

Ασύμπτωτες

Μάρτιος 2021

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

<https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/>

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2** δεν έχουν ασύμπτωτες.
- Οι ρητές συναρτήσεις $P(x)/Q(x)$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ **μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή**, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2.

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Πλάγιες Ασύμπτωτες της μορφής $y=\lambda x+\beta$

- Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a,+\infty)$ αντιστοίχως $(-\infty,a)$.

ΣΧΟΛΙΑ

3. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει

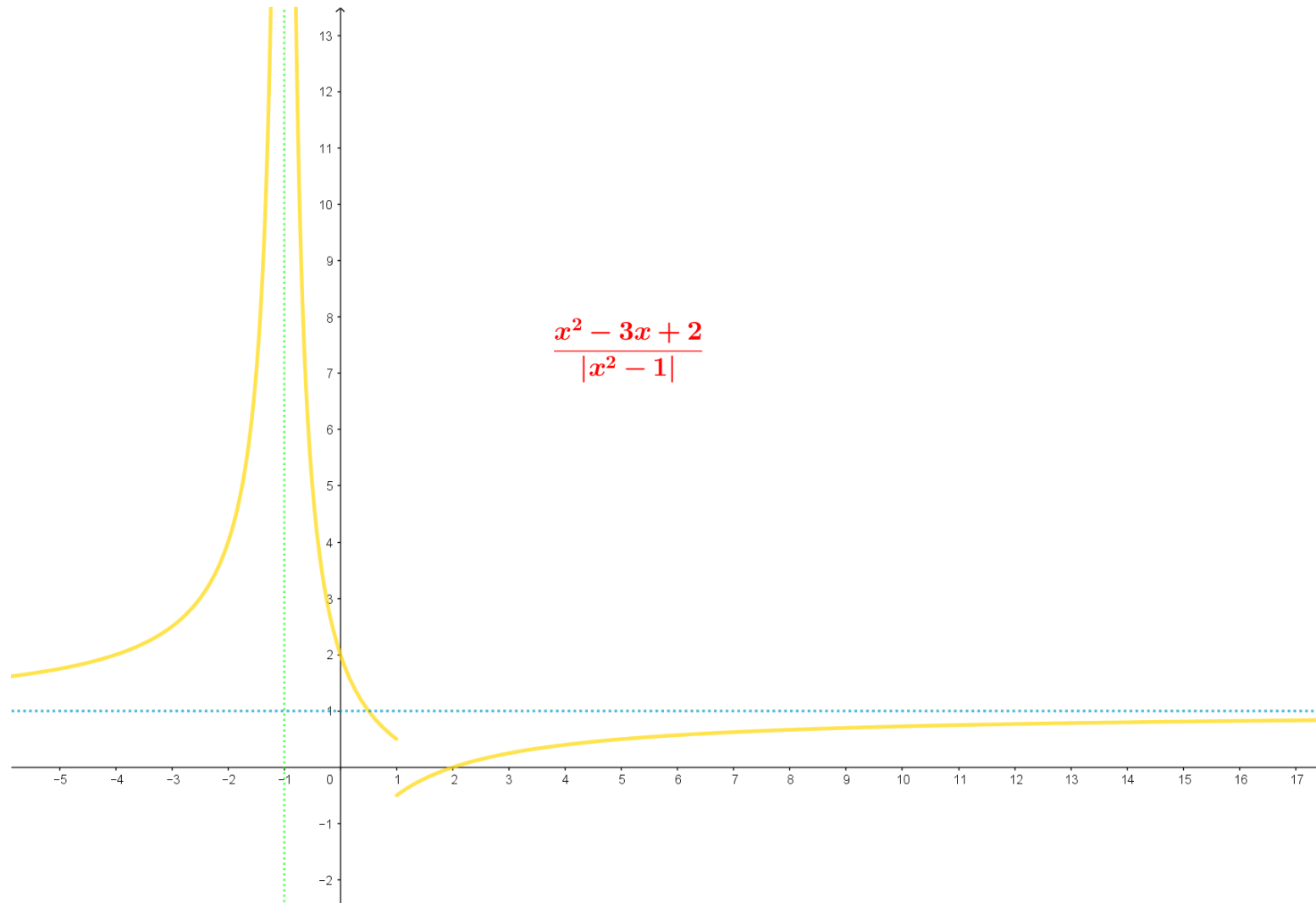
ή μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη

ή μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη

ή καθόλου στο διάστημα $(a, +\infty)$. Όμοια στο $(-\infty, a)$.

4. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο \mathbb{R} τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Παράδειγμα συνάρτησης που μηδενίζεται ο παρονομαστής στο $x=1$ αλλά η $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη!



Ασκήσεις βιβλίου: 1, 2, 3, Β: 1

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha) f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}, & \beta) f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}, & \gamma) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & \delta) f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}, \\ \epsilon) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, & \sigma\tau) f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{x^2}, & \zeta) f(x) = \frac{2x|x|}{x-4}. \end{array}$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha) f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}, & \beta) f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}, & \gamma) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & \delta) f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}, \\ \epsilon) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, & \sigma\tau) f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{x^2}, & \zeta) f(x) = \frac{2x|x|}{x-4}. \end{array}$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{array}{llll} \alpha) f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x}, & \beta) f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}, & \gamma) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & \delta) f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}, \\ \epsilon) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, & \sigma\tau) f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{x^2}, & \zeta) f(x) = \frac{2x|x|}{x-4}. & \end{array}$$

2. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 7}$, $x > 0$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 4$.

3. i) Αν η $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της f , στο $+\infty$, να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x].$$

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$, να βρείτε το μ . (απ: $\mu=2$)

4. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις συνεχείς στο \mathbb{R} τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$, για $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της f , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$. (απ: 2, $-5/7$)

β) να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της g όταν $x \rightarrow +\infty$.

5. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\frac{2x^2-5x+7}{x-1}$ στο $+\infty$.

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $y = \beta x - 4$ να είναι ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{\alpha x^2 - 13x + 6}{3x - 1}$ στο $+\infty$ (απ: $\alpha = 3, \beta = 1$)

7. Αν η $y=3x+2013$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+\sqrt{4x^2+1}-x}{x}$ (απ: 4)

8. Αν η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της περιττής f όταν $x\rightarrow+\infty$, να δείξετε ότι η $y=\lambda x-\beta$ είναι ασύμπτωτη της f όταν $x\rightarrow-\infty$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x-2}$, $x \neq 2$.

- α) Αν η C_f διέρχεται από το $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο $A(1, -4)$
- γ) Να δείξετε ότι η $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

10. Αν $\alpha > \beta > 1$ να δείξετε ότι: **α)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{\alpha^x + \beta^x}{\alpha^x} \right] = 0$.

β) Αν $f(x) = \ln(\alpha^x + \beta^x)$, να δείξετε ότι η $y = x \ln \alpha$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f

11. Αν η συνάρτηση f έχει για $x > 0$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = 4x + 3$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ **β)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x]$ **γ)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)f(x) - 4x^2}{f(x) + 10x}$ **δ)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$

(απ: 4, 3, 1/2, 0)