[Η Γερμανία]
Η Γερμανία, επίσημα Ομοσπονδιακή Δημοκρατία της Γερμανίας (γερμανικά: Bundesrepublik Deutschland), με πληθυσμό 84.482.267 κατοίκους, είναι η δεύτερη μεγαλύτερη σε πληθυσμό χώρα της Ευρώπης, και πρώτη στην Ευρωπαϊκή Ένωση, καθώς και μία από τις σημαντικότερες βιομηχανικές και ανεπτυγμένες χώρες του κόσμου. Έχει συνολική έκταση 357.386 τ.χλμ.

Η Γερμανία (η τότε Δυτική Γερμανία) είναι ένα από τα ιδρυτικά μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Επίσης, η Γερμανία είναι ο δεύτερος πιο δημοφιλής προορισμός μετανάστευσης μετά από τις Ηνωμένες Πολιτείες.

Η πρωτεύουσα και η μεγαλύτερη μητρόπολη της Γερμανίας είναι το Βερολίνο, ενώ η μεγαλύτερη συγκέντρωση είναι στην κοιλάδα του Ρουρ, (κύρια κέντρα: Ντόρτμουντ και Έσσεν). Στις άλλες μεγάλες πόλεις της χώρας συμπεριλαμβάνονται το Αμβούργο, το Μόναχο, η Κολωνία, η Φρανκφούρτη, η Στουτγκάρδη, το Ντίσελντορφ, η Λειψία, η Βρέμη, η Δρέσδη, το Αννόβερο και η Νυρεμβέργη.

[Εκπαιδευτικό Σύστημα Γερμανίας]
Είναι συναρπαστικό να εξετάσουμε το γερμανικό σχολικό σύστημα και να μάθουμε πώς λειτουργεί. Παρόλο που οι γερμανικοί εκπαιδευτικοί νόμοι είναι μοναδικοί για κάθε ένα από τα 16 ομοσπονδιακά κράτη της Γερμανίας, υπάρχουν ορισμένα γενικά πρότυπα που μας βοηθούν να κατανοήσουμε το σύστημα. Ακολουθεί μια επισκόπηση των σχολείων πρωτοβάθμιας, δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης που αποτελούν το γερμανικό σχολικό σύστημα.

[Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στην Γερμανία]
Νηπιαγωγείο / Kindergarten
Τα παιδιά ηλικίας 3 έως 6 ετών έχουν τη δυνατότητα να παρακολουθήσουν κρατικά προγράμματα προσχολικής εκπαίδευσης (συχνά νεότερα). Αυτά τα προγράμματα δεν είναι δωρεάν και δεν είναι επίσης υποχρεωτικά. Οι γονείς μπορούν είτε να επιλέξουν να εγγράψουν τα παιδιά τους, είτε όχι.

Δημοτικό / Θεμελιώδες Σχολείο (Grundschule)
Η υποχρεωτική εκπαίδευση αρχίζει από την ηλικία των έξι ετών. Όλοι οι φοιτητές υποχρεούνται να εγγραφούν στο σχολείο, είτε πρόκειται για δημόσιο, ιδιωτικό, εκπαιδευτικό ίδρυμα είτε για ιδιωτική εκπαίδευση. Η κατ 'οίκον εκπαίδευση είναι παράνομη. Οι περισσότεροι φοιτητές στη Γερμανία παρευρίσκονται σε κρατικά δημόσια σχολεία, τα οποία είναι δωρεάν για τις οικογένειες. Από την ηλικία των έξι έως τα δέκα περίπου, οι φοιτητές λαμβάνουν θεμελιώδη εκπαίδευση. Το πρόγραμμα σπουδών είναι το ίδιο για όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από την ικανότητα.

[Δευτεροβάθμια εκπαίδευση Γερμανίας]
Μετά από τέσσερα χρόνια Grundschule, οι γονείς και οι εκπαιδευτικοί εργάζονται μαζί για να "παρακολουθήσουν" τον σπουδαστή σε μια εκπαιδευτική διαδρομή που ταιριάζει στις ικανότητες και τους στόχους του σπουδαστή. Οι εκπαιδευτικοί παρέχουν συστάσεις με βάση τις ικανότητες του μαθητή στην τάξη, τα επίπεδα εμπιστοσύνης και το επίπεδο ανεξαρτησίας.

Οι γονείς έχουν συνήθως τον τελευταίο λόγο στο θέμα και αποφασίζουν ποιο σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το παιδί τους θα παρακολουθήσει. Όταν αποφασίζουν, πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους μελλοντικούς στόχους του παιδιού και ποιο σκοπό τελικά θα εξυπηρετήσει η εκπαίδευση. Συνήθως, οι επιλογές για τα δευτεροβάθμια σχολεία περιλαμβάνουν τα Hauptschule, Realschule και Gymnasium. Σε ορισμένα κράτη, το Haupstchule και το Realschule ενσωματώνονται για να σχηματίσουν ένα ίδρυμα, το οποίο ονομάζεται Gesamtschule.

Hauptschule
Το Haupstschule απευθύνεται σε φοιτητές που εργάζονται καλύτερα με αργούς ρυθμούς. Δεν ενθαρρύνονται από την προοπτική να αποκτήσουν πτυχίο που θα τους επιτρέψει να κινηθούν προς το

πανεπιστημιακό περιβάλλον. Αντ' αυτού, ενδιαφέρονται να παρακολουθήσουν μια επαγγελματική σχολή. Τα προγράμματα Haupstchule γενικά τελειώνουν στην τάξη εννέα, όταν ένας φοιτητής προχωρεί στην επαγγελματική σχολή. Το πρόγραμμα σπουδών του Haupstschule περιλαμβάνει πολλές κατηγορίες εργασίας.

Realschule
Τα προγράμματα Realschule είναι πιο αυστηρά από τα προγράμματα Haupstchule όσον αφορά την ακαδημαϊκή μάθηση. Όλοι οι μαθητές υποχρεούνται να εκπαιδεύονται στα μαθηματικά, γερμανικά, ξένες γλώσσες και επιστήμες. Καθώς προχωρούν μέσω του προγράμματος, θα καλύπτουν επίσης τομείς όπως η θρησκεία, η γεωγραφία, οι κοινωνικές σπουδές, η οικογενειακή εστία και η τεχνολογία. Το πρόγραμμα σπουδών επικεντρώνεται σε ένα συνδυασμό επαγγελματικής κατάρτισης υψηλού επιπέδου και γενικής εκπαίδευσης. Οι μαθητές αναμένεται να έχουν μεγάλη ανεξαρτησία. Οι σπουδαστές του Realschule αποφοίτησαν μετά τον δέκατο βαθμό συμπληρώνοντας ένα πιστοποιητικό που ονομάζεται "Realschulabschluss". Κάποια στιγμή στην εμπειρία του Realschule, μπορούν επίσης να επιλέξουν (εάν τα ακαδημαϊκά τους επιτεύγματα είναι αρκετά υψηλά) να μεταβούν στο Γυμνάσιο και να επιτύχουν δίπλωμα.

Gymnasium
Τα προγράμματα του Γυμνασίου προσφέρουν στους σπουδαστές το υψηλότερο επίπεδο ακαδημαϊκής αυστηρότητας. Οι φοιτητές που παρακολουθούν το πρόγραμμα αυτό είναι πιθανό να έχουν υψηλά ακαδημαϊκά επιτεύγματα σε όλο το δημοτικό σχολείο. Αυτό το πρόγραμμα οδηγεί σε ένα δίπλωμα, το οποίο ονομάζεται "Abitur", ή "Abi". Γενικά, οι φοιτητές λαμβάνουν το δίπλωμά τους μετά το βαθμό δώδεκα ή δεκατρία. Μόλις αποκτήσουν ένα δίπλωμα, οι φοιτητές έχουν τα προσόντα να προχωρούν σε πανεπιστημιακά προγράμματα όπου μπορούν να παρακολουθήσουν ακαδημαϊκά ή επαγγελματικά πτυχία. Τα προγράμματα του Γυμνασίου περιλαμβάνουν τάξεις στις επιστήμες των υπολογιστών, τη φυσική, την αστική τάξη, τη φιλοσοφία, τη μουσική και την τέχνη.

Gesamtschule
Σε ορισμένα κράτη, το Hauptschule και το Realschule έχουν ενσωματωθεί σε ένα πρόγραμμα, το οποίο αναφέρεται ως "Gesamtschule". Οι σπουδαστές που αποφοιτούν μετά το βαθμό 9 θα λάβουν πτυχίο Hauptschule, ενώ όσοι θα συνεχίσουν μέχρι το βαθμό δέκα θα λάβουν πιστοποιητικό Realschulabschluss.

[Επιλογή Ακαδημαϊκής ή Επαγγελματικής Κατάρτισης]
Μόλις ο φοιτητής ολοκληρώσει το δευτεροβάθμιο πρόγραμμα, είτε πρόκειται για το Hauptschule, το Realschule, το Gymnasium ή το Gesamtschule, θα προχωρήσουν κατά μήκος της διαδρομής μάθησης τους σε ένα τριτοβάθμιο σχολείο. Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη Γερμανία, συμπεριλαμβανομένων των επαγγελματικών σχολών και διαφόρων κατηγοριών πανεπιστημιακών προγραμμάτων. Οι στατιστικές δείχνουν ότι τα τελευταία δέκα χρόνια η εγγραφή στα πανεπιστήμια έχει αυξηθεί.

Berufsschule
Οι απόφοιτοι του Hauptschule και του Realschule μπορούν να συμμετάσχουν σε ένα Berufsschule, το οποίο θα τους εκπαιδεύσει έτσι ώστε να μπορούν να πραγματοποιήσουν εμπόριο. Οι Berufsschules αποτελούνται από ακαδημαϊκά μαθήματα και μαθητεία. Αντί να ελέγχεται από το κράτος, αυτός ο τύπος προγράμματος μπορεί να εποπτεύεται από την ομοσπονδιακή κυβέρνηση ή ένα συνδικάτο για ένα συγκεκριμένο πεδίο σταδιοδρομίας.

[Πανεπιστήμιο]
Οι σπουδαστές που έχουν ολοκληρώσει ένα Γυμνάσιο και κατέχουν το δίπλωμά τους Abitur επιτρέπεται να υποβάλουν αίτηση για Πανεπιστήμια. Επίσης, οι φοιτητές μπορούν να λάβουν προσόντα με βάση συγκεκριμένους τομείς σπουδών και να αποκτήσουν πρόσβαση σε πανεπιστήμιο. Εάν ένας φοιτητής κατέχει πιστοποιητικό απολυτηρίου εκτός από το Abitur, όπως ένα δίπλωμα από διεθνές γυμνάσιο, ο

φοιτητής ενδέχεται να υποχρεωθεί να περάσει σε εξετάσεις ή να λάβει συγκεκριμένη σειρά μαθημάτων βασικής εκπαίδευσης πριν να εξεταστεί για εισαγωγή.

Ο τίτλος "Πανεπιστήμιο" στη Γερμανία αναφέρεται σε ένα ίδρυμα που μπορεί να απονείμει φοιτητές με διδακτορικό δίπλωμα. Το πρόγραμμα σπουδών του Πανεπιστημίου ποικίλλει. Ορισμένοι επικεντρώνονται σε συγκεκριμένους τομείς σπουδών, όπως η μουσική, η τέχνη ή η εκπαίδευση. Άλλα πανεπιστήμια μπορούν να επικεντρωθούν αποκλειστικά στις εφαρμοσμένες επιστήμες.

[Το σύστημα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης]
Στη Γερμανία υπάρχουν περισσότερα από 390 ανώτατα και ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα.

Οι κύριες κατηγορίες ιδρυμάτων τριτοβάθμιας εκπαίδευσης στη Γερμανία είναι οι εξής:

- Universität / Technische Universität (Πανεπιστήμιο / Τεχνικό πανεπιστήμιο)
- Fachhochschule (Πανεπιστήμιο Εφαρμοσμένων Επιστημών ή University of Applied Sciences)
- Kunsthochschule / Musikhochschule (Σχολές Καλών Τεχνών και Μουσικής)
- Private Hochschule (Ιδιωτικό πανεπιστήμιο)

Τα πανεπιστήμια (Universitäten) χαίρουν διεθνούς κύρους, προάγοντας την καινοτομία και την έρευνα. Με την ιδιότητά τους ως σύγχρονα πανεπιστήμια, συνδυάζουν τη βασική με την εφαρμοσμένη έρευνα. Οι συμφωνίες διεπιστημονικής συνεργασίας με πολυεθνικές εταιρίες ή εξωπανεπιστημιακά ερευνητικά κέντρα (όπως π.χ. Max-Planck-Institut) αποτελούν συνήθη πρακτική και συμβάλλουν στην ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας των πτυχιούχων.

Τα πολυάριθμα πανεπιστήμια εφαρμοσμένων επιστημών (Fachhochschulen / Universities of Applied Sciences) προσφέρουν υψηλής ποιότητας ακαδημαϊκή κατάρτιση για όσους δεν επιθυμούν οπωσδήποτε να ακολουθήσουν ακαδημαϊκή καριέρα, χωρίς όμως να τους αφαιρείται το δικαίωμα να αποκτήσουν ένα διδακτορικό σε ένα πανεπιστήμιο. Εκτός από τις θεωρητικές γνώσεις που προσφέρουν, τα πανεπιστήμια εφαρμοσμένων επιστημών δίνουν επίσης μεγάλη σημασία στην πρακτική εμπειρία που οι φοιτητές τους αποκτούν σε επιχειρήσεις ή οργανισμούς.

Οι Σχολές Καλών Τεχνών, Μουσικής και Κινηματογράφου αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι του συστήματος της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης της Γερμανίας προσφέροντας προγράμματα σπουδών υψηλού επιπέδου. Οι εισαγωγικές εξετάσεις σε αυτές τις σχολές είναι συνήθως εξαιρετικά δύσκολες και οι υποψήφιοι καλούνται να αποδείξουν το καλλιτεχνικό τους ταλέντο συναγωνιζόμενοι νέους από όλον τον κόσμο.

Τα γερμανικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης προσφέρουν ένα μεγάλο φάσμα προγραμμάτων σπουδών (περίπου 10.000 σε προπτυχιακό επίπεδο και 8.000 σε μεταπτυχιακό) τόσο στη γερμανική όσο και στην αγγλική γλώσσα. Οι σπουδές χωρίζονται συνήθως σε τριετή προπτυχιακά προγράμματα (Bachelor) και διετή μεταπτυχιακά προγράμματα (Master). Εξαίρεση αποτελούν οι κλάδοι της Νομικής, Ιατρικής (συμπεριλαμβανομένης της Οδοντιατρικής και Κτηνιατρικής), της Φαρμακευτικής και των Παιδαγωγικών, για τους οποίους οι φοίτηση διαρκεί περισσότερο και κλείνει με συμμετοχή σε κρατικές εξετάσεις (Staatsexamen).

Στα γερμανικά δημόσια πανεπιστήμια δεν υπάρχουν συνήθως δίδακτρα. Οι φοιτητές καλούνται να πληρώσουν μόνο την εξαμηνιαία συνεισφορά τους προς τη φοιτητική λέσχη του πανεπιστημίου, της οποίας το ποσό κυμαίνεται από 50 έως 350 ευρώ ανάλογα με τις παροχές του εκάστοτε πανεπιστημίου.

Όπως και στην Ελλάδα, τα μαθήματα στα γερμανικά ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης χωρίζονται σε δύο περιόδους: το χειμερινό εξάμηνο με αρχή μαθημάτων 1 Οκτωβρίου και το εαρινό εξάμηνο με αρχή μαθημάτων 1 Απριλίου.

[Αυτά είναι τα 5 καλύτερα πανεπιστήμια της Γερμανίας]
Η γερμάνια φημίζεται για τα πανεπιστήμιά της. Γι' αυτό και πολλοί νέοι σήμερα αναζητούν μία θέση σε αυτά. Ποια όμως είναι τα πανεπιστημιακά ιδρύματα στη Γερμανία που θα σας εξασφαλίσουν γρηγορότερα μια θέση στην αγορά εργασίας;
Η Times Higher Education (THE) κυκλοφόρησε τη λίστα με τα 150 πανεπιστήμια που παίρνουν άριστα στην επαγγελματική αποκατάσταση των αποφοίτων τους. Σε αυτά συμπεριλαμβάνονται τα παρακάτω γερμανικά πανεπιστημιακά ιδρύματα:

Technical University of Munich (TUM)
Το Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Μονάχου θεωρείται όγδοο καλύτερο σε όλο τον κόσμο και είναι ένα από τα μεγαλύτερα ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Ευρώπης. Διαθέτει ένα ευρύ φάσμα πτυχιακών προγραμμάτων, ενώ μόνο το 18% των 32.000 φοιτητών του πανεπιστημίου προέρχονται από το εξωτερικό. Τα τελευταία χρόνια το Πανεπιστήμιο του Μονάχου έχει αξιολογηθεί ως το καλύτερο Πανεπιστήμιο της Γερμανίας.

University of Munich (Ludwig-Maximilian University)
31η θέση σε όλο τον κόσμο. Είναι ένα από τα παλαιότερα πανεπιστήμια του κόσμου, οι ρίζες του φτάνουν πίσω στον 15 αιώνα, ενώ από αυτό το πανεπιστήμιο πέρασε ο διάσημος θεατρικός συγγραφέας Μπέρτολντ Μπρεχτ.

Το Πανεπιστήμιο του Μονάχου ιδρύθηκε το 1472 στο Ίνγκολστατ (Ingolstadt) από τον δούκα Λουδοβίκο τον Πλούσιο, όπου και στεγάστηκε μέχρι το 1800, όταν μεταφέρθηκε στο Λάντσχουτ (Landshut) με πρωτοβουλία του Μαξιμίλιαν IV Γιόζεφ. Το 1802 ονομάστηκε Ludwig-Maximilians-Universität (σύμφωνα με τα ονόματα των ιδρυτών του). Τελικά, το 1826, με πρωτοβουλία του βασιλιά της Βαυαρίας Λουδοβίκου, το πανεπιστήμιο μεταφέρθηκε στην πρωτεύουσα της Βαυαρίας, το Μόναχο.

Το 1943 η ομάδα "Weisse Rose" αντιναζιστών φοιτητών και καθηγητών, με εμπνευστές τα αδέλφια Σολ (Scholl) και τον καθηγητή Χούμπερ (Huber) ηγήθηκε εκστρατείας κατά του Χίτλερ.

Σήμερα το Πανεπιστήμιο του Μονάχου είναι μέλος 24 συνεργαζόμενων ερευνητικών κέντρων, που χρηματοδοτούνται από το Γερμανικό Ερευνητικό Ίδρυμα (DFG) και είναι πανεπιστήμιο – οικοδεσπότης για 13 από τα συνεργαζόμενα ερευνητικά κέντρα. Επίσης, είναι οικοδεσπότης σε 12 ερευνητικές εκπαιδευτικές ομάδες του DFG και τρία διεθνή προγράμματα διδακτορίας ως τμήμα του "δικτύου ελίτ" της Βαυαρίας. Προσελκύει πρόσθετα 120 εκατομμύρια ευρώ ετησίως από χρηματοδότηση από το εξωτερικό και περιλαμβάνεται εντατικά στις εθνικές και διεθνείς πρωτοβουλίες χρηματοδότησης.

Το Πανεπιστήμιο του Μονάχου έχει ευρύ φάσμα πτυχιακών προγραμμάτων, με 150 θέματα διαθέσιμα σε διάφορους συνδυασμούς. Το 15% των 45.000 φοιτητών του πανεπιστημίου προέρχονται από στο εξωτερικό.

Το 2005, οι ομοσπονδιακές κυβερνήσεις της Γερμανίας προώθησαν την «πρωτοβουλία τελειότητας» (Exzellenzinitiative), ένα διαγωνισμό έρευνας μεταξύ των πανεπιστημίων της Γερμανίας. Με συνολικά 1,9 δισεκατομμύριο ευρώ, 75% των οποίων προέρχονται από το κράτος, οι ομοσπονδιακές κυβερνήσεις στοχεύουν να προωθήσουν στρατηγικά την κορυφαία έρευνα και την καινοτομία.

Goethe University Frankfurt
50η θέση σε όλο τον κόσμο. Η τοποθεσία του στο οικονομικό κέντρο της Γερμανίας, την Φρανγκφούρτη προσφέρεται για παγκόσμιες συνδέσεις, στο πλαίσιο της πρωτοβουλίας της «διεθνούς πανεπιστημιούπολης». Το Πανεπιστήμιο Γκαίτε της Φρανκφούρτης (επίσης γνωστό ως Πανεπιστήμιο της Φρανκφούρτης, μέχρι την 1 Ιουνίου 2008 γνωστό ως Johann Wolfgang Goethe University Frankfurt am Main) ιδρύθηκε το 1914 ως Πανεπιστήμιο των Πολιτών, το οποίο σημαίνει ότι ενώ αυτό ήταν ένα πανεπιστήμιο της Πρωσίας είχε ιδρυθεί και χρηματοδοτούνταν από εύπορους και ενεργούς

φιλελεύθερους πολίτες της Φρανκφούρτης. Αυτό ήταν μοναδικό χαρακτηριστικό στην γερμανική ιστορία των πανεπιστήμιων. Πήρε το όνομά του το 1932 από έναν από τους πιο διάσημους πολίτες της Φρανκφούρτης, τον ποιητή και συγγραφέα Γιόχαν Βόλφγκανγκ φον Γκαίτε. Σήμερα το πανεπιστήμιο έχει 38.000 φοιτητές.

Heidelberg University
56η θέση στον κόσμο. Το Πανεπιστήμιο της Χαιδελβέργης, γνωστό και ως Ruperto Carola, ιδρύθηκε το 1936. Είναι το παλαιότερο πανεπιστήμιο της Γερμανίας και το 5ο παλαιότερο στην ευρύτερη, κεντρική Ευρώπη. Σήμερα το Πανεπιστήμιο αποτελείται από 12 Σχολές και προσφέρει προγράμματα σπουδών σε προπτυχιακό, μεταπτυχιακό και διδακτορικό επίπεδο σε περισσότερες από 100 ειδικότητες. Κάθε χρόνο ολοκληρώνονται με επιτυχία 1.000 διδακτορικά, με περισσότερους από το 1/3 των διδακτορικών φοιτητών να είναι αριστούχοι που προέρχονται από το εξωτερικό. Το φοιτητικό σώμα αριθμεί 28.000 φοιτητές, με το 20% από αυτούς, να προέρχονται από 130 χώρες ανά τον κόσμο. Πανεπιστήμιο που μέσα από το καταστατικό και την δράση υπερασπίζεται «το ζωντανό πνεύμα της Αλήθειας, της Δικαιοσύνης και των Ανθρώπινων αξιών».

Υπάρχουν 4.196 διδάσκοντες πλήρους απασχόλησης, 476 καθηγητές (εξαιρουμένων των επισκεπτών καθηγητών), 673 μέλη Δ.Ε.Π. που προέρχονται από άλλες χώρες, 500 διεθνείς μελετητές ως επισκέπτες, 5188 διεθνείς φοιτητές, 1467 φοιτητές από διεθνείς ανταλλαγές, 3.105 ακολουθούν διδακτορικές σπουδές, 1.004 διεθνείς υποψήφιοι διδάκτορες και απένειμε 994 PhD.

Humboldt University, Berlin
61η θέση στον κόσμο. Το Πανεπιστήμιο Χούμπολντ του Βερολίνου (Humboldt-Universität zu Berlin) είναι το παλαιότερο πανεπιστήμιο του Βερολίνου και ιδρύθηκε το 1810 ως το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου (Universität zu Berlin), από τον φιλελεύθερο Πρώσο εκπαιδευτικό μεταρρυθμιστή και γλωσσολόγο Wilhelm von Humboldt. Το πανεπιστήμιο αποτελεί υπόδειγμα και έχει επηρεάσει έντονα άλλα ευρωπαϊκά και δυτικά πανεπιστήμια. Από το 1828 ήταν γνωστό ως Friedrich-Wilhelms-Universität όπως επίσης και ως Universität Unter den Linden. Το 1949, άλλαξε την επωνυμία του σε Humboldt-Universität προς τιμήν των δύο αδελφών, του ιδρυτή του Wilhelm και του αδελφού του φυσιοδίφη Alexander von Humboldt. Το πανεπιστήμιο διαθέτει ισχυρή διεθνή φήμη και κατατάσσεται ανάμεσα στα κορυφαία ιδρύματα παγκοσμίως. Από το Humboldt-Universität έχουν αποφοιτήσει μεγάλα μυαλά, όπως ο Καρλ Μαρξ, ο Φρίντριχ Ένγκελς και ο Άλμπερτ Αϊνστάιν.

[Οι εξετάσεις απολυτηρίου Abitur]

Το Zeugnis der Allgemeinen Hochschulreife ("πιστοποιητικό γενικών προσόντων για την είσοδο στο πανεπιστήμιο"), που συχνά αναφέρεται ως Abiturzeugnis ("πιστοποιητικό Abitur"), που εκδίδεται αφού οι υποψήφιοι έχουν περάσει τις τελικές εξετάσεις τους και έχουν λάβει τους κατάλληλους βαθμούς τόσο κατά το τελευταίο όσο και κατά το δεύτερο σχολικό έτος, είναι το έγγραφο που περιέχει τους βαθμούς τους και τους επιτρέπει επίσημα να φοιτήσουν στο πανεπιστήμιο. Έτσι, περιλαμβάνει τις λειτουργίες τόσο ενός πιστοποιητικού αποφοίτησης σχολείου όσο και μιας εισαγωγικής εξέτασης κολλεγίου.
Το Abitur παρέχει Allgemeine Hochschulreife (επιτρέπει στους μαθητές να εισέλθουν στο πανεπιστήμιο ή στο Fachhochschule), ενώ υπάρχουν και άλλοι τρόποι απόκτησής του. Το 2005, περίπου 231.000 φοιτητές απέκτησαν το Allgemeine Hochschulreife στη Γερμανία. Ο αριθμός αυτός αυξήθηκε με την πάροδο του χρόνου σε περίπου 263.000 το 2021. Από αυτούς, οι περισσότεροι έλαβαν το Allgemeine Hochschulreife σε ένα γυμνάσιο, ενώ 40.000 το έλαβαν σε ένα διαφορετικό είδος σχολείου, κυρίως στο Gesamtschulen. Εάν προστεθούν και όσοι αποκτήσουν το Fachhochschulreife (144.399 το 2012), τότε το σύνολο εκείνων που απέκτησαν το δικαίωμα να σπουδάσουν σε πανεπιστήμιο ή Fachhochschule είναι 395.000 (2021).

Ισοδυναμία
Το ακαδημαϊκό επίπεδο του Abitur είναι συγκρίσιμο με το International Baccalaureate, το GCE Advanced Level και τις εξετάσεις Advanced Placement. Οι απαιτήσεις σπουδών για το International Baccalaureate διαφέρουν ελάχιστα από τις απαιτήσεις των γερμανικών εξετάσεων. Είναι το μοναδικό απολυτήριο σε

όλα τα κρατίδια της Γερμανίας που επιτρέπει στον απόφοιτο (ή Abiturient) να μετακινηθεί απευθείας στο πανεπιστήμιο. Τα άλλα απολυτήρια, το Hauptschulabschluss και το Realschulabschluss, δεν επιτρέπουν στους κατόχους τους να εγγραφούν σε πανεπιστήμιο. Εκείνοι που λαμβάνουν πιστοποιητικά Hauptschulabschluss ή Realschulabschluss μπορούν να αποκτήσουν ένα εξειδικευμένο Fachhochschulreife ή ένα Abitur εάν αποφοιτήσουν από ένα Berufsschule και στη συνέχεια παρακολουθήσουν Berufsoberschule ή αποφοιτούν από ένα Fachoberschule.

Ωστόσο, το Abitur δεν είναι ο μόνος δρόμος για πανεπιστημιακές σπουδές, καθώς ορισμένα πανεπιστήμια δημιουργούν τις δικές τους εισαγωγικές εξετάσεις. Οι μαθητές που πέρασαν επιτυχώς ένα "Begabtenprüfung" ("δοκιμασία ικανότητας") είναι επίσης επιλέξιμοι. Μαθητές από άλλες χώρες που κατέχουν απολυτήριο λυκείου που δεν υπολογίζεται ως ισοδύναμο με το Abitur (όπως το αμερικανικό απολυτήριο λυκείου) και οι οποίοι τα πάνε αρκετά καλά στο τεστ ACT ή SAT, μπορούν επίσης να εισέλθουν σε γερμανικά πανεπιστήμια. Ένα άτομο που δεν κατέχει το Abitur και δεν έκανε τεστ επάρκειας μπορεί ακόμα να γίνει δεκτό στο πανεπιστήμιο ολοκληρώνοντας τουλάχιστον τη 10η τάξη και τα πάει καλά σε ένα τεστ IQ (βλέπε: Hochbegabtenstudium).

Εξετάσεις

Κατά τη διάρκεια των τελικών εξετάσεων (Abiturprüfungen), οι μαθητές εξετάζονται σε τέσσερα ή πέντε μαθήματα (τουλάχιστον ένα από τα οποία είναι προφορικό). Οι διαδικασίες διαφέρουν ανάλογα με την πολιτεία.

Αν και ορισμένα εξεταζόμενα θέματα επιλέγονται από τον μαθητή, πρέπει να καλυφθούν τρεις τομείς:

- Γλώσσα, λογοτεχνία και τέχνες
  - Γερμανικά, Σορβικά (στη Σαξονία και το Βρανδεμβούργο), ξένες γλώσσες (συνήθως Αγγλικά, Γαλλικά, Λατινικά, Αρχαία Ελληνικά, Ισπανικά, Ιταλικά ή Ρωσικά, σπάνια Ολλανδικά, Κινέζικα, Ιαπωνικά, Αρχαία Εβραϊκά, Τουρκικά, Νέα Ελληνικά, Πορτογαλικά ή Πολωνικά).
  - Μουσική, εικαστικές τέχνες ή τέχνες του θεάματος, λογοτεχνία
- Κοινωνικές επιστήμες
  - Πολιτικές επιστήμες, ιστορία, γεωγραφία, οικονομία
  - Ψυχολογία, φιλοσοφία, θρησκεία, ηθική
- Μαθηματικά, φυσικές επιστήμες και τεχνολογία
  - Μαθηματικά, φυσική, χημεία, βιολογία
  - Πληροφορική, τεχνολογία, διατροφική επιστήμη
- Αθλητισμός

Περιστασιακά, τα σχολεία (ειδικά berufsorientierte Gymnasien) προσφέρουν επαγγελματικά μαθήματα όπως παιδαγωγική, επιχειρηματική πληροφορική, βιοτεχνολογία και μηχανολογία.

Οι τελικές εξετάσεις λαμβάνονται συνήθως από τον Μάρτιο έως τον Μάιο ή τον Ιούνιο. Κάθε γραπτή εξέταση βασικού επιπέδου διαρκεί περίπου τρεις ώρες. Οι εξετάσεις προχωρημένου επιπέδου διαρκούν τεσσεράμισι ώρες και οι γραπτές εξετάσεις είναι σε μορφή έκθεσης. Οι προφορικές εξετάσεις διαρκούν περίπου 20 λεπτά. Οι εργασίες βαθμολογούνται από τουλάχιστον δύο καθηγητές του σχολείου. Σε ορισμένα μέρη της Γερμανίας οι μαθητές μπορούν να προετοιμάσουν μια παρουσίαση, ερευνητική εργασία ή να συμμετάσχουν σε διαγωνισμό και μπορούν να λάβουν επιπλέον προφορικές εξετάσεις για να περάσουν το Abitur εάν η γραπτή εξέταση είναι κακή.

Πριν από την επανένωση, οι εξετάσεις Abitur δίνονταν τοπικά στη Δυτική Γερμανία, αλλά η Βαυαρία διεξήγαγε κεντρικές εξετάσεις (Zentralabitur) από το 1854. Μετά την επανένωση, τα περισσότερα κράτη της πρώην Ανατολικής Γερμανίας συνέχισαν τις κεντρικές εξετάσεις και στις αρχές του 21ου αιώνα, πολλά κράτη υιοθέτησαν κεντρικές εξετάσεις. Το 2013, όλα τα άλλα κρατίδια εκτός από τη Ρηνανία-Παλατινάτο εισήγαγαν επίσης κεντρικές γραπτές εξετάσεις τουλάχιστον στα βασικά μαθήματα (γερμανικά, μαθηματικά και την πρώτη ξένη γλώσσα, συνήθως αγγλικά). Οι εξετάσεις διαρθρώνονται ως εξής:

- Γερμανικά: Επιλέξτε 1 από τις 3 εργασίες. Τα θέματα είναι συνήθως λυρική ποίηση, κλασική και σύγχρονη λογοτεχνία ή γλωσσολογία (ιστορία και αλλαγές στη γλώσσα). Κάθε εργασία χωρίζεται συνήθως σε δύο ή τρία μέρη.
- Αγγλικά: Επιλέξτε 1 από τις 3 εργασίες. Τα θέματα μπορεί να διαφέρουν, αλλά συνήθως συνδέονται με την προσωπική ταυτότητα και την πολυπολιτισμικότητα, την επιστήμη και την τεχνολογία ή την περιβαλλοντική αλλαγή και την παγκοσμιοποίηση (πολιτική, οικονομία και πολιτισμός). Η κλασική λογοτεχνία σπάνια διδάσκεται και οι μαθητές ασχολούνται κυρίως με τη λογοτεχνία του περασμένου αιώνα. Κάθε εργασία αποτελείται από τρία μέρη: κατανόηση (περίληψη), ανάλυση και ερμηνεία και σχολιασμός και συζήτηση.
- Μαθηματικά: Επιλέξτε τρεις από τις έξι εργασίες, μία σε κάθε περιοχή, διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, αναλυτική γεωμετρία και γραμμική άλγεβρα και θεωρία πιθανοτήτων. Κάθε εργασία χωρίζεται συνήθως σε πέντε ή έξι μικρότερες εργασίες.

Το σύνολο των 120 μονάδων αξιολόγησης που πρέπει να επιτευχθούν χωρίζεται στα δύο μέρη της εξέτασης και στις τρεις θεματικές ενότητες ως εξής::

Θεματική Ενότητα	Prüfungsteil A (χωρίς βοήθημα)	Prüfungsteil B (με βοήθημα)
Ανάλυση	30	40
Πιθανότητες		25
Αναλυτική Γεωμετρία		25

Για το μέρος Α, οι εξεταζόμενοι από την ομάδα εργασίας 1 εξετάζονται με δύο εργασίες για το γνωστικό αντικείμενο της Ανάλυσης και μία εργασία για κάθε μία από τις θεματικές περιοχές Αναλυτική Γεωμετρία και Στοχαστική. Επιπλέον, τους δίνεται η δυνατότητα επιλογής μεταξύ δύο καθηκόντων από την ομάδα καθηκόντων Β για καθέναν από τους τρεις θεματικούς τομείς. Από αυτές τις έξι εργασίες, οποιεσδήποτε δύο πρέπει να ολοκληρωθούν. Ο χρόνος εργασίας, συμπεριλαμβανομένου του χρόνου επιλογής, είναι 300 λεπτά.
[IQB - Συνοδευτικά έγγραφα — Μαθηματικά]
Σημειώσεις σχετικά με τη χρήση των βοηθημάτων (ισχύει συμπεριλαμβανομένου του εξεταστικού έτους 2029) Με βάση μια δομή που έχει επιλεγεί για το σκοπό αυτό1, η δεξαμενή εργασιών Abitur για τα μαθηματικά περιλαμβάνει εργασίες των ακόλουθων τύπων
◆ : Καθήκοντα για τα οποία δεν προορίζεται η χρήση βοηθημάτων
◆ καθήκοντα για τα οποία παρέχεται ένας απλός επιστημονικός υπολογιστής (WTR) ως ψηφιακό εργαλείο
◆ Εργασίες για τις οποίες παρέχεται ως ψηφιακό εργαλείο ένα αρθρωτό σύστημα μαθηματικών (MMS)

Εκτός από τις εργασίες που μπορούν να ολοκληρωθούν χωρίς τη χρήση εργαλείων, προβλέπεται η χρήση εγγράφου που περιέχει μαθηματικούς τύπους, ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο ψηφιακό εργαλείο. Οι εργασίες στη δεξαμενή εργασιών Abitur για τα μαθηματικά για τις οποίες πρόκειται να ολοκληρωθεί ένα από τα δύο ψηφιακά βοηθήματα που αναφέρονται παραπάνω βασίζονται σε ενιαίες κατευθυντήριες γραμμές για τη λειτουργικότητά του. Οι παρούσες κατευθυντήριες γραμμές παρατίθενται κατωτέρω. Για καθένα από τα δύο ψηφιακά εργαλεία, θεωρείται ότι δεν επιτρέπει την πρόσβαση σε κανενός είδους δίκτυα όταν χρησιμοποιείται.

WTR

- CALCOOM IQ-Z8 (Böttcher Datentechnik)
- fx-810DE CW (Casio)
- TI-30X Prio MathPrint™ (Texas Instruments)

Στη συνέχεια, αναφέρονται λειτουργίες μιας αριθμομηχανής που δεν προορίζονται για την επεξεργασία των εργασιών - ταξινομημένες ανά θεματική περιοχή - καθώς και λειτουργίες που αναλαμβάνονται σε σχέση με τη λειτουργικότητα του WTR. Σε κάθε περίπτωση, δεν είναι απαραίτητο να ονομάζετε επανειλημμένα μια συνάρτηση. Δεν προβλέπει τη χρήση προγραμματιζόμενων αριθμομηχανών.

Analysis
Δεν περιλαμβάνει συναρτήσεις ειδικά για το μετασχηματισμό όρων με μεταβλητές, την επίλυση εξισώσεων ή συστημάτων εξισώσεων, τη παραγώγιση ή την ολοκλήρωση, τον υπολογισμό τιμών μιας παραγώγου συνάρτησης ή ενός ολοκληρώματος και την αναπαράσταση γραφημάτων.
Αναλυτική γεωμετρία
Οι συναρτήσεις δεν παρέχονται ειδικά για τον υπολογισμό με συντεταγμένες (π.χ. για τον καθορισμό της εξίσωσης ενός επιπέδου από τις συντεταγμένες τριών δεδομένων σημείων), τον υπολογισμό με διανύσματα (π.χ. προσδιορισμός της τιμής ενός βαθμωτού γινομένου ή του μεγέθους της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων), τον προσδιορισμό των σχέσεων θέσης σημείων, γραμμών και επιπέδων, τη γραφική αναπαράσταση γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ. γραμμές ή επίπεδα)
Συναρτήσεις γραμμικής άλγεβρας ειδικά για τον υπολογισμό με πίνακες, σχηματίζοντας μήτρες (π.χ. με πράξεις γραμμής) δεν παρέχονται.
Στατιστική
Δεν υπάρχουν συναρτήσεις ειδικά για τον υπολογισμό των τιμών μιας παραμέτρου μιας κατανομής πιθανότητας από μια τιμή αυτής της κατανομής και δεδομένων τιμών των άλλων σχετικών παραμέτρων. Θεωρείται ότι το WTR έχει συναρτήσεις ειδικά για τον υπολογισμό απλών και σωρευτικών τιμών της διωνυμικής κατανομής καθώς και τιμών της κανονικής κατανομής.

MMS

Θεωρείται ότι το MMS έχει λειτουργίες ειδικά για την επίλυση εξισώσεων και συστημάτων εξισώσεων (αλγεβρική), παραγώγιση και ολοκλήρωση (αλγεβρική), υπολογισμό με διανύσματα και μήτρες (αλγεβρική), υπολογισμό μεμονωμένων και σωρευτικών τιμών της διωνυμικής κατανομής και τιμών της κανονικής κατανομής, εκτέλεση υπολογισμών σε πίνακες και αναπαράσταση γραφημάτων. Θεωρείται επίσης ότι, πριν από τη χρήση, το MMS τοποθετείται σε κατάσταση στην οποία αποτρέπεται η πρόσβαση σε αρχεία και προγράμματα που δεν περιλαμβάνονται στο πεδίο παράδοσης ή σε ενημέρωση συστήματος.

Χρησιμοποιείται το λογισμικό Geogebra. Είναι διαθέσιμο ως λογισμικό ανοιχτού κώδικα στον ιστότοπο http://www.geogebra.org. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές κοινές συσκευές, όπως smartphone ή
Τα tablet μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς κόστος αγοράς και μεγάλη προσπάθεια εγκατάστασης. Αυτή η «άμεση διαθεσιμότητα» ήταν, μεταξύ άλλων, ο αποφασιστικός παράγοντας για την επιλογή του Geogebra

[Κανονισμοί για συστήματα άλγεβρας υπολογιστών (CAS)]
Αγαπητέ συνάδελφε,
σύμφωνα με το Νο 1.2 της ανακοίνωσης του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Βαυαρίας της 7ης Ιουνίου 2011 (KWMBI σελ. 129), ένα σύστημα άλγεβρας υπολογιστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί - εκτός εάν ρυθμίζεται διαφορετικά σε μεμονωμένες περιπτώσεις - σε αξιολογήσεις των επιδόσεων στα βαυαρικά γυμνάσια, τα εσπερινά γυμνάσια και τα κολέγια στα μαθήματα των μαθηματικών, της φυσικής και της επιστήμης των υπολογιστών στις τάξεις CAS ή στα μαθήματα CAS από την τάξη 10 και μετά. Ταυτόχρονα, η προαναφερθείσα ανακοίνωση αναφέρεται στο γεγονός ότι λεπτομερέστεροι κανονισμοί θα γίνουν από την KMS. Το προηγουμένως έγκυρο KMS No. V.7 - BS5500 - 6b.76395 θα καταργηθεί και θα αντικατασταθεί από αυτό.

Προκειμένου να επιτραπεί η χρήση τους σε αξιολογήσεις απόδοσης, τα συστήματα άλγεβρας υπολογιστών απαιτούν έγκριση από το Υπουργείο Επικρατείας. Οι ακόλουθοι υπολογιστές CAS έχουν αυτήν την έγκριση αυτήν τη στιγμή:

- ClassPad 330 von Casio
- ClassPad II fx-CP400 von Casio
- TI-nspire CAS von Texas Instruments
- TI-nspire cx CAS von Texas Instruments
- Prime Graphing Calculator von Hewlett Packard

Στην αρχή του σχολικού έτους 2019/2020, το μοντέλο TI-Nspire CX II-T CAS θα εγκριθεί επίσης ως βοηθητική συσκευή στις αξιολογήσεις. Δεδομένου ότι μόνο δύο μοντέλα ανά κατασκευαστή θα εγκριθούν, το TI-Nspire CAS θα εγκριθεί μόνο για χρήση σε βαυαρικά γυμνάσια, βραδινά γυμνάσια και κολέγια στα μαθήματα των μαθηματικών, της φυσικής και της επιστήμης των υπολογιστών κατά τη διάρκεια μιας μεταβατικής περιόδου.

Για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί σε αξιολογήσεις επιδόσεων, ένας υπολογιστής CAS πρέπει να ρυθμιστεί σε ομοιόμορφη αρχική κατάσταση. Σε αυτή την αρχική κατάσταση, πρέπει να εμποδίζεται η πρόσβαση σε οποιαδήποτε συμπληρωματικά πακέτα προγραμμάτων ή έγγραφα που έχουν αποθηκευτεί πριν από την εξέταση. Τα εγχειρίδια για τους υπολογιστές CAS δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιούνται για αξιολογήσεις επιδόσεων. Θα ήθελα να σας παρακαλέσω να ενημερώσετε τους υπεύθυνους μαθημάτων των μαθηματικών, της φυσικής και της πληροφορικής καθώς και τους συντονιστές των ανώτερων σχολείων. Ενημερώστε τους Ανώτερους Συντονιστές Σχολείων με αντίγραφο της παρούσας επιστολής.

[Τυπολόγιο]
Εκτός από τα αντίστοιχα ψηφιακά βοηθήματα, παρέχεται μια συλλογή μαθηματικών και επιστημονικών τύπων ως βοήθημα για τα καθήκοντα της ομάδας για τα θέματα των μαθηματικών, της χημείας και της φυσικής, η οποία περιέχει μόνο τα περιεχόμενα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο. Το έγγραφο δεν αποτελεί συλλογή τύπων με την κλασική έννοια. Συγκεκριμένα, οι προϋποθέσεις για την εγκυρότητα των τύπων γενικά δεν αναφέρονται και οι ονομασίες δεν εξηγούνται στο τμήμα για τα μαθηματικά.

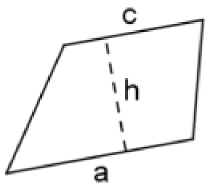
Ομοιότητα δύο τριγώνων Οι ακόλουθες δηλώσεις σχετικά με δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμες: ◆ Τα τρίγωνα είναι παρόμοια. ◆ Τα μεγέθη των γωνιών ενός τριγώνου είναι τα ίδια με τα μεγέθη των γωνιών του άλλου τριγώνου. ◆ Οι λόγοι των μηκών πλευρών ενός τριγώνου είναι οι ίδιοι με τους λόγους των μηκών πλευρών του άλλου τριγώνου

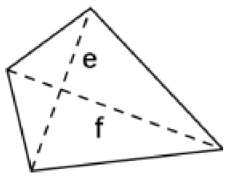
Binomische Formeln

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\quad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\quad$ $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

Maße von Figuren

Dreieck	Parallelogramm[2]	Trapez	Drachenviereck	Kreis
$A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$	$A = g\cdot h$	$A = \frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot h$	$A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$	$A = \pi\cdot r^2$
				$U = 2\pi\cdot r$





Maße von Körpern

Prisma	Pyramide	Zylinder	Kegel	Kugel
$V = A_G\cdot h$	$V = \frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h$	$V = A_G\cdot h$	$V = \frac{1}{3}\cdot A_G\cdot h$	$V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$
		für gerade Zylinder: $A_O = 2\cdot A_G + 2\pi\cdot r\cdot h$	für gerade Kegel: $A_O = A_G + \pi\cdot r\cdot m$ (m: Abstand der Spitze vom Rand der Grundfläche)	$A_O = 4\pi\cdot r^2$

Potenzen und Logarithmen

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Quadratische Gleichung

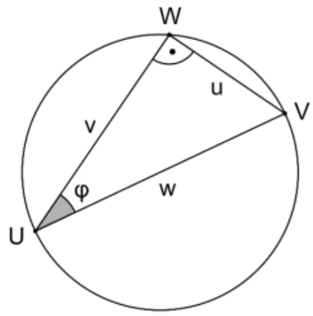
$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Rechtwinkliges Dreieck

- $\sin\varphi = \frac{u}{w}$

  $\cos\varphi = \frac{v}{w}$

  $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{u}{v}$



- Satz des Pythagoras

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Εάν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε για μήκη u και v των δύο καθετων και w το μήκος της υποτείνουσας ισχύει ότι $\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = \mathbf{w}^2$. Εάν για τα μήκη u, v και w των πλευρών ενός τριγώνου ισχύει ότι $\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = \mathbf{w}^2$, τότε αυτό το τρίγωνο έχει ορθή γωνία απέναντι από την πλευρά με το μήκος w.

Θεώρημα του Θαλή

Αν ένα τρίγωνο έχει ορθή γωνία στην κορυφή W, τότε το W βρίσκεται στον κύκλο που έχει ως κέντρο το κέντρο της αντίθετης πλευράς και περνά μέσα από τις άλλες δύο κορυφές. Εάν η κορυφή W ενός τριγώνου βρίσκεται στον κύκλο που έχει το κέντρο της αντίθετης πλευράς ως κέντρο του και διέρχεται από τις άλλες δύο κορυφές, τότε αυτό το τρίγωνο στο W έχει ορθή γωνία.

Symbole in Verbindung mit Mengen

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ $\mathbb{R}^{+}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ $\mathbb{R}_0^{+}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge 0\}$ $]a;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$

$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$ $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$ $A\setminus B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

Trigonometrie

$\sin(-\varphi)=-\sin\varphi$ $\sin(\varphi-90°)=-\cos\varphi$ $(\sin\varphi)^2+(\cos\varphi)^2=1$

$\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ $\cos(\varphi-90°)=\sin\varphi$

Winkelmaße

Beträgt die Größe eines Winkels im Gradmaß 360°, so beträgt sie im Bogenmaß 2π.

1.2 Analysis

Ableitung

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ableitungen ausgewählter Funktionen

Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
x^r	$r\cdot x^{r-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$-x+x\cdot\ln x$	$\ln x$

Ableitungsregeln

Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
$k\cdot u(x)$	$k\cdot u'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)\cdot v(x)$	$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
$u(v(x))$	$u'(v(x))\cdot v'(x)$

Ableitung von Integralfunktionen

Für $I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ gilt $I'(x)=f(x)$.

Bestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Grenzwerte

Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$.

Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{p(x)}=0$.

Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim\limits_{x\to 0}(p(x)\cdot\ln x)=0$

Rotationskörper

$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$

Τομή και επαφή δύο γραφημάτων συναρτήσεων.
Τα γραφήματα δύο συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα σημείο ακριβώς όταν έχουν αυτό το σημείο κοινό. Τα γραφήματα δύο συναρτήσεων f και g εφάπτονται το ένα το άλλο σε ένα σημείο εάν και μόνο εάν έχουν αυτό το σημείο κοινό και την ίδια κλίση εκεί. Δύο ευθείες γραμμές με κλίσεις $\boldsymbol{m_1}$ και $\boldsymbol{m_2}$ είναι κάθετες μεταξύ τους εάν και μόνο εάν $\boldsymbol{m_1\cdot m_2=-1}$

1.3 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi \qquad \vec{a} \circ \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$$

Ebenen

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$
- Normalenform: $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$

1.4 Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:

- A und B sind stochastisch unabhängig.
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Zufallsgrößen

- Für eine Zufallsgröße X mit den Werten $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ gilt:
  - Erwartungswert: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
  - Varianz: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x_i)$
  - Standardabweichung: $\sqrt{Var(X)}$
- Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt:
  - $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
  - Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$
  - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
- Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Sigma-Regeln

Ist X eine normalverteilte Zufallsgröße, so gilt:

- $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$
- $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90{,}0\,\%$
- $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95{,}0\,\%$
- $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$
- $P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99{,}0\,\%$
- $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Prognoseintervall und Konfidenzintervall

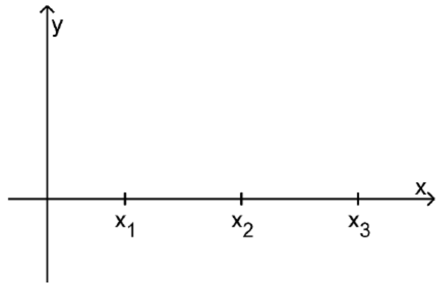
Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt näherungsweise:

- Prognoseintervall: $\left[p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}; p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right]$
- Die Gleichung $|h - p| = c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ liefert die beiden Grenzen eines Konfidenzintervalls für den Wert von p.

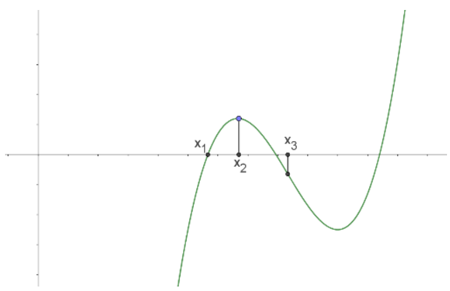
Εάν η μηδενική υπόθεση απορριφθεί κατά λάθος, αυτό ονομάζεται σφάλμα πρώτου είδους. Το επίπεδο σημαντικότητας είναι η τιμή που δεν πρέπει να υπερβαίνει η πιθανότητα του πρώτου τύπου σφάλματος. Εάν η μηδενική υπόθεση δεν απορριφθεί κατά λάθος, αυτό ονομάζεται σφάλμα δεύτερου τύπου

[Abitur εξετάσεις 2023]
Εξεταστικό μέρος Α (CAS)

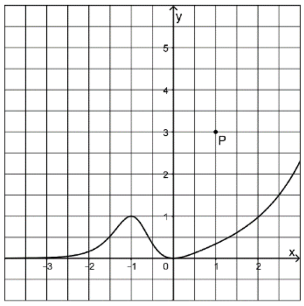
Ανάλυση
Ομάδα εργασιών 1
Αυτές οι εργασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο σε συνδυασμό με εκείνες που ανήκουν στην ίδια ομάδα εργασιών
1. Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f}: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{ln}\,(\mathbf{x}-\mathbf{3})$ με μέγιστο πεδίο ορισμού $\boldsymbol{D}$ και παράγωγη συνάρτηση $\boldsymbol{f'}$.
α) Καθορίστε το $\boldsymbol{D}$ και την ρίζα της $\boldsymbol{f}$.
β) Να βρείτε το σημείο $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ για το οποίο $\boldsymbol{f'(x)=2}$
Λύση
α) Πρέπει $\mathbf{x-3>0}$ άρα $\boxed{\boldsymbol{D=(3,+\infty)}}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{f(x)=0} \Leftrightarrow \mathbf{ln\,(x-3)=ln\;1} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x=4}}$
β) Έχω $\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{x-3}}$. Άρα $\boldsymbol{f'(x)=2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{x-3}=2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x-3=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x=\frac{7}{2}}}$
2. Έστω ότι ορίζουμε στο σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbf{0}$ τη συνάρτηση $\mathbf{g}: \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}}-\mathbf{1}$
α) Να δώσετε μια εξίσωση της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{g}$ και το σύνολο τιμών της $\boldsymbol{g}$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \boldsymbol{g(x)dx}$
Λύση
α) Έχω $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = \mathbf{0-1=-1}$ άρα έχουμε ασύμπτωτη την ευθεία $\boldsymbol{y=-1}$ και στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Έχω $\boldsymbol{g(x)}=\frac{1}{x^2}-\mathbf{1>-1}$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbf{0}$, g άρτια και συνεχής στο $(\mathbf{0},+\infty)$, με $\lim\limits_{x\to0+}\boldsymbol{g(x)} = \lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=+\infty$ Άρα το σύνολο τιμών είναι το $\boxed{(-\mathbf{1},+\infty)}$
β) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\boldsymbol{g(x)\,dx} = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\mathbf{dx} = \left[-\frac{1}{x}-x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left[-\frac{1}{2}-2\right]-\left[-\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right] = -\mathbf{2,5}-\left[-2-\frac{1}{2}\right]=\boxed{\mathbf{0}}$
3. Μια πολυωνυμική μη γραμμική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με πρώτη παράγωγο $\boldsymbol{f'}$ και δεύτερη παράγωγο $\boldsymbol{f''}$ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:
- Η $\boldsymbol{f}$ έχει ρίζα στο $\mathbf{x_1}$.
- Έχουμε $\boldsymbol{f}\,'(\mathbf{x_2})=\mathbf{0}$ και $\boldsymbol{f}\,''(\mathbf{x_2})\neq\mathbf{0}$.
- Η $\boldsymbol{f'}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{x_3}$.



Το σχήμα 1 δείχνει τις θέσεις του $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}$ και $\mathbf{x_3}$.
α) Να αιτιολογήσετε ότι ο βαθμός της $\boldsymbol{f}$ είναι τουλάχιστον 3.
β) Σχεδιάστε μια πιθανή γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ στο σχήμα 1.
Λύση
α) Η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι πολυωνυμική και μη γραμμική, άρα ο βαθμός της είναι τουλάχιστον 2.
Αν η συνάρτηση είναι δευτέρου βαθμού τότε $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c, a\neq0}$ και $\boldsymbol{f'(x)=2ax+b, f''(x)=2a\neq0}$, για κάθε x. Επίσης: η $\boldsymbol{f'}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{x_3}$. Άρα $\boldsymbol{f''}(\mathbf{x_3})=\mathbf{0}$, άτοπο. Επομένως, ο βαθμός είναι τουλάχιστον 3.
β) Αφού $\boldsymbol{f''}(\mathbf{x_3})=\mathbf{0}$, η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ μπορεί να έχει ένα σημείο καμπής σε αυτό το σημείο. Έχουμε $\boldsymbol{f}\,'(\mathbf{x_2})=\mathbf{0}$ και $\boldsymbol{f}\,''(\mathbf{x_2})\neq\mathbf{0}$, άρα στο $\mathbf{x_2}$ η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ έχει ακρότατο. Η $\boldsymbol{f}$ έχει ρίζα στο $\mathbf{x_1}$, άρα η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $(\mathbf{x_1},\mathbf{0})$, οπότε μια πιθανή γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ είναι η εξής:



4. Το σχήμα 2 δείχνει τη γραφική παράσταση της ορισμένης στο $\boldsymbol{R}$ συνάρτησης $\boldsymbol{g}$, τα μόνα ακρότατα σημεία της $(-1|1)$ και $(0 \mid 0)$, καθώς και το σημείο $\boldsymbol{P}$.



α) Εισαγάγετε τις συντεταγμένες του ελάχιστου της γραφικής παράστασης της ορισμένης στο $\boldsymbol{R}$, συνάρτησης $\boldsymbol{h(x)=-g(x-3)}$.

β) Η γραφική παράσταση αντιπαραγώγου της $\boldsymbol{g}$ διέρχεται από το $\boldsymbol{P}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $\boldsymbol{g}$ στο σχήμα 2.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{h}$ προκύπτει μετά από οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{g}$ κατά τρεις μονάδες μήκους και ανάκλαση ως προς τον οριζόντιο άξονα. Κατά συνέπεια, το τοπικό μέγιστο της $\boldsymbol{g}$, που είναι το σημείο $(-1,1)$ θα μετασχηματιστεί σε τοπικό ελάχιστο για την $\boldsymbol{h}$. Αφού $\boldsymbol{g(-1)=1 \Rightarrow h(2)=-g(2-3)=-g(-1)=-1}$, άρα το τοπικό ελάχιστο της h είναι το σημείο $\boxed{(2,-1)}$.

β) Έστω $\boldsymbol{G}$ η αντιπαράγωγος της συνεχούς συνάρτησης $\boldsymbol{g}$, άρα $\boldsymbol{G'(x)=g(x)>0}$ όπως προκύπτει από την γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$. Άρα η $\boldsymbol{G}$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχω ακόμα ότι $\boldsymbol{G''(-1)=g'(-1)=0}$, η $\boldsymbol{G'} \uparrow (-\infty,-1], \boldsymbol{G'} \downarrow [-1,0]$, άρα η G παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\boldsymbol{-1}$, στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $(-\infty,-1]$ και προς τα κάτω στο $[-1,0]$. Όμοια η G παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\boldsymbol{0}$, στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $(0,+\infty)$. Στο -1 η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη G είναι ίση με 1, ενώ στο 0 η εφαπτομένη είναι οριζόντια. Και οι δυο αυτές εφαπτομένες διασχίζουν την καμπύλη G. Τέλος έχω $\boldsymbol{G(x)>0}$ για κάθε $\boldsymbol{x}$ αφού το χωρίο ανάμεσα στην καμπύλη $\boldsymbol{g}$ και τον άξονα των $\boldsymbol{x}$, είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα. Μια πιθανή γραφική παράσταση της $\boldsymbol{G}$ είναι η εξής.

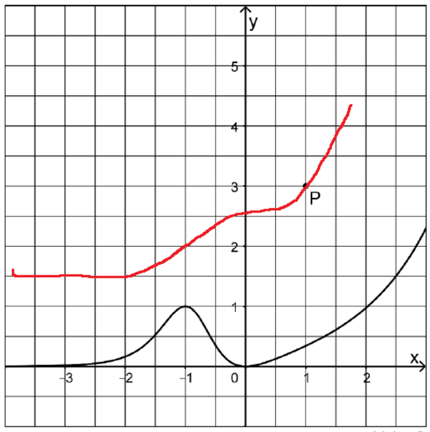


Abb. 2

Ανάλυση

Ομάδα εργασιών 2

1. Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}: \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{e}^{x}}{\mathbf{e}^{x}-\mathbf{2}}$ με μέγιστο πεδίο ορισμού $\boldsymbol{D}$

Α) Να προσδιορίσετε το $\boldsymbol{D}$ και να δώσετε τις συντεταγμένες της τομής του γραφήματος της $\boldsymbol{f}$ με τον άξονα $\boldsymbol{y}$.

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$.

Λύση

α) Αρκεί $\mathbf{e}^{x}-\mathbf{2} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{ln2}$, άρα $\boxed{\boldsymbol{D}=\mathbb{R}-\{\boldsymbol{ln2}\}}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{f(0)=-1}$, άρα η τομή του γραφήματος της $\boldsymbol{f}$ με τον άξονα $\boldsymbol{y}$ είναι το σημείο $\boxed{(\mathbf{0},-\mathbf{1})}$.

β) Έχω $\boldsymbol{f'(x)}=\frac{e^{x}(e^{x}-2)-e^{x} \cdot e^{x}}{(e^{x}-2)^{2}}=\frac{e^{x}(e^{x}-2-e^{x})}{(e^{x}-2)^{2}}=\boxed{\frac{-2e^{x}}{(e^{x}-2)^{2}}}$

2. Έστω $\mathbf{g}: \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1}$ συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbf{R}_{0}^{+}$

α) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{g}$ στο σημείο $(\mathbf{1} \mid \boldsymbol{g}(\mathbf{1}))$.

β) Η συνάρτηση $\boldsymbol{g}$ είναι αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη συνάρτηση $\boldsymbol{g}^{-1}$ του $\boldsymbol{g}$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[\mathbf{1};+\infty[$. Προσδιορίστε τον τύπο της $\boldsymbol{g}^{-1}$

Λύση

α) Έχω $\boldsymbol{g(1)=2, g'(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \boldsymbol{g'(1)}=\frac{1}{2}$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι : $\boldsymbol{y-2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x-1}) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+\frac{3}{2}}$

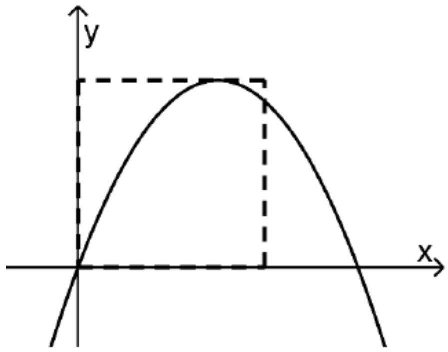
β) Έχω για $\boldsymbol{x \geq 0, g(x) \geq 1}$ ότι $\mathbf{g(x)}=\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1} \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{x}}=\mathbf{g(x)-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=(\mathbf{g(x)-1})^{2}$ άρα $\boxed{\boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{x})=(\mathbf{x}-\mathbf{1})^{2}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{1}}$

3. Δίνεται η συνάρτηση που ορίζεται στο $\boldsymbol{R}$ $\mathbf{f}: \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}^2 + 2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$ με $\boldsymbol{\alpha} \in]\mathbf{1}; +\infty[$.

Τα μηδενικά της $\boldsymbol{f}$ είναι $\mathbf{0}$ και $2\boldsymbol{\alpha}$.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{f}$ με τον άξονα $\boldsymbol{x}$ είναι ίσο με $\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}^3$.

β) Το μέγιστο σημείο της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{f}$ είναι στη μια πλευρά ενός τετραγώνου του οποίου δύο πλευρές βρίσκονται στους άξονες συντεταγμένων (βλ. Εικόνα 1). Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με αυτό του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα της $\boldsymbol{f}$ με τον άξονα $\boldsymbol{x}$. Προσδιορίστε την τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$.



Λύση

α) Έχω $\boldsymbol{E} = \int_0^{2a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \int_0^{2a} (-\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x})\, \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2ax^2}{2}\right]_0^{2a} = \left[-\frac{x^3}{3} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2\right]_0^{2a} = \left[-\frac{(2a)^3}{3} + \boldsymbol{a}(2\boldsymbol{a})^2\right] - \mathbf{0} = -\frac{8a^3}{3} + 4\boldsymbol{a}^3 = \boxed{\frac{4}{3}\boldsymbol{a}^3}$

β) Το μέγιστο σημείο θα έχει τετμημένη α και τεταγμένη $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\alpha}^2 + 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^2$. Άρα το τετράγωνο έχει πλευρά μήκους $\boldsymbol{\alpha}^2$ και εμβαδόν $\boldsymbol{\alpha}^4$. Συνεπώς $\boldsymbol{\alpha}^4 = \frac{4}{3}\boldsymbol{a}^3 \overset{\alpha>1}{\Longrightarrow} \boxed{\boldsymbol{\alpha} = \frac{4}{3}}$

4. όπως η 4 της εργασίας 1

Πιθανότητες - Στατιστική

Ομάδα εργασιών 1

Οι τέσσερις πλευρές ενός κανονικού τετραέδρου αριθμούνται 1, 2, 3 και 4 διαδοχικά. Το τετράεδρο ρίχνεται πέντε φορές.

α) Στο πλαίσιο των παραπάνω, να αναφέρετε ένα γεγονός του οποίου η πιθανότητα να είναι ίση με $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ και να αιτιολογήστε τη δήλωσή σας.

β) Βρείτε την πιθανότητα κάθε αριθμός να ρίχνεται τουλάχιστον μία φορά.

Λύση

α) Έστω Α={δεν ρίχνω άσο στις πέντε ρίψεις}, με $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}, \boldsymbol{p} = \frac{3}{4}$ ανά ρίψη, άρα $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

β) Έχω Β={ κάθε αριθμός ρίχνεται τουλάχιστον μία φορά }. Αυτό σημαίνει ότι κάποιος αριθμός από τους 4 πρέπει να ριχτεί 2 φορές. Έχω 4 επιλογές για αυτό. Έχω τώρα $\binom{5}{2}$ επιλογές για τις 2 από τις 5 ρίψεις που συμπίπτουν. Τέλος για τις υπόλοιπες 3 ρίψεις που διαφέρουν μεταξύ τους έχω $\mathbf{3}!$ επιλογές. Άρα οι ευνοϊκοί συνδυασμοί είναι $\mathbf{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \mathbf{3}!$ $\boldsymbol{\alpha}$πό τους συνολικά $\mathbf{4}^5$συνδυασμούς. Άρα τελικά $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot \frac{3!}{4^5} = \mathbf{10} \cdot \frac{6}{256} = \frac{60}{256} = \boxed{\frac{15}{64}}$

Πιθανότητες - Στατιστική

Ομάδα εργασιών 2

Τρεις μπάλες θα τοποθετηθούν σε ένα άδειο δοχείο. Το χρώμα της Μπάλας που επιλέγεται, καθορίζεται με τη ρίψη ενός ζαριού του οποίου οι πλευρές είναι αριθμημένες από το 1 διαδοχικά στο 6: Εάν επιτευχθεί το "1" ή το "2", λαμβάνεται μια κίτρινη Μπάλα, αλλιώς μαύρη.

α) Να αποδείξετε μαθηματικά ότι η πιθανότητα να τοποθετηθούν τουλάχιστον δύο μαύρες μπάλες στο δοχείο, είναι $\frac{20}{27}$.

β) Δύο από τις τρεις μπάλες λαμβάνονται τυχαία από το δοχείο. Βρείτε την πιθανότητα να ληφθούν δύο μαύρες μπάλες.

Λύση

α) Έχω για να επιλέξω την μαύρη μπάλα μετά από κάθε ρίψη πιθανότητα $\boldsymbol{p}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ και $\boldsymbol{P(A)}=\boldsymbol{P(2\ \mu\alpha\acute{\upsilon}\rho\varepsilon\varsigma)}+\boldsymbol{P(3\ \mu\alpha\acute{\upsilon}\rho\varepsilon\varsigma)}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$

β) Αν έχω στο δοχείο 0 ή μια μαύρη μπάλα δεν μπορώ προφανώς να πάρω 2 μαύρες μπάλες. Αν και οι τρεις μπάλες είναι μαύρες, τότε σίγουρα θα πάρω 2 μαύρες μπάλες, αυτό είδαμε ότι συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{8}{27}$. Αν οι δυο από τις τρεις μπάλες στο δοχείο είναι μαύρες, τότε η πιθανότητα να πάρω αυτές τις δυο μπάλες είναι $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$. Αυτό το σενάριο είδαμε ότι συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{4}{9}$. Τελικά έχω $\boldsymbol{P(B)}=\frac{8}{27}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{12}{27}=\boxed{\frac{4}{9}}$

Γεωμετρία

Ομάδα εργασιών 1

Έστω ευθεία $\mathbf{g}:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ με $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $\boldsymbol{g}$ βρίσκεται στο επίπεδο με εξίσωση $\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}+\mathbf{x_3}=\mathbf{2}$

β) Δίνεται επίσης η οικογένεια των ευθειών $\mathbf{h}_\alpha:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{\mu}\cdot\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ με $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{g}$ και $\mathbf{h}_\alpha$ για κάθε τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ασύμβατες.

Λύση

α) Έχω $\mathbf{x_1}=\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x_2}=\mathbf{1},\mathbf{x_3}=\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}$ και $\mathbf{x_1}+\mathbf{x_2}+\mathbf{x_3}=\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1}+\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{2}$. Άρα κάθε σημείο της ευθείας βρίσκεται στο αναφερόμενο επίπεδο.

β) Αν οι ευθείες $\mathbf{g}$ και $\mathbf{h}_\alpha$ είναι παράλληλες, τότε τα διανύσματα κατεύθυνσης τους θα είναι παράλληλα. Τότε όμως θα υπάρχει ν τέτοιο ώστε $\boldsymbol{\nu}\cdot\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{0}\boldsymbol{\nu}=-\mathbf{1}$, άτοπο. Άρα οι ευθείες $\mathbf{g}$ και $\mathbf{h}_\alpha$ είναι ασύμβατες ή τέμνονται. Αν τέμνονται, τότε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων θα έχει λύση: Έχω $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{\mu}\cdot\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu},\mathbf{1}=\boldsymbol{a\mu},\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}\Rightarrow\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0},\mathbf{1}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0}$, άτοπο. Άρα οι ευθείες $\mathbf{g}$ και $\mathbf{h}_\alpha$ είναι ασύμβατες για κάθε τιμή του $\boldsymbol{a}$.

Γεωμετρία

Ομάδα εργασιών 2

Δίνονται τα σημεία $\boldsymbol{A}(\mathbf{3}\mid\mathbf{5}\mid\mathbf{5})$ και $\boldsymbol{B}(\mathbf{1}|\mathbf{1}|\mathbf{1})$ καθώς και οι ευθείες $\boldsymbol{g}$ και $\boldsymbol{h}$, που τέμνονται στο $\boldsymbol{B}$. Η ευθεία $\boldsymbol{g}$ έχει το διάνυσμα κατεύθυνσης $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ και η ευθεία $\boldsymbol{h}$ το διάνυσμα κατεύθυνσης $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

α) Να αποδείξετε ότι το $\boldsymbol{A}$ βρίσκεται στην ευθεία $\boldsymbol{g}$.

β) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων $\boldsymbol{C}$ και $\boldsymbol{D}$ έτσι ώστε το $\boldsymbol{C}$ να βρίσκεται στην ευθεία $\boldsymbol{h}$ και το τετράπλευρο $\boldsymbol{ABCD}$ να είναι ρόμβος.

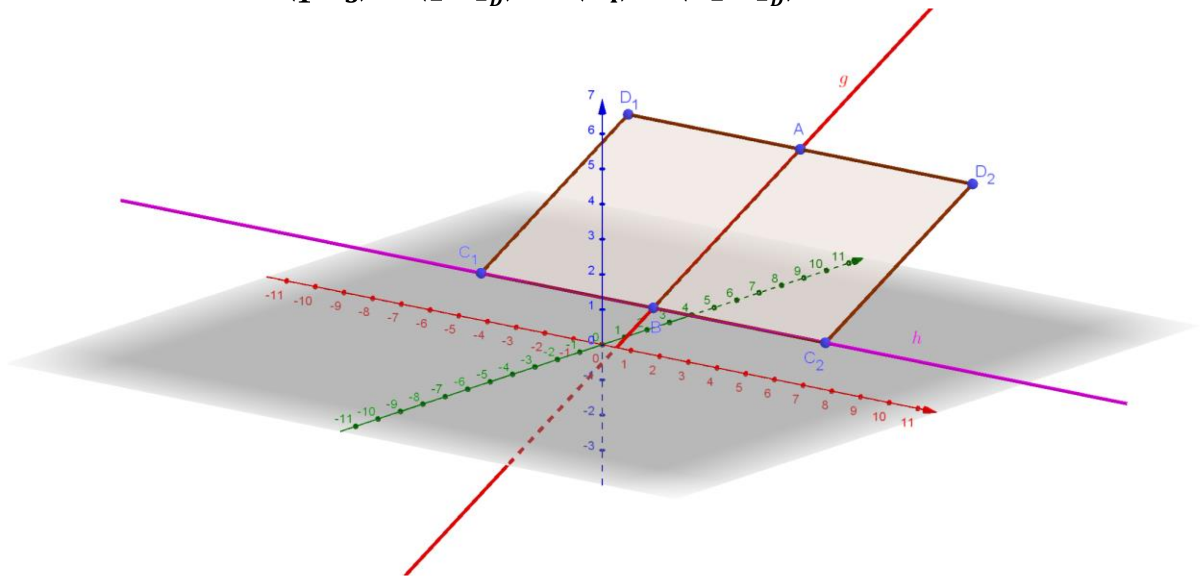
Λύση

α) Έχω για την ευθεία $\mathbf{g}:\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ με $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}$. Για το σημείο Α έχω: $\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbf{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ άρα το Α είναι σημείο της $\boldsymbol{g}$

β) Έχω ότι η πλευρά του ρόμβου έχει μήκος $\boldsymbol{AB}=\sqrt{(\mathbf{3}-\mathbf{1})^2+(\mathbf{5}-\mathbf{1})^2+(\mathbf{5}-\mathbf{1})^2}=\sqrt{\mathbf{4}+\mathbf{16}+\mathbf{16}}=\mathbf{6}$. Αφού το σημείο C βρίσκεται στην ευθεία $\boldsymbol{h}$ έχω $\mathbf{h}:\vec{X}=\begin{pmatrix}x_C\\y_C\\z_C\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ για $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$. Αφού το B είναι σημείο της ευθείας h έχω $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_C}\\\boldsymbol{y_C}\\\boldsymbol{z_C}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathbf{1}=\boldsymbol{x_C}+\boldsymbol{\lambda},\mathbf{1}=\boldsymbol{y_C},\mathbf{1}=\boldsymbol{z_C}$. Ακόμα έχω $\boldsymbol{BC}=\mathbf{6}\Longrightarrow$ $\sqrt{(\boldsymbol{x_C}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y_C}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{z_C}-\mathbf{1})^2}=\mathbf{6}\Longrightarrow\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2+\mathbf{0}^2+\mathbf{0}^2}=\mathbf{6}\Longrightarrow\boldsymbol{\lambda}=\pm\mathbf{6},\boldsymbol{x_C}=-\mathbf{5}$ ή $\mathbf{7}$. Άρα $\boldsymbol{C}(-\mathbf{5}|\mathbf{1}|\mathbf{1})$ ή $\boldsymbol{C}(\mathbf{7}|\mathbf{1}|\mathbf{1})$. Για το σημείο D έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$

άρα για $\boxed{\boldsymbol{C}(-\mathbf{5}|\mathbf{1}|\mathbf{1})}$ έχω $\begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{3}\\\mathbf{1}-\mathbf{5}\\\mathbf{1}-\mathbf{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{5}-\boldsymbol{x_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{y_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{z_D}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-\mathbf{2}\\-\mathbf{4}\\-\mathbf{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{5}-\boldsymbol{x_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{y_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{z_D}\end{pmatrix}\Longrightarrow\boxed{\boldsymbol{D}(-\mathbf{3}|\mathbf{5}|\mathbf{5})}$

ενώ για $\boxed{\boldsymbol{C}(\mathbf{7}|\mathbf{1}|\mathbf{1})}$ έχω $\begin{pmatrix}\mathbf{1}-\mathbf{3}\\\mathbf{1}-\mathbf{5}\\\mathbf{1}-\mathbf{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}-\boldsymbol{x_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{y_D}\\\mathbf{1}-\boldsymbol{z_D}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-\mathbf{2}\\-\mathbf{4}\\-\mathbf{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}-\boldsymbol{x_D}\\-\mathbf{1}-\boldsymbol{y_D}\\-\mathbf{1}-\boldsymbol{z_D}\end{pmatrix}\Longrightarrow\boxed{\boldsymbol{D}(\mathbf{9}|\mathbf{5}|\mathbf{5})}$.



Prüfungsteil B (CAS)

Κανονισμοί.

Μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε ως βοηθήματα όταν εργάζεστε στις εργασίες

- το βοήθημα μνήμης για το μάθημα των μαθηματικών που έχει εγκριθεί από το Υφυπουργείο,
- έναν από τους στατιστικούς πίνακες που έχουν εγκριθεί από το Υπουργείο Επικρατείας,
- μία από τις συλλογές τύπων που έχουν εγκριθεί από το Υπουργείο Ερευνών Επιδόσεων,
- Αριθμομηχανή που συμμορφώνεται με τους κανονισμούς του Υπουργείου Επικρατείας,
- ένα σύστημα υπολογιστή άλγεβρας που πληροί τις απαιτήσεις του Υπουργείου Εξωτερικών

Ανάλυση

Ομάδα εργασιών 1

1. Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}: \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}$ με πεδίο ορισμού $\boldsymbol{D_f}$ και γραφική παράσταση $\boldsymbol{G_f}$.

α) Βρείτε το σύνολο $\boldsymbol{D_f}$ και τις ρίζες της $\boldsymbol{f}$.

β) Δείξτε υπολογιστικά ότι κάθε σημείο στο $\boldsymbol{G_f}$ ισαπέχει από την αρχή των αξόνων.

Το γράφημα $\boldsymbol{G_f}$ είναι ημικύκλιο. Για $\boldsymbol{k} \in]\mathbf{0}; \mathbf{5}[$ η εφαπτομένη στην καμπύλη $\boldsymbol{G_f}$ στο σημείο $\boldsymbol{P_k}\ (\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{k}))$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{t_k}$ και η κανονική ευθεία στο σημείο $\boldsymbol{P_k}$ με $\boldsymbol{u_k}$ (βλ. εικόνα 1)

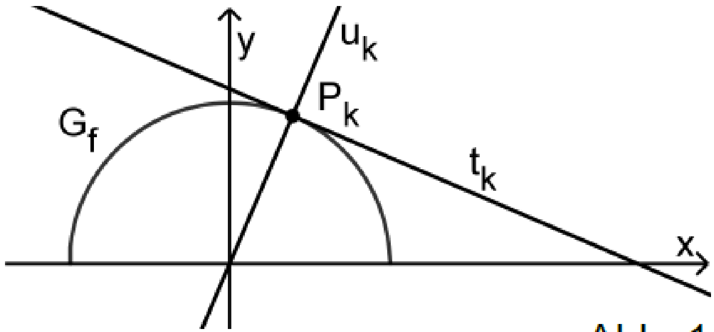


Abb. 1

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του $\boldsymbol{k}$ για την οποία η εφαπτομένη $\boldsymbol{t_k}$ με τον άξονα $\boldsymbol{x}$ σχηματίζει γωνία $\mathbf{30}°$.

δ) Να αποδείξετε μαθηματικά ότι η $\boldsymbol{t_k}$ και η $\boldsymbol{u_k}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Για κάθε τιμή $\boldsymbol{k} \in]\mathbf{0}; \mathbf{5}[$ οι ευθείες $\boldsymbol{t_k}$, $\boldsymbol{u_k}$ και ο άξονας $\boldsymbol{x}$ σχηματίζουν ένα τρίγωνο, από του οποίου το εμβαδόν ορίζεται η συνάρτηση $\boldsymbol{A}: \mathbf{k} \mapsto \boldsymbol{A}(\mathbf{k})$ στο διάστημα $]\mathbf{0}; \mathbf{5}[$.

ε) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι $\lim\limits_{k\to 0} \boldsymbol{A}(\mathbf{k}) = +\infty$ και $\lim\limits_{k\to 5} \boldsymbol{A}(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$

στ) Να δείξετε ότι $\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{25-k^2}}{k}$

ζ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{A}$ στο $]\mathbf{0}; \mathbf{5}[$ μειώνεται αυστηρά μονότονα και έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής. Βρείτε αυτό το σημείο καμπής και το νόημά του για το εμβαδόν του τριγώνου που εξαρτάται από το $\boldsymbol{k}$.

Λύση

α) πρέπει $\mathbf{25 - x^2 \geq 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\mathbf{-5}, \mathbf{5}]$ Άρα $\boxed{\boldsymbol{D_f} = [-5, 5]}$. Για τις ρίζες έχω $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sqrt{\mathbf{25 - x^2}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{x} = \pm 5}$

β) Έχω για κάθε σημείο $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ της $\boldsymbol{G_f}$ ότι $\boldsymbol{OP^2} = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{f^2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2} + \mathbf{25} - \boldsymbol{x^2} = \mathbf{25} \Rightarrow \boldsymbol{OP} = \mathbf{5}$, άρα τα σημεία του $\boldsymbol{G_f}$ ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.

γ) αρκεί $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{tan}\mathbf{30}°$. Έχω $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$ άρα $\frac{-k}{\sqrt{25-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{k^2}{25-k^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{4}\boldsymbol{k^2} = \mathbf{25} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \pm\frac{5}{2}$, δεκτή η $\boxed{\boldsymbol{k} = -\frac{5}{2}}$

ε) Καθώς το k τείνει στο 0 η εφαπτομένη προσεγγίζει την οριζόντια ευθεία $\boldsymbol{y} = \mathbf{5}$, δηλαδή γίνεται σχεδόν παράλληλη με τον άξονα των $\boldsymbol{x}$, συνεπώς το τρίτο σημείο $\boldsymbol{A}$ του τριγώνου απομακρύνεται προς το άπειρο. Άρα $\lim\limits_{k\to 0} \boldsymbol{A}(\mathbf{k}) = +\infty$

Καθώς το $\boldsymbol{k}$ τείνει στο 5 η πλευρά $\boldsymbol{OP}$ προσεγγίζει την ακτίνα του κύκλου που περιέχεται στον οριζόντιο άξονα δηλαδή το τρίγωνο έχει γωνία που προσεγγίζει οριακά το μηδέν, άρα και το εμβαδόν του τριγώνου μηδενίζεται συνεπώς $\lim\limits_{k\to 5} \boldsymbol{A}(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$

στ) Η ευθεία $\boldsymbol{t_k}$ έχει εξίσωση : $\boldsymbol{y - f(k) = f'(k)(x-k)}$ και τέμνει τον άξονα των $\boldsymbol{y}$ σε σημείο Α$(\boldsymbol{x_A}, \boldsymbol{y_A})$ με $\boldsymbol{y_A = 0}$, άρα $\boldsymbol{-f(k) = f'(k)(x_A - k) \Rightarrow x_A = -\frac{f(k)}{f'(k)} + k = \frac{25-k^2}{k} + k = \frac{25}{k}}$. Άρα $\boldsymbol{A(\mathrm{k}) = (OAP_k)} =$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{25}{k} & 0 & 1 \\ k & f(k) & 1 \end{vmatrix} = \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{25-k^2}}{k}$$

ζ) Έχω $\boldsymbol{A'(\mathrm{k}) = \frac{25}{2} \cdot \frac{\frac{-k^2}{\sqrt{25-\mathrm{k}^2}} - \sqrt{25-k^2}}{k^2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{-25}{k^2\sqrt{25-\mathrm{k}^2}} = \frac{-625}{2k^2\sqrt{25-\mathrm{k}^2}} < 0}$ για κάθε $\boldsymbol{k \in (0,5)}$ Άρα η $\boldsymbol{A(\mathrm{k})}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\boldsymbol{(0,5)}$. Ακόμα με CAS έχω $\boldsymbol{A''(\mathrm{k}) = -\frac{1875x^2 - 31250}{2x^3 \cdot (25-x^2)^{\frac{3}{2}}}}$ και $\boldsymbol{A''(\mathrm{k}) = 0}$ για $\boldsymbol{k = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 4.082}$, $\boldsymbol{A''(\mathrm{k}) > 0}$ στο $\boldsymbol{(0, \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}})}$και $\boldsymbol{A''(\mathrm{k}) < 0}$ στο $\boldsymbol{(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 5)}$. Άρα στο $\boldsymbol{k = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ έχουμε σημείο καμπής. Αυτό σημαίνει ότι καθώς το $\boldsymbol{k}$ πλησιάζει από αριστερά την τιμή $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ο ρυθμός μείωσης του εμβαδού του τριγώνου αυξάνεται ενώ καθώς απομακρύνεται από αυτό προς τα δεξιά ο ρυθμός μείωσης του εμβαδού του τριγώνου μειώνεται.

2. Θεωρούμε συνάρτηση $\mathbf{g_b}\colon \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}$ με $\boldsymbol{b} \in]\mathbf{0}; \mathbf{5}[$.

α) Περιγράψτε πώς προκύπτει η γραφική παράσταση της $\mathbf{g_b}$ από τη γραφική παράσταση $\boldsymbol{G_f}$ της άσκησης 1 και βρείτε το σύνολο τιμών των $\mathbf{g_b}$ σε συνάρτηση με το $\boldsymbol{b}$.

β) Η γραφική παράσταση της $\mathbf{g_b}$ περικλείει μια περιοχή με τον άξονα $\boldsymbol{x}$. Δείξτε ότι αυτή η περιοχή έχει εμβαδόν $\frac{5}{2}\boldsymbol{b\pi}$.

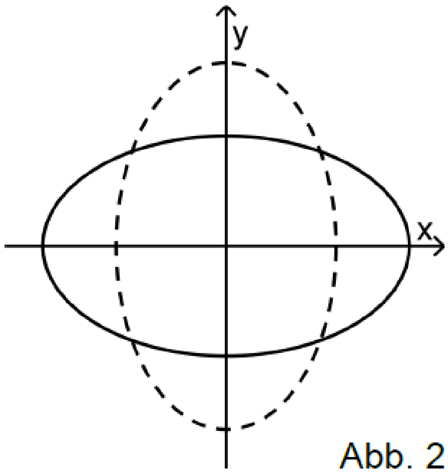


Abb. 2

Το γράφημα της $\mathbf{g}_b^*$ προκύπτει με ανάκλαση ως προς τον άξονα x της γραφικής παράστασης της $\mathbf{g_b}$. Τα δύο γραφήματα των $\mathbf{g_b}$ και $\mathbf{g}_b^*$ σχηματίζουν μια έλλειψη, ένα παράδειγμα για μια ορισμένη τιμή του b εμφανίζεται ως συμπαγής γραμμή στο σχήμα 2.

γ) Να δώσετε έναν τύπο για τη συνάρτησης $\mathbf{g}_b^*$.

δ) Περιστρέφοντας την έλλειψη κατά 90° γύρω από την αρχή των συντεταγμένων δημιουργείται μια άλλη έλλειψη, η οποία φαίνεται ως διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 2. Βρείτε έναν τύπο μιας συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση είναι μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο και συμπίπτει με αυτή την δεύτερη έλλειψη.

Σε ένα συγκεκριμένο πλανητικό σύστημα κινείται ένας πλανήτης σε ελλειπτική τροχιά γύρω από ένα Αστέρι. Το γράφημα $\boldsymbol{G_h}$ της συνάρτησης $\mathbf{h}\colon \mathbf{x} \mapsto \frac{4}{5} \cdot \sqrt{-\mathbf{x^2 + 6x + 16}}$ στο [−2;8] περιγράφει ένα μοντέλο αυτής της τροχιάς. Σε αυτό το μοντέλο η θέση του αστεριού αντιστοιχεί στην αρχή O και η θέση στην οποία ο πλανήτης είναι στη μεγαλύτερη απόσταση από το αστέρι, το σημείο N(8 | 0) (βλ. Εικόνα 3).

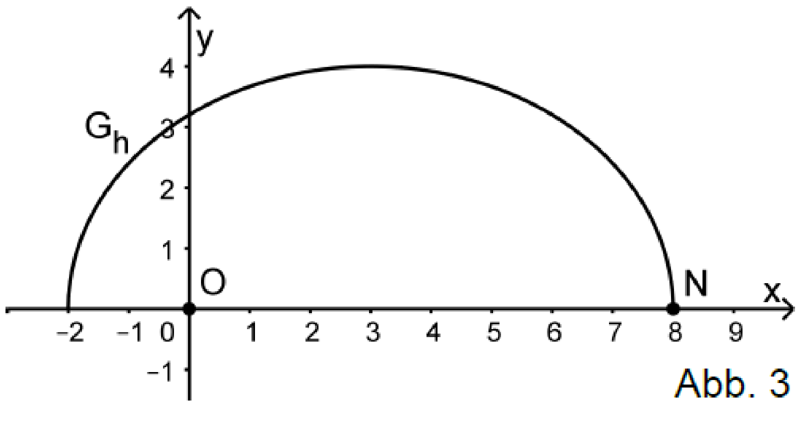


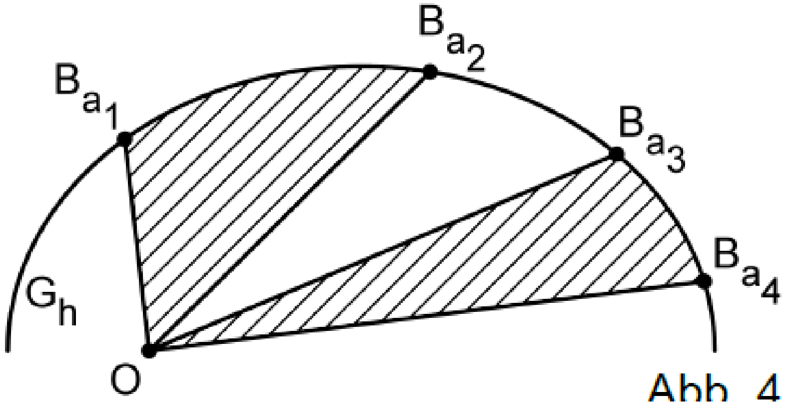
Abb. 3

ε) Να αποδείξετε μαθηματικά ότι η $\boldsymbol{G_h}$ προκύπτει μετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g_4}$ κατά 3 στη θετική διεύθυνση των $\boldsymbol{x}$

Τα σημεία $\boldsymbol{B}_\mathbf{a}(\mathbf{a}|\mathbf{h}(\mathbf{a}))$ με $\boldsymbol{a} \in [-\mathbf{2}; \mathbf{8}]$ αντιστοιχούν στις θέσεις των Πλανητών στο μοντελοποιημένο τμήμα της τροχιάς του.

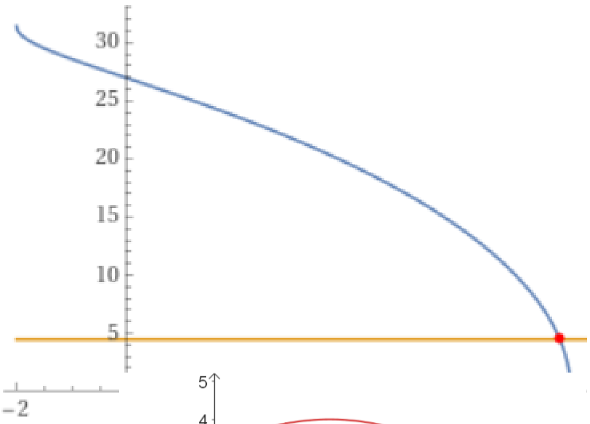
Τα ακόλουθα ισχύουν για την κίνηση του πλανήτη στο μοντέλο:
Το τμήμα $\boldsymbol{OB_a}$ σαρώνει σε ίσες χρονικές περιόδους, περιοχές ίσου μεγέθους.

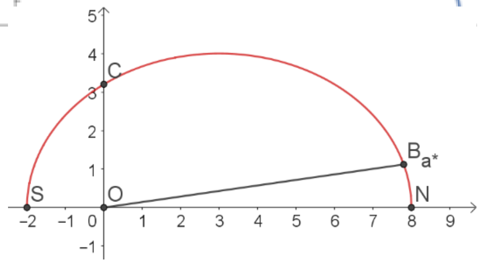
Αυτό σημαίνει ότι για $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, a_4} \in [\boldsymbol{-2; 8}]$ με $\boldsymbol{a_1 < a_2}$ και $\boldsymbol{a_3 < a_4}$:
Αν ο Πλανήτης για το τμήμα τροχιάς που βρίσκεται μέσω των σημείων $\boldsymbol{B_{a_1}}$ και $\boldsymbol{B_{a_2}}$, απαιτεί τον ίδιο χρόνο ως προς την τροχιά που βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία $\boldsymbol{B_{a_3}}$ και $\boldsymbol{B_{a_4}}$, τότε το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στις $\boldsymbol{G_h}$, $\boldsymbol{OB_{a_1}}$και $\boldsymbol{OB_{a_2}}$, έχει το ίδιο εμβαδόν με την περιοχή ανάμεσα στις $\boldsymbol{G_h}$, $\boldsymbol{OB_{a_3}}$και $\boldsymbol{OB_{a_4}}$ (βλ. Εικόνα 4).



στ) Υπάρχει μια τιμή $\boldsymbol{a^* > 0}$ για την οποία το χωρίο ανάμεσα στα $\boldsymbol{G_h}$, $\boldsymbol{OB_{a^*}}$ και $\boldsymbol{ON}$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρία ανάμεσα στο $\boldsymbol{G_h}$ και τους άξονες συντεταγμένων στο δεύτερο τεταρτημόριο. Βρείτε αυτήν την τιμή $\boldsymbol{a^*}$. (για επαλήθευση: $\boldsymbol{a^* \approx 7,8}$)
ζ) Σχεδιάστε το σημείο $\boldsymbol{B_{a^*}}$ στο σχήμα 3. Δικαιολογήστε με βάση το σχήμα 3 ότι η μέση τροχιακή ταχύτητα του πλανήτη στο τμήμα διαδρομής που διέρχεται από το δεύτερο τεταρτημόριο του μοντέλου είναι μεγαλύτερη από τη μέση τροχιακή ταχύτητα του πλανήτη στο τμήμα τροχιάς ανάμεσα στα σημεία $\boldsymbol{N}$ και $\boldsymbol{B_{a^*}}$ στο πρώτο τεταρτημόριο.
η) Ο πλανήτης απαιτεί για το τμήμα τροχιάς που περιγράφεται στην άσκηση 2ζ, και βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο χρόνο τριών ημερών. Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για να ολοκληρώσει ο πλανήτης μια τροχιά γύρω από το αστέρι.
Λύση
α) Έχω $\mathbf{g_b(x)} = \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \boldsymbol{f(x)}$. Αν $\boldsymbol{b > 5}$ το ημικύκλιο της $\boldsymbol{G_f}$ παραμορφώνεται, εκτείνεται (stretch) και μετατρέπεται σε τμήμα έλλειψης με μεγάλο άξονα στον άξονα των $\boldsymbol{y}$. Αντιθέτως αν $\boldsymbol{b < 5}$ το ημικύκλιο της $\boldsymbol{G_f}$ παραμορφώνεται, συμπιέζεται (compress) και μετατρέπεται σε τμήμα έλλειψης με μεγάλο άξονα στον άξονα των $\boldsymbol{x}$. $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \mathbf{5} \Rightarrow \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \mathbf{0} \leq \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \boldsymbol{f(x)} \leq \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \mathbf{5} \Rightarrow \mathbf{0} \leq \mathbf{g_b(x)} \leq \mathbf{b}$. Άρα σύνολο τιμών της $\mathbf{g_b}$ το διάστημα $\boxed{[\boldsymbol{0, b}]}$.
β) Έχω $\boldsymbol{E} = \int_{-5}^{5} \mathbf{g_b(x)}\, \boldsymbol{dx} = \int_{-5}^{5} \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}\, \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \int_{-5}^{5} \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}\, \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{b}}{5} \frac{\pi 5^2}{2} = \frac{5}{2} \boldsymbol{b\pi}$ αφού το $\int_{-5}^{5} \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}\, \boldsymbol{dx}$ είναι ίσο με το εμβαδόν ημικυκλίου ακτίνας $\mathbf{5}$.
γ) Αφού έχουμε ανάκλαση ως προς τον άξονα των $\boldsymbol{x}$ ισχύει ότι $\mathbf{g_b^*}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{g_b(x)} = \boxed{-\frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}}$, $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-5, 5}]$
δ) Αντιστρέφω τους ρόλους των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ και έχω $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{b}}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25} - \boldsymbol{\delta^2(x)}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{b}{5}} = \sqrt{\mathbf{25} - \boldsymbol{\delta^2(x)}} \Rightarrow \boldsymbol{\delta^2(x)} = \mathbf{25} - \left(\frac{x}{\frac{b}{5}}\right)^2 \xRightarrow{\delta(x)>0} \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{25} - \left(\frac{x}{\frac{b}{5}}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{25} - \left(\frac{5x}{b}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\mathbf{25} - \frac{25}{b^2} x^2}}$, $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{-b, b}]$
ε) Έχω $\mathbf{g_4(x)} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25 - x^2}}$ και $\boldsymbol{h}(\mathbf{x}) = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{-x^2 + 6x + 16}} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\mathbf{25 - (x-3)^2}} = \mathbf{g_4(x-3)}$, άρα η $\boldsymbol{G_h}$ προκύπτει μετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathbf{g_4}$ κατά $\mathbf{3}$ μονάδες προς τα δεξιά.

στ) Το εμβαδόν στο 2ο τεταρτημόριο δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{0}\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-(x-3)^2}\,dx$ που μέσω CAS ([Integral Calculator • With Steps! (integral-calculator.com)](integral-calculator.com)) είναι ίσο με $\mathbf{4.4729}$. Για να βρω την τιμή a^* θεωρώ την συνάρτηση $\varepsilon(x)=\frac{1}{2}xh(x)+\int_{x}^{8}\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-(t-3)^2}\,dt=x\frac{2}{5}\cdot\sqrt{25-(x-3)^2}+\int_{x}^{8}\frac{4}{5}\cdot\sqrt{25-(t-3)^2}\,dt$. Από το σημείο τομής του γραφήματος της $\varepsilon(x)$ και της ευθείας $y=4.4729$ προκύπτει ότι $x\approx\boxed{7.80398}$





ζ) Παρατηρούμε από το σχήμα ότι το μήκος του τόξου SC της έλλειψης είναι μεγαλύτερο του μήκους του τόξου BN. Τα τόξα αυτά όμως διανύονται σε ίσα χρονικά διαστήματα αφού τα αντίστοιχα εμβαδά είναι ίσα όπως είδαμε στο ερώτημα στ. Άρα η μέση ταχύτητα του πλανήτη στο τμήμα διαδρομής που διέρχεται από το δεύτερο τεταρτημόριο του μοντέλου είναι μεγαλύτερη από τη μέση τροχιακή ταχύτητα του πλανήτη στο τμήμα τροχιάς ανάμεσα στα σημεία N και B_{a^*} στο πρώτο τεταρτημόριο

η) Το εμβαδόν της έλλειψης είναι από ερώτημα β ίσο με $2*\frac{5}{2}b\pi=20\pi$ ($b=4$). Άρα ο απαιτούμενος χρόνος για μια πλήρη τροχιά είναι $\frac{20\pi}{4.4729}3=\boxed{42.1417}$ μέρες

Ανάλυση

Ομάδα εργασιών 2

1. Συχνά εμφανίζεται μποτιλιάρισμα σε αυτοκινητόδρομο το πρωί.

Μια δεδομένη ημέρα, το μποτιλιάρισμα εμφανίζεται στις 6:00 π.μ. και διαρκεί μέχρι τις 10:00 π.μ. Για αυτή τη μέρα ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της ουράς μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση f που ορίζεται στο R με τύπο $f(x)=x\cdot(8-5x)\cdot\left(1-\frac{x}{4}\right)^2$. Το x είναι ο χρόνος που έχει παρέλθει σε ώρες από την ώρα 06:00 και $f(x)$ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους της κυκλοφοριακής συμφόρησης σε χιλιόμετρα την ώρα.

α) Βρείτε τα χρονικά σημεία στα οποία ο τρέχων ρυθμός μεταβολής του μήκους της ουράς έχει την τιμή μηδέν. Δικαιολογήστε με βάση τη δομή του τύπου της συνάρτησης f ότι δεν υπάρχουν άλλα τέτοια χρονικά σημεία.

β) Ισχύουν τα εξής: $f(2)<0$. Δώστε το νόημα αυτού του γεγονότος στο πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Προσδιορίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος της κυκλοφοριακής συμφόρησης είναι στη μέγιστη αύξηση. Δείξτε ότι η αντίστοιχη τιμή του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής βρίσκεται μεταξύ 2 χιλιομέτρων/ώρα και 3 χιλιομέτρων/ώρα.

δ) Υποδείξτε την ώρα κατά την οποία η κυκλοφοριακή συμφόρηση είναι μεγαλύτερη. Να αιτιολογήσετε τη δήλωσή σας.

Στα πλαίσια των γεγονότων, δίπλα στη συνάρτηση f ορίζεται στο R μια νέα συνάρτηση s με $s(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot(4-x)^3$

ε) Εξηγήστε ότι η παρακάτω πρόταση είναι σωστή:

Το μήκος της ουράς μπορεί να καθοριστεί από τη συνάρτηση s για οποιαδήποτε στιγμή από τις 6:00 π.μ. έως τις 10:00 π.μ. Επιβεβαιώστε μαθηματικά ότι το μποτιλιάρισμα έχει καθαριστεί πλήρως στις 10:00.

στ) Υπολογίστε την αύξηση του μήκους της ουράς από τις 06:30 π.μ. έως τις 08:00 π.μ. και προσδιορίστε το μέσο ποσό μεταβολής του για αυτή την περίοδο.

ζ) Προσδιορίστε την ώρα μεταξύ 6:00 π.μ. και 10:00 π.μ. στο οποίο το μήκος του μποτιλιαρίσματος είναι 0,5 χλμ λιγότερο από μία ώρα πριν. Μόνο στο (CAS)

η) Για άλλη μια μέρα ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους της ουράς για το διάστημα από τις 06:00 π.μ έως τις 10:00 π.μ. απεικονίζεται στο Γράφημα που φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου x είναι ο χρόνος που έχει παρέλθει σε ώρες από την

06:00 π.μ. και y είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους της κυκλοφοριακής συμφόρησης σε χιλιόμετρα ανά ώρα.

Στις 7:30 το μποτιλιάρισμα έχει συγκεκριμένο μήκος. Υπάρχει και άλλη χρονική στιγμή που το μποτιλιάρισμα έχει το ίδιο μήκος. Βρείτε την.

Σημειώστε το χρόνο στο σχήμα 1, αιτιολογήστε τη σήμανση και απεικονίστε την αιτιολόγησή σας στο σχήμα 1.

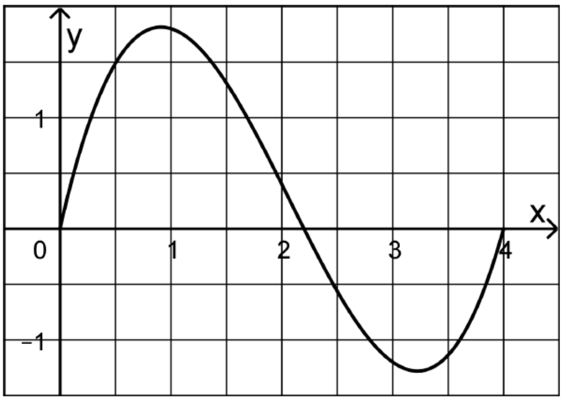


Abb. 1

Λύση

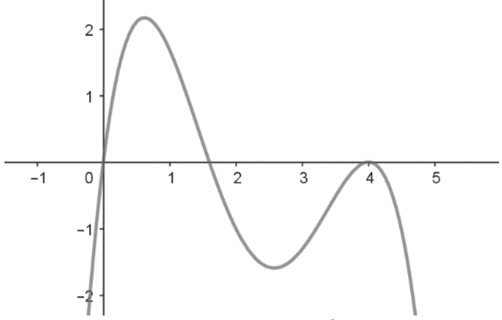
α) Έχω $\mathbf{f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = 0}$ ή $\boldsymbol{x = \frac{8}{5}}$ ή $\boldsymbol{x = 4}$ διπλή ρίζα. Αφού η συνάρτηση είναι πολυωνυμική 4ου βαθμού θα έχει 4 ρίζες το πολύ. Βρήκαμε ήδη δυο απλές και μια διπλή ρίζα, συνεπώς δεν υπάρχει άλλη ρίζα. Η $\boldsymbol{x = 0}$ αντιστοιχεί στην ώρα 06:00, η $\boldsymbol{x = \frac{8}{5}}$ στην στιγμή που είναι $\boldsymbol{\frac{8}{5} * 60 = 96}$ λεπτά μετά τις 06:00 άρα στις 7:36, ενώ η $\boldsymbol{x = 4}$ αντιστοιχεί στην ώρα 10:00.

β) Μετά από δύο ώρες, δηλαδή στις 8:00 π.μ., το μήκος του μποτιλιαρίσματος μειώνεται.

γ) Έχω $\boldsymbol{f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = (8x - 5x^2)(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16}) = 8x - 4x^2 + \frac{x^3}{2} - 5x^2 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{16}x^4 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x}$ άρα $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 9x^2 - 18x + 8}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Rightarrow (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 + x \cdot (-5) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 + x \cdot (8 - 5x) \cdot 2\left(1 - \frac{x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{4}\right)((8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + (-5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x \cdot (8 - 5x)) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{4}\right)(8 - 2x - 5x + \frac{5}{4}x^2 - 5x + \frac{5}{4}x^2 - 4x + \frac{5}{2}x^2) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{4}\right)(8 - 16x + 5x^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 4}}$ ή $\boldsymbol{x_{2,3} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{10} = \frac{16 \pm \sqrt{96}}{10} = \boxed{\frac{8 \pm \sqrt{24}}{5}}}$ ή $\boldsymbol{x_2 = \frac{16 + \sqrt{96}}{10} \approx 2,58}$ και $\boldsymbol{x_3 = \frac{16 - \sqrt{96}}{10} \approx 0,62}$. Άρα $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{5}{4}(x - 0,62)(x - 2,58)(x - 4)}$

Η γραφική παράσταση είναι μέσω CAS εξής:



Συνεπώς έχει την μέγιστη τιμή στο σημείο με τετμημένη $\boldsymbol{x_3 = \frac{16 - \sqrt{96}}{10} \approx 0,62}$ δηλαδή $\boldsymbol{0,62 * 60 = 37,2}$ λεπτά μετά τις 06:00 άρα στις 06:37. Έχω $\boldsymbol{f(0,62) = 2,17 \in (2,3)}$, αυτό φαίνεται και στο γράφημα.

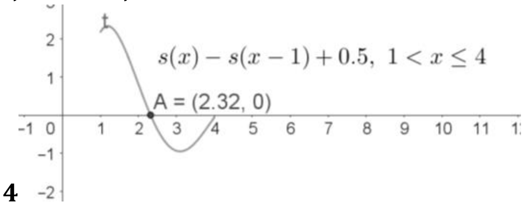
δ) Έχω ότι από την $\boldsymbol{x = 0}$ έως την $\boldsymbol{x = \frac{8}{5}}$ ο ρυθμός αύξησης του μπολιτιαρίσματος είναι θετικός, ενώ στη συνέχεια είναι διαρκώς αρνητικός, συνεπώς τη μεγαλύτερη κυκλοφοριακή συμφόρηση έχουμε την $\boldsymbol{x = \frac{8}{5}}$ δηλαδή στις 07:36.

ε) Έχω $\boldsymbol{s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4 - x)^3 = \frac{x^2}{16}(64 - 48x + 12x^2 - x^3) = 4x^2 - 3x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^5}{16}}$ και

$\mathbf{s'(x) = 8x - 9x^2 + 3x^3 - 5\frac{x^4}{16} = f(x)}$! Άρα η s είναι μια αντιπαράγωγος της $\boldsymbol{f}$, του ρυθμού αύξησης της ουράς. Επειδή είναι $\mathbf{s(0) = 0}$ και η ουρά ξεκινά στις 06:00 η συνάρτηση $\boldsymbol{s}$ είναι η κατάλληλη για το μήκος της ουράς. Έχω και $\mathbf{s(4) = \left(\frac{4}{4}\right)^2 \cdot (4-4)^3 = 0}$ άρα στις 10:00 η ουρά έχει εξαφανιστεί.

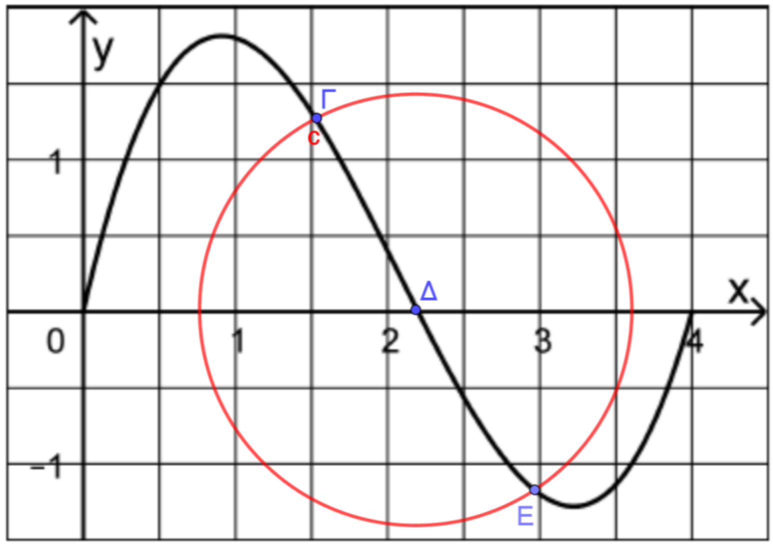
στ) Η ώρα 06:30 αντιστοιχεί στην τιμή $\boldsymbol{x = 0,5}$ και η ώρα 08:00 αντιστοιχεί στην τιμή $\boldsymbol{x = 2}$. Άρα η μεταβολή του μήκους της ουράς είναι ίση με $\boldsymbol{s(2) - s(0,5) = 2 - 0,66992 = \boxed{1,33\ km}}$. Το δε μέσο ποσό μεταβολής του είναι $\frac{s(2)-s(0,5)}{2-0,5} = \boxed{\mathbf{0,88672}}$

ζ) (CAS only) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση $\boldsymbol{s(x) - s(x-1) = -0.5, 1 < x < 4}$. Κάνω το γράφημα της $\boldsymbol{t(x) =}$ $\boldsymbol{s(x) - s(x-1) + 0.5, 1 < x < 4}$



Παρατηρούμε ότι έχει ρίζα την x=2.32 που αντιστοιχεί στην ώρα 0.32*60 =19,2 λεπτά μετά τις 08:00 δηλαδή στις 08:19

η) Από τις 7:30 π.μ. ($\boldsymbol{x_\Gamma = 1,5}$) η κυκλοφοριακή συμφόρηση συνεχίζει να αυξάνεται μέχρι περίπου τις 8:10 π.μ. ($\boldsymbol{x_\Delta = 2,2}$) καθώς ο ρυθμός μεταβολής της είναι θετικός. Από εκεί και πέρα το μποτιλιάρισμα μειώνεται. Στο σχήμα εντοπίσαμε το ζητούμενο σημείο Ε γράφοντας κύκλο με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΓ, άρα ΔΓ=ΔΕ. Συνεπώς το ίδιο μήκος όπως στις 07:30 επιτυγχάνεται περίπου όταν $\boldsymbol{x_E = 2,9}$ και ως εκ τούτου την ώρα 08:54.



2. Θεωρήστε την οικογένεια συναρτήσεων $\mathbf{h_k}$ που ορίζονται στο $\boldsymbol{R}$ με $\mathbf{h_k(x) = (x-3)^k + 1}$ και $\mathbf{k \in \{1, 2, 3, \dots\}}$

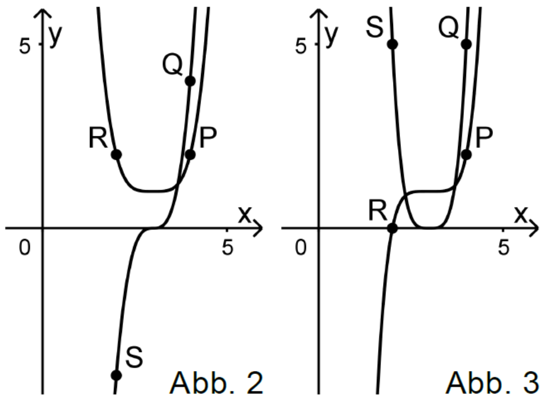
α) Η συμπεριφορά του $\mathbf{h_k}$ για $\boldsymbol{x} \to -\infty$ εξαρτάται από το $\boldsymbol{k}$. Διακρίνετε τις περιπτώσεις που εμφανίζονται.

β) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες εκείνων των σημείων που ανήκουν σε όλες τις γραφικές παραστάσεις της οικογένειας.

γ) Η πρώτη παράγωγος του $\mathbf{h_k}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{h'_k}$. Εξετάστε την παρακάτω δήλωση:

«Υπάρχει ακριβώς μία τιμή του $\boldsymbol{k}$ για την οποία η γραφική παράσταση του $\boldsymbol{h'_k}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση του $\mathbf{h_k}$».

δ) Οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{h_k}$ και $\boldsymbol{h'_k}$ δίπλα.
Στο Σχήμα 2, εμφανίζεται η $\boldsymbol{k} = \mathbf{4}$ ως παράδειγμα για τις ζυγές τιμές του $\boldsymbol{k}$,
στο Σχήμα 3, η $\boldsymbol{k} = \mathbf{5}$ ως παράδειγμα για περιττές τιμές του $\boldsymbol{k}$.
Για $\boldsymbol{k} \geq \mathbf{4}$ θεωρούμε τα σημεία
$\boldsymbol{P}(4 \mid \mathbf{h_k}(4))$, $\boldsymbol{Q}(4 \mid \boldsymbol{h'_k}(4))$, $\boldsymbol{R}(2 \mid \mathbf{h_k}(2))$ ***και*** $\boldsymbol{S}(2 \mid \boldsymbol{h'_k}(2))$.
Αυτά τα σημεία είναι τα άκρα ενός τετράπλευρου.
Εξηγήστε ότι καθένα από αυτά τα τετράπλευρα είναι τραπέζιο και δείξτε ότι η ακόλουθη δήλωση είναι σωστή:
«Για κάθε άρτια τιμή του $\boldsymbol{k}$ με $\boldsymbol{k} \geq \mathbf{4}$, το εμβαδόν του τραπεζίου είναι για την τιμή $\boldsymbol{k}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του αντίστοιχου τραπεζίου για την τιμή $\boldsymbol{k} + \mathbf{1}$.»



Λύση

α) Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ έχουμε ευθεία και $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{h_k}(x) = -\infty$. Για $\boldsymbol{k}$ περιττό έχουμε και πάλι $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{h_k}(x) = -\infty$, $\mathbf{h'_k}(x) = \boldsymbol{k}(\mathbf{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-1}} \geq \mathbf{0}$ για κάθε $\boldsymbol{x}$, άρα γνησίως αύξουσα και $\mathbf{h''_k}(x) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} - \mathbf{1}((\mathbf{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-2}}$με σημείο καμπής το $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$. Από την άλλη για $\boldsymbol{k}$ άρτιο, έχουμε $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{h_k}(x) = +\infty$, $\mathbf{h'_k}(x) = \boldsymbol{k}(\mathbf{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-1}} > \mathbf{0}$ για κάθε $\boldsymbol{x} > \mathbf{3}$, άρα γνησίως αύξουσα στο $(\mathbf{3}, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \mathbf{3})$, $\mathbf{h''_k}(x) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} - \mathbf{1}((\mathbf{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-2}} > \mathbf{0}$ με τα κοίλα προς τα πάνω.
β) έχω $\mathbf{h_{k_1}}(x) = \mathbf{h_{k_2}}(x) \Longrightarrow (x - \mathbf{3})^{\mathbf{k_1}} + \mathbf{1} = (x - \mathbf{3})^{\mathbf{k_2}} + \mathbf{1} \Rightarrow (x - \mathbf{3})^{k_1} = (x - \mathbf{3})^{k_2}$
Μια προφανής ρίζα είναι η $x_1 = \mathbf{3}$. Άρα κοινό σημείο το $\boxed{A(3,1)}$
Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{3}$ η εξίσωση γίνεται $\frac{(x-3)^{k_1}}{(x-3)^{k_2}} = \mathbf{1} \Longrightarrow (x - \mathbf{3})^{k_1 - k_2} = \mathbf{1}$. Τώρα για κάθε $k_1 \neq k_2$, ο εκθέτης είναι διάφορος του μηδενός, συνεπώς η εξίσωση αληθεύει μόνο αν $\mathbf{x_2} = \mathbf{4}$. Άρα κοινό σημείο το $\boxed{\mathbf{B(4,2)}}$
γ) Για να εφάπτεται η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{h'_k}$ σημαίνει ότι $\boldsymbol{h'_k}$ είναι ευθεία γραμμή δηλαδή πρώτου βαθμού. Άρα πρέπει $\boldsymbol{k} - \mathbf{1} = \mathbf{1} \Longrightarrow \boldsymbol{k} = \mathbf{2}$. Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ έχω $\mathbf{h_2}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{1}$, $\mathbf{h'_2}(x) = \mathbf{2}(\mathbf{x} - \mathbf{3})$, με κοινό σημείο επαφής για $\mathbf{h_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{h'_2}(x) \Longrightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{1} = \mathbf{2}(x - \mathbf{3}) \Longrightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 = 2x - 6 \Longrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Longrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Longrightarrow x = 4$ διπλή ρίζα. Άρα όντως για $x = 4$ η $\mathbf{h'_2}(x)$ εφάπτεται της $\mathbf{h_2}(x)$ στο σημείο $(\mathbf{4}, \mathbf{2})$. Επειδή η $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ ήταν μοναδική λύση, η δήλωση είναι σωστή.
δ) Τα σημεία $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{Q}$ βρίσκονται στην ευθεία $x = 4$, ενώ τα σημεία $\boldsymbol{R}$ και $\boldsymbol{S}$ στην ευθεία $x = 2$ άρα $PQ//RS$ άρα το τετράπλευρο $RSPQ$ ή $SRPQ$ είναι τραπέζιο.
Έχω $E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2} = \frac{(|RS|+|PQ|)2}{2} = |RS| + |PQ|$.
Για $\boldsymbol{k}$ άρτιο, έχουμε $\mathbf{x_R} = \mathbf{h_k}(\mathbf{2}) = (\mathbf{2} - \mathbf{3})^{\mathbf{k}} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$, ενώ $\mathbf{x_S} = \mathbf{h'_k}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{k}(\mathbf{2} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-1}} = -\boldsymbol{k} < \mathbf{h_k}(\mathbf{2})$
$\mathbf{x_P} = \mathbf{h_k}(\mathbf{4}) = (\mathbf{4} - \mathbf{3})^{\mathbf{k}} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$, ενώ $\mathbf{x_Q} = \mathbf{h'_k}(\mathbf{4}) = \boldsymbol{k}(\mathbf{4} - \mathbf{3})^{\mathbf{k-1}} = \boldsymbol{k} > \mathbf{h_k}(\mathbf{4})$. Άρα $E = k + 2 + k - 2 = \boxed{2k}$.
Αφού $\boldsymbol{k} + \mathbf{1}$ περιττός, έχω $\mathbf{x_R} = \mathbf{h_{k+1}}(\mathbf{2}) = (\mathbf{2} - \mathbf{3})^{\mathbf{k+1}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, ενώ $\mathbf{x_S} = \mathbf{h'_{k+1}}(\mathbf{2}) = (\boldsymbol{k} + \mathbf{1})(\mathbf{2} - \mathbf{3})^{\mathbf{k}} = \boldsymbol{k} + \mathbf{1} > \mathbf{h_{k+1}}(\mathbf{2})$
$\mathbf{x_P} = \mathbf{h_{k+1}}(\mathbf{4}) = (\mathbf{4} - \mathbf{3})^{\mathbf{k+1}} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$, ενώ $\mathbf{x_Q} = \mathbf{h'_{k+1}}(\mathbf{4}) = (\boldsymbol{k} + \mathbf{1})(\mathbf{4} - \mathbf{3})^{\mathbf{k}} = \boldsymbol{k} + \mathbf{1} > \mathbf{h_{k+1}}(\mathbf{4})$. Άρα $E = k + 1 - 0 + k + 1 - 2 = \boxed{2k}$. Άρα για κάθε άρτια τιμή του $\boldsymbol{k}$ με $\boldsymbol{k} \geq \mathbf{4}$, το εμβαδόν του τραπεζίου είναι για την τιμή $\boldsymbol{k}$ είναι ίσο με το εμβαδόν του αντίστοιχου τραπεζίου για την τιμή $\boldsymbol{k} + \mathbf{1}$.»

Πιθανότητες - Στατιστική
Ομάδα εργασιών 1
1. Τον Δεκέμβριο του 2021, περίπου 14.000 νέα αυτοκίνητα ταξινομήθηκαν στη Νορβηγία. Σε μια απλοποιημένη επισκόπηση, οι αναλογίες των διαφόρων τύπων αυτοκινήτων που ταξινομήθηκαν που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Αυτοκίνητα με ηλεκτροκινητήρες		Αυτοκίνητα χωρίς ηλεκτροκινητήρες (κινητήρες εσωτερικής καύσης)		
αμιγώς ηλεκτρικό	plug-in υβριδικό	Βενζινοκίνητο	ντίζελ	άλλο
65%	25%	3%	4%	3%

Για μια έρευνα, επιλέγονται τυχαία **200** οχήματα. Θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο "Επιλογή με αντικατάσταση».

α) Προσδιορίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων γεγονότων:

D: «Επελέγησαν επτά ή οκτώ αυτοκίνητα με κινητήρα ντίζελ»

E: «Επελέγησαν περισσότερα από **135** αμιγώς ηλεκτρικά αυτοκίνητα»

β) Στο πλαίσιο των γεγονότων να αναφέρετε ένα γεγονός του οποίου η πιθανότητα μπορεί να είναι $\sum_{k=0}^{25}\binom{200}{k}\cdot 0,1^{k}\cdot(1-0,1)^{200-k}$.

γ) Η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ περιγράφει τον αριθμό των αυτοκινήτων με ηλεκτροκινητήρες. Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση του $\boldsymbol{X}$.

δ) Για μια ορισμένη τιμή $\boldsymbol{n}\in\{1;2;3;\dots\}$, για $\boldsymbol{p}\in]0;1[$ θεωρούμε τις διωνυμικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{Z_p}$ με παραμέτρους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{p}$. Αποδείξτε ότι μεταξύ αυτών των τυχαίων μεταβλητών η μία με $\boldsymbol{p}=\mathbf{0,5}$ έχει τη μεγαλύτερη απόκλιση.

ε) Επιλέγουμε τυχαία **40** νεοταξινομημένα αυτοκίνητα με ηλεκτροκινητήρες. Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι ανάμεσά τους υπάρχουν ακριβώς δέκα plug-in υβριδικά.

Λύση

α) Έχουμε δοκιμασία Bernoulli με $\boldsymbol{n}=\mathbf{200}$ και $\boldsymbol{p}=\mathbf{4\%}=\mathbf{0.04}$

Άρα $\boldsymbol{P(D)}=\boldsymbol{P(X=7)}+\boldsymbol{P(X=8)}=\binom{200}{7}\cdot 0,04^{7}\cdot 0,96^{193}+\binom{200}{8}\cdot 0,04^{8}\cdot 0,96^{192}=0,284\approx\boxed{28,4\%}$

$$\boldsymbol{P(E)}=\boldsymbol{P(Y>135)}=\boldsymbol{P(Y\geq 136)}=1-\boldsymbol{P(Y\leq 135)}=1-\sum_{k=0}^{135}\mathrm{B}(200;0,65;k)=1-0,79183=0,20817\approx\boxed{20,8\%}$$

Binomial Distribution Probability Calculator (stattrek.com)

β) Έχω $\boldsymbol{p}=\mathbf{0.1}$ όσο η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να μην είναι ηλεκτροκίνητο $(\mathbf{3\%+4\%+3\%})$ και το άθροισμα όρων από το **0** έως το **25**. Άρα η πιθανότητα «Το πολύ **25** από τα **200** αυτοκίνητα δεν έχουν ηλεκτροκινητήρα» είναι $\sum_{k=0}^{25}\binom{200}{k}\cdot 0,1^{k}\cdot(1-0,1)^{200-k}$.

γ) Το ποσοστό των αυτοκινήτων με ηλεκτροκινητήρες είναι: $\boldsymbol{p}=65\%+25\%=\mathbf{0.9}$ άρα $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\boldsymbol{np}=200\cdot 0,9=\boxed{180}$. $\mathrm{Var}(\mathrm{X})=\boldsymbol{np(p-1)}=200\cdot 0,9\cdot 0,1=18\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=\boxed{4,24}$

δ) Έχω $\mathrm{Var}(\mathrm{Z_p})=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}\cdot(1-\mathrm{p})=\mathrm{n}\cdot(\mathrm{p}-\mathrm{p}^2)=\mathrm{n}\cdot(-\mathrm{p}^2+\mathrm{p}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\mathrm{n}\cdot(\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2)\leq\frac{n}{4}$ με την ισότητα να ισχύει για $\mathrm{p}=\frac{1}{2}$. Άρα την μεγαλύτερη απόκλιση έχει η $\mathbf{Z}_{p=\frac{1}{2}}$

ε) Αρχικά υπολογίζουμε την (υπό συνθήκη) πιθανότητα που έχει ένα ηλεκτρικό αυτοκίνητο να έχει έναν υβριδικό κινητήρα από τον τύπο : $\boldsymbol{P(\text{υβριδικό}/\text{ηλεκτροκίνητο})}=\frac{0,25}{0,25+0,65}=\frac{0,25}{0,9}=\frac{5}{18}$. Τώρα έχουμε δοκιμασία Bernoulli με $\boldsymbol{n}=\mathbf{40}$ και $\boldsymbol{p}=\frac{5}{18}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\boldsymbol{P(X=10)}=\binom{40}{10}\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^{10}\cdot\left(1-\frac{5}{18}\right)^{30}=0,13345\approx\boxed{13,3\%}$

2. Υπήρχαν περίπου **320.000** αυτοκίνητα στη Γερμανία στις αρχές του 2021 με αμιγώς ηλεκτροκίνηση και εγκεκριμένα **280.000** plug-in υβριδικά, δηλαδή συνολικά περίπου **600.000** αυτοκίνητα με ηλεκτροκινητήρες. Το ποσοστό των αυτοκινήτων με ηλεκτρικό κινητήρα στον συνολικό αριθμό όλων των αυτοκινήτων που είναι ταξινομημένα στη Γερμανία ήταν περίπου **1,2%**. Προσδιορίστε τον ελάχιστο αριθμό των αυτοκινήτων που πρέπει να επιλεγεί τυχαία από ολόκληρο τον πληθυσμό των αυτοκινήτων, ώστε με πιθανότητα μεγαλύτερη από **97%** τουλάχιστον ένα αυτοκίνητο να είναι αμιγώς ηλεκτροκίνητο.

Λύση

Έστω η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ περιγράφει τον αριθμό των αυτοκινήτων με αμιγώς ηλεκτρικούς κινητήρες. Η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο αυτοκίνητο να έχει αμιγώς ηλεκτρικό κινητήρα είναι: $\boldsymbol{p} = \mathbf{1,2\%}\frac{\mathbf{320000}}{\mathbf{600000}} = \mathbf{0,0064} = \mathbf{0,64\%}$

Αν επιλέξω τυχαία $\boldsymbol{n}$ αυτοκίνητα τότε η πιθανότητα k από αυτά να είναι αμιγώς ηλεκτροκίνητο είναι η $\boldsymbol{P(X=k)} = \binom{n}{k}\cdot \mathbf{0,0064^k} \cdot (\mathbf{1-0,0064})^{\boldsymbol{n-k}}$. Άρα έχω $\boldsymbol{P(X\geq 1)} > \mathbf{0,97} \Rightarrow \mathbf{1} - \boldsymbol{P(X=0)} > \mathbf{0,97} \Rightarrow \boldsymbol{P(X=0)} < \mathbf{0,03} \Rightarrow \binom{n}{0}\cdot \mathbf{0,0064^{\circ}} \cdot \mathbf{0,9936}^{\boldsymbol{n}} < \mathbf{0,03} \Rightarrow \mathbf{0,9936}^{\boldsymbol{n}} < \mathbf{0,03} \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot \mathbf{ln0,9936} < \mathbf{ln0,03} \Longrightarrow \boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{ln\ 0,03}}{\mathbf{ln\ 0,9936}} = \mathbf{546,14}$ Άρα αρκεί να επιλέξουμε $\boxed{\mathbf{547}}$ αυτοκίνητα.

3. Ένας προμηθευτής αυτοκινήτων έχει δύο τοποθεσίες λειτουργίας Α και Β. Ο αριθμός των εργαζόμενων στην τοποθεσία Α είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερος από ό,τι στη θέση Β. Το $\mathbf{60\%}$ όλων των εργαζομένων στον προμηθευτή αυτοκινήτων έχουν αποφασίσει να αγοράσουν εισιτήρια εργασίας για τις τοπικές δημόσιες συγκοινωνίες για να φτάσουν στη δουλειά.

α) Προσδιορίστε, με την υπόθεση ότι το ποσοστό των εργαζομένων με εισιτήριο εργασίας είναι το ίδιο και στις δύο τοποθεσίες, την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος υπάλληλος του προμηθευτή αυτοκινήτων να εργάζεται στη θέση Β και να μην έχει εισιτήριο εργασίας.

β) Στην πραγματικότητα, τα ποσοστά των εργαζομένων με εισιτήριο εργασίας στις δύο τοποθεσίες διαφέρουν. Στη θέση Β μόνο οι μισοί εργαζόμενοι έχουν εισιτήριο εργασίας. Υπολογίστε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος υπάλληλος του προμηθευτή αυτοκινήτων που διαθέτει εισιτήριο εργασίας, να εργάζεται στην τοποθεσία Α.

Λύση

α) Έστω $\boldsymbol{x}$ το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται στην τοποθεσία Β χωρίς εισιτήριο σε σχέση με το σύνολο των υπαλλήλων του προμηθευτή.

Αν έχουμε b υπαλλήλους στην τοποθεσία Β, τότε στην τοποθεσία Α έχουμε 4b υπαλλήλους και συνολικά ο προμηθευτής έχει $\mathbf{5}\boldsymbol{b}$ υπαλλήλους. Έχω ότι το 60% των υπαλλήλων στην τοποθεσία Β έχει εισιτήριο, άρα το $\mathbf{40\%}$ δεν έχει εισιτήριο δηλαδή σε πλήθος $\mathbf{40\%}\boldsymbol{b}$ υπάλληλοι στην τοποθεσία Β δεν έχουν εισιτήριο. Αλλά αυτοί είναι $\mathbf{5}\boldsymbol{bx}$ σε πλήθος, άρα έχουμε $\mathbf{40\%}\boldsymbol{b} = \mathbf{5}\boldsymbol{bx} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boxed{8\%}$.

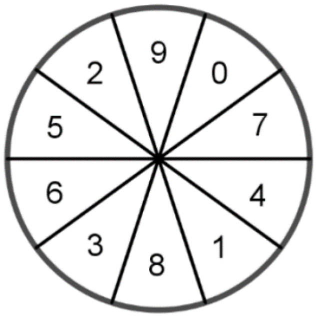
Συνοπτικά, έχουμε υπό την μορφή πίνακα τα εξής στοιχεία:

	Τοποθεσία Α	Τοποθεσία Β	Σύνολο
Σύνολο	$\mathbf{4}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{5}\boldsymbol{b}$
Με εισιτήριο	$\mathbf{60\%4}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{60\%}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{3}\boldsymbol{b}$
Χωρίς εισιτήριο	$\mathbf{40\%4}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{40\%}\boldsymbol{b} = \mathbf{5}\boldsymbol{bx}$	$\mathbf{2}\boldsymbol{b}$

β) Έστω $\boldsymbol{y}$ το ποσοστό των υπαλλήλων με εισιτήριο που εργάζονται στην τοποθεσία Α σε σχέση με το σύνολο των υπαλλήλων με εισιτήριο. Οι τελευταίοι αποτελούν το $\mathbf{60\%}$ των $\mathbf{5}\boldsymbol{b}$ υπαλλήλων, άρα είναι $\mathbf{60\%5}\boldsymbol{b} = \mathbf{3}\boldsymbol{b}$ σε πλήθος. Στην τοποθεσία Β οι μισοί από τους $\boldsymbol{b}$ υπαλλήλους έχουν εισιτήριο, άρα είναι $\mathbf{50\%}\boldsymbol{b}$ σε πλήθος. Επομένως στην τοποθεσία Α είναι $\mathbf{3}\boldsymbol{b} - \mathbf{50\%}\boldsymbol{b}$ υπάλληλοι με εισιτήριο. Όμως αυτοί είναι το $\boldsymbol{y}\%$ των $\mathbf{3}\boldsymbol{b}$ υπαλλήλων με εισιτήριο, άρα $\mathbf{3}\boldsymbol{by} = \mathbf{3}\boldsymbol{b} - \mathbf{50\%}\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} = \boxed{\mathbf{83,3\%}}$. Συνοπτικά, έχουμε υπό την μορφή πίνακα τα εξής στοιχεία:

	Τοποθεσία Α	Τοποθεσία Β	Ποσοστό	σύνολο
Σύνολο	$\mathbf{4}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{100\%}$	$\mathbf{5}\boldsymbol{b}$
Με εισιτήριο	$\mathbf{3}\boldsymbol{by} = \mathbf{3}\boldsymbol{b} - \mathbf{50\%}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{50\%}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{60\%}$	$\mathbf{3}\boldsymbol{b}$
Χωρίς εισιτήριο	$\mathbf{4}\boldsymbol{b} - \mathbf{3}\boldsymbol{by}$	$\mathbf{50\%}\boldsymbol{b}$	$\mathbf{40\%}$	$\mathbf{2}\boldsymbol{b}$

Πιθανότητες - Στατιστική
Ομάδα εργασιών 2



Οι τομείς του τροχού της τύχης που εμφανίζονται είναι το ίδιο μεγάλοι και αριθμημένοι από το 0 έως το 9.

1. Ο τροχός της τύχης περιστρέφεται είκοσι φορές. Προσδιορίστε τις πιθανότητες των γεγονότων A και B

A: «Θα κληρωθεί περιττός αριθμός επτά φορές ακριβώς.»

B: «Θα κληρωθεί περιττός αριθμός πάνω από επτά φορές και το πολύ δώδεκα φορές».

2. Ο τροχός της τύχης περιστρέφεται δύο φορές. Ερευνήστε εάν τα γεγονότα C και D είναι στοχαστικά ανεξάρτητα.

C: "Το άθροισμα των αριθμών που επιτεύχθηκαν είναι μικρότερο από 4."

D: "Το γινόμενο των αριθμών που λαμβάνονται είναι 2 ή 3."

3. Παίζεται ένα παιχνίδι με τον τροχό της τύχης. Κάθε παίκτης επιτρέπεται να γυρίσει τον τροχό της τύχης όσο συχνά θέλει. Εάν σταματήσει ο ίδιος το παιχνίδι πριν κληρωθεί το "0", θα του καταβληθεί το άθροισμα των επιτευχθέντων αριθμών σε ευρώ. Εάν κληρωθεί "0", το παιχνίδι τελειώνει και δεν γίνεται καμία πληρωμή.

α) Ο παίκτης 1 αποφασίζει πριν από το παιχνίδι να χρησιμοποιήσει τον τροχό της τύχης, ως εξής: Εάν δεν σκοράρει "0", γυρίζει τον τροχό τέσσερις φορές και μετά σταματά. Προσδιορίστε την πιθανότητα να έχει να λαμβάνει πληρωμή.

β) Για έναν δεύτερο παίκτη, αφού γυρίσει πολλές φορές τον τροχό της τύχης, το άθροισμα των αριθμών που επιτεύχθηκαν είναι 60. Τώρα θέλει είτε να τερματίσει το παιχνίδι αμέσως είτε να γυρίσει τον τροχό της τύχης ακριβώς άλλη μια φορά. Υπολογίστε σε περίπτωση που ο παίκτης αποφασίσει για περαιτέρω περιστροφή την αναμενόμενη αξία για την πληρωμή.

Κάντε μια σύσταση για το αν ο παίκτης θα πρέπει να επιλέξει να ολοκληρώσει το παιχνίδι ή να συνεχίσει. Να αιτιολογήσετε τη σύστασή σας.

γ) Εάν ένας παίκτης αποφασίσει πριν από το παιχνίδι να χρησιμοποιήσει τον Τροχό της Τύχης, ως εξής: «Αν δεν βγει "0", θα γυρίσω n φορές.», τότε δίνεται ότι η αναμενόμενη αξία για την πληρωμή υπολογίζεται με τον τύπο $\mathbf{5n \cdot 0,9^n}$. Αξιολογήστε την ακόλουθη δήλωση:

«Υπάρχουν δύο, αλλά όχι τρεις, διαδοχικές τιμές του $\boldsymbol{n}$, για τις οποίες οι αναμενόμενες τιμές για την αντίστοιχη πληρωμή να είναι ίσες.»

4. Έστω ένας τροχός της τύχης με $\boldsymbol{n}$ τομείς ίσου μεγέθους, ο καθένας με τους αριθμούς από το $\mathbf{0}$ έως το $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ διαδοχικά.

α) Για $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$, προσδιορίστε την πιθανότητα να γυρίσετε τον τροχό της τύχης τρεις φορές και να πάρετε ακριβώς δύο ίδιους αριθμούς.

β) Ο τροχός της τύχης περιστρέφεται $\boldsymbol{n}$ φορές. Βρείτε την μικρότερη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{n}$, για την οποία η πιθανότητα όλοι οι αριθμοί να είναι διαφορετικοί, να είναι λιγότερο από 1%.

Λύση

1. α) Έχουμε δοκιμασία Bernoulli με $\boldsymbol{n = 20}$ και $\boldsymbol{p = 50\% = 0.5}$

Άρα $\boldsymbol{P(A) = P(X = 7) = \binom{20}{7} \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^{13} = 0,0739 =} \boxed{7,4\%}$

β) $\boldsymbol{P(B) = P(7 < X \leq 12) = P(8 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 7) = \sum_{k=0}^{12} B(20; 0,5; k) - \sum_{k=0}^{7} B(20; 0,5; k) = 0,86841 - 0,13159 = 0,73682 \approx} \boxed{73,7\%}$

2. Έχω $\boldsymbol{C = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,0)\}}$ και $\boldsymbol{D = \{(1,2), (2,1), (3,1), (1,3)\}}$, με $\boldsymbol{C \cap D = \{(1,2)\ , (2,1)\} \neq \emptyset}$, άρα τα γεγονότα C και D δεν είναι ανεξάρτητα.

Εξάλλου $\boldsymbol{P(C)=\frac{10}{10^2}=0,1}$, $\boldsymbol{P(D)=\frac{4}{10^2}=0,04}$, $\boldsymbol{P(C\cap D)=\frac{2}{10^2}=0,02\neq P(C)P(D)=0,004}$

3. α) Ο παίκτης 1 λαμβάνει μια πληρωμή εάν δεν πετύχει το 0 και στις 4 προσπάθειες, άρα $\boldsymbol{P(A)=(1-0,1)^4=0,9^4=0,6561\approx \boxed{65,6\%}}$

β) Αν συνεχίσει το αναμενόμενο κέδρος θα είναι $\boldsymbol{E(X)=0\cdot P(X=0)+\sum_{k=1}^{9}(60+k)\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{9}(60+k)\cdot 0,1=0,1\sum_{k=1}^{9}(60+k)=0,1\left(540+\sum_{k=1}^{9}k\right)=0,1\cdot 585=\boxed{58,5}<60}$ άρα δεν τον συμφέρει να συνεχίσει, αλλά να κρατήσει τα 60€.

γ) Έστω ότι ισχύει η πρόταση για τους δυο διαδοχικούς αριθμούς $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{n+1}$. Τότε έχω

$$\mathbf{5n\cdot 0,9^{\boldsymbol{n}}=5(n+1)\cdot 0,9^{\boldsymbol{n+1}}\Longrightarrow n=0,9(n+1)\Rightarrow 0,1n=0,9\Rightarrow n=9}$$

Η παραπάνω λύση είναι μοναδική, άρα δεν έχω τρεις διαδοχικούς αριθμούς που να πληρούν τη συνθήκη της πρότασης, αλλά μόνο δύο, τους $\boxed{\boldsymbol{n=9}}$ και $\boxed{\boldsymbol{n+1=10}}$

4. α) Ο πρώτος αριθμός που κληρώνεται μας δίνει **5** διαφορετικές επιλογές. Αν οι άλλοι δύο είναι ίσοι μεταξύ τους αλλά διαφορετικοί από τον πρώτο έχω **4** επιλογές στην δεύτερη αυτή φάση. Άρα σε αυτό το σενάριο έχω $\mathbf{5\cdot 4=20}$ περιπτώσεις. Αν μόνο ο ένας από τους δυο είναι ίσος με τον πρώτο τότε σε αυτήν την φάση έχω **2** επιλογές για το ποιος από τους δύο αριθμούς θα είναι ίσος με τον πρώτο και **4** επιλογές στην επόμενη φάση για τον διαφορετικό αριθμό που θα κληρωθεί, άρα σε αυτό το σενάριο έχω $\mathbf{5\cdot 2\cdot 4=40}$ περιπτώσεις. Άρα η πιθανότητα είναι $\boldsymbol{p=\frac{20+40}{5^3}=0,48=\boxed{48\%}}$

β) Έχω $\boldsymbol{p_n=\frac{n!}{n^n}}$ με $\boldsymbol{\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\frac{n+1!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}<1}$ άρα η ακολουθία $\boldsymbol{p_n}$ είναι φθίνουσα. Έχω $\boldsymbol{p_5=\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625}=0,0384=3,84\%>1\%}$, $\boldsymbol{p_6=\frac{6!}{6^6}=\frac{120}{6^5}=\frac{20}{6^4}=0,0154=1,54\%>1\%}$, $\boldsymbol{p_7=\frac{7!}{7^7}=\frac{720}{7^6}=0,00611989=0,61\%<1\%}$. Αφού η $\boldsymbol{p_n}$ είναι φθίνουσα έχω $\boldsymbol{p_n<p_7<1\%}$ για κάθε $\boldsymbol{n>7}$ Άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του $\boldsymbol{n}$ για την οποία η πιθανότητα όλοι οι αριθμοί να είναι διαφορετικοί, να είναι λιγότερο από 1%, είναι η $\boxed{\boldsymbol{n=7}}$

Γεωμετρία

Ομάδα εργασιών 1

Δίνονται τα σημεία $\boldsymbol{A(19\,|\,0\,|\,0)}$, $\boldsymbol{B(0\,|19\,|\,0)}$, $\boldsymbol{E(12\,|\,0\,|\,7)}$ και $\boldsymbol{F(0\,|12\,|\,7)}$ (βλ. Εικόνα 1). Το τετράπλευρο $\boldsymbol{ABFE}$ βρίσκεται στο επίπεδο $\boldsymbol{L}$.

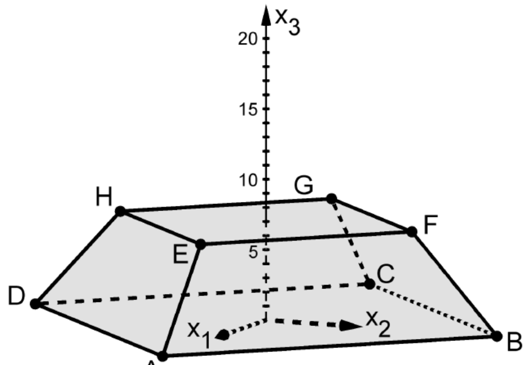


Abb. 1

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\boldsymbol{ABFE}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση του $\boldsymbol{L}$ και την γωνία $\boldsymbol{\varphi}$ που κάνει το $\boldsymbol{L}$ με το επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$.

(για επαλήθευση: $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0; \varphi \approx 55}$)

Το σχήμα 1 δείχνει το στερεό $\boldsymbol{ABCDEFGH}$, όπου η τετράγωνη βάση $\boldsymbol{ABCD}$ είναι παράλληλη με την τετράγωνη επάνω επιφάνεια $\boldsymbol{EFGH}$.

Το στερεό είναι συμμετρικό σχετικά με το επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_3}$ και επίσης σε σχέση με το επίπεδο $\boldsymbol{x_2x_3}$. Εκτός αυτού περιλαμβάνονται τα σημεία $\mathbf{S_k(0|0|k)}$ με $\boldsymbol{k}$ $\in]\mathbf{7}; +\infty[$ που θεωρούνται, οι άκρες των πυραμίδων $\boldsymbol{EFGHS_k}$.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του k για την οποία η πυραμίδα $\boldsymbol{EFGHS_k}$ και το στερεό $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ σχηματίζουν μια μεγάλη πυραμίδα $\boldsymbol{ABCDS_k}$. Βρείτε (CAS only) τον όγκο του $\boldsymbol{ABCDEFGH}$.

(για επαλήθευση : $\boldsymbol{k\ = 19}$)

δ) Σχεδιάστε την πυραμίδα $\boldsymbol{EFGHS_{15}}$ στο σχήμα 1. Η πλαϊνή επιφάνεια του $\boldsymbol{EFGHS_{15}}$ και η βάση $\boldsymbol{EFGH}$ αυτής της πυραμίδας σχηματίζουν μια γωνία. Χωρίς περαιτέρω υπολογισμό, εξηγήστε ότι το μέγεθος αυτής της γωνίας είναι μικρότερη από $\mathbf{45°}$. Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες πληροφορίες:

Για το κέντρο $\boldsymbol{M}$ του τετραγώνου $\boldsymbol{EFGH}$ και το σημείο $\boldsymbol{N}$ με $\boldsymbol{\vec{N} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} + \vec{F})}$ ισχύει ότι $\boldsymbol{MS_{15} < MN}$.

Το στερεό $\boldsymbol{ABCDEFGHS_{15}}$ αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο της πυραμίδα του Φαραώ Σνεφέρου, που χτίστηκε στην Αίγυπτο περίπου το 2650 π.Χ. (βλ. Εικόνα 2). Το επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$ είναι το οριζόντιο πάτωμα. Η μονάδα μήκους στο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε 7m στην πραγματικότητα.

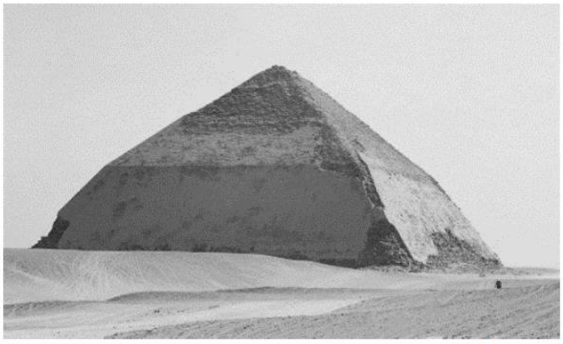


Abb. 2

Αρχικά, ξεκίνησε η κατασκευή μιας πυραμίδας με βάση το μοντέλο της πυραμίδας $\boldsymbol{ABCDS_{19}}$. Λόγω προβλημάτων σταθερότητας στη διαδικασία κατασκευής έπρεπε να ρυθμιστεί η κλίση των πλευρικών επιφανειών σε σχέση με το έδαφος.

ε) Προσδιορίστε τη μεταβολή ύψους της κατασκευής που προκαλείται από την αλλαγή στο σχέδιο δόμησης που προκλήθηκε, σε μέτρα. Εξηγήστε το παρακάτω:

«Η γωνία κλίσης των πλευρικών επιφανειών στο κάτω μέρος της κατασκευής σε σχέση με το έδαφος είναι περισσότερο από 9° μεγαλύτερη από ό,τι στο πάνω μέρος της κατασκευής.»

Σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο χρόνο οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν στην λυγισμένη πυραμίδα παράλληλα με ευθείες γραμμές με κατευθυντικό διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{S_{15}E}}$. Έστω ότι η σκιά της κορυφής της λυγισμένης πυραμίδας στο επίπεδο του κάτω ορόφου είναι το σημείο $\boldsymbol{T}$.

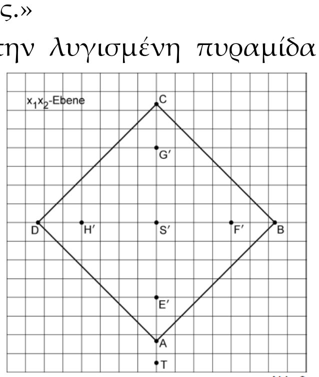


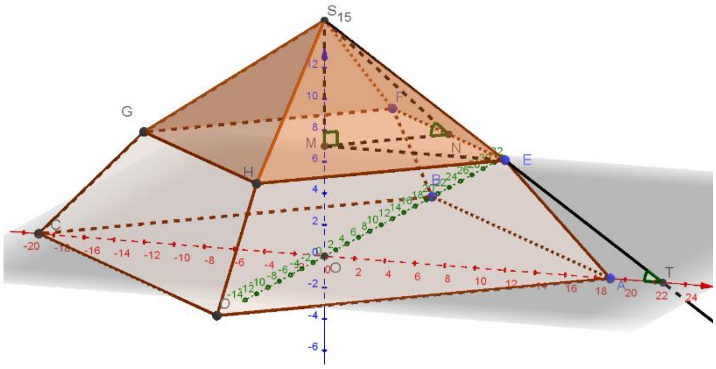
Abb. 3

Οι σκιές από τα σημεία $\boldsymbol{E, F, G, H}$ και $\boldsymbol{S_{15}}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$ είναι τα σημεία $\boldsymbol{E', F', G', H'}$ ή

$\boldsymbol{S'}$. Αυτά φαίνονται μαζί με την βάση της πυραμίδας και το σημείο $\boldsymbol{T}$ στο σχήμα 3.

στ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του $\boldsymbol{T}$.

ζ) Η σκιά ολόκληρης της πυραμίδας στο έδαφος αποτελείται από μοντέλο δύο ίσων τετράπλευρων. Σχεδιάστε αυτήν την περιοχή σκιάς στο σχήμα 3 και περιγράψτε το σχήμα του.



Λύση

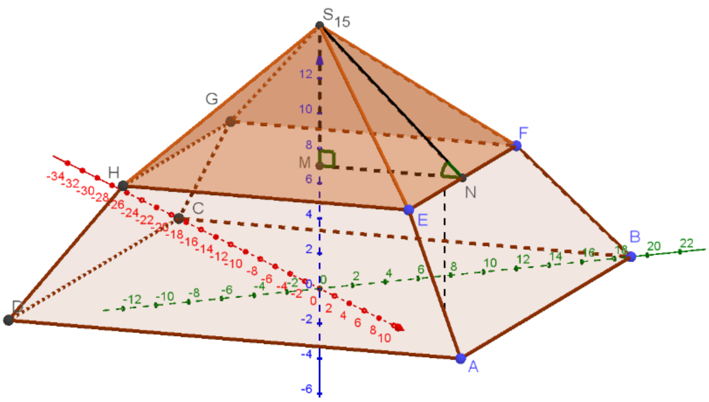
α) έχω $\overrightarrow{AB} = (0-19, 19-0, 0-0) = (-19, 19, 0) = 19(-1, 1, 0)$ και $\overrightarrow{EF} = (0-12, 12-0, 7-7) = (-12, 12, 0) = 12(-1, 1, 0)$. Άρα $\overrightarrow{AB} = \frac{19}{12}\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{EF}$. Άρα το τετράπλευρο $ABFE$ είναι τραπέζιο. Επιπλέον έχω $\left|\overrightarrow{AE}\right|^2 = (12-19)^2 + (0-0)^2 + (7-0)^2 = 98$ και $\left|\overrightarrow{BF}\right|^2 = (0-0)^2 + (12-19)^2 + (7-0)^2 = 98$. Άρα $AE = BF$ και επομένως το τραπέζιο $ABFE$ είναι ισοσκελές.

β) Για το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ στο επίπεδο L έχω: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}$, όπου $\overrightarrow{AE} = (12-19, 0-0, 7-0) = 7(-1, 0, 1)$. Άρα $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} = 19 \cdot 7(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = 133 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 133(1, 1, 1)$. Άρα το επίπεδο L έχει εξίσωση της μορφής $x_1 + x_2 + x_3 + d = 0$. Επειδή το σημείο $A(19 \mid 0 \mid 0) \in L$ ισχύει ότι $19 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -19$ άρα μια εξίσωση του L είναι η $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 - 19 = 0}$. Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο x_1x_2 είναι το $\vec{k} = (0, 0, 1)$, άρα για την γωνία των επιπέδων L και x_1x_2 αρκεί να βρω την γωνία των κάθετων σε αυτά διανυσμάτων, οπότε έχω $cos\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(0,0,1)}{|(1,1,1)|\cdot|(0,0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\varphi \approx 54,7°}$

γ) Αρκεί $S_k(0|0|k) \in L \Leftrightarrow 0 + 0 + k - 19 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 19}$

Για τον όγκο έχω $V = \frac{1}{3}E_{βάσης}h = \frac{1}{3}AB^2 z_S = \frac{1}{3}\left(19\sqrt{2}\right)^2 19 = \frac{19^3 2}{3} = \boxed{4.572,66}$ μονάδες όγκου.

δ) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η ζητούμενη γωνία είναι η $S_{15}\widehat{N}M$ καθώς το σημείο N είναι το μέσο της πλευράς EF. Έχω $tan\left(S_{15}\widehat{N}M\right) = \frac{MS_{15}}{MN} < 1 = tan45° \Rightarrow S_{15}\widehat{N}M < 45°$



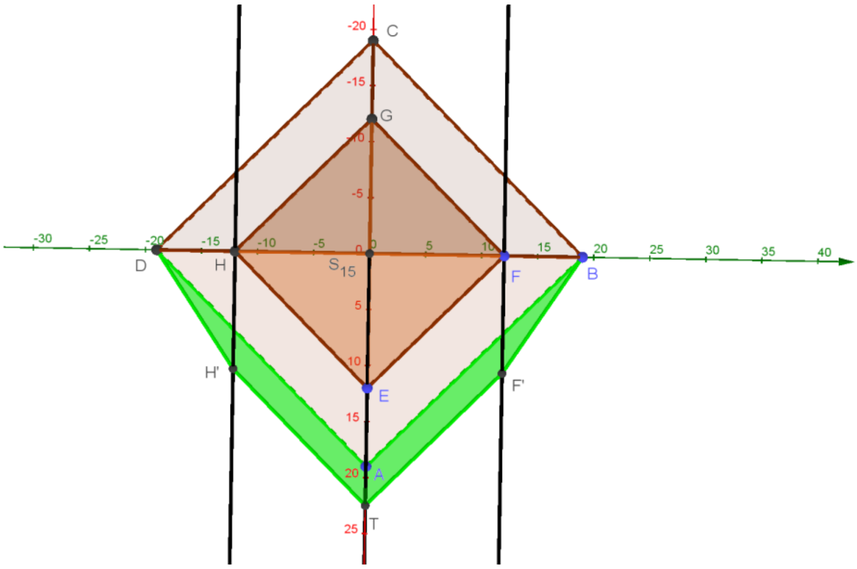
ε) Η αλλαγή στο ύψος προκύπτει από τις κορυφές S_{19} της αρχικής πυραμίδας και S_{15} του τελικού στερεού. Η απώλεια ύψους είναι επομένως $(19-15) \times\ 7m = \boxed{28\ m}$. Από το β ερώτημα η γωνία κλίσης του κάτω μέρους είναι $54,7°$ β). Από το δ) ερώτημα η γωνία κλίσης στο πάνω μέρος είναι λιγότερο από $45°$. Η διαφορά είναι $54,7 - 45° = \boxed{9,7° > 9°}$

στ) Το σημείο Τ βρίσκεται στο επίπεδο x_1x_2 άρα $T(x_3) = 0$ και μάλιστα επί της ευθείας AC που ταυτίζεται με τον άξονα x_1 άρα $T(x_2) = 0$. Τέλος $EMS_{15} \approx TOS_{15} \Rightarrow \frac{EM}{TO} = \frac{MS_{15}}{OS_{15}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}/2EH}{TO} = \frac{15-7}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}/2\cdot 12\sqrt{2}}{TO} = \frac{8}{15} \Rightarrow TO = \frac{15\cdot 12}{8} = 22,5$ άρα $\boxed{T(22,5,0\ ,0)}$

Αλλιώς,

Η ευθεία που περνά από το σημείο $\boldsymbol{S_{15}}$ και έχει κατεύθυνση $\overrightarrow{\boldsymbol{S_{15}}\mathbf{E}}$ είναι η $\vec{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{12-0} \\ \mathbf{0-0} \\ \mathbf{7-15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Αφού το T είναι το σημείο τομής της ευθείας αυτής και του επιπέδου $\boldsymbol{x_1x_2}$ έχουμε $\mathbf{15-8}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{=0} \Longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{22,5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{T}(\mathbf{22,5,0,0})$ όπως πριν.

ζ) Το σκιερό σημείο του G, βρίσκεται μέσα στην περιοχή της βάσης, τα άλλα απ' έξω. Όταν το δούμε από ψηλά, προκύπτει η ακόλουθη εικόνα:

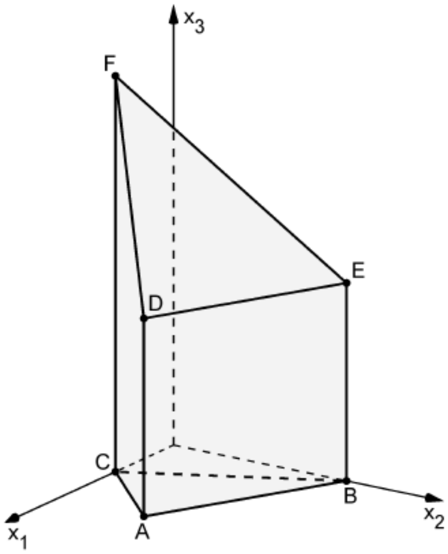


Η σκιώδης πράσινη περιοχή λοιπόν αποτελείται από δύο τραπέζια με κοινή πλευρά $\boldsymbol{TA}$.

γεωμετρία

Ομάδα εργασιών 2

Το σχήμα δείχνει το στερεού $\boldsymbol{ABCDEF}$ με $\boldsymbol{A(6\mid 3\mid 0)}$, $\boldsymbol{B(0\mid 6\mid 0)}$, $\boldsymbol{C(3\mid 0\mid 0)}$, $\boldsymbol{D(6\mid 3\mid 6)}$, $\boldsymbol{E(0\mid 6\mid 6)}$ και $\boldsymbol{F(3\mid 0\mid 12)}$.



Τα σημεία $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{F}$ βρίσκονται στο επίπεδο $\boldsymbol{L}$.

α) Να βρείτε μια εξίσωση του $\boldsymbol{L}$.

(για έλεγχο: $\boldsymbol{2x_1+4x_2+3x_3-42=0}$)

β) Να προσδιορίσετε το μέγεθος της γωνίας που σχηματίζει το $\boldsymbol{L}$ με το επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $\boldsymbol{ABC}$ μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο $\boldsymbol{6\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6}$. Εικονογραφήστε αυτά γινόμενα στην εικόνα.

δ) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού $\boldsymbol{ABCDEF}$.

ε) Το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ περιέχει τον άξονα $\boldsymbol{x_3}$ και το σημείο $\mathbf{P_k}$ $\boldsymbol{(1-k\mid k\mid 0)}$, με $\boldsymbol{k}\in]\mathbf{0};\mathbf{1}[$. Ποιες ακμές του στερεού τέμνονται από το $\mathbf{N_k}$ ανάλογα με το $\boldsymbol{k}$; Εάν το $\boldsymbol{k}$ διέρχεται από όλες τις τιμές μεταξύ $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$, τότε υπάρχει διάστημα $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$, για τις οποίες ισχύει ότι το $\mathbf{N_k}$ για όλες τις τιμές του $\boldsymbol{k}\in]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$
κόβει τις ίδιες ακμές του στερεού. Προσδιορίστε το μεγαλύτερο από αυτά τα διαστήματα και καθορίστε τις σχετικές ακμές.

στ) Το σημείο $\boldsymbol{R(0\mid 6\mid 2)}$ βρίσκεται στην ακμή $[\boldsymbol{BE}]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $\boldsymbol{Q}$ στην ακμή $[\boldsymbol{AD}]$ έτσι ώστε το τρίγωνο $\boldsymbol{FQR}$ να είναι ορθογώνιο και βρείτε τη συντεταγμένη $\boldsymbol{x_3}$του $\boldsymbol{Q}$.

ζ) Το στερεό περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $\boldsymbol{AB}$ έτσι ώστε το γωνιακό σημείο $\boldsymbol{D}$ μετά την περιστροφή να βρίσκεται στο επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$ και να είναι θετική η $\boldsymbol{x_2}$ συντεταγμένη. Οι ακόλουθοι υπολογισμοί δίνουν τη λύση σε μια εργασία που σχετίζεται με την περιστροφή που περιγράφεται:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\ \mathbf{-3}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{6}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\ \mathbf{-3}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0,8},\ \textit{άρα}\ \mathbf{S(4,8\mid 3,6\mid 0)}$$

$$\vec{\boldsymbol{T}}=\vec{\boldsymbol{S}}+\left|\overline{\mathbf{CS}}\right|\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Εξηγήστε τι κάνει αυτή η εργασία και δώστε την έννοια του $\boldsymbol{S}$.

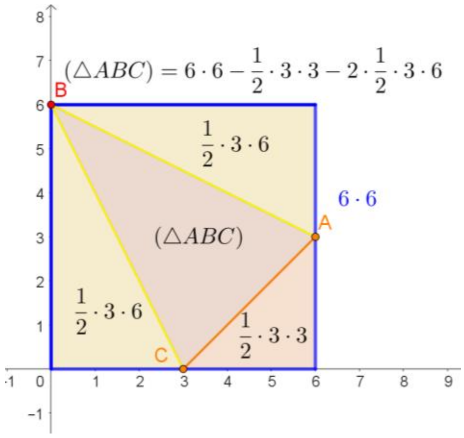
Λύση

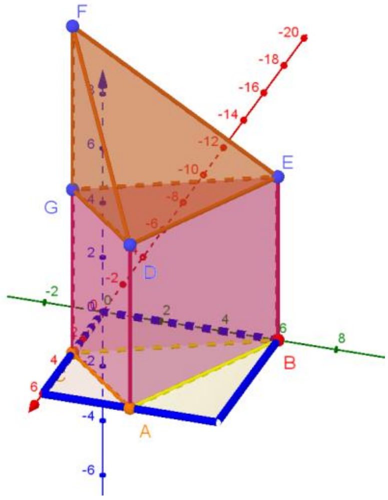
α) Έχω $\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}=(\mathbf{0-6,6-3,6-6})=(\mathbf{-6,3,0})$=3(-2,1,0), $\overrightarrow{\boldsymbol{DF}}=(\mathbf{3-6,0-3,12-6})=(\mathbf{-3,-3,6})=\mathbf{3(-1,-1,2)}$. Για το κάθετο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{n}}$ στο επίπεδο $\boldsymbol{L}$ έχω: $\vec{\boldsymbol{n}}=\overrightarrow{\boldsymbol{DE}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{DF}}=9\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \mathbf{-2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\end{vmatrix}=\mathbf{9(2,4,3)}$.

Άρα το επίπεδο L έχει εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{2x_1+4x_2+3x_3+d=0}$. Επειδή το σημείο $\boldsymbol{E(0\mid 6\mid 6)\in L}$ ισχύει ότι $0+\mathbf{24+18}+\boldsymbol{d}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{d}=\mathbf{-42}$ άρα μια εξίσωση του L είναι η $\boxed{\boldsymbol{2x_1+4x_2+3x_3-42=0}}$

β) Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_2}$ είναι το $\vec{\boldsymbol{k}}=(\mathbf{0,0,1})$, άρα για την γωνία των επιπέδων L και $\boldsymbol{x_1x_2}$ αρκεί να βρω την γωνία των κάθετων σε αυτά διανυσμάτων, οπότε έχω $\boldsymbol{cos\varphi}=\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{k}}}{|\vec{\boldsymbol{n}}||\vec{\boldsymbol{k}}|}=\frac{\mathbf{(2,4,3)\cdot(0,0,1)}}{\mathbf{|(2,4,3)|\cdot|(0,0,1)|}}=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{4+16+9}}}=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{29}}}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\varphi}\approx\mathbf{56,15^\circ}}$

γ) $(\boldsymbol{\Delta ABC})=\underbrace{\mathbf{6\cdot 6}}_{\textbf{τετράγωνο}}-\underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{3\cdot 3}}_{\textbf{τρίγωνο κάτω δεξιά}}-\underbrace{\mathbf{2}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{3\cdot 6}}_{\boldsymbol{2\ τρίγωνα}}=\boxed{\mathbf{13,5}}$

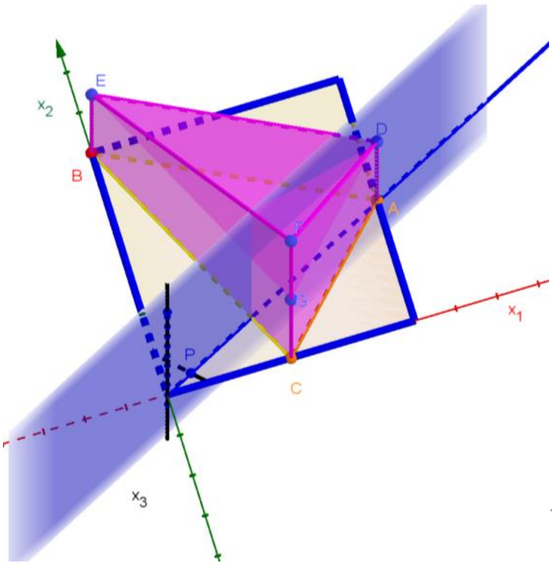


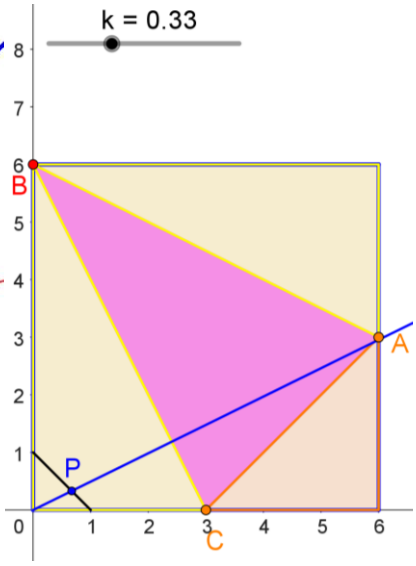


δ) Το στερεό αποτελείται από ένα πρίσμα με βάση το $\boldsymbol{\Delta ABC}$ και ύψος $\boldsymbol{BE = 6}$ και μια πυραμίδα με βάση το $\boldsymbol{\Delta DEG = \Delta ABC}$ και ύψος $\boldsymbol{CF - BE = 12 - 6 = 6}$. Άρα $\boldsymbol{V = 13,5\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 13,5\cdot 6 = \boxed{108}}$

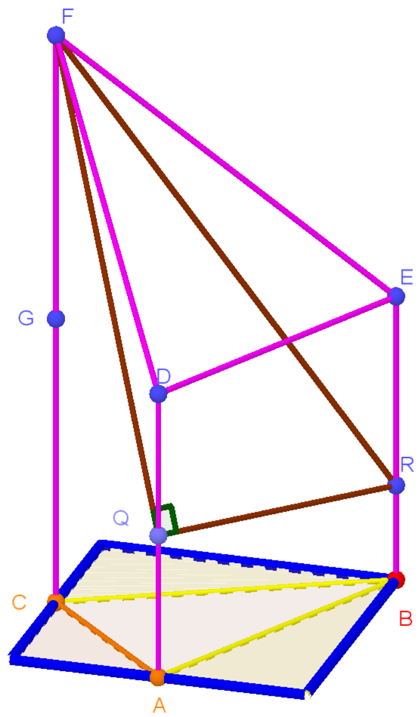
ε) Το σημείο βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που είναι στην τομή της ευθείας $\boldsymbol{x + y = 1, z = 0}$ και του τετραγώνου $\boldsymbol{6 * 6}$ (βλέπε σχήμα). Το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ είναι κατακόρυφο. Για $\boldsymbol{k = 0}$ ταυτίζεται με το επίπεδο $\boldsymbol{x_1x_3}$. Καθώς αυξάνουμε την τιμή του k, το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ στρέφεται ως προς τον άξονα $\boldsymbol{x_3}$. Αρχικά το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ τέμνει τις ακμές $\boldsymbol{BC, CA, EF, FD}$ έως ότου η τιμή του $\boldsymbol{k}$ να είναι τέτοια ώστε η κατακόρυφη ακμή AD να ανήκει στο επίπεδο $\mathbf{N_k}$. Στη συνέχεια, δηλαδή για μεγαλύτερες τιμές του $\boldsymbol{k}$, το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ τέμνει τις ακμές $\boldsymbol{BC, BA, EF, ED}$, έως ότου $\boldsymbol{k = 1}$, οπότε ταυτίζεται με το επίπεδο $\boldsymbol{x_2x_3}$. Θα βρούμε τώρα για ποια τιμή του k η ακμή AD να ανήκει στο επίπεδο $\mathbf{N_k}$. Στο επίπεδο $\boldsymbol{z = 0}$

η ευθεία ΟΑ έχει εξίσωση $\boldsymbol{y = \frac{3}{6}x = \frac{x}{2}}$. Αφού $\boldsymbol{P(1-k, k, 0)}$ είναι σημείο της ευθείας αυτής έχω $\boldsymbol{k = \frac{1-k}{2} \Longrightarrow k = \frac{1}{3}}$. Άρα για $\boldsymbol{k \in (0, \frac{1}{3})}$ το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ τέμνει τις ακμές $\boldsymbol{BC, CA, EF, FD}$, ενώ για $\boldsymbol{k \in (\frac{1}{3}, 1)}$ το επίπεδο $\mathbf{N_k}$ τέμνει τις ακμές $\boldsymbol{BC, BA, EF, ED}$. Για k=1 τέμνει τις ακμές $\boldsymbol{BC, EF}$ και περιέχει εξολοκλήρου την $\boldsymbol{AD}$. Μεγαλύτερο είναι το διάστημα $\boxed{\boldsymbol{(\frac{1}{3}, 1)}}$



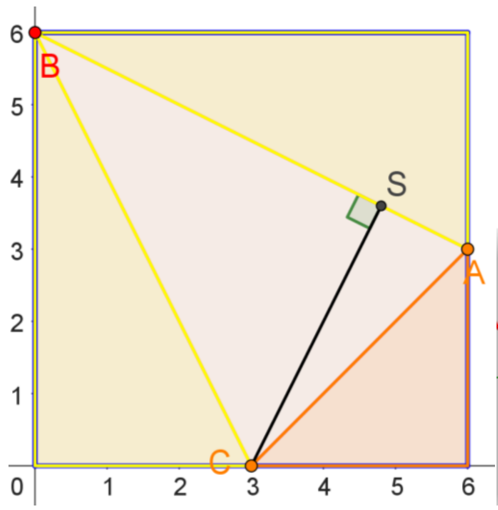


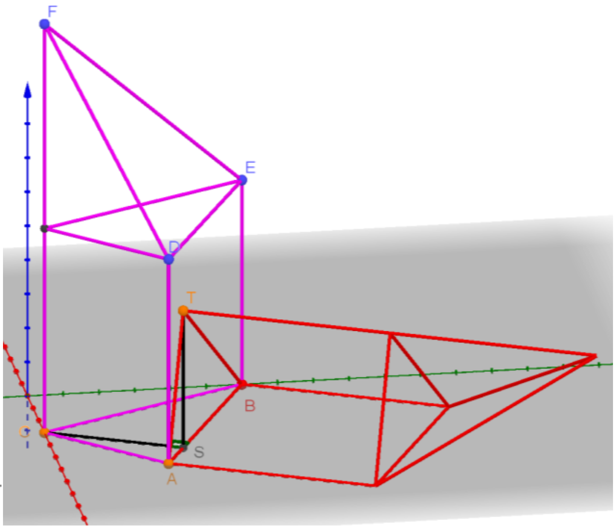
στ) Το σημείο $\boldsymbol{Q(6,3,q)}$ είναι τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\boldsymbol{QF}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{QR}} \iff \overrightarrow{\boldsymbol{QF}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{QR}} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{3-6, 0-3, 12}-\boldsymbol{q}) \cdot (\mathbf{0-6, 6-3, 2}-\boldsymbol{q}) = \mathbf{0} \Longrightarrow (\mathbf{-3,-3,12}-\boldsymbol{q}) \cdot (\mathbf{-6,3,2}-\boldsymbol{q}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{18-9}+(\mathbf{12}-\boldsymbol{q})(\mathbf{2}-\boldsymbol{q}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{18-9+24-12}\boldsymbol{q}-\mathbf{2}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{q}^{\mathbf{2}}-\mathbf{14}\boldsymbol{q}+\mathbf{33} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{q}_{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{14}\pm\sqrt{\mathbf{14^2-4\cdot1\cdot33}}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \boldsymbol{q}_{\mathbf{1,2}} = \frac{\mathbf{14\pm8}}{\mathbf{2}} \Longrightarrow \boldsymbol{q}_{\mathbf{1}} = \mathbf{11}$ ή $\boldsymbol{q}_{\mathbf{2}} = \mathbf{3}$. Η $\boldsymbol{q}_{\mathbf{1}} = \mathbf{11} > \mathbf{6} = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{D}}$ απορρίπτεται, άρα δεκτή η $\boldsymbol{q} = \mathbf{3}$, συνεπώς $\boxed{\boldsymbol{Q}(\mathbf{6,3,3})}$



ζ) Έχω $\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{6}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{ED}} \cdot [\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} + \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{ED}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OC}}] = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \cdot [\overrightarrow{\boldsymbol{CB}} + \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}] = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{CS}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{CS}}$

Άρα το $\boldsymbol{S}$ είναι η κάθετη προβολή του σημείου $\boldsymbol{C}$ στην $\boldsymbol{AB}$. Κατά την περιστροφή του στερεού ως προς την $\boldsymbol{AB}$, το σημείο $\boldsymbol{C}$ θα βρεθεί πάνω από το σημείο $\boldsymbol{S}$ σε απόσταση $\boldsymbol{CS}$. Η νέα αυτή θέση , $\boldsymbol{T}$, προσδιορίζεται από την εξίσωση $\vec{\boldsymbol{T}} = \vec{\boldsymbol{S}} + |\overrightarrow{\mathbf{CS}}| \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ που δηλώνει την κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου $\boldsymbol{S}$ κατά το μέτρο του $\boldsymbol{CS}$.





Mathematik
Abiturprüfung 2023
Prüfungsteil B (χωρίς CAS)

Μπορείτε να τα χρησιμοποιήσετε ως βοηθήματα όταν εργάζεστε στις εργασίες

- το βοήθημα μνήμης για το μάθημα των μαθηματικών που έχει εγκριθεί από το Υφυπουργείο,
- έναν από τους στατιστικούς πίνακες που έχουν εγκριθεί από το Υπουργείο Επικρατείας,
- μία από τις συλλογές επιστημονικών τύπων που έχουν εγκριθεί από το Υπουργείο Επικρατείας για έρευνες απόδοσης,
- Αριθμομηχανή που συμμορφώνεται με τους κανονισμούς του Υπουργείου Επικρατείας.

Ανάλυση

Ομάδα εργασιών 1

1. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon x \mapsto 2e^{-\frac{1}{8}x^2}$ που ορίζεται στο R. Το σχήμα 1 δείχνει το γράφημα G_f της f, που έχει τον άξονα x ως οριζόντια ασύμπτωτη.

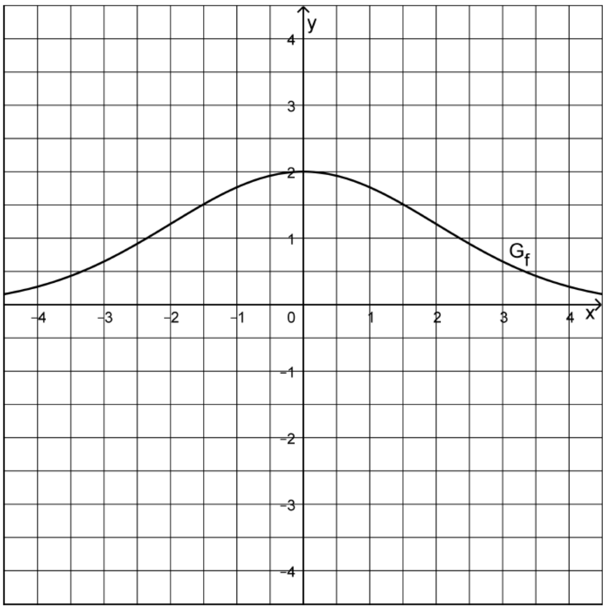


Abb. 1

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της τομής της G_f με τον άξονα y και να αποδείξετε μαθηματικά ότι η G_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

β) Το σημείο $W\left(-2|2e^{-\frac{1}{2}}\right)$ είναι ένα από τα δύο σημεία καμπής του G_f. Η εφαπτομένη στο G_f στο σημείο W συμβολίζεται με w. Προσδιορίστε μια εξίσωση της w και υπολογίστε τη θέση όπου η w τέμνει τον άξονα x. (για επαλήθευση: $f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$)

Για κάθε τιμή $c \in R^+$ θεωρούμε το ορθογώνιο με άκρα τα σημεία $P(-c|0), Q(c|0), R(c|f(c))$ και S.

γ) Για $c = 2$ σχεδιάστε το ορθογώνιο $PQRS$ στο σχήμα 1.

δ) Υπολογίστε την τιμή του c για την οποία ισχύει $QR = 1$.

ε) Ανάλογα με το c, βρείτε τα μήκη πλευρών του ορθογωνίου $PQRS$ και εξηγήστε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $A(c) = 4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}$

στ) Βρείτε την τιμή του c για την οποία το εμβαδόν $A(c)$ του ορθογωνίου $PQRS$ μεγιστοποιείται.

Για $k \in R$ θεωρούμε τις συναρτήσεις που ορίζονται στο $(-\infty, 0]$, $f_k\colon x \mapsto f(x) + k$. Έτσι $f_0(x) = f(x)$, όπου οι συναρτήσεις f_0 και f διαφέρουν στο πεδίο ορισμού.

ζ) Να αιτιολογήσετε, χρησιμοποιώντας την πρώτη παράγωγο της f_k, για κάθε τιμή του k, η f_k είναι αντιστρέψιμη. Στο σχήμα 1, σκιαγραφήστε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης της f_0.

η) Δώστε όλες τις τιμές του k για τις οποίες η γραφική παράσταση της f_k και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης της f_k δεν έχουν κοινό σημείο.

Λύση

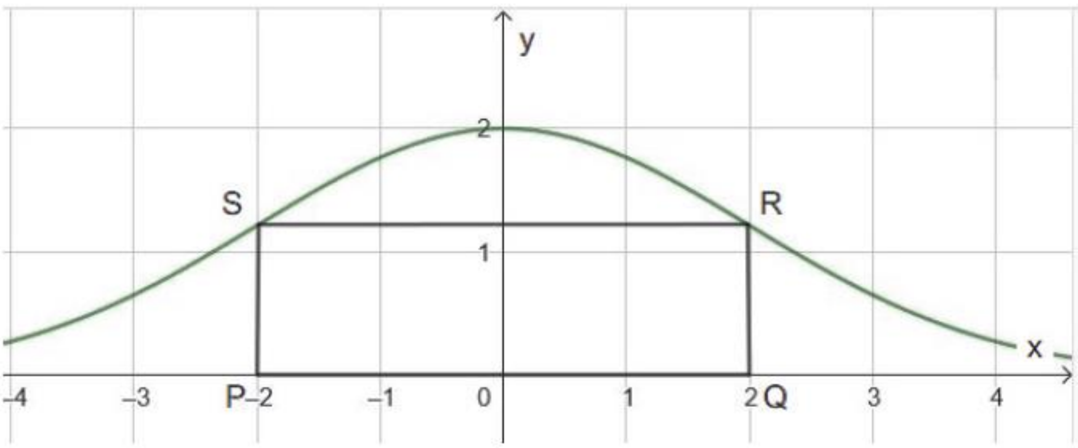
α) Έχω $f(0) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}0^2} = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2$, άρα το σημείο τομής με τον άξονα y είναι το $\boxed{A(0,2)}$

Ακόμα έχω $f(-x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}(-x)^2} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} = f(x)$, άρα η f είναι άρτια και επομένως η G_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y.

β) Έχω $\mathbf{f(2) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}2^2} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}$, $\mathbf{f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot 2x\right) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}}$ άρα $\mathbf{f'(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot e^{-\frac{1}{8}4} = e^{-\frac{1}{2}}}$. Άρα $\boldsymbol{w}$: $\boldsymbol{y - f(2) = f'(-2)(x+2)}$ ή $\boldsymbol{y - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}(x+2)}$.

Για $\boldsymbol{y = 0}$ έχουμε $\boldsymbol{-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}(x+2) \Leftrightarrow -2 = x + 2 \Leftrightarrow x = -4}$. Άρα η η $\boldsymbol{w}$ τέμνει τον άξονα $\boldsymbol{x}$ στο σημείο $\boxed{\boldsymbol{B(-4,0)}}$

γ) Για $\boldsymbol{c = 2}$ έχουμε τα σημεία $\mathbf{P(-2,0), Q(2,0), R(2, 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}})}$ και $\boldsymbol{S(-2, 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}})}$, από τη συμμετρία της ερώτησης α).

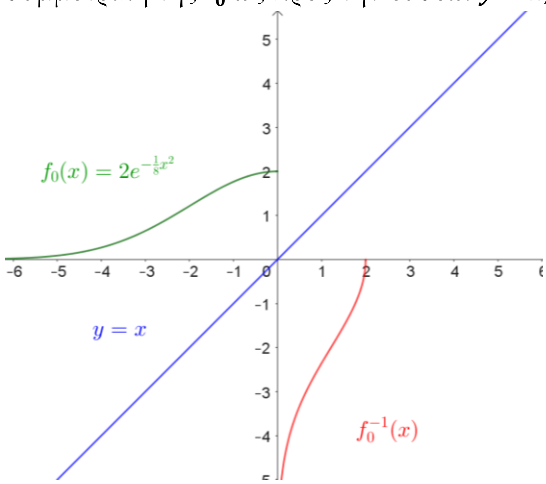


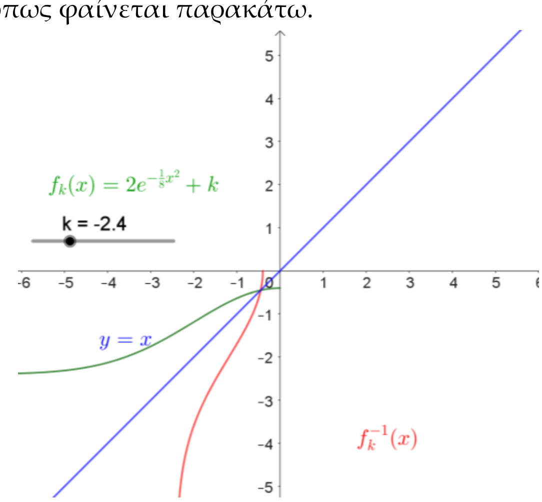
δ) $\boldsymbol{QR = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{8}x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8}x^2 = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8}x^2 = -\ln 2 \Rightarrow c^2 = 8\ln 2 \Rightarrow}$ $\boxed{\mathbf{x_1 = \sqrt{8\ln 2}}}$ ή $\boxed{\mathbf{x_2 = -\sqrt{8\ln 2}}}$

ε) Έχω $\boldsymbol{PQ = 2c}$ και $\boldsymbol{QR = 2 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}}$ άρα $\boldsymbol{A(c) = PQ \cdot QR =}$ $\boxed{\mathbf{4c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2}}}$

στ) Έχω $\boldsymbol{A'(c) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} + 4c \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 2c \cdot e^{-\frac{1}{8}c^2} = (4 - c^2)e^{-\frac{1}{8}c^2}}$ με $\boldsymbol{A'(c) = 0 \Leftrightarrow (4 - c^2)e^{-\frac{1}{8}c^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - c^2 = 0 \overset{c>0}{\Leftrightarrow}}$ $\boxed{\boldsymbol{c = 2}}$. Και $\boldsymbol{A'(x) > 0, 0 < x < 2}$ ενώ $\boldsymbol{A'(x) < 0, x > 2}$ Άρα έχουμε μέγιστο στο $\boldsymbol{x = 2}$.

ζ) έχω $\mathbf{f_k{}'(x) = f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}x^2}}_{>0} \geq 0}$ για κάθε $\boldsymbol{x \leq 0}$, άρα οι συναρτήσεις $\mathbf{f_k}$ είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbf{(-\infty, 0]}$ άρα μονότονες και συνεπώς αντιστρέψιμες. Η γραφική παράσταση της αντίστροφης της $\mathbf{f_0}$ είναι συμμετρική της $\mathbf{f_0}$ ως προς την ευθεία $\boldsymbol{y = x}$, όπως φαίνεται παρακάτω.





η) Για να τέμνονται οι δυο γραφικές παραστάσεις πρέπει να υπάρχει $\boldsymbol{c < 0}$ τ.ω. $\mathbf{f_k^{-1}(\boldsymbol{c}) = f_k(\boldsymbol{c}) \Leftrightarrow f_k(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{8}c^2} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} - 2e^{-\frac{1}{8}c^2} < -2}$. Άρα για $\boxed{\boldsymbol{k \geq -2}}$ οι δυο γραφικές δεν τέμνονται.

Αλλιώς.

Το γράφημα της $\mathbf{f_k}$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της $\mathbf{f_0}$ κατά $\boldsymbol{k}$ μονάδες, αντίστοιχα το γράφημα της $\mathbf{f_k}^{-1}$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της $\mathbf{f_0}^{-1}$ κατά $-\boldsymbol{k}$ μονάδες. Για να τέμνονται οι δυο γραφικές παραστάσεις αρκεί να τέμνουν τη διχοτόμο $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Αυτό γίνεται μόνο αν μετατοπιστεί η $\mathbf{f_0}$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες ή περισσότερο. Αν $\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{2}$, το δεξί άκρο της $\mathbf{f_k}$ θα ακουμπήσει για πρώτη φορά την διχοτόμο στην αρχή των αξόνων. Αντίστοιχα η $\mathbf{f_0}^{-1}$ μετατοπίζεται λόγω συμμετρίας προς τα αριστερά κατά k μονάδες, και θα ακουμπήσει για πρώτη φορά την διχοτόμο στην αρχή των αξόνων για $\boldsymbol{k} = -\mathbf{2}$. Συνεπώς, για $\boldsymbol{k} \geq -\mathbf{2}$ οι δυο γραφικές δεν τέμνονται.

2. Το Σχήμα 2 δείχνει ένα σπίτι με στέγη. Το μπροστινό μέρος του κοιτώνα φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 3. Η όψη του κοιτώνα περιγράφεται από το γράφημα $\boldsymbol{G_f}$ της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ από το πρόβλημα 1, τον άξονα $\boldsymbol{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\boldsymbol{x} = -\mathbf{4}$ και $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$. Μια μονάδα μήκους στο σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα μέτρο στην πραγματικότητα.

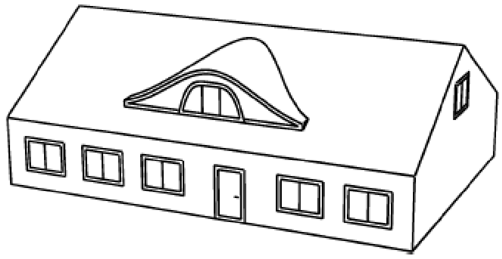


Abb. 2

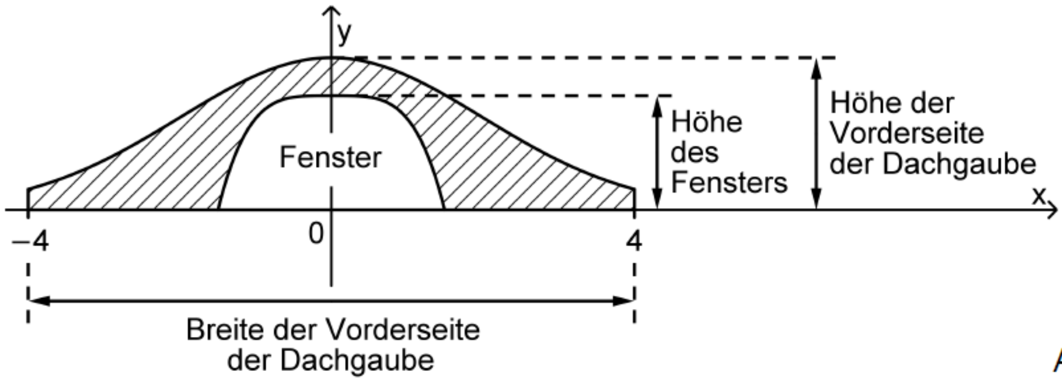


Abb. 3

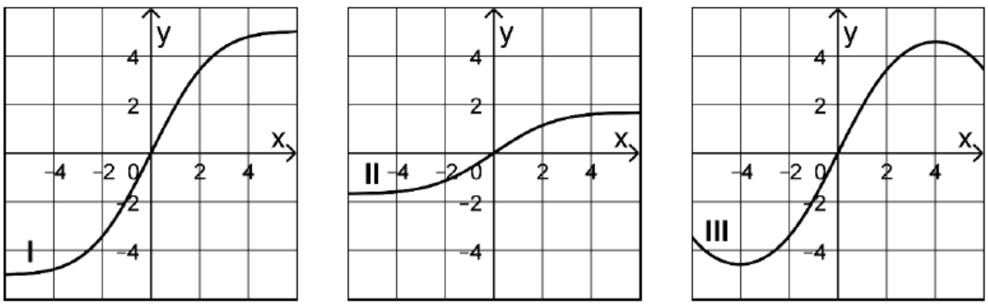
α) Προσδιορίστε το πλάτος και το ύψος του μπροστινού μέρους του κοιτώνα.

Υπάρχει ένα παράθυρο στον κοιτώνα. Το παράθυρο μοντελοποιείται στην περιοχή που περιλαμβάνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{ax^4} + \boldsymbol{b}$ και κατάλληλες τιμές $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}$ και ο άξονας $\boldsymbol{x}$ (βλ. Εικόνα 3).

β) Εξηγήστε ότι το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι αρνητικό και το $\boldsymbol{\beta}$ είναι θετικό.

Για να προσδιορίσετε το εμβαδόν του παραθύρου του κοιτώνα, θεωρείται μια αντιπαράγωγος $\boldsymbol{F}$ της $\boldsymbol{f}$ του προβλήματος 1.

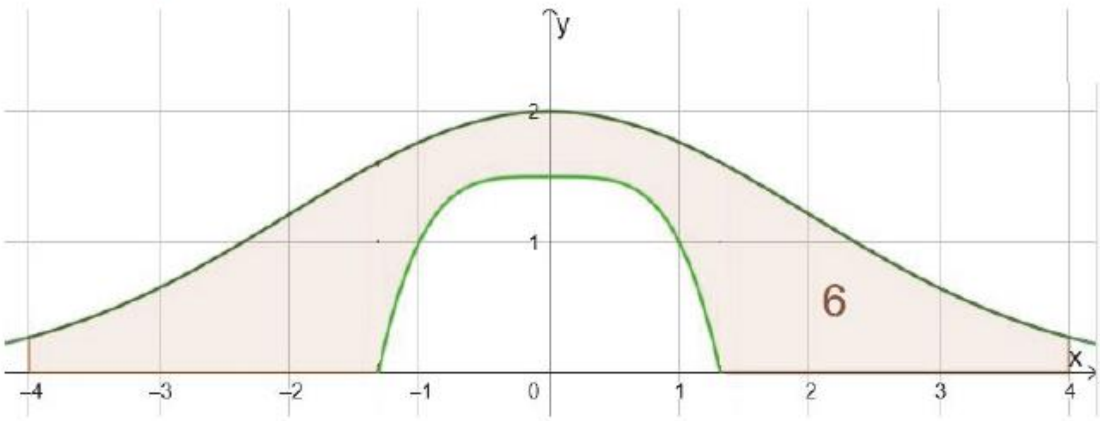
γ) Ένα από τα γραφήματα I, II και III είναι η γραφική παράσταση της $\boldsymbol{F}$. Να αιτιολογήσετε ότι αυτό είναι το Γράφημα I δίνοντας έναν λόγο που αποκλείετε το καθένα από τα Γραφήματα II και III.



δ) Χρησιμοποιήστε τώρα τη γραφική παράσταση της $\boldsymbol{F}$ από την άσκηση 2γ για να προσδιορίσετε προσεγγιστικά το εμβαδόν ολόκληρου του μπροστινού μέρους του κοιτώνα (συμπεριλαμβανομένου του παραθύρου).

Χρησιμοποιώντας αυτό το εμβαδόν, περιγράψτε το ουσιαστικά βήματα μιας λύσης με την οποία η τιμή του $\boldsymbol{\alpha}$ μπορούσε να προσδιοριστεί μαθηματικά έτσι ώστε το ύψος παραθύρου να είναι $\mathbf{1,50}\ \boldsymbol{m}$ και το τμήμα του μπροστινού μέρους του κοιτώνα χωρίς το παράθυρο να έχει εμβαδόν $\mathbf{6}\boldsymbol{m}^{\mathbf{2}}$.
ε) Για να είναι σε θέση να υπολογίσουμε κατά προσέγγιση το μήκος της άνω γραμμής προφίλ της μπροστινής πλευράς του κοιτώνα, προσεγγίζουμε την $\boldsymbol{G_f}$ που βρίσκεται στην περιοχή $-\mathbf{4} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{4}$ με τέσσερα διαδοχικά κυκλικά τόξα που ταιριάζουν άψογα μεταξύ τους. Ένα από αυτά τα κυκλικά τόξα εκτείνεται στην περιοχή $\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{2}$ και είναι μέρος του κύκλου με κέντρο $\boldsymbol{M}(\mathbf{0}|-\mathbf{1})$ και ακτίνα $\mathbf{3}$. Υπολογίστε την κεντρική γωνία του προς τομέα που ανήκει σε αυτό το τόξο και χρησιμοποιήστε την για να προσδιορίσετε την ζητούμενη τιμή προσέγγισης.

Λύση
α) Το ύψος του κοιτώνα αντιστοιχεί στο μέγιστο της $\boldsymbol{f}$ δηλαδή $\boxed{\mathbf{2}\boldsymbol{m}}$, ενώ το πλάτος είναι $\mathbf{4}-(-\mathbf{4}) = \boxed{\mathbf{8}\boldsymbol{m}}$
β) Έχω $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{3}}, \boldsymbol{g}''(\boldsymbol{x}) = \mathbf{12}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}}, -\mathbf{4} < \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ Η καμπύλη του παραθύρου στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, άρα πρέπει $\boldsymbol{g}''(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{12}\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$. Αν επιπλέον $\boldsymbol{b} \le \mathbf{0}$ τότε $\boldsymbol{ax}^{\mathbf{4}} + \boldsymbol{b} < \mathbf{0}$ και η καμπύλη του παραθύρου θα είναι όλη κάτω από τον άξονα $\boldsymbol{x}$, άτοπο. Άρα πρέπει $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$
γ) Έχω $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$, Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα. Στο γράφημα ΙΙΙ υπάρχουν τμήματα της καμπύλης που πέφτουν, άρα απορρίπτεται.
Από το ερώτημα 1ε) έχουμε $\boldsymbol{A}(\mathbf{c}) = \boldsymbol{PQ} \cdot \boldsymbol{QR} = \mathbf{4c} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{8}\mathbf{c}^2}$ και για $\boldsymbol{c} = \mathbf{2}$ έχω $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{PQ} \cdot \boldsymbol{QR} = \mathbf{8} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}$, το δεξί μισό του $\boldsymbol{PQRS}$ έχει εμβαδόν $\mathbf{4} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}$ και από την εικόνα του ερωτήματος 1γ βρίσκεται ολόκληρο κάτω από την καμπύλης $\boldsymbol{f}$ της άρα πρέπει $\boldsymbol{F}(\mathbf{2}) > \mathbf{4} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}}$. Όμως $\mathbf{4} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}} > \mathbf{2} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{e}}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \mathbf{2} > \sqrt{\boldsymbol{e}} \Leftrightarrow \mathbf{4} > \boldsymbol{e}$. Άρα πρέπει $\boldsymbol{F}(\mathbf{2}) > \mathbf{2}$, που δεν ικανοποιείται στο γράφημα 2. Άρα αποδεκτό το γράφημα Ι.
Αλλιώς, έχω $\boldsymbol{F}'(\mathbf{0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{2}$. Η κλίση της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ πρέπει επομένως να είναι 2. Αυτό προφανώς δεν συμβαίνει στο Γράφημα 2.
δ) Έχω $\boldsymbol{E} = \int_{-4}^{4} \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{2} \cdot \int_{0}^{4} \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{2} \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{x})]_0^4 = \mathbf{2} \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{4}) - \mathbf{F}(\mathbf{0})] \approx \mathbf{2}[\mathbf{5} - \mathbf{0}] \approx \boxed{\mathbf{10}}$
Αφού το ύψος παραθύρου είναι $\mathbf{1,50}\ \boldsymbol{m}$ έχω $\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{1,5} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{1,5}$



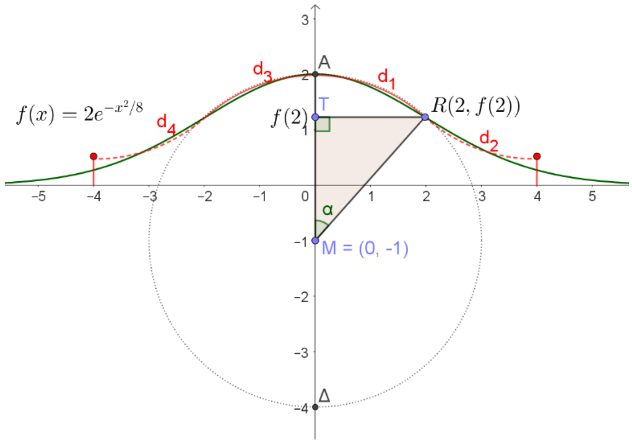
Προφανώς το εμβαδόν του παραθύρου είναι $\approx \mathbf{10-6=4}$. Άρα το εμβαδόν του παραθύρου είναι ίσο με $\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{g(x)}\mathbf{dx=4}$

ε) Έχω από το διπλανό σχήμα ότι:

$$\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{RT}}{\mathbf{MR}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{41,8^0}$$

Άρα το μήκος του τόξου $\mathbf{d_1} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{360}} \cdot \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{41,8}}{\mathbf{360}} \cdot \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{2,19}\boldsymbol{m}$.

Αφού θεωρήσαμε ότι και τα τέσσερα τόξα ταιριάζουν απόλυτα μεταξύ τους, έχουμε ότι το μήκος του άνω μέρους του προφίλ του κοιτώνα είναι ίσο με $\mathbf{4d_1} = \boxed{\mathbf{8,76}\boldsymbol{m}}$



τα υπόλοιπα θέματα όπως CAS

[Πηγές]

Μάθετε πώς λειτουργεί το γερμανικό σχολικό σύστημα στη Γερμανία - Allesgr.de
Το σύστημα Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης - DAAD Ελλάδος
Αυτά είναι τα 5 καλύτερα πανεπιστήμια της Γερμανίας - Allesgr.de
Abitur - Βικιπαίδεια (wikipedia.org)

IQB - Συνοδευτικά έγγραφα — Μαθηματικά (hu-berlin.de)
hilfsmittel_bei_leistungsnachweisen_regelungen_zu_cas.pdf