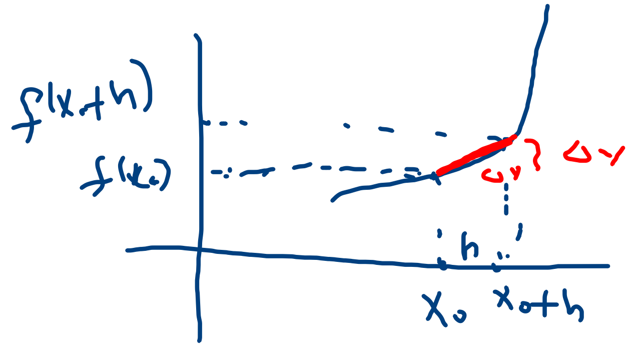
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



Ζ. Παράγωγοι με τον τύπο $f\,'(x_o)=\lim\limits_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

π.χ.

για $h=0$ $f(3)=5+\cancel{0^2+\eta\mu 0}$

Α) Αν για την f ισχύει $\boxed{f(3+h)}=5+h^2+\eta\mu h$ για κάθε h, να βρείτε το f '(3).

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{5}+h^2+\eta\mu h-\cancel{5}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}+\frac{\eta\mu h}{h}\right)=0+1$$

$$=1$$

σ. 103 ασκ. 8

Ζ. Παράγωγοι με τον τύπο $f'(x_o)=\lim\limits_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

π.χ. Β) **Βασική άσκηση**: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h}=kf'(x_0)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$w=kh \Rightarrow h=\frac{w}{k}$, όταν $h\to 0$, τότε $w\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h} = \lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{\frac{w}{k}}$$

$$=\lim_{w\to 0} k\cdot\left[\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{w}\right]$$

$$=k\lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{w}=k\cdot f'(x_0)$$

Ζ. Παράγωγοι με τον τύπο $f'(x_o)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

Άσκηση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι:

α) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h}=kf'(x_0)$ β) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)$

$k=2$

γ) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+3h)}{h}=-4f'(x_0)$ δ) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)$

ε) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=4f'(1)$

γ) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}=$

$-f'(x_0)-3f'(x_0)$

$=-4f'(x_0)$.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\ \underset{w\to 0}{\overset{w=-h}{=}}\ \lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{-w}=-f'(x_0)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}\ \overset{w=3h}{=}$

$-\lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{\frac{w}{3}}=-3\lim_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-f(x_0)}{w}$

$=-3f'(x_0)$

Ζ. Παράγωγοι με τον τύπο $f'(x_o)=\lim\limits_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

Ενότητα 1: Έννοια παραγώγου - Παράγωγος και συνέχεια (study4exams.gr) Άσκηση Δ3

π.χ. **Έστω f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$, που για κάθε $x,y\in R$ ισχύει η σχέση $\boxed{f(x+y)}=f(x)συν2y+f(y)συν2x$**

νδο η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in R$ με $f'(x_0)=συν2x_0$

για $x=0$, $y=0$: $f(0+0)=f(0)\,συν2\cdot0+f(0)\,συν2\cdot0$

$\cancel{f(0)}=\cancel{f(0)}\cdot1+f(0)\cdot1 \Rightarrow f(0)=0$ ✓

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(0+h)-\cancel{f(0)}}{h}=1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1}$ ✓

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)συν2h+f(h)συν2x_0-f(x_0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0)συν2h-f(x_0)}{h}+\frac{f(h)συν2x_0}{h}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{συνx-1}{x}=0$

$=f(x_0)\boxed{\lim\limits_{h\to0}\frac{συν2h-1}{2h}}2+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\cdotσυν2x_0$

$2h=x$

$=2f(x_0)\cdot0+\boxed{\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)}{h}}\cdot\lim\limits_{h\to0}συν2x_0$

$=0+1\cdotσυν2x_0=συν2x_0$ ✓

$f'(x_0)=συν2x_0$

$\boxed{f'(x)=συν2x}$

Παράγωγος και συνέχεια

2018, 2003, 2000

επαν 13, 07

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Άρα

Η f είναι συνεχής στο x_0

Υπόθ. f είναι παρ/μη στο x_0 → $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Σ f → συνεχής στο x_0.

Απόδ.: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0}$

$-f(x_0)$ $\quad -f(x_0)$

Για $x \neq x_0$ $\quad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)$

άρα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)$

$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$

f συνεχής στο x_0

Παράγωγος και συνέχεια

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Άρα

Η f είναι συνεχής στο x_0

Η f ΔΕΝ είναι συνεχής στο x_0

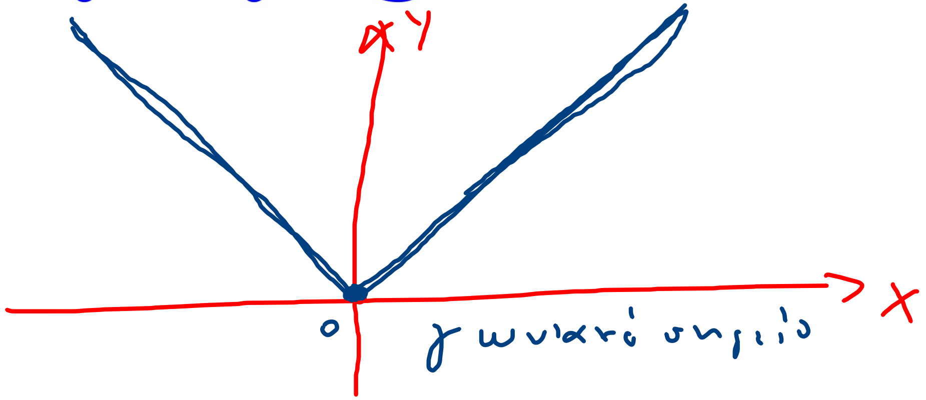
Άρα

Η f είναι ΔΕΝ παραγωγίσιμη στο x_0

- Αντιθετοαντιστροφή!

Παράγωγος και συνέχεια

$f(x)=|x|$



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ = δεν υπάρχει

$\cancel{f'(0)}$

Η f είναι συνεχής στο x_0

Όχι πάντα

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ?

- Απόδειξη με αντιπαράδειγμα την f(x)=|x|

Παράγωγος και συνέχεια

βιβλίο σελ. 103

ασκ. 8 βασική

Παράγωγος και συνέχεια - Ασκήσεις

eclass.sch.gr ασκήσεις στην Παρ/γωγο και συνέχεια

1. Να δείξετε ότι η f(x)=5−|x−5| είναι συνεχής στο x_0=5, αλλά όχι παραγωγίσιμη.

2. α) Να βρείτε τα α, β ώστε να υπάρχει η f '(1) για την f(x)=$\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x\le 1 \\ 2\alpha x+2\beta-4, & x>1 \end{cases}$

β) Ομοίως η f(x)=$\begin{cases} x+\alpha & ,x\le 1 \\ \beta\sqrt{x} & ,x>1 \end{cases}$ **γ)** f(x)=$\begin{cases} x^2+\alpha^2 x+1 & ,x\le 1 \\ 2x^2+\alpha x+\beta & ,x>1 \end{cases}$

3. Ομοίως η f(x)=$\begin{cases} \eta\mu x+(\beta-2)x+2\alpha-2 & ,x\le 0 \\ x^2+\alpha x+\beta & ,x>0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0.

Παραγωγίσιμη > συνεχής στο 1 ⟹ $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$1+\alpha+\beta=2\alpha+2\beta-4$

$f(1)=1^2+\alpha\cdot1+\beta=2\alpha\cdot1+2\beta-4 \Rightarrow \boxed{\beta=-\alpha+5}$ (1)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-(1+\alpha+\beta)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\alpha x+2\beta-4-(1+\alpha+\beta)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\alpha x+\cancel{\beta}-1-\alpha-\cancel{\beta}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\alpha x+2\beta-4-1-\alpha-\beta}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\overbrace{x^2-1}^{(x-1)(x+1)}}{x-1}+\frac{\alpha(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\alpha x+\overbrace{\beta}^{-\alpha+5}-5-\alpha}{x-1}$$

$$2+\alpha=\lim_{x\to1^+}\frac{2\alpha x-2\alpha}{x-1}$$

$$2+\alpha=\lim_{x\to1^+}\frac{2\alpha(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}}$$

άρα $2+\alpha=2\alpha$ $\boxed{\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=3\end{matrix}}$ καινούριο

$\beta=-\alpha+5$ έχω

Παράγωγος και συνέχεια - Ασκήσεις

4. Να εξετάσετε αν η f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & ,x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & ,x>0 \end{cases}$ παραγωγίζεται στο x_0=0.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

5. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε η f(x)=$\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+\gamma & ,x<1 \\ 2 & ,x=1 \\ x^3+\gamma x+2 & ,x>1 \end{cases}$ να παραγωγίζεται στο x_0=1.

f′(1), συνεχής σο1 → $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)=2$

$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x-1 & , x<1 \\ 2 & , x=1 \\ x^3-x+2 & , x>1 \end{cases}$

$\alpha+\beta+\gamma = \gamma+3 = 2$

$\gamma = 2-3$

$\boxed{\gamma=-1}$

$\alpha+\beta-1=2 \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=3}$

$\beta = 3-\alpha$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+\beta x-1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+(3-\alpha)x-3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^2+3x-\alpha x-3}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha(\cancel{x-1})(x+1)+3(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = \boxed{2\alpha+3}$

$-1/2+\beta=3$

$\boxed{\beta=3{,}5}$ $\boxed{\gamma=-1}$

$\boxed{\alpha=-1/2}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = \boxed{2}$

$x(x^2-1)$

$2\alpha+3=2$

$2\alpha=-1$

$\boxed{\alpha=-1/2}$

Παράγωγος και συνέχεια - Ασκήσεις

6. Έστω f(x)=$\begin{cases} x+\sqrt{3-x} & ,x<3 \\ x-\sqrt{x-3} & ,x\geq 3 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_0=3$.

7. Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f(0)=f\,'(0)=1$ Να βρείτε τα α, β ώστε η g(x)=$\begin{cases} f^2(x) & ,x\leq 0 \\ \alpha x+\beta & ,x>0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$|A|\le\theta \iff -\theta\le A\le\theta$ $\qquad$ $A^2+B^2=0 \iff A=B=0$

Παράγωγος και συνέχεια - Ασκήσεις

8. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f^{\,2}(x)+g^2(x)=x^4$ για κάθε x∈R.

για x=0 $\quad f^2(0)+g^2(0)=0 \iff f(0)=g(0)=0$

α) Να βρείτε τα f(0), g(0).

β) Να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο 0.

γ) Να βρείτε τα f '(0), g'(0).

9. Αν f και g παραγωγίσιμες στο $x_0=2$ και $f^{\,2}(x)+g^2(x)=(x^2-4)^2$, να δείξετε ότι $[f\,'(2)]^2+[g'(2)]^2=16$.

10. Έστω συνάρτηση f με f '(1)=2 και f(1)=1 και $g(x)=\begin{cases}2\alpha x^2+\beta x & ,x<1\\ f^2(x) & ,x\ge 1\end{cases}$, α, β∈R. Να βρείτε τα α, β ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Θέλω νδο $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}\le\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}=\sqrt{x^4}=x^2$

$|f(x)|\le x^2 \iff -x^2\le f(x)\le x^2$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{g^2(x)}{x^2}=\frac{x^4}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2=x^2$

~~lim lim lim $f'(0)^2+g'(0)^2=0$~~

$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\sqrt{\left|\frac{f(x)}{x}\right|^2}\le\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2}=|x|$

$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x| \iff -|x|\le\frac{f(x)}{x}\le|x|$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\boxed{0=f'(0)}$