(n-1)\omega]}{2} \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} = \boldsymbol{\alpha_1} + \frac{(n-1)\omega}{2}$. Έστω $\boldsymbol{\beta_n} = \frac{S_n}{n}$. Έχω $\boldsymbol{\beta_n} - \boldsymbol{\beta_{n-1}} = \boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_1} + \frac{(n-1)\omega}{2} - (\boldsymbol{\alpha_1} + \frac{(n-2)\omega}{2}) = \boldsymbol{\Omega} \Leftrightarrow \frac{\omega}{2} = \boldsymbol{\Omega}$. Άρα αν η $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\boldsymbol{\omega}$, τότε ισοδύναμα η $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\omega}{2}$. Άρα C

8. Αν $\boldsymbol{sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{3}, \boldsymbol{cos\,\alpha\, sin\,\beta} = \frac{1}{6}$, τότε $\boldsymbol{cos(2\alpha+2\beta)} =$

A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{sin(\alpha-\beta)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{sin\alpha\, cos\beta - sin\beta\, cos\,\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{sin\alpha\, cos\beta} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{sin\alpha\, cos\beta} = \frac{1}{2}$

Άρα $\boldsymbol{cos(2\alpha+2\beta) = 1 - 2\,sin^2(\alpha+\beta) = 1 - 2(sin\alpha\, cos\beta + sin\beta\, cos\,\alpha)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})^2 = 1 - 2(\frac{2}{3})^2} = \frac{1}{9}$ Άρα B

<u>Στις επόμενες ερωτήσεις μπορεί να έχουμε παραπάνω από μία σωστές επιλογές.</u>

9. Έστω τα δείγματα $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$, με $\boldsymbol{x_1}$ την ελάχιστη και $\boldsymbol{x_6}$ την μέγιστη τιμή αντίστοιχα. Τότε

A. ο μέσος όρος των $\boldsymbol{x_2, x_3, \cdots, x_5}$, είναι ίσος με τον μέσο όρο των $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$

B. η διάμεσος των $\boldsymbol{x_2, x_3, \cdots, x_5}$, είναι ίση με τη διάμεσο των $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$

C. η τυπική απόκλιση των $\boldsymbol{x_2, x_3, \cdots, x_5}$, δεν είναι μικρότερη από την τυπική απόκλιση των $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$

D. το εύρος τιμών των $\boldsymbol{x_2, x_3, \cdots, x_5}$, δεν είναι μεγαλύτερο από το εύρος τιμών των $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$

Λύση

Έχω $\frac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4} - \frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} = \frac{x_2+x_3+x_4+x_5-2x_1-2x_6}{12} \neq \boldsymbol{0}$ Άρα όχι A

Η διάμεσος τιμή εξασφαλίζει ότι τα μισά δείγματα είναι κάτω απ' αυτήν την τιμή και τα υπόλοιπα μισά πάνω απ' αυτήν. Διαγράφοντας την ελάχιστη και μέγιστη τιμή των δειγμάτων, έχω και πάλι στα εναπομείναντα στοιχεία τα μισά απ' αυτά κάτω από την διάμεσο τιμή και τ' άλλα μισά πάνω απ' αυτήν, άρα όντως η διάμεσος δεν μεταβάλλεται, άρα B.

Η C απορρίπτεται αφού αν για παράδειγμα $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ και $\boldsymbol{x_6 >> x_5}$ η τυπική απόκλιση του $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_6}$ είναι μεγαλύτερη του $\boldsymbol{x_2, x_3, \cdots, x_5}$.

Έχω $\boldsymbol{x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_2 < -x_1 \xRightarrow{x_5<x_6} x_5 - x_2 < x_6 - x_1}$. Άρα D

Τελικά BD.

10. Για τη μέτρηση της ισχύος του ήχου ορίζουμε την στάθμη ηχητικής πίεσης $\boldsymbol{L_p = 20 \times \log\frac{p}{p_0}, p_0>0}$, όπου $\boldsymbol{p_0}$ το κατώτερο όριο ακοής και p η πραγματική πίεση ήχου. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές για διαφορετικές πηγές ήχου.

Πηγή ήχου	Απόσταση από την πηγή ήχου σε m	στάθμη ηχητικής πίεσης $\boldsymbol{L_p \sigma\varepsilon}$ dB
Συμβατικό αυτοκίνητο	10	60-90
Υβριδικό αυτοκίνητο	10	50-60
Ηλεκτρικό αυτοκίνητο	10	40

Αν η πραγματική ηχητική πίεση που μετριέται σε απόσταση 10m από ένα συμβατικό, από ένα υβριδικό και ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο είναι $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}$ αντίστοιχα τότε

A. $\boldsymbol{p_1 \geq p_2}$ B. $\boldsymbol{p_2 \geq 10p_3}$ C. $\boldsymbol{p_3 = 100p_0}$ D. $\boldsymbol{p_1 \leq 100p_2}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{L_1 - L_2 = 20\log\frac{p_1}{p_0} - 20\log\frac{p_2}{p_0} = 20\log\frac{p_1}{p_2} \geq 0 \Rightarrow \log\frac{p_1}{p_2} \geq 0 = \log 1 \Rightarrow p_1 \geq p_2}$ Άρα A

Έχω απ' τον πίνακα ότι $\boldsymbol{L_2 - L_3 \geq 10 \Rightarrow 20\log\frac{p_2}{p_3} \geq 10 \Rightarrow \log\frac{p_2}{p_3} \geq \frac{1}{2} = \log\sqrt{10} \Rightarrow \frac{p_2}{p_3} \geq \sqrt{10}}$ Όχι B

Έχω $\boldsymbol{L_3 = 40 \Rightarrow 20\log\frac{p_3}{p_0} = 40 \Rightarrow \log\frac{p_3}{p_0} = 2 \Rightarrow p_3 = 10^2 p_0}$ Άρα C

Έχω $\boldsymbol{L_1 - L_2 \leq 90 - 50 = 40 \Rightarrow 20\log\frac{p_1}{p_2} \leq 40 \Rightarrow \log\frac{p_1}{p_2} \leq 2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} \leq 10^2}$ Άρα D Τελικά ACD

11. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ και $\boldsymbol{f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)}$ τότε

A. $\boldsymbol{f(0) = 0}$ B. $\boldsymbol{f(1) = 0}$ C. η $\boldsymbol{f}$ είναι άρτια D. Για $\boldsymbol{x = 0}$ η $\boldsymbol{f}$ έχει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Για $\boldsymbol{x = y = 0}$ έχω $\boldsymbol{f(0) = 0^2 f(0) + 0^2 f(0) = 0}$ άρα A

Για $\boldsymbol{x = y = 1}$ έχω $\boldsymbol{f(1) = 1^2 f(1) + 1^2 f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0}$ άρα B

Για $\boldsymbol{x = y = -1}$ έχω $\boldsymbol{f(1) = (-1)^2 f(-1) + (-1)^2 f(-1) = 2f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0}$

άρα $\boldsymbol{f(-x) = f(x \cdot (-1)) = (-1)^2 f(x) + x^2 f(-1) = f(x)}$ Άρα άρτια άρα C

η $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}}$ αφού για $\boldsymbol{xy \neq 0}$ έχω $\boldsymbol{\frac{f(xy)}{(xy)^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2} \Leftrightarrow \frac{(xy)^2 \ln|xy|}{(xy)^2} = \frac{x^2 f(x)}{x^2} + \frac{y^2 f(y)}{y^2} \Leftrightarrow}$

$\boldsymbol{\ln|xy| = \ln|x| + \ln|y|}$ που ισχύει. Έχω όμως $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0}$ άρα όχι D

Τελικά ABC

12. Μεταξύ των ακόλουθων αντικειμένων, ποια μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα κυβικό δοχείο με μήκος ακμής 1m (το πάχος του τοιχώματος του δοχείου αγνοείται)

A. Μια σφαίρα με διάμετρο 0,99m

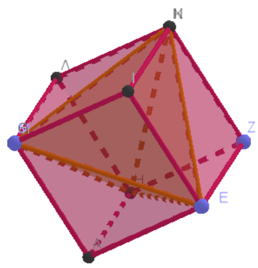
B. Ένα τετράεδρο με όλα τα μήκη ακμών 1,4m

Γ. Ένας κύλινδρος με διάμετρο βάσης 0,01m και ύψος 1,8m

Δ. Ένας κύλινδρος με διάμετρο βάσης 1,2m και ύψος 0,01m

Λύση

Το A προφανώς OK.



Το B OK καθώς οι διαγώνιοι τριών όμορων εδρών του κύβου είναι μήκους $\boldsymbol{\sqrt{2} > 1,4m}$ και μπορούν να σχηματίσουν τετράεδρο με την κοινή τους κορυφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η μέγιστη διαγώνιος του κύβου έχει μήκος $\boldsymbol{\sqrt{3}}$m και το ύψος του κυλίνδρου είναι $\boldsymbol{1,8 > \sqrt{3}}$m άρα το C δεν είναι δυνατόν.

Η διάμετρος $\boldsymbol{1,2 < \sqrt{3}}$m άρα OK το D.

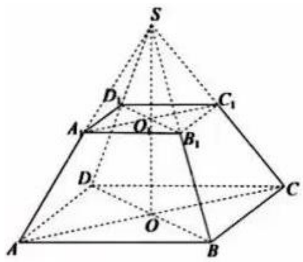
Τελικά ABD

13. Ένα σχολείο προσφέρει 4 μαθήματα επιλογής στη Φυσική Αγωγή και 4 στις Τέχνες. Εάν παρακολουθήσετε 2 ή 3 μαθήματα από τον κατάλογο των 8 μαθημάτων επιλογής και τουλάχιστον ένα από κάθε κατηγορία, πόσες διαφορετικές επιλογές υπάρχουν;

Λύση

Έχω $\boldsymbol{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{2} = 16 + 24 + 16 = \boxed{64}}$

14. Στην κόλουρη πυραμίδα $\boldsymbol{ABCD - A_1B_1C_1D_1}$, έχω $\boldsymbol{AB = 2, A_1B_1 = 1, AA_1 = \sqrt{2}}$,να βρεθεί ο όγκος του στερεού.



Λύση

Έχω $AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2} = \sqrt{2}, \frac{SA}{AA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 2 \Rightarrow SA = 2\sqrt{2} \Rightarrow$
$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}, \frac{SO_1}{SO} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO_1 = \sqrt{6}/2$

Άρα ο όγκος είναι $V = V_{SABCD} - V_{SA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}(ABCD)SO - \frac{1}{3}(A_1B_1C_1D_1)SO_1 = \frac{1}{3}2^2\sqrt{6} - \frac{1}{3}1^2\sqrt{6}/2 = 7\sqrt{6}/6$

15. Αν η συνάρτηση $f(x) = \cos \omega x - 1, (\omega > 0)$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $[0, 2\pi]$, τότε να βρεθεί το εύρος τιμών του ω.

Λύση

Έχω $\cos \omega x - 1 = 0 = \cos 0 \Leftrightarrow \omega x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$

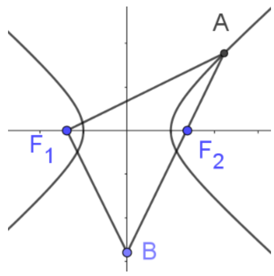
Αφού έχει ρίζες στο $[0, 2\pi]$, έχω $0 \le \frac{2k\pi}{\omega} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{k}{\omega} \le 1 \overset{\omega>0}{\Longrightarrow} k \ge 0$.

Για $k = 0, x = 0$ η πρώτη ρίζα. Για $k = 1$, έχω $0 \le \frac{1}{\omega} \le 1 \Leftrightarrow \omega \ge 1$. Για $k = 2$, έχω $0 \le \frac{2}{\omega} \le 1 \Leftrightarrow \omega \ge 2$.

Αν $k \ge 3$, έχω $0 \le \frac{k}{\omega} \le 1 \Leftrightarrow \omega \ge k \ge 3$. Άρα, δεν θέλω $\omega \ge 3$. Άρα $\boxed{\omega \in [2, 3)}$

16. Αν τα σημεία F_1, F_2 είναι η αριστερά και δεξιά εστία αντίστοιχα της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$, A σημείο του δεξιού κλάδου της υπερβολής, B σημείο του άξονα y'y, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, τότε η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι ___

Λύση



Έχω από τον ορισμό της υπερβολής ότι $F_1A - F_2A = 2\alpha \Rightarrow F_1A = 2\alpha + F_2A$. Έστω $F_2A = 2\delta$ (για ευκολία στις πράξεις). Τότε $F_1A = 2\alpha + 2\delta$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B} \Rightarrow |\overrightarrow{F_2A}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{F_2B}| \Rightarrow |\overrightarrow{F_2B}| = 3\delta \Rightarrow F_2B = 3\delta$. Από τη συμμετρία της υπερβολής $F_1B = F_2B = 3\delta$. Αν $\theta = \widehat{F_1AF_2} \xRightarrow{\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}} \sin\theta = \frac{F_1B}{AB} = \frac{3\delta}{5\delta} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{F_1A}{AB} = \frac{2\alpha+2\delta}{5\delta} \Rightarrow \alpha = \delta, F_1A = 4\alpha, F_2A = 2\alpha$.

Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο F_1AF_2 έχω : $F_1F_2{}^2 = F_1A^2 + AF_2{}^2 - 2AF_1AF_2\cos\theta \Rightarrow$

$4\gamma^2 = 16\alpha^2 + 4\alpha^2 - 2 \cdot 4\alpha \cdot 2\alpha \cdot \frac{4}{5} = 20\alpha^2 - \frac{64}{5}\alpha^2 = \frac{36}{5}\alpha^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{9}{5}\alpha^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$

17. Αν στο $\triangle ABC$, $\hat{A} + \hat{B} = 3\hat{C}$, $2\sin(\hat{A} - \hat{C}) = \sin\hat{B}$ (1) βρείτε το $\sin\hat{A}$ (2) Αν $AB = 5$, τότε $v_C =$___

Λύση

(1) Έχω $\hat{A} + \hat{B} = 3\hat{C} \Rightarrow 4\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 45°$. Άρα $2\sin(\hat{A} - \hat{C}) = \sin\hat{B} = \sin(180° - \hat{A} - \hat{C}) = \sin(\hat{A} + \hat{C}) = \sin(\hat{A} + 45°) \Rightarrow 2\sin\hat{A}\cos\hat{C} - 2\cos\hat{A}\sin\hat{C} = \sin\hat{A}\cos\hat{C} + \cos\hat{A}\sin\hat{C} \Rightarrow 2\sin\hat{A} - 2\cos\hat{A} = \sin\hat{A} + \cos\hat{A} \Rightarrow \sin\hat{A} = 3\cos\hat{A}$. Άρα από $\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1 \Rightarrow \sin^2\hat{A} + \frac{1}{9}\sin^2\hat{A} = 1 \Rightarrow \frac{10}{9}\sin^2\hat{A} = 1 \Rightarrow \sin\hat{A} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$

(2) Από νόμο ημιτόνων έχω $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{10}}{10}\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{5}$. Οπότε $v_C = BC\sin\hat{B} = 3\sqrt{5}2\sin(\hat{A} - \hat{C}) = 3\sqrt{5}\sqrt{2}(\sin A - \cos A) = 3\sqrt{10}\frac{2}{3}\sin A = 3\sqrt{10}\frac{2}{3}\frac{3\sqrt{10}}{10} = \boxed{6}$

18. (12 βαθμοί)

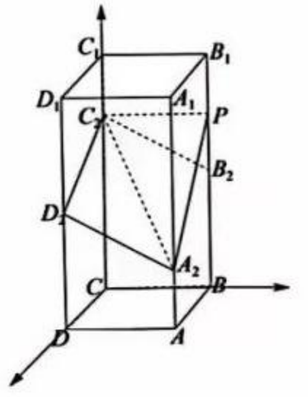
Στο παραλληλεπίπεδο $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, έχω $AB = 2$, $AA_1 = 4$, τα σημεία A_2, B_2, C_2, D_2 μέσα των AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, αντίστοιχα, $AA_2 = 1$, $BB_2 = DD_2 = 2$. $CC_2 = 3$.

(1) Να δειχθεί ότι $B_2C_2 // A_2D_2$

(2) Αν το σημείο P του BB_1 τέτοιο ώστε η διεδρική γωνία $P - A_2C_2 - D_2 = 150°$, να βρείτε το μήκος του B_2P

Λύση

(1) Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων του $\boldsymbol{Cxyz}$ του σχήματος, άξονας $\boldsymbol{Cx}$ η ημιευθεία $\boldsymbol{CB}$, άξονας $\boldsymbol{Cy}$ η ημιευθεία $\boldsymbol{CD}$, άξονας $\boldsymbol{Cz}$ η ημιευθεία $\boldsymbol{CC_1}$.



Έχω $\boldsymbol{A_2(2,2,1), D_2(0,2,2), \overrightarrow{A_2D_2} = (-2,0,1)}$

$\boldsymbol{B_2(2,0,2), C_2(0,0,3), \overrightarrow{B_2C_2} = (-2,0,1) = \overrightarrow{A_2D_2}}$, Άρα$\boldsymbol{A_2D_2 // = B_2C_2}$

(2) Έχω $\boldsymbol{P(2,0,\lambda), \lambda \in (0,4)}$,

Η αναλυτική εξίσωση για το επίπεδο $\boldsymbol{A_2C_2D_2}$ είναι: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $x(2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}) - 2y\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-2) - 2y + 2z(-2) - 2(-6) = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (1,1,2)$, όπου $\boldsymbol{\overrightarrow{n_1}}$ το κάθετο στο επίεπδο $\boldsymbol{A_2C_2D_2}$ διάνυσμα.

Η αναλυτική εξίσωση για το επίπεδο $\boldsymbol{PA_2C_2}$ είναι: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-2)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y(2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}) + 2z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-2)(\lambda - 3) - 2y(1-\lambda) + 2z(2) - 12 = 0 \Rightarrow x(\lambda - 3) + y(1 - \lambda) - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (\lambda - 3, 1 - \lambda, -2)$, όπου $\boldsymbol{\overrightarrow{n_2}}$ το κάθετο στο επίεπδο $\boldsymbol{PA_2C_2}$ διάνυσμα.

Έχω $\widehat{\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2}} = 150°$ άρα από $\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|\,cos150° \Rightarrow (\lambda - 3 + 1 - \lambda - 4) = \sqrt{6}\sqrt{(\lambda-3)^2 + (1-\lambda)^2 + 4}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow -6 = -\frac{\sqrt{18}}{2}\sqrt{2\lambda^2 - 8\lambda + 14} \Rightarrow 36 = \frac{18}{4}(2\lambda^2 - 8\lambda + 14) \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = 1 \Rightarrow P(2,0,1)$ή$P(2,0,3) \Rightarrow \overrightarrow{B_2P} = (0,0,-1)$ ή $(0,0,1) \Rightarrow |\overrightarrow{B_2P}| = 1 \Rightarrow \boxed{B_2P = 1}$

19. (12 βαθμοί)

Αν $\boldsymbol{f(x) = a(e^x + a) - x}$ (1) να μελετηθεί η μονοτονία της $\boldsymbol{f}$ (2) να δειχθεί ότι για $\boldsymbol{\alpha > 0}$ έχω $\boldsymbol{f(x) > 2\ln\,a + \frac{3}{2}}$

(1) Έχω $\boldsymbol{f'(x) = ae^x - 1}$. Αν $\boldsymbol{\alpha \le 0}$ τότε $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, για κάθε $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$, άρα $\boldsymbol{f \downarrow \mathbb{R}}$. Αν $\boldsymbol{\alpha > 0}$ τότε $\boldsymbol{f'(x) = ae^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -lna}$ Άρα έχω τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-lna	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-lna)$	$+\infty$

(2) Από (1) έχω $\boldsymbol{f(x) \ge f(-lna) = a(e^{-lna} + a) + lna = 1 + \alpha^2 + ln\alpha}$ για κάθε $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$. Θα δείξω ότι για $\boldsymbol{\alpha > 0}$, έχω $\boldsymbol{1 + \alpha^2 + ln\alpha > 2\ln\,a + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 > 2\ln\,a + 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \ln\,\alpha^2 + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha^2 - \ln\,\alpha^2 - 1) > 0}$, που ισχύει αφού $\boldsymbol{\alpha^2 > 0}$ και $\boldsymbol{\alpha^2 - \ln\,\alpha^2 - 1 > 0 \overset{\omega=\alpha^2>0}{\Longleftrightarrow} \omega - \ln\,\omega - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln\,\omega < \omega - 1}$, ισχύει για κάθε $\boldsymbol{\omega > 0}$.

20. (12 βαθμοί)

Έστω ότι η διαφορά της αριθμητικής προόδου $\boldsymbol{a_n}$ είναι $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d > 1}$, $\boldsymbol{b_n = \frac{n^2+n}{a_n}}$, $\boldsymbol{S_n}$ και $\boldsymbol{T_n}$ οι αθροιστικές σειρές των n πρώτων όρων των ακολουθιών $\boldsymbol{a_n, b_n}$ αντίστοιχα (1) Αν ισχύει επιπλέον ότι $\boldsymbol{3a_2 =}$

$\boldsymbol{3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21}$, να βρείτε τον γενικό τύπο του $\boldsymbol{a_n}$ (2) Αν η $\{\boldsymbol{b_n}\}$ είναι αριθμητική πρόοδος και $\boldsymbol{S_{99} - T_{99} = 99}$, να βρείτε το $\boldsymbol{d}$.

Λύση

(1) Έχω $\boldsymbol{3a_2 = 3a_1 + a_3 \Rightarrow 3(a_1 + \mathrm{d}) = 3a_1 + a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = d \Rightarrow a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{\mathrm{d}}}$. Από $\boldsymbol{S_3 + T_3 = 21 \Rightarrow d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = 21 \Rightarrow 6d + \frac{9}{d} = 21 \Rightarrow 2d^2 - 7d + 3 = 0 \Rightarrow (2d - 1)(d - 3) = 0 \overset{d>1}{\Longrightarrow} d = 3}$. Άρα $\boldsymbol{a_n = 3n}$

(2) Αφού η $\{\boldsymbol{b_n}\}$ είναι αριθμητική πρόοδος, έχω $\boldsymbol{2b_2 = b_1 + b_3 \Rightarrow 2\frac{6}{a_2} = \frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} \Rightarrow \frac{6}{a_1+d} = \frac{1}{a_1} + \frac{6}{a_1+2d} \Rightarrow \frac{6}{a_1+d} - \frac{6}{a_1+2d} = \frac{1}{a_1} \Rightarrow \frac{6(a_1+2d)-6(a_1+d)}{(a_1+d)(a_1+2d)} = \frac{1}{a_1} \Rightarrow \frac{6\mathrm{d}}{(a_1+d)(a_1+2d)} = \frac{1}{a_1} \Rightarrow 6\mathrm{d}a_1 = {a_1}^2 + 3da_1 + 2d^2 \Rightarrow {a_1}^2 - 3da_1 + 2d^2 = 0 \Rightarrow (a_1 - d)(a_1 - 2d) = 0 \Rightarrow a_1 = d}$ ή $\boldsymbol{a_1 = 2d}$

Διακρίνω περιπτώσεις:

α) $\boldsymbol{a_1 = d \Rightarrow a_n = nd \Rightarrow b_n = \frac{n+1}{\mathrm{d}} = \frac{n}{\mathrm{d}} + \frac{1}{\mathrm{d}}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}d, T_n = \frac{n(n+1)}{2\mathrm{d}} + \frac{n}{\mathrm{d}} = \frac{n(n+3)}{2\mathrm{d}}}$, άρα από $\boldsymbol{S_{99} - T_{99} = 99 \Rightarrow \frac{99\cdot100}{2}d - \frac{99\cdot102}{2\mathrm{d}} = 99 \Rightarrow 50d - \frac{51}{d} = 1 \Rightarrow 50d^2 - d - 51 = 0 \Rightarrow (50d - 51)(d + 1) = 0 \overset{d>1}{\Longrightarrow} \boxed{d = \frac{51}{50}}}$

β) $\boldsymbol{a_1 = 2d \Rightarrow a_n = (n+1)d \Rightarrow b_n = \frac{n}{\mathrm{d}}, S_n = \frac{n(n+3)}{2}d, T_n = \frac{n(n+1)}{2\mathrm{d}}}$, άρα από $\boldsymbol{S_{99} - T_{99} = 99 \Rightarrow \frac{99\cdot102}{2}d - \frac{99\cdot100}{2\mathrm{d}} = 99 \Rightarrow 51d - \frac{50}{d} = 1 \Rightarrow\Rightarrow 51d^2 - d - 50 = 0 \Rightarrow (51d + 50)(d - 1) = 0 \Rightarrow d = -\frac{50}{51}}$ ή $\boldsymbol{d = 1}$ απορρίπτονται αφού $\boldsymbol{d > 1}$

21. (12 βαθμοί)

Ο Α και ο Β παίζουν μπάσκετ και κάθε φορά ένας από αυτούς ρίχνει την μπάλα προς το καλάθι. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής: Αν ένας παίκτης ευστοχήσει, ξαναρίχνει, αν όχι, ρίχνει ο αντίπαλος. Ανεξάρτητα από την προηγούμενη βολή, το ποσοστό βολής του Α για κάθε σουτ είναι 0,6. Το ποσοστό επιτυχίας του Β για κάθε βολή είναι 0,8. Ο παίκτης που θα κάνει την πρώτη βολή καθορίζεται με κλήρωση.Η πιθανότητα το άτομο που κάνει την πρώτη βολή να είναι ο Α ή ο Β είναι 0,5 για τον καθένα.

(1) Βρείτε την πιθανότητα το άτομο που κάνει τη δεύτερη βολή να είναι ο Β.
(2) Βρείτε την πιθανότητα το άτομο που κάνει την $\boldsymbol{i}$-οστη βολή να είναι ο Α
(3) Είναι γνωστό ότι: «Εάν η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X_i}$, υπακούει στην κατανομή των δύο σημείων με $\boldsymbol{P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = q_i}$, όπου $\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots n}$, τότε $\boldsymbol{E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i}$.»
Αν λοιπόν Υ είναι ο αριθμός των βολών του παίκτη Α, να βρείτε το $\boldsymbol{E(Y)}$.

Λύση

(1) Έχω $\boldsymbol{p = p(\text{κλήρωθηκε ο } B, \text{ευστόχησε ο } B) + p(\text{κλήρωθηκε ο } A, \text{αστόχησε ο } A) = 0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot (1 - 0.6) = \boxed{0.6}}$

(2) Έστω $\boldsymbol{p_i}$ η πιθανότητα το άτομο που κάνει την $\boldsymbol{i}$-οστη βολή να είναι ο Α.
Έχω $\boldsymbol{p_{i+1} = p(\text{την } i - \text{οστη βολή κάνει ο Α και ευστοχεί}) + p(\text{την } i - \text{οστη βολή κάνει ο Β και αστοχεί}) = p_i 0.6 + (1 - p_i)(1 - 0.8) = 0.2 + 0.4p_i}$ με $\boldsymbol{p_1 = 0.5}$.
Εικάζω ότι $\boldsymbol{p_i = \alpha + \beta \cdot 0.4^{i-1}}$. Έχω $\boldsymbol{p_{i+1} = 0.2 + 0.4p_i = 0.2 + 0.4\left(\alpha + \beta 0.4^{i-1}\right) = 0.2 + 0.4\alpha + \beta 0.4^{i}}$. οπότε $\boldsymbol{\alpha = 0.2 + 0.4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}}$. Από $\boldsymbol{p_1 = 0.5 \Rightarrow \alpha + \beta = 0.5 \overset{\alpha=1/3}{\Longrightarrow} \beta = 1/6}$.
Άρα $\boldsymbol{p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0.4^{i-1}}$
Επαλήθευση: $\boldsymbol{p_{i+1} - \frac{1}{3} = 0.2 + 0.4p_i - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15} + \frac{2}{5}p_i = \frac{2}{5}(p_i - \frac{1}{3}) = \ldots = \left(\frac{2}{5}\right)^{i}(p_1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{i} \Rightarrow p_{i+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{i}}$ Άρα $\boldsymbol{\boxed{p_i = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0.4^{i-1}}}$, όπου $\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots n}$.

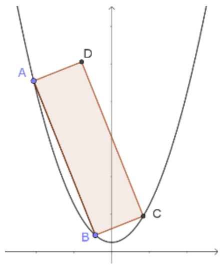
(3) Έχω για κάθε φυσικό $\boldsymbol{n \geq 1}$,
$\boldsymbol{E(Y) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0.4^{i-1}\right) = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1-0.4^n}{1-0.4} = \boxed{\frac{n}{3} + \frac{5}{18}(1 - 0.4^n)}}$.

22. (12 βαθμοί)

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy, η απόσταση του κινούμενου σημείου P από τον άξονα x είναι διαρκώς ίση με την απόστασή του από το σημείο $E(0,\frac{1}{2})$. Καταγράφουμε την τροχιά του σημείου P ως καμπύλη W. (1) Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης W. (2) Έστω ότι το ορθογώνιο $ABCD$ έχει τρεις κορυφές στην καμπύλη W. Να δειχθεί ότι η περίμετρος του ορθογώνιου $ABCD$ είναι μεγαλύτερη του $3\sqrt{3}$

Λύση

(1) Έχω για κάθε σημείο $P(x,y)$ της καμπύλης ότι $d(P,x'x)=d(P,E) \Rightarrow |y| = \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow 0 = x^2 - y + \frac{1}{4} \Rightarrow y = x^2 + \frac{1}{4}$ παραβολή με διευθετούσα τον άξονα $x'x$ και εστία το σημείο $E\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



(2) Έστω $A,B,C \in W \Rightarrow A(x_A, {x_A}^2+\frac{1}{4}), B(x_B, {x_B}^2+\frac{1}{4})$.

Έχω $d(A,B) = \sqrt{(x_A-x_B)^2+({x_A}^2-{x_B}^2)^2} = |x_A-x_B|\sqrt{1+(x_A+x_B)^2}$.

Όμοια $d(B,C) = |x_B-x_C|\sqrt{1+(x_B+x_C)^2}$. Έχω $\lambda_{AB} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} = x_A+x_B$,

Επειδή $AB \perp BC \Rightarrow \lambda_{AB}\lambda_{BC} = -1$

$\Rightarrow \lambda_{BC} = -\frac{1}{x_A+x_B} \Rightarrow \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} = -\frac{1}{x_A+x_B} \Rightarrow x_C + x_B = -\frac{1}{x_A+x_B} \Rightarrow x_C = -\frac{1}{x_A+x_B} - x_B \Rightarrow x_C - x_B = -\frac{1}{x_A+x_B} - 2x_B$.

Άρα $AB + BC =$

$|x_A-x_B|\sqrt{1+(x_A+x_B)^2} + \left|-\frac{1}{x_A+x_B} - 2x_B\right|\sqrt{1+\left(x_B-\frac{1}{x_A+x_B}-x_B\right)^2} = |x_A - x_B|\sqrt{1+(x_A+x_B)^2} + \left|\frac{1}{x_A+x_B}+2x_B\right|\sqrt{1+\left(\frac{1}{x_A+x_B}\right)^2}$.

Έστω $k = min(|x_A+x_B|, \frac{1}{|x_A+x_B|})$

Έχω $AB + BC > |x_A-x_B|\sqrt{1+k^2} + \left|\frac{1}{x_A+x_B}+2x_B\right|\sqrt{1+k^2} = \sqrt{1+k^2}\left(|x_A-x_B| + \left|\frac{1}{x_A+x_B}+2x_B\right|\right) \geq \sqrt{1+k^2}\left(\left|x_A-x_B+\frac{1}{x_A+x_B}+2x_B\right|\right) = \sqrt{1+k^2}\left(\left|x_A+x_B+\frac{1}{x_A+x_B}\right|\right) \geq \sqrt{1+k^2}\left(\left|k+\frac{1}{k}\right|\right) = \sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$.

Έστω $f(x) = \frac{(1+x)^3}{x}, x > 0$. Έχω $f'(x) = \frac{3x(1+x)^2-(1+x)^3}{x^2} = (1+x)^2\frac{3x-(1+x)}{x^2} = (1+x)^2\frac{2x-1}{x^2}$.

Με πίνακα μεταβολών

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Άρα η f έχει ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ την τιμή $f(\frac{1}{2}) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{2}} = \frac{27}{4}$.

Άρα $min(AB+BC) = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Οπότε η ελάχιστη περίμετρος του ορθογωνίου $ABCD$ είναι ίση με $\boxed{3\sqrt{3}}$

[2023 Εθνική Ενιαία Εξέταση για Εισαγωγές Γενικών Κολλεγίων] vol2

Μέρος 1. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής: Αυτή η ερώτηση έχει συνολικά 8 ερωτήσεις, κάθε ερώτηση αξίζει 5 βαθμούς, συνολικά 40 βαθμούς. Από τις τέσσερις επιλογές που δίνονται σε κάθε ερώτηση, μόνο μία πληροί τις απαιτήσεις της ερώτησης.

1. Στο μιγαδικό επίπεδο, το σημείο που αντιστοιχεί στο $(\boldsymbol{1+3i})(\boldsymbol{3-i})$ βρίσκεται

Α. στο πρώτο τεταρτημόριο Γ. Το τρίτο τεταρτημόριο Β. Το δεύτερο τεταρτημόριο Δ. Το τέταρτο τεταρτημόριο

Λύση

Έχω $(\boldsymbol{1+3i})(\boldsymbol{3-i}) = \boldsymbol{3+9i-i+3=6+8i}$ άρα Α

2. Υποθέστε τα σύνολα $\boldsymbol{A=\{0,-a\}}$, $\boldsymbol{B=\{1, a-2, 2a-2\}}$, αν $\boldsymbol{A \subseteq B}$, τότε $\boldsymbol{a=}$

Α) $\boldsymbol{2}$ Β)$\boldsymbol{1}$ c) $\boldsymbol{2/3}$ D) $\boldsymbol{-1}$

Έχω $\boldsymbol{0 \in A \subseteq B}$, Άρα $\boldsymbol{a-2=0}$ ή $\boldsymbol{2a-2=0}$, άρα $\boldsymbol{a=2}$ ή $\boldsymbol{a=1}$. Αν $\boldsymbol{a=2}$, τότε $\boldsymbol{A=\{0,-2\}}$, $\boldsymbol{B=\{1,0,2\}}$ και δεν ισχύει η $\boldsymbol{A \subseteq B}$. Αν $\boldsymbol{a=1}$, τότε $\boldsymbol{A=\{0,-1\}}$, $\boldsymbol{B=\{1,-1,0\}}$ και ισχύει η $\boldsymbol{A \subseteq B}$. Άρα Β

3. Για να γίνει κατανοητή η κατάσταση των μαθητών που συμμετέχουν στον αθλητισμό, ένα σχολείο χρησιμοποίησε τη μέθοδο της αναλογικής κατανομής στρωματοποιημένης τυχαίας δειγματοληψίας για τη διεξαγωγή δειγματοληπτικής έρευνας.

Επιλέχθηκαν συνολικά 60 μαθητές από το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν 400 και 200 μαθητές γυμνασίου και λυκείου αντίστοιχα, επομένως τα αποτελέσματα διαφορετικών δειγμάτων είναι συνολικά

A. $\boldsymbol{C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}}$ B. $\boldsymbol{C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}}$ C. $\boldsymbol{C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}}$ D. $\boldsymbol{C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}}$

Έστω ότι επιλέγουμε $\boldsymbol{x}$ μαθητές γυμνασίου και $\boldsymbol{y}$ μαθητές λυκείου. Άρα $\boldsymbol{x+y=60}$. Αφού έχουμε αναλογικά κατανεμημένη στρωματοποιημένη δειγματοληψία έχουμε $\boldsymbol{x/400 = y/200}$. Άρα $\boldsymbol{x=40, y=20}$. Συνεπώς έχουμε $\boldsymbol{C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}}$ συνδυασμούς άρα D.

4. Αν η $\boldsymbol{f(x) = (x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}}$ είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε $\boldsymbol{\alpha =}$ Α)$\boldsymbol{-1}$ Β)$\boldsymbol{0}$ C) ½ d)$\boldsymbol{1}$

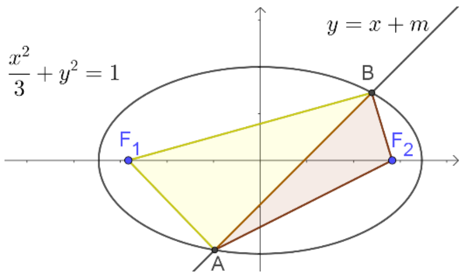
Λύση

Έχω $\boldsymbol{f(-x)=f(x)}$ άρα $\boldsymbol{(-x+a)\ln\frac{-2x-1}{-2x+1} = (x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1} \Leftrightarrow (-x+a)\ln\frac{2x+1}{2x-1} = -(x+a)\ln\frac{2x+1}{2x-1} \Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{(-x+a) = -(x+a) \Leftrightarrow \alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0}$ Άρα Β

5. Έστω η έλλειψη $(\boldsymbol{C})$,$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}+y^2=1}$, η αριστερά και δεξιά εστία είναι αντίστοιχα η $\boldsymbol{F_1, F_2}$, η ευθεία **y=**$\boldsymbol{x+m}$ τέμνει την $\boldsymbol{C}$ στα σημεία $\boldsymbol{A, B}$ και $\boldsymbol{(\Delta F_1AB) = 2(\Delta F_2AB)}$. Τότε $\boldsymbol{m=}$

a) $\boldsymbol{2/3}$ b) $\boldsymbol{\sqrt{2}/3}$ C) $\boldsymbol{-\sqrt{2}/3}$ D) $\boldsymbol{-2/3}$

Λύση



Έχω ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon_{AB}: x-y+m=0}$, $\boldsymbol{\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 3-1 = 2}$ άρα $\boldsymbol{F_1 = (-\sqrt{2}, 0)}$, $\boldsymbol{F_2 = (\sqrt{2}, 0)}$

Για να τέμνει η $\boldsymbol{\varepsilon_{AB}}$ την $(\boldsymbol{C})$ σε δύο διαφορετικά σημεία, πρέπει η $\boldsymbol{\frac{x^2}{3} + (x+m)^2 = 1}$ να έχει δύο διαφορετικές ρίζες. Έχω $\boldsymbol{\frac{x^2}{3} + (x+m)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{3} + +2mx + m^2 - 1 = 0}$

με $\boldsymbol{\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4 * \frac{4}{3}(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2}$

Ακόμα $\boldsymbol{(\Delta F_1AB) = 2(\Delta F_2AB) \Rightarrow \frac{d(F_1, \varepsilon_{AB}) * AB}{2} = 2\frac{d(F_2, \varepsilon_{AB}) * AB}{2} \Rightarrow d(F_1, \varepsilon_{AB}) = 2d(F_2, \varepsilon_{AB}) \Rightarrow \frac{|-\sqrt{2}-0+m|}{\sqrt{1^2+1^2}} =}$ $\boldsymbol{2\frac{|\sqrt{2}-0+m|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow |-\sqrt{2}+m| = 2|\sqrt{2}+m| \Rightarrow -\sqrt{2}+m = \pm 2(\sqrt{2}+m)}$

$\boldsymbol{\Rightarrow -\sqrt{2}+m = 2(\sqrt{2}+m)}$ ή $\boldsymbol{\Rightarrow -\sqrt{2}+m = -2(\sqrt{2}+m)}$

$\boldsymbol{\Rightarrow m = -3\sqrt{2} \notin (-2,2)}$ απορρίπτεται ή $\boldsymbol{m = -\sqrt{2}/3 \in (-2,2)}$. Άρα C

6. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = a\mathrm{e}^{x} - \ln x}$ αυξάνεται μονότονα στο διάστημα $(\mathbf{1,2})$, τότε η ελάχιστη τιμή του $\boldsymbol{a}$ είναι A. $\mathbf{e^2}$ B. $\mathbf{e}$ C. $\mathbf{e^{-1}}$ D. $\mathbf{e^{-2}}$

Πρέπει η $\boldsymbol{f'(\mathrm{x}) = a\mathrm{e}^{x} - 1/x > 0, \forall x \in (1,2) \Leftrightarrow a > \frac{1}{\mathrm{e}^{x}x} > 0\ \forall x \in (1,2)}$. Έστω $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}x}, x \in (1,2)}$ με $\boldsymbol{g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{x}x+\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}x)^2} = -\mathrm{e}^{x}\frac{x+1}{(\mathrm{e}^{x}x)^2} < 0,\ \forall x \in (1,2)}$ Άρα $\boldsymbol{g \downarrow (1,2)}$. Άρα $\boldsymbol{max g(x) = g(1) = \frac{1}{\mathrm{e}} = e^{-1}}$. Άρα πρέπει $\boldsymbol{a \geq e^{-1}}$. Άρα C.

7. Αν $\boldsymbol{a}$ είναι μια οξεία γωνία, $\boldsymbol{\cos a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$, τότε $\boldsymbol{\sin\frac{a}{2}} =$

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Έχω $\boldsymbol{\cos a = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow 1 - 2sin^2\frac{a}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow 2sin^2\frac{a}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8} \xRightarrow{a=οξεία,} \sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$ Άρα D.

8. Αν $\boldsymbol{S_n}$ το άθροισμα των $\boldsymbol{n}$ πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $\{\boldsymbol{a_n}\}$ και $\boldsymbol{S_4 = -5,\ S_6 = 21S_2}$, τότε $\boldsymbol{S_8} =$

A. $\mathbf{120}$ B. $\mathbf{85}$ C. $\mathbf{-85}$ D. $\mathbf{-120}$

Λύση

Έστω $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ ο πρώτος όρος και $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ ο λόγος της γεωμετρικής προόδου.

Έχω $\boldsymbol{S_6 = 21S_2 \overset{\lambda\neq1}{\Longleftrightarrow} a_1\frac{1-\lambda^6}{1-\lambda} = 21a_1\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda} \Rightarrow 1 - \lambda^6 = 21(1-\lambda^2) \Rightarrow \lambda^6 - 21\lambda^2 + 20 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 + \lambda^2 - 20) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 5)(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = -1}$ ή $\boldsymbol{\lambda = \pm 2}$.

Αν $\boldsymbol{\lambda = -1}$, τότε $\boldsymbol{S_4 = a_1\frac{1-\lambda^4}{1-\lambda} = \frac{1-(-1)^4}{1-(-1)} = 0 \neq -5}$, απορρίπτεται.

Αν $\boldsymbol{\lambda = 2}$, τότε $\boldsymbol{S_4 = a_1\frac{1-2^4}{1-2} = 15a_1 = -5 \Rightarrow a_1 = -1/3}$, $\boldsymbol{S_2 = -1/3\frac{1-2^2}{1-2} = -1}$, $\boldsymbol{S_6 = -1/3\frac{1-2^6}{1-2} = -63 = 21S_2}$, δεκτή, οπότε $\boldsymbol{S_8 = -1/3\frac{1-2^8}{1-2} = -85}$, άρα C.

Αν $\boldsymbol{\lambda = -2}$, τότε $\boldsymbol{S_4 = a_1\frac{1-2^4}{1+2} = -5a_1 = -5 \Rightarrow a_1 = 1}$, $\boldsymbol{S_2 = \frac{1-2^2}{1+2} = -1, S_6 = \frac{1-2^6}{1+2} = -21 = 21S_2}$, δεκτή, οπότε $\boldsymbol{S_8 = \frac{1-2^8}{1+2} = -85}$, άρα πάλι C.

Β' τρόπος

Οι πρώτοι όροι είναι ως εξής: $\boldsymbol{a_1, a_1\lambda,\quad a_1\lambda^2, a_1\lambda^3,\quad a_1\lambda^4, a_1\lambda^5}$,...

Παρατηρώ ότι τα $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_4 - S_2}$, $\boldsymbol{S_6 - S_4}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\boldsymbol{\lambda^2}$. Οπότε $\boldsymbol{(S_4 - S_2)^2 = S_2\,(S_6 - S_4) \Rightarrow (-5 - S_2)^2 = S_2\,(21S_2 + 5) \Rightarrow {S_2}^2 + 10S_2 + 25 = 21{S_2}^2 + 5S_2 \Rightarrow 20{S_2}^2 - 5S_2 - 25 = 0 \Rightarrow (S_2 + 1)(20S_2 - 25) = 0 \Rightarrow S_2 = -1}$ ή $\boldsymbol{S_2 = 4/5}$. Αλλά $\boldsymbol{S_4 - S_2 = \lambda^2 S_2 \Rightarrow S_4/S_2 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow -5/S_2 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow S_2 < 0 \Rightarrow}$η $\boldsymbol{S_2 = 4/5 > 0}$ απορρίπτεται. Άρα $\boldsymbol{S_2 = -1}$, $\boldsymbol{S_6 = -21}$ Έχω ότι τα $\boldsymbol{S_4 - S_2}$, $\boldsymbol{S_6 - S_4}$, $\boldsymbol{S_8 - S_6}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου οπότε $\boldsymbol{(S_6 - S_4)^2 = (S_4 - S_2)(S_8 - S_6) \Rightarrow (-21 + 5)^2 = (-5 + 1)(S_8 + 21) \Rightarrow S_8 = -85}$, άρα C.

Μέρος 2. Αποτελείται από 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, κάθε ερώτηση έχει 5 βαθμούς, συνολικά 20 βαθμούς. Ανάμεσα στις τέσσερις επιλογές που δίνονται για κάθε ερώτηση, υπάρχουν πολλές που ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις της ερώτησης. Απονέμονται 5 βαθμοί για όλες τις σωστές επιλογές, 2 βαθμοί για μερικώς σωστές επιλογές και 0 βαθμοί για λανθασμένες επιλογές.

9. Είναι γνωστό ότι η κορυφή του κώνου είναι $\boldsymbol{P}$, το κέντρο της βάσης είναι $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AB}$ είναι η διάμετρος της βάσης, $\boldsymbol{\widehat{APB} = 120°, PA = 2}$, το σημείο C βρίσκεται στην περιφέρεια βάσης και η διεδρική γωνία $\boldsymbol{P - AC - O}$ είναι 45°, τότε:

A. Ο όγκος του κώνου είναι $\boldsymbol{\pi}$

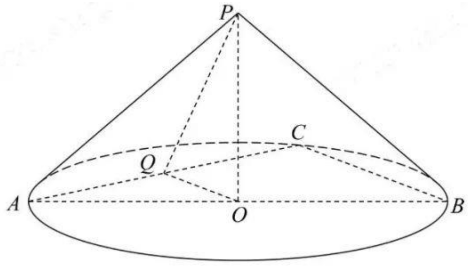
B. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κώνου είναι $\boldsymbol{4\sqrt{3}\pi}$

C. $\boldsymbol{AC = 2\sqrt{2}}$

D. Το εμβαδόν του $\boldsymbol{\Delta PAC}$ είναι $\sqrt{3}$

Λύση

Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $\boldsymbol{ABP}$ έχουμε



$\boldsymbol{AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2AP \cdot PB\cos 120° = 4 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}}$

Στο τρίγωνο $\boldsymbol{APO}$ έχουμε: $\boldsymbol{h = PO = \sin(\widehat{PAO})AP = \sin(30°)2 = 1}$ Άρα $\boldsymbol{V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}^2 1 = \pi}$.

Άρα A

$\boldsymbol{E_{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta\varsigma} = \pi r\lambda = 2\sqrt{3}\pi}$. άρα όχι B

Φέρνω $\boldsymbol{OQ \perp AC \Rightarrow \widehat{PQO} = 45° \Rightarrow OQ = PO = 1}$.Έχω $\boldsymbol{AC = 2AQ = 2\sqrt{r^2 - OQ^2} = 2\sqrt{2}}$. Άρα C.

$\boldsymbol{(\Delta PAC) = \frac{1}{2}AC \cdot PQ = \frac{1}{2}2\sqrt{2} \cdot \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2}$ Άρα όχι D. Τελικά AC.

10. Έστω $\boldsymbol{O}$ η αρχή συντεταγμένων, η ευθεία $\boldsymbol{y = -\sqrt{3}(x - 1)}$ διέρχεται από την εστία της παραβολής C: $\boldsymbol{y^2 = 2px (p > 0)}$, και τέμνει την $\boldsymbol{C}$ στα σημεία $\boldsymbol{M}$ και $\boldsymbol{N}$, και $\boldsymbol{l}$ είναι η διευθετούσα ευθεία της $\boldsymbol{C}$, τότε

A. $\boldsymbol{p = 2}$

B. $\boldsymbol{| MN | = \frac{8}{3}}$

C. Ένας κύκλος με διάμετρο $\boldsymbol{MN}$ εφάπτεται στην ευθεία $\boldsymbol{l}$

D. Το τρίγωνο $\boldsymbol{OMN}$ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο

Λύση

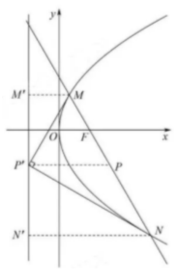
Η ευθεία $\boldsymbol{y = -\sqrt{3}(x - 1)}$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα για $\boldsymbol{x = 1}$, άρα η εστία της παραβολής είναι η $\boldsymbol{F(1, 0) = (p/2, 0) \Rightarrow p = 2}$. Άρα A.

Άρα $\boldsymbol{y^2 = 2px = 4x}$. Έχω για τα σημεία $\boldsymbol{M}$ και $\boldsymbol{N}$ ότι: $\boldsymbol{3(x - 1)^2 = 4x \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 4x \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{M,N} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \Rightarrow x_N = 3}$ ή $\boldsymbol{x_M = \frac{1}{3} \Rightarrow y_N = -2\sqrt{3}}$ ή $\boldsymbol{y_M = 2\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Άρα

$\boldsymbol{| MN | = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(8/3)^2 + \left(8\sqrt{3}/3\right)^2} = (8/3)\sqrt{1 + 3} = 16/3}$. Άρα όχι B

Αλλιώς. Το μήκος της εστιακής χορδής δίνεται από τον τύπο $\boxed{\boldsymbol{MN = 2p \cdot cosec^2\theta}}$. Εδώ $\boldsymbol{\tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -120°}$. Άρα $\boldsymbol{MN = 2p \cdot cosec^2\theta = \frac{2p}{\sin^2\theta} = \frac{4}{3/4} = \frac{16}{3}}$, όπως πριν.

Το κέντρο $\boldsymbol{P}$ του κύκλου διαμέτρου $\boldsymbol{MN}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{MN}$ άρα $\boldsymbol{x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{5}{3}, y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = -2\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Η ευθεία $\boldsymbol{l: x = -p/2 = -1}$ για να εφάπτεται στον κύκλο πρέπει $\boldsymbol{d(P, l) = MN/2 \Leftrightarrow \frac{|5/3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 8/3}$, που ισχύει. Άρα C.



Αλλιώς. Φέρω τις προβολές $\boldsymbol{M', P', N'}$ των $\boldsymbol{M, P, N}$ στην ευθεία $\boldsymbol{l}$ αντίστοιχα. Έχω $\boldsymbol{PP' = 1/2(MM' + NN')}$ ως διάμεσος του τραπεζίου $\boldsymbol{MNN'M'}$. Αλλά $\boldsymbol{MM' = MF, NN' = NF}$ από τον ορισμό της παραβολής. Άρα $\boldsymbol{PP' = 1/2(MN) = PN = PM}$ και ο κύκλος$\boldsymbol{(M, N, P')}$ εφάπτεται στην ευθεία $\boldsymbol{l}$. Άρα C.

Έχω $\boldsymbol{OM = \sqrt{(1/3)^2 + \left(2\sqrt{3}/3\right)^2} = \sqrt{13}/3}$, $\boldsymbol{ON = \sqrt{3^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21} \neq OM \neq MN}$ άρα όχι D.

Άρα AC.

11. Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = a\ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} (a \neq 0)}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τότε:

A. $\boldsymbol{bc > 0}$ B. $\boldsymbol{ab > 0}$ C. $\boldsymbol{b^2 + 8ac > 0}$ D. $\boldsymbol{ac < 0}$

Λύση

Έχω $\boldsymbol{D_f = (0, +\infty). f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - 2\frac{c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}}$. Αφού η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ έχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή και είναι παραγωγίσιμη τότε από θ. Fermat η $\boldsymbol{f'}$ μηδενίζεται σε δυο σημεία στο $\boldsymbol{D_f}$. Άρα $\boldsymbol{\Delta > 0, S > 0, P > 0 \Rightarrow b^2 + 8ac > 0, \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow ab > 0, \frac{-2c}{a} > 0 \Leftrightarrow ac < 0}$. Άρα BCD.

12. Στο κανάλι μεταδίδονται σήματα 0 και 1. Η μετάδοση των σημάτων είναι ανεξάρτητη μεταξύ τους. Κατά την αποστολή 0, η πιθανότητα λήψης 1 είναι $\boldsymbol{\alpha}$ $(\mathbf{0}<\boldsymbol{\alpha}<\mathbf{1})$ και η πιθανότητα λήψης 0 είναι $\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}$. Κατά την αποστολή του 1, η πιθανότητα λήψης 0 είναι $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{0}<\boldsymbol{\beta}<\mathbf{1})$ και η πιθανότητα λήψης 1 είναι $\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}$. Εξετάστε δύο σχήματα μετάδοσης: απλή μετάδοση και τριπλή μετάδοση. Η απλή μετάδοση σημαίνει ότι κάθε σήμα αποστέλλεται μόνο μία φορά, η τριπλή μετάδοση σημαίνει ότι κάθε σήμα επαναλαμβάνεται 3 φορές. Το λαμβανόμενο σήμα Απαιτείται αποκωδικοποίηση. Οι κανόνες αποκωδικοποίησης είναι οι εξής: Κατά τη διάρκεια μιας μόνο μετάδοσης, το λαμβανόμενο σήμα αποκωδικοποιείται: κατά τη διάρκεια τριών εκπομπών, το σήμα που εμφανίζεται πιο συχνά αποκωδικοποιείται (για παράδειγμα, εάν ληφθούν διαδοχικά 1, 0, 1, το αποκωδικοποιημένο σήμα είναι 1).

A. Χρησιμοποιώντας ένα μεμονωμένο σχήμα μετάδοσης, εάν 1, 0, 1 αποστέλλονται με τη σειρά, η πιθανότητα λήψης 1, 0, 1 στη σειρά είναι $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}$

B. Χρησιμοποιώντας Σχέδιο τριών μεταδόσεων, εάν στείλετε 1, η πιθανότητα να λάβετε 1, 0, 1 στη σειρά είναι $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}$

C. Χρησιμοποιώντας τρία σχήματα μετάδοσης, εάν αποσταλεί 1, η πιθανότητα αποκωδικοποίησης 1 είναι $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}+(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{3}$

D. Όταν $\mathbf{0}<\boldsymbol{\alpha}<\mathbf{0,5}$, Εάν 0 αποστέλλεται, η πιθανότητα αποκωδικοποίησης στο 0 με χρήση τριών σχημάτων μετάδοσης είναι μεγαλύτερη της πιθανότητας αποκωδικοποίησης στο 0 με χρήση ενός μεμονωμένου σχήματος μετάδοσης.

Λύση

A. $\boldsymbol{p}=\begin{matrix}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{1}\longrightarrow\mathbf{1}\ \mathbf{0}\longrightarrow\mathbf{0}\ \mathbf{1}\longrightarrow\mathbf{1}\end{matrix}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}$ OK

B. $\boldsymbol{p}=\begin{matrix}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})\quad \boldsymbol{\beta}\quad (\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{1}\longrightarrow\mathbf{1}\,\mathbf{1}\longrightarrow\mathbf{0}\,\mathbf{1}\longrightarrow\mathbf{1}\end{matrix}=\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}$ OK

C. $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\mathbf{111}\longrightarrow\mathbf{111})+\boldsymbol{p}(\mathbf{111}\longrightarrow\mathbf{110})+\boldsymbol{p}(\mathbf{111}\longrightarrow\mathbf{101})+\boldsymbol{p}(\mathbf{111}\longrightarrow\mathbf{011})=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{3}+\mathbf{3}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})^{2}$. ΟΧΙ

D. $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\tau\rho\iota\pi\lambda}ή}=\boldsymbol{p}(\mathbf{000}\longrightarrow\mathbf{000})+\boldsymbol{p}(\mathbf{000}\longrightarrow\mathbf{001})+\boldsymbol{p}(\mathbf{000}\longrightarrow\mathbf{010})+\boldsymbol{p}(\mathbf{000}\longrightarrow\mathbf{100})=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{3}+\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{2}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{2}(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha})$

$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha\pi\lambda}ή}=\begin{matrix}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0}\longrightarrow\mathbf{0}\end{matrix}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$. Έχω $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\tau\rho\iota\pi\lambda}ή}>\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha\pi\lambda}ή}\Leftrightarrow(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{2}(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha})>(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\Leftrightarrow(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha})>\mathbf{1}\Leftrightarrow-\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^{2}+\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}\Leftrightarrow-\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}>\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{0}<\boldsymbol{\alpha}<\mathbf{1/2}$ Άρα ΟΚ. Άρα ABD

Μέρος 3. Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού: έχει συνολικά 4 ερωτήσεις, κάθε ερώτηση έχει 5 βαθμούς, συνολικά 20 βαθμούς.

13. Αν για τα διανύσματα $\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}$, έχω $|\ \vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\ |=\sqrt{\mathbf{3}}$, $|\ \vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}\ |=|\ \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}\ |$, τότε $|\ \vec{\boldsymbol{b}}\ |=$___

Λύση

Έχω $|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}+\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}-\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}=\mathbf{3}\Leftrightarrow|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}=-\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}+\mathbf{3}$,

$|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}+\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}=\mathbf{4}|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}+\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}-\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\Leftrightarrow$

$\mathbf{3}|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}=\mathbf{6}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\Leftrightarrow|\vec{\boldsymbol{a}}|^{2}=\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\Longrightarrow-\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}+\mathbf{3}=\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\Longrightarrow\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|^{2}=\mathbf{3}\Longrightarrow\boxed{\left|\vec{\boldsymbol{b}}\right|=\sqrt{\mathbf{3}}}$

14. Μια κανονική τετράγωνη πυραμίδα με μήκος πλευράς βάσης 4 κόβεται από ένα επίπεδο παράλληλο με την επιφάνεια βάσης της. Αν κατ' αυτόν τον τρόπο αποκοπεί μια κανονική τετράγωνη πυραμίδα με μήκος πλευράς βάσης 2 και ύψος 3, ο όγκος του εναπομείναντος στερεού είναι ____

Λύση

Έχω $\frac{\boldsymbol{\beta}ά\boldsymbol{\sigma\eta}_{\boldsymbol{\alpha\rho\chi\iota\kappa}ή\boldsymbol{\varsigma}}}{ύ\boldsymbol{\psi o\varsigma}_{\boldsymbol{\alpha\rho\chi\iota\kappa}ή\boldsymbol{\varsigma}}}=\frac{\boldsymbol{\beta}ά\boldsymbol{\sigma\eta}_{\boldsymbol{\alpha\pi o\kappa o\mu\mu}έ\boldsymbol{\nu\eta\varsigma}}}{ύ\boldsymbol{\psi o\varsigma}_{\boldsymbol{\alpha\pi o\kappa o\mu\mu}έ\boldsymbol{\nu\eta\varsigma}}}\Longrightarrow\frac{\mathbf{4}}{ύ\boldsymbol{\psi o\varsigma}_{\boldsymbol{\alpha\rho\chi\iota\kappa}ή\boldsymbol{\varsigma}}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\Longrightarrow\boldsymbol{h}=ύ\boldsymbol{\psi o\varsigma}_{\boldsymbol{\alpha\rho\chi\iota\kappa}ή\boldsymbol{\varsigma}}=\mathbf{6}$

Άρα

$$V = V_{αρχικής} - V_{αποκομμένης} = 1/3(βάση_{αρχικής})ύψος_{αρχικής} - 1/3(βάση_{αποκομμένης})ύψος_{αποκομμένης}$$
$$= 1/3(4\cdot 4)6 - 1/3(2\cdot 2)3 = \boxed{28}$$

15. Είναι γνωστό ότι η ευθεία $x - my + 1 = 0$ και ο κύκλος $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ τέμνονται σε δύο σημεία A και B. Βρείτε μια τιμή m που να ικανοποιεί "το εμβαδόν του $\triangle ABC$ είναι $\frac{8}{5}$" είναι η $m =$ _

Λύση

Έχω κέντρο $K(1,0)$, $R = 2$, M μέσο της χορδής AB, $CM = d(K, AB) = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+m^2}} = \frac{2}{\sqrt{1^2+m^2}}$

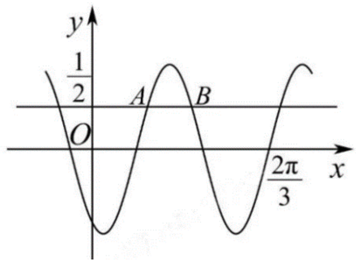
Για τα A, B έχω $(my-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (m^2+1)y^2 - 4my = 0 \Rightarrow y_A = 0, y_B = \frac{4m}{m^2+1}$

$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = m^2(y_A - y_B)^2 + (y_A - y_B)^2 =$$

$(m^2+1)(y_A - y_B)^2 = (m^2+1)\left(\frac{4m}{m^2+1}\right)^2 = \frac{16m^2}{m^2+1} \Rightarrow AB = \frac{4|m|}{\sqrt{m^2+1}}$.

Άρα $\frac{8}{5} = (\triangle ABC) = \frac{1}{2}\frac{4|m|}{\sqrt{m^2+1}}\frac{2}{\sqrt{1^2+m^2}} = \frac{4|m|}{m^2+1} = \frac{4|m|}{|m|^2+1} \Rightarrow 8|m|^2 - 20|m| + 8 = 0 \Rightarrow 2|m|^2 - 5|m| + 2 = 0 \Rightarrow (|m|-2)(2|m|-1) = 0 \Rightarrow \boxed{m = \pm 2 \text{ ή } m = \pm\frac{1}{2}}$

16. Αν συνάρτηση $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, και όπως φαίνεται στο σχήμα τα A, B σημεία τομής της ευθείας γραμμής $y = \frac{1}{2}$ με την καμπύλη $y = f(x)$, τέτοια ώστε $|AB| = \frac{\pi}{6}$, τότε $f(\pi) =$______



Λύση

Έχω $A\left(x_A, \frac{1}{2}\right), B\left(x_A + \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ και $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \omega x_A + \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\omega x_B + \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \omega x_A + \frac{\pi}{6}\omega + \varphi = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \omega = 4$. Ακόμα $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(4\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi}{3}$

Άρα $f(\pi) = \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Μέρος 4. Αποτελείται από συνολικά 6 ερωτήσεις, συνολικού αριθμού 70 πόντων. Η απάντηση θα πρέπει να περιλαμβάνει γραπτή εξήγηση, διαδικασία απόδειξης ή βήματα υπολογισμού.

17. (12 βαθμοί)

Σε τρίγωνο $\triangle ABC$ με μήκη πλευρών a, b, c, εμβαδόν $(\triangle ABC) = \sqrt{3}$, D είναι το μέσο του BC, και $AD = 1$.

(1) Αν $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, τότε να βρεθεί το $\tan B$

(2) Αν $b^2 + c^2 = 8$, να βρεθούν τα b, c

Λύση

(1) Έστω E η προβολή του A στο BC. Τότε $AE = \upsilon = \sin 60° AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$(\triangle ABC) = \frac{1}{2}BC\,\upsilon \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2}BC\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 4, BD = 2$.

Έχω $BE = BD + DE = 2 + \cos\widehat{ADC}\,AD = \frac{5}{2}$. Άρα $\tan B = \frac{AE}{BE} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{5}}$

(2) Από θεώρημα διαμέσων έχω $b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 8 = 2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 12$

Από $(\triangle ABC) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{3} \Rightarrow bc\sin A = 2\sqrt{3}$

Από νόμο συνημιτόνων έχω $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow bc\cos A = -2$

Άρα $b^2c^2 = b^2c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = 4 + 12 = 16 \xRightarrow{b^2+c^2=8} b^2 = c^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b = c = 2}$.

18. (12 βαθμοί)

Αν a_n αριθμητική πρόοδος και $b_n = \begin{cases} a_n - 6 (n\ περιττός), \\ 2a_n (n\ άρτιος), \end{cases}$

S_n, T_n τα αθροίσματα των n πρώτων όρων των ακολουθιών a_n, b_n αντίστοιχα, $S_4 = 32$, $T_3 = 16$.

(1) Βρείτε τον γενικό τύπο του $\boldsymbol{a_n}$

(2) Να δείξετε ότι: όταν $\boldsymbol{n > 5}$, τότε $\boldsymbol{T_n > S_n}$

Λύση

(1) Έχω $\boldsymbol{S_4 = 4\,\frac{2\alpha_1+3\omega}{2} \Rightarrow 16 = 2\alpha_1 + 3\omega}$

$\boldsymbol{T_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \alpha_1 - 6 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 6 \Rightarrow 16 = 3\,\frac{2\alpha_1+2\omega}{2} + \alpha_2 - 12 \Rightarrow}$

$\boldsymbol{28 = 3\,(\alpha_1 + \omega) + \alpha_1 + \omega \Rightarrow \alpha_1 + \omega = 7 \xRightarrow{16=2\alpha_1+3\omega} \alpha_1 = 5,\ \omega = 2}$.

Άρα $\boldsymbol{\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 5 + 2n - 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_n = 2n+3}}$

(2) Έχω $\boldsymbol{S_n = n\frac{2\alpha_1+(n-1)\omega}{2} = n\frac{10+(n-1)2}{2} = n(n+4)}$

Από (1) έχω $\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 2n+3-6 & (n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) \\ 2(2n+3) & (n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma) \end{cases} = \begin{cases} 2n-3, & (n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma) \\ 4n+6, & (n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma) \end{cases}}$

Έστω $\boxed{\boldsymbol{n = 2k}}$, τότε

$$\boldsymbol{T_n = \sum_{i=1}^{n} b_n = \sum_{i=1}^{k}(b_{2i} + b_{2i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(8i + 6 + 2(2i-1) - 3) = \sum_{i=1}^{k}(12i+1) = 12\frac{k(k+1)}{2} + k}$$
$$\boldsymbol{= 6k^2 + 7k}$$

Έχω $\boldsymbol{T_n - S_n = 6k^2 + 7k - \big(2k(2k+4)\big) = 2k^2 - k = k(2k-1) > 0\ \forall k > 1\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \forall n > 2}$

Έστω $\boxed{\boldsymbol{n = 2k+1}}$, τότε

$$\boldsymbol{T_n = \sum_{i=1}^{n} b_n = \sum_{i=1}^{k}(b_{2i} + b_{2i-1}) + b_{2k+1} = 6k^2 + 7k + 2(2k+1) - 3 = 6k^2 + 11k - 1}$$

$\boldsymbol{S_n = (2k+1)(2k+5) = 4k^2 + 12k + 5}$

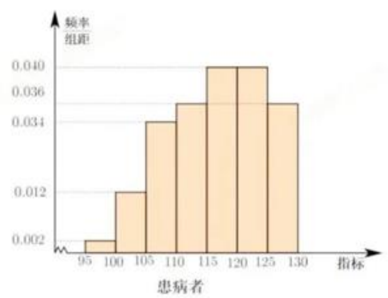
Έχω $\boldsymbol{T_n - S_n = 2k^2 - k - 6 = (k-2)(2k+3) > 0\ \forall\ k > 2\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \forall\ n > 5}$

Άρα όταν $\boldsymbol{n > 5}$, τότε $\boldsymbol{T_n > S_n}$.

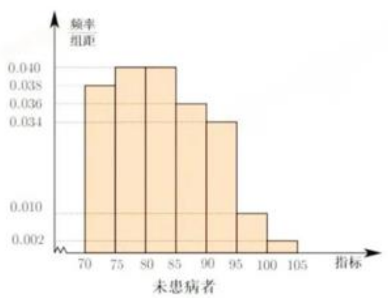
19. (12 βαθμοί) Μια ερευνητική ομάδα ανακάλυψε μέσω έρευνας ότι υπάρχει σημαντική διαφορά σε έναν συγκεκριμένο ιατρικό δείκτη μεταξύ ασθενών με μια συγκεκριμένη ασθένεια και εκείνων χωρίς τη νόσο. Μετά από μεγάλο αριθμό ερευνών, έλαβε τους ακόλουθους δείκτες για ασθενείς με τη νόσο και εκείνων χωρίς τη νόσο

Ιστογράμματα κατανομής συχνότητας: Κατακόρυφος άξονας y= {συχνότητα / ομάδα τιμών}

Οριζόντιος άξονας x=Τιμή Δείκτη



Ποσοστό Πραγματικών ασθενών ανά ομάδα τιμών δείκτη



Ποσοστό Πραγματικών Υγιών ανά ομάδα τιμών δείκτη

Για να χρησιμοποιήσετε αυτόν τον δείκτη, ώστε να διαμορφώσετε ένα πρότυπο ανίχνευσης, είναι απαραίτητο να προσδιορίσετε την κρίσιμη τιμή $\boldsymbol{c}$. Τα άτομα με τιμή του δείκτη μεγαλύτερη από $\boldsymbol{c}$ θα κριθούν ως θετικά και τα άτομα με μικρότερη από ή ίση με $\boldsymbol{c}$ θα κριθούν άνοσα. Το ποσοστό λανθασμένης διάγνωσης αυτού του προτύπου δοκιμής συνίσταται σε α) την πιθανότητα ο πραγματικός ασθενής να διαγνωστεί ως υγιής (καταγράφεται ως $\boldsymbol{p(\mathrm{c})}$) και β) την πιθανότητα ο πραγματικός υγιής να διαγνωστεί ως θετικός (καταγράφεται ως $\boldsymbol{q(\mathrm{c})}$).

Υπόθεση. Τα δεδομένα κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στην ομάδα και η συχνότητα εμφάνισης συμβάντος χρησιμοποιείται ως πιθανότητα του αντίστοιχου συμβάντος.

(1) Όταν $\boldsymbol{p(c) = 0,5\%}$, βρείτε την κρίσιμη τιμή $\boldsymbol{c}$ και το ποσοστό διάγνωσης $\boldsymbol{q(c)}$

(2) Αν $\boldsymbol{f(c) = p(c) + q(c)}$, τότε βρείτε αναλυτική έκφραση της $\boldsymbol{f(c)}$, όταν $\boldsymbol{c \in [95, 105]}$, και την ελάχιστη τιμή της $\boldsymbol{f(c)}$ στο διάστημα $\boldsymbol{[95, 105]}$.

Λύση

(1) Παρατηρώ ότι οι αληθινά ασθενείς εμφανίζουν τιμές του δείκτη στο διάστημα $\boldsymbol{[95, 130]}$, ενώ οι αληθινά υγιείς εμφανίζουν τιμές του δείκτη στο διάστημα $\boldsymbol{[70, 95]}$. Το κοινό διάστημα όπου μπορεί να γίνουν οι λάθος διαγνώσεις είναι το $\boldsymbol{[95, 105]}$, άρα $\boldsymbol{c \in [95, 105]}$. Έχω $\boldsymbol{5 \cdot 0,002 = 0,010 > 0,5\%}$ άρα από το 1ο διάγραμμα έχω $\boldsymbol{c \in [95, 100]}$.

Αφού $\boldsymbol{p(c) = 0,5\% \Rightarrow (c - 95)0,002 = 0,005 \Rightarrow \boxed{c = 97,5}}$

Από το 2ο διάγραμμα έχω τώρα ότι $\boldsymbol{q(c) = 0,010(100 - 97,5) + 5 \cdot 0,002 = 0,035 = \boxed{3,5\%}}$

(2) Αν $\boldsymbol{c \in [95, 100]}$, τότε $\boldsymbol{q(c) = 0,010(100 - c) + 5 \cdot 0,002, p(c) = (c - 95)0,002}$. Άρα $\boldsymbol{f(c) = -0,080c + 0,082}$

Αν $\boldsymbol{c \in [100, 105]}$, τότε $\boldsymbol{q(c) = 0,020(105 - c), p(c) = (c - 100)0,012 + 5 \cdot 0,002}$. Άρα $\boldsymbol{f(c) = 0,010c - 0,980}$

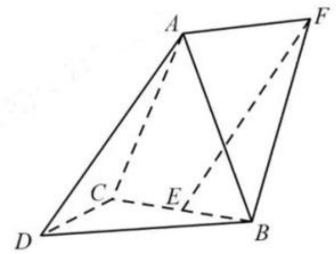
Άρα $\boxed{\boldsymbol{f(c) = \begin{cases} -0,080c + 0,082, & c \in [95, 100) \\ 0,010c - 0,980, & c \in [100, 105] \end{cases}}}$

Αφού η συνεχής συνάρτηση $\boldsymbol{f \downarrow [95, 100]}$ και $\boldsymbol{f \uparrow [100, 105]}$, έπεται ότι η $\boldsymbol{f}$ έχει ελάχιστο για $\boldsymbol{x = 100}$ την τιμή $\boxed{\boldsymbol{f(100) = 0,020}}$

20. (12 βαθμοί) Στο τετράεδρο $\boldsymbol{A - BCD}$, έχω $\boldsymbol{DA = DB = DC}$, $\boldsymbol{BD \perp CD, \angle ADB = \angle ADC = 60^\circ}$. Είναι γνωστό ότι $\boldsymbol{E}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{BC}$.

(1) Να δείξετε ότι $\boldsymbol{BC \perp DA}$

(2) Αν το σημείο F είναι τέτοιο ώστε $\boldsymbol{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}}$, βρείτε το ημίτονο της διεδρικής γωνίας D-AB-F.



Λύση

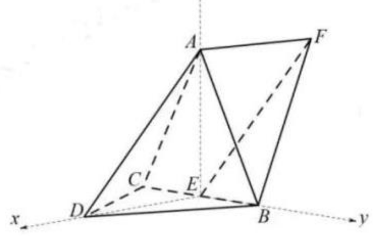
(1) Έχω $\boldsymbol{DB = DC}$ και ότι $\boldsymbol{E}$ είναι το μέσο του $\boldsymbol{BC}$, άρα $\boldsymbol{DE}$ μεσοκάθετος του $\boldsymbol{BC}$, άρα $\boldsymbol{DE \perp BC}$.(a)

Έχω ότι τα ισόπλευρα $\boldsymbol{\triangle ADB = \triangle ADC}$ (πγπ) άρα $\boldsymbol{AB = AC = DA = DB = DC}$.

Έχω $\boldsymbol{EB = CE}$ στο ισοσκελές $\boldsymbol{\triangle ABC}$, άρα $\boldsymbol{AE}$ μεσοκάθετος του $\boldsymbol{BC}$, άρα $\boldsymbol{AE \perp BC}$.(β)

Από (α) και (β) έχω $\boldsymbol{ADE \perp BC \xRightarrow{AD \in ADE} AD \perp BC}$

(2) Ορίζουμε σύστημα συντεταγμένων $\boldsymbol{xyz}$ με αρχή των αξόνων το σημείο $\boldsymbol{E}$, άξονα $\boldsymbol{x}$ την ευθεία $\boldsymbol{ED}$, άξονα $\boldsymbol{y}$ την ευθεία $\boldsymbol{EB}$, άξονα $\boldsymbol{z}$ την ευθεία $\boldsymbol{EA}$. Το σύστημα αυτό είναι ορθοκανονικό από το (1).



Έστω $\boldsymbol{AB = AC = DA = DB = DC = k}$ (για ευκολία στις πράξεις).

Έχω $\boldsymbol{E(0, 0, 0)}$. Έχω ότι τα ισόπλευρα $\boldsymbol{\triangle CDB = \triangle ABC}$ (πππ)

Άρα οι διάμεσοί τους $\boldsymbol{AE = DE \xRightarrow{\Pi.\Theta\ \sigma\tau o\ ADE} AD^2 = 2DE^2 \Rightarrow DE = k/\sqrt{2}, D\big(k/\sqrt{2}, 0, 0\big), A\big(0, 0, k/\sqrt{2}\big)}$. Από Π.Θ στο DEB έχω $\boldsymbol{BE^2 = DB^2 - DE^2 = k^2/2, B\big(0, k/\sqrt{2}, 0\big)}$. Άρα από $\boldsymbol{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = \big(-k/\sqrt{2}, 0, k/\sqrt{2}\big) \Rightarrow F\big(-k/\sqrt{2}, 0, k/\sqrt{2}\big)}$.

Άρα για το επίπεδο ABF έχουμε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & k/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & k/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -k/\sqrt{2} & 0 & k/\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$x(-k/\sqrt{2})\begin{vmatrix} k/\sqrt{2} & 1 \\ k/\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} - y(-1)\begin{vmatrix} 0 & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & k/\sqrt{2} \end{vmatrix} + z(1)\begin{vmatrix} 0 & k/\sqrt{2} \\ -k/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} - (-k/\sqrt{2})\begin{vmatrix} 0 & k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$0x + y(k/\sqrt{2})^2 + z(-k/\sqrt{2})^2 - (k/\sqrt{2})^3 = 0 \Rightarrow 0x + 1y + 1z - k/\sqrt{2} = 0$$

Άρα το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο ABF είναι το $\vec{n}(0,1,1)$.

Άρα για το επίπεδο ABD έχουμε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & k/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & k/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ k/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$(-k/\sqrt{2})^2 x + y(-k/\sqrt{2})^2 + z(-k/\sqrt{2})^2 - (k/\sqrt{2})^3 = 0 \Rightarrow 1x + 1y + 1z - k/\sqrt{2} = 0$$

Άρα το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο ABD είναι το $\vec{m}(1,1,1)$.

Έχω $cos(\widehat{\vec{n}\,\vec{m}}) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow sin(\widehat{\vec{n}\,\vec{m}}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

21) Το κέντρο της υπερβολής (c) είναι η αρχή των αξόνων, η αριστερά εστία το $F_1(-2\sqrt{5},0)$ και η εκκεντρότητα είναι ίση με $\sqrt{5}$. (1) Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (2) Αν η αριστερή και δεξιά κορυφή της υπερβολής είναι οι A_1, A_2 αντίστοιχα και η ευθεία που διέρχεται από το $B(-4,0)$ τέμνει τον αριστερό κλάδο της υπερβολής στα σημεία M και N και οι ευθείες MA_1 και NA_2 τέμνονται στο P, να δειχθεί ότι το σημείο P βρίσκεται σε μια καθορισμένη ευθεία.

Λύση

(1) Έχω $\gamma = 2\sqrt{5}$, $\gamma^2 = a^2 + \beta^2 \Rightarrow 20 = a^2 + \beta^2$ Ακόμα έχω $\varepsilon^2 = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow 5 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow 4a^2 = \beta^2 \Rightarrow a^2 = 4$, $\beta^2 = 16$. Άρα η εξίσωση της υπερβολής είναι : $\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1}$

(2) Η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $B(-4,0)$ με συντελεστή διεύθυνσης λ είναι της μορφής : $y - 0 = \lambda(x - (-4))$ ή $y = \lambda(x+4)$. Άρα για τις τετμημένες των σημείων Μ και Ν έχω: $\frac{x^2}{4} - \frac{(\lambda(x+4))^2}{16} = 1 \Leftrightarrow (4-\lambda^2)x^2 - 8\lambda^2 x - 16(\lambda^2+1) = 0$

Άρα από τύπους Vieta, $x_M + x_N = \frac{8\lambda^2}{4-\lambda^2}$, $x_M x_N = \frac{-16(\lambda^2+1)}{4-\lambda^2}$.

Αφού $a^2 = 4$, οι κορυφές της υπερβολής είναι οι $A_1(-2,0), A_2(2,0)$

Ευθεία MA_1: $\frac{y-y_M}{x-x_M} = \frac{y_M - y_{A_1}}{x_M - x_{A_1}} \Rightarrow \frac{y-y_M}{x-x_M} = \frac{y_M}{x_M+2}$. Ευθεία NA_2: $\frac{y-y_N}{x-x_N} = \frac{y_N - y_{A_2}}{x_N - x_{A_2}} \Rightarrow \frac{y-y_N}{x-x_N} = \frac{y_N}{x_N-2}$

Στο σημείο τομής των παραπάνω 2 ευθειών έχουμε, αφού λύσουμε ως προς y:

$$y = y_M + \frac{y_M(x-x_M)}{x_M+2} = y_N + \frac{y_N(x-x_N)}{x_N-2} \Rightarrow y_M - y_N = \frac{y_N x - y_N x_N}{x_N - 2} - \frac{y_M x - y_M x_M}{x_M+2} \Rightarrow$$

$$\lambda(x_M - x_N) = x\left(\frac{y_N}{x_N-2} - \frac{y_M}{x_M+2}\right) - \frac{y_N x_N}{x_N-2} + \frac{y_M x_M}{x_M+2} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda(x_M-x_N)(x_N-2)(x_M+2)}{(x_N-2)(x_M+2)} = x\left(\frac{y_N(x_M+2) - y_M(x_N-2)}{(x_N-2)(x_M+2)}\right) + \frac{y_M x_M(x_N-2) - y_N x_N(x_M+2)}{(x_N-2)(x_M+2)} \Rightarrow$$

$$\lambda(x_M-x_N)(x_N-2)(x_M+2) = x\big(y_N(x_M+2) - y_M(x_N-2)\big) + y_M x_M(x_N-2) - y_N x_N(x_M+2) \Rightarrow$$

$\lambda(x_M - x_N)(x_N x_M - 2x_M + 2x_N - 4) = x(y_N x_M + 2y_N - y_M x_N + 2y_M) + y_M x_M x_N - 2y_M x_M - y_N x_N x_M - 2y_N x_N \Rightarrow$
$x(y_N x_M + 2y_N - y_M x_N + 2y_M) = \lambda(x_M - x_N)(x_N x_M - 2x_M + 2x_N - 4) - y_M x_M x_N + 2y_M x_M + y_N x_N x_M + 2y_N x_N \xRightarrow{y=\lambda x+4\lambda}$

$$x(\lambda x_N x_M + 4\lambda x_M + 2\lambda x_N + 8\lambda - \lambda x_M x_N - 4\lambda x_N + 2\lambda x_M + 8\lambda)$$
$$= \lambda x_M x_N x_M - \lambda x_N x_N x_M - 2\lambda x_M x_M + 2\lambda x_M x_N + 2\lambda x_M x_N - 2\lambda x_N x_N - 4\lambda x_M + 4\lambda x_N - \lambda x_M x_M x_N - 4\lambda x_M x_N + 2\lambda x_M x_M + 8\lambda x_M + \lambda x_N x_N x_M + 4\lambda x_N x_M + 2\lambda x_N x_N + 8\lambda x_N \Rightarrow$$
$$x(6\lambda x_M - 2\lambda x_N + 16\lambda) = 4\lambda x_M x_N + 12\lambda x_N + 4\lambda x_M \Rightarrow$$
$$x(6x_M - 2x_N + 16) = 4x_M x_N + 12x_N + 4x_M \Rightarrow$$
$$x\left(6x_M - 2\left(\frac{8\lambda^2}{4-\lambda^2} - x_M\right) + 16\right) = 4\frac{-16(\lambda^2+1)}{4-\lambda^2} + 12\left(\frac{8\lambda^2}{4-\lambda^2} - x_M\right) + 4x_M \Rightarrow$$
$$x\left(8x_M - \frac{16\lambda^2}{4-\lambda^2} + 16\right) = \frac{-64\lambda^2 - 64}{4-\lambda^2} + \frac{96\lambda^2}{4-\lambda^2} - 8x_M \Rightarrow$$
$$x\left(8x_M - \frac{16\lambda^2}{4-\lambda^2} + \frac{64 - 16\lambda^2}{4-\lambda^2}\right) = \frac{32\lambda^2 - 64}{4-\lambda^2} - 8x_M \Rightarrow$$
$$x\left(8x_M + \frac{64 - 32\lambda^2}{4-\lambda^2}\right) = \frac{32\lambda^2 - 64}{4-\lambda^2} - 8x_M \Rightarrow x = -1$$

Άρα το κοινό σημείο βρίσκεται στην ευθεία $\boxed{\mathbf{x = -1}}$

22. (12 βαθμοί)

(1) Να δειχθεί ότι: αν $0 < x < 1$, τότε $x - x^2 < \sin x < x$

(2) Αν η συνάρτηση $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, και στο $x = 0$ είναι το μέγιστο σημείο τιμής του $f(x)$, να βρείτε το εύρος τιμών α.

Λύση

(1) Έστω $\varphi(x) = x - x^2 - \sin x, x \in (0,1)$. Έχω $\varphi'(x) = 1 - 2x - \cos x$, $\varphi''(x) = -2 + \sin x < 0, x \in (0,1)$. Άρα $\varphi' \downarrow (0,1) \Rightarrow \varphi'(x) < \varphi'(0) = 0, x \in (0,1) \Rightarrow \varphi \downarrow (0,1) \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) = 0, x \in (0,1) \Rightarrow x - x^2 < \sin x, x \in (0,1)$. Όμοια $\sin x < x, x \in (0,1)$

(2) Έχω $D_f = x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 > 0 = (-1,1)$. $f'(x) = -\alpha \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}$,
$f''(x) = -\alpha^2 \cos ax + \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = -\alpha^2 \cos ax + \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$.
$f'(0) = 0, f''(0) = -\alpha^2 + 2$. Αν $f'(0) = 0, f''(0) > 0$, τότε έχω ελάχιστο στο $x = 0$, απορρίπτεται. Για να έχω μέγιστο στο $x = 0$, αρκεί $f'(0) = 0, f''(0) < 0$, άρα $-\alpha^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.
Εξετάζουμε και την αδιευκρίνιστη περίπτωση $f'(0) = 0, f''(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}$
Έχω από ερώτημα (1) ότι $\sin x < x, x \in (0,1)$ άρα $\sin x > x, x \in (-1,0)$
Οπότε
Αν $\alpha = -\sqrt{2}$, $f'(x) = \sqrt{2}\sin(-\sqrt{2}x) + \frac{2x}{1-x^2}$
Αν $x \in (-1,0)$ τότε $f'(x) < \sqrt{2}(-\sqrt{2}x) + \frac{2x}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x^3}{1-x^2} < 0, x \in (-1,0)$ Άρα $f \downarrow (-1,0) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0, x \in (-1,0)$ και η f δεν έχει μέγιστο στο $x = 0$.

Αν $\alpha = \sqrt{2}$, $f'(x) = -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + \frac{2x}{1-x^2}$
Αν $x \in (0,1)$ τότε $f'(x) > -\sqrt{2}(\sqrt{2}x) + \frac{2x}{1-x^2} = -2x + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x^3}{1-x^2} > 0, x \in (0,1)$ Άρα $f \uparrow (0,1) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0, x \in (0,1)$ και η f δεν έχει μέγιστο στο $x = 0$.
Τελικά $\boxed{\alpha \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)}$.

[Πηγές]

Κίνα - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)
Σχολικό σύστημα στην Κίνα - alinks.org
10 πράγματα για την εκπαίδευση στην Κίνα που έμαθα κατά την διαμονή μου εκεί. | CityPatras
Παιδιά Κίνα: Το Πεκίνο επαναπροσδιορίζει το εκπαιδευτικό σύστημα | healthweb.gr
[Η εκπαίδευση στην Κίνα έχει ιδιαίτερη βαρύτητα και σημασία.] 1 νέο μήνυμα (kapatou.gr)
What Is The Gaokao? (Plus 7 Sample Exam Questions And Their Full Solutions) - TutorOcean
https://corp.tutorocean.com/previous-gaokao-exam-math-questions-and-solutions/

What are the list of topics of the Gaokao exam in math and science? - Quora
https://www.quora.com/What-are-the-list-of-topics-of-the-Gaokao-exam-in-math-and-science

2016 Jiangsu Gaokao (National Higher Education Entrance Exam)— Mathematics | by Yujia | Medium
https://medium.com/@yujia_jo/2016-jiangsu-gaokao-national-higher-education-entrance-exam-mathematics-2beefb93cec7

2016江苏高考数学附加题及答案- **南京本地宝** (bendibao.com)
2016江苏高考数学附加题及答案- **南京本地宝** (bendibao.com)

2016江苏高考数学附加题及答案- **南京本地宝** (bendibao.com)
http://nj.bendibao.com/edu/2016612/61887.shtm
http://nj.bendibao.com/edu/2016612/61883_2.shtm
https://www.eol.cn/e_html/gk/gkst/index.shtml

https://www.gaokao.com/e/20230530/6475e2537f156.shtml