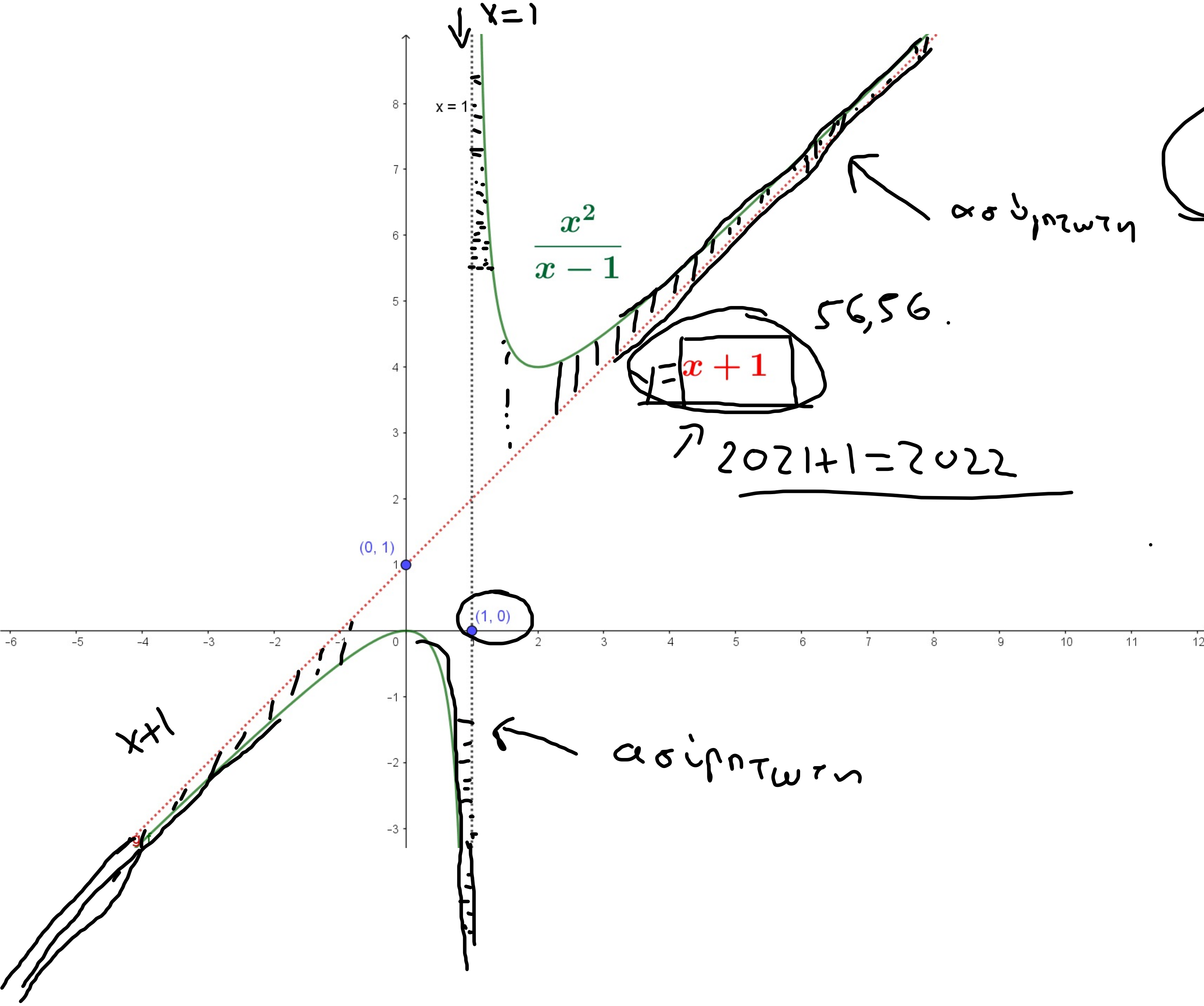
Ασύμπτωτες

Μάρτιος 2021

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/



$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$f(2021) = ?$$

$$f(55,56)$$

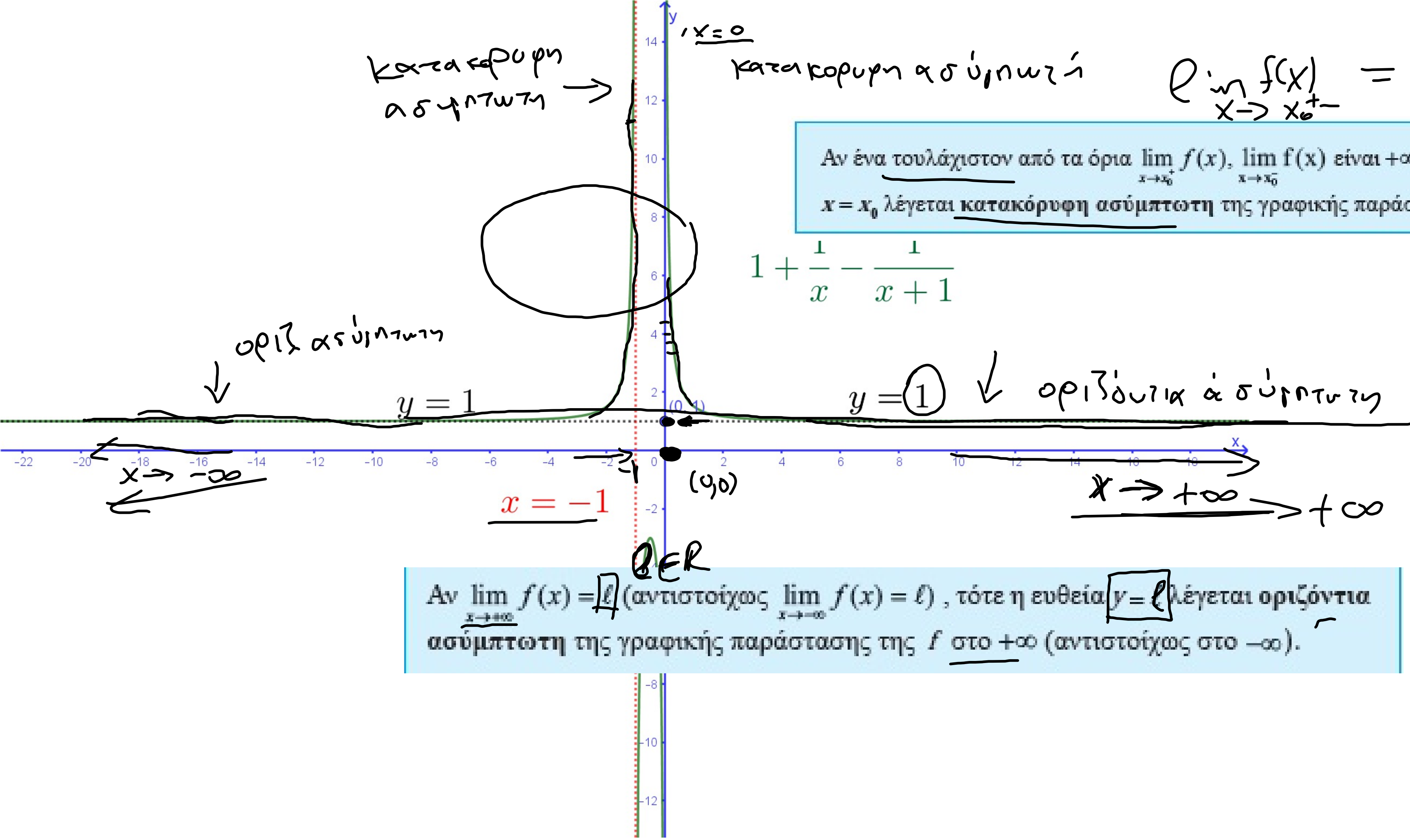
$$\frac{2021^2}{2020} = 2022,00049$$

$$f(314,57) \simeq 315,57$$

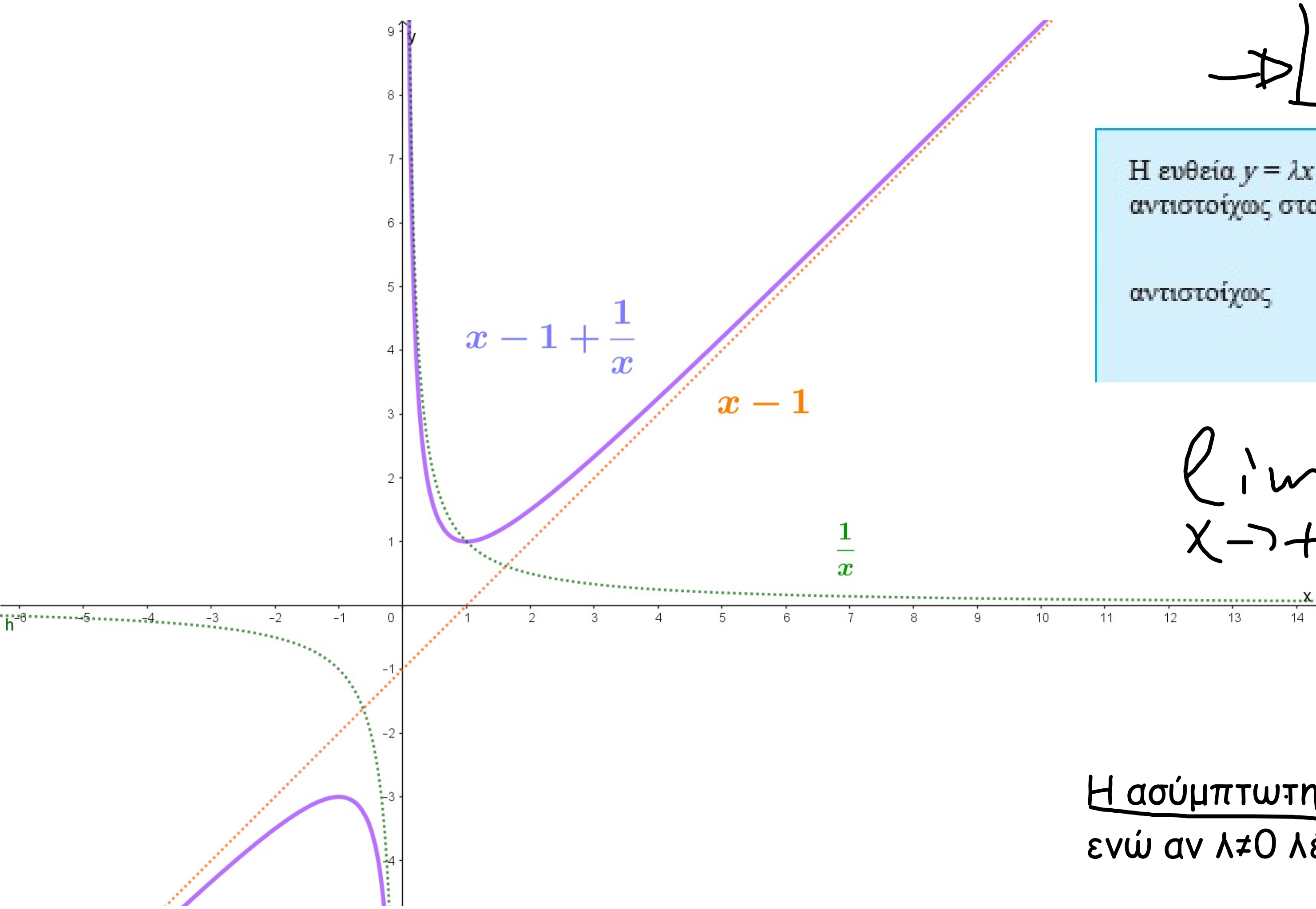
$$= \frac{314,57^2}{313,57}$$

$\lim_{x\to x_0^{+-}} f(x) = \pm\infty$ $\quad x = x_0$

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.



Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{\ell}$ (αντιστοίχως $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $\boxed{y = \ell}$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).



$\rightarrow \boxed{y = \lambda x + \beta}$

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

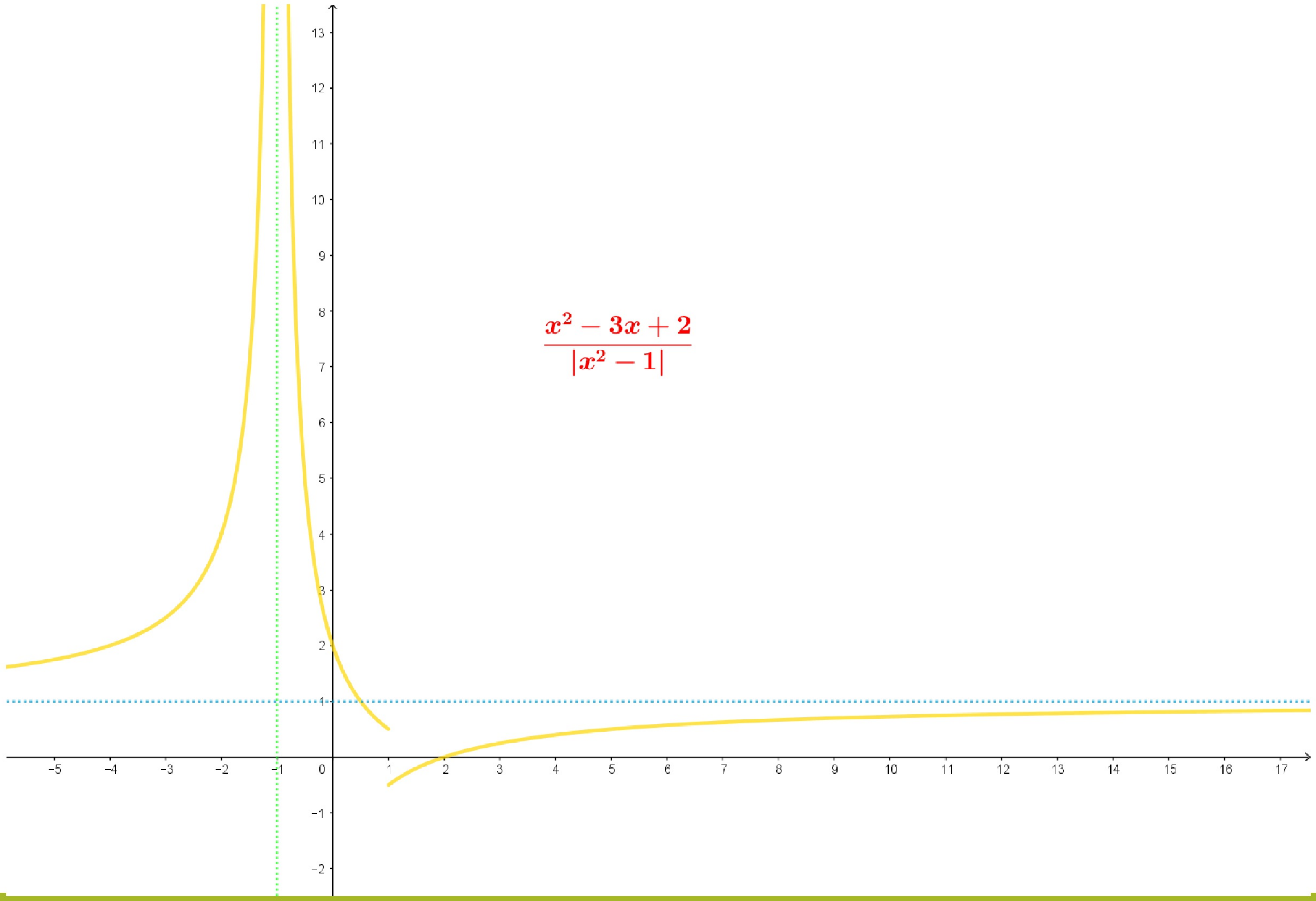
αντιστοίχως

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι οριζόντια αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη

Παράδειγμα συνάρτησης που μηδενίζεται ο παρονομαστής στο x=1 αλλά η x=1 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη!



Πώς βρίσκουμε μία
πλάγια ασύμπτωτη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$$

ΣΧΟΛΙΑ

x^4, x^3, x^2

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις P(x)/ Q (x) , με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

$\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x-1}$ δεν έχουν πλάγια

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \cancel{\pm\infty} \quad f(x_0) \in R$

2.

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα (ανοιχτά) των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Πλάγιες Ασύμπτωτες της μορφής y=λx+β

— Στο +οο, −οο, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α, +οο) αντιστοίχως (−οο,α).

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda \in R$

$y = \lambda x + \beta$

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in R$

ΣΧΟΛΙΑ

3. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει

ή μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη

ή μόνο μία πλάγια ασύμπτωτη

ή καθόλου στο διάστημα (a,+oo). Όμοια στο (−oo,α).

4. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο R τότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

5. Αν η συνάρτηση περιέχει το **lnf(x)** ενδέχεται στις ρίζες της f(x)=0 να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x)=x+1/x

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$$ κατακορυφή ασύμπτωτη $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + 0 = \boxed{1 = \lambda}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} \cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{x} = 0$$

$$y = \lambda x + b \Rightarrow \boxed{y = x}$$

οριζόντια ασυμπτωτη στο $\pm\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$$

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ii) $f(x)=\text{εφ}x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$.

σ. 167

Ασκ. 1, 2, 3

φυλ. 11, 1 ε), ζ) α)

eclass Ασυμπτωτες – ασκησεις

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x}$, **β)** $f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$, **γ)** $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, **δ)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$,

ε) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$, **στ)** $f(x)=\frac{\ln(9-x^2)}{x^2}$, **ζ)** $f(x)=\frac{2x|x|}{x-4}$.

β) $f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1-9}{1-1}=\frac{-8}{0^+}=-\infty \Rightarrow \boxed{x=1}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{-8}{0^-}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\frac{-1+9}{0^-}=-\infty \Rightarrow x=-1$ κατ. ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-9x}{x^2-1}}{\frac{x}{1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-9x}{x^2-1}-\frac{x}{1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-9x}{x^2-1}-\frac{x^3-x}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}-9x-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x}{x^2}=0=\beta$

$y=\lambda x+\beta$

$\boxed{y=x}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) f(x)=$\frac{|x^2-1|}{x}$, **β**) f(x)=$\frac{x^3-9x}{x^2-1}$, **γ**) f(x)=$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, **δ**) f(x)=ln$\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$,

ε) f(x)=$\sqrt{x^2-2x+4}$, **στ**) f(x)=$\frac{\ln(9-x^2)}{x^2}$, **ζ**) f(x)=$\frac{2x|x|}{x-4}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) f(x)=$\frac{|x^2-1|}{x}$, **β**) f(x)=$\frac{x^3-9x}{x^2-1}$, **γ**) f(x)=$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, **δ**) f(x)=$\ln\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$,

ε) f(x)=$\sqrt{x^2-2x+4}$, **στ**) f(x)=$\frac{\ln(9-x^2)}{x^2}$, **ζ**) f(x)=$\frac{2x|x|}{x-4}$.

$y = \lambda x + \beta$

2. Να βρείτε το α∈R ώστε η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\alpha x+\sqrt{x^2+7}$, $x>0$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=4$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x+\sqrt{x^2+7}}{x} = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = 4$$

$$\alpha + 1 = 4$$

$$\boxed{\alpha = 3}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = \frac{\sqrt{x^2(1+7/x^2)}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+7/x^2}}{\cancel{x}} \to$$

3. i) Αν η y=2x+5 είναι ασύμπτωτη της f, στο +∞, να βρείτε τα όρια:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.

ii) Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$, να βρείτε το μ. (απ: μ=2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=5$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(x)+4x}{x f(x)-2x^2+3x}=1 \Leftrightarrow, \quad \mu=;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\mu\cdot\frac{f(x)}{x}+4\right)}{\cancel{x}\cdot\left(f(x)-2x+3\right)}=1$$

$$\frac{\mu\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+4}{\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{f(x)-2x}_{5}+3\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{\mu\cdot 2+4}{8}=1$$

$$\mu\cdot 2+4=8$$

$$\boxed{\mu=2}$$

4. Έστω f,g:R→R είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$, για $x\in R$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της f, καθώς $x\to+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$ και ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x}{xf(x)-3x^2+1}$. (απ: 2, -5/7)

β) να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της g όταν $x\to+\infty$.

$$f(x)-g(x)=x-4$$

$$-g(x)=-f(x)+x-4$$

$$\boxed{g(x)=f(x)-x+4}$$

$y=3x-7$ ασύμπτωτη της f

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-7$$

i) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x+4}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{x}{x}+\frac{4}{x}\right)=3-1+0=2$$

$$\boxed{\lambda=2}$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x}{x\cdot f(x)-3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{g(x)}{x}+3\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2+3}{-7+0}=-\frac{5}{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x+4-2x=\lim_{x\to+\infty}f(x)-3x+4=-7+4=-3$$

$y=2x-3$ της g

5. Να δείξετε ότι η ευθεία y=2x−3 είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\frac{2x^2-5x+7}{x-1}$ στο +∞.

αρκεί νδο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=-3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-5x+7}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+7}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$f(x)-2x=\frac{2x^2-5x+7}{x-1}-\frac{2x}{1}=\frac{2x^2-5x+7}{x-1}-\frac{2x^2-2x}{x-1}=\frac{2x^2-5x+7-2x^2+2x}{x-1}$$

$$\boxed{y=2x-3}$$

όταν x → +∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+7}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x}=-3$$

6. Να βρείτε τα α,β∈R ώστε η $\boxed{y=\beta x-4}$ να είναι ασύμπτωτη της $f(x)=\frac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}$ στο $\boxed{+\infty}$ (απ: α=3, β=1)

Πρέπει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\beta$$

$$f(x)=\frac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2-13x+1}{3x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha \cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}=\boxed{\frac{\alpha}{3}=\beta}=1$$

$$\alpha=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\beta x\right)=-4$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\alpha}{3}\cdot x\right)=-4$$

$$\frac{\alpha x^2-13x+6}{3x-1}{}^{\,3}-\frac{\alpha x}{3}{}^{\,3x-1}=\frac{3\alpha x^2-39x+18}{3(3x-1)}-\frac{3\alpha x^2-\alpha x}{3(3x-1)}$$

$$=\frac{\cancel{3\alpha x^2}-39x+18-\cancel{3\alpha x^2}+\alpha x}{9x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\alpha}{3}\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-39+\alpha)x+18}{9x-3}$$

$$-4=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-39+\alpha)\cancel{x}}{9\cancel{x}}$$

$$-4=\frac{-39+\alpha}{9}\Rightarrow -36=-39+\alpha\Rightarrow\boxed{\alpha=3}$$

7. Αν η y=3x+2013 είναι ασύμπτωτη της f στο +∞, να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\sqrt{4x^2+1}-x}{x}$ (απ: 4)

$\Rightarrow \lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 3$

$\Rightarrow b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-3x = 2013$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\underbrace{(3x+2013)}_{y}\right)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x}-1}{1}$

$=\frac{3+2-1}{1}=4$ ✓

8. Αν η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της περιττής f όταν $x\to+\infty$, να δείξετε ότι η $y=\lambda x-\beta$ είναι ασύμπτωτη της f όταν $x\to-\infty$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$\frac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-2}$, x≠2.

α) Αν η C_f διέρχεται από το Α(1,–4) και ισχύει η σχέση $f(3)+3f(1)=0$, να δείξετε ότι α=1 και β=0.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο Α(1,–4)

γ) Να δείξετε ότι η y=x+2 είναι ασύμπτωτη της f στο +∞.

α) $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-2}$

$\frac{9\alpha+3\beta+3}{3-2}+3\cdot(-4)=0$

$9\alpha+3\beta+3-12=0$

$9\alpha+3\beta-9=0$

$A(1,-4) \Rightarrow f(1)=-4$

$\frac{\alpha+\beta+3}{1-2}=-4$

$\left.\begin{array}{l}\boxed{\alpha+\beta=1}\\ 3\alpha+\beta=3\end{array}\right\}$ $\beta=0$, $\alpha=1$

$\alpha=1$, $\beta=0$

$f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$

$f'(x)=\frac{(x^2+3)'(x-2)-(x^2+3)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-(x^2+3)}{(x-2)^2}$

$f'(1)=\frac{2\cdot 1(1-2)-(1^2+3)}{(1-2)^2}$

$=-2-4=-6$

β) $x_0=1$,

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-(-4)=-6(x-1)$

$y+4=-6x+6 \Rightarrow \boxed{y=-6x+2}$

γ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-2}-\frac{x+2}{1}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-2}-\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-2}-\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+4}{x-2}$

$=0$ ✓

η ευθεία y=x+2 είναι πλάγια ασύμπτωτη στο +∞.

10. Αν α>β>1 να δείξετε ότι: **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x}\right]=0$.

β) Αν f(x)=ln(αˣ+βˣ), να δείξετε ότι η y=xlnα είναι πλάγια ασύμπτωτη της f

$\beta<\alpha \qquad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)<1$

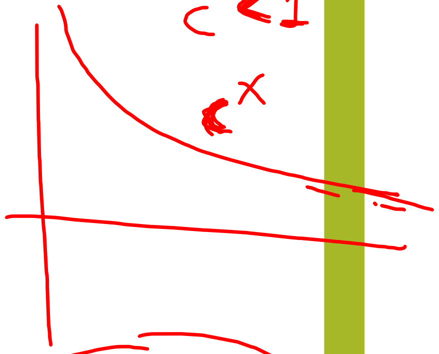
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{\alpha^x}{\alpha^x}+\frac{\beta^x}{\alpha^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)$$

$$=\ln\left(1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)$$

$$=\ln(1+0)=0.$$

$c<1$

c^x



όταν $0<c<1$ τότε $c^x\to 0$.

β) $f(x)=\ln(\alpha^x+\beta^x)$

$y=x\ln\alpha$

αρκεί νδο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\ln\alpha\right)=0 \longrightarrow y=x\ln\alpha$$

είναι πλ. ασύμπτωτη στο +∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(\alpha^x+\beta^x)-x\ln\alpha$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\alpha^x+\beta^x)-\ln\alpha^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{\alpha^x}\right)=0 \checkmark$$

11. Αν η συνάρτηση f έχει για x>0 ασύμπτωτη την ευθεία y=4x+3, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$ γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)f(x)-4x^2}{f(x)+10x}$ δ) $\lim_{x\to0+}x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$

(απ: 4,3,1/2,0)

λ, β

α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=4=\lambda$

β) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lambda x=\beta=3$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{xf(x)}{x}+\frac{f(x)}{x}-\frac{4x^2}{x}}{\frac{f(x)}{x}+\frac{10x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+f(x)-4x}{\frac{f(x)}{x}+10}=\frac{4+3}{4+10}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

δ) $\lim_{x\to0^+}x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^2}f(u)$

Θέτω $u=\frac{1}{x}\Rightarrow$

αν $x\to0^+$, $u\to+\infty$

$=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\cdot\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\cdot\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=0$

$\to 0$, $\to 4$