Κεφάλαιο 1

Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

1.1 Ιδιότητες Ορίων

Πόρισμα 1.1
Για ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)}$$

Απόδειξη
Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\\
&= \lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\
&= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0}(x^\nu) + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}) + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\
&= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0\\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

Πόρισμα 1.2
Για μία ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}}$$

Απόδειξη
Διαδοχικά έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

1.2 Συνέχεια συνάρτησης

Πόρισμα 1.3
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής.

Απόδειξη
Άμεσο, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Πόρισμα 1.4
Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη
Άμεσο, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Θεώρημα 1.1 (Ενδιάμεσων Τιμών)
Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

— η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

— $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Ιδέα/Σκιαγράφηση της απόδειξης
Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Απόδειξη
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

— η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

— $g(\alpha)g(\beta) < 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Κεφάλαιο 2

Διαφορικός Λογισμός

2.1 Η έννοια της παραγώγου

Θεώρημα 2.1
Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Ιδέα/Σκιαγράφηση της απόδειξης
Προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ εμφανίζοντας τον λόγο μεταβολής $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ μέσα στην παράσταση $f(x)-f(x_0)$.

Απόδειξη
Για $x\neq x_0$ έχουμε:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot 0=0,\end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

2.2 Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις - Παράγωγος Συνάρτηση

Πρόταση 2.1
Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παρα-

γωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή:

$$\boxed{(c)' = 0}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$.

Πρόταση 2.2
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 0$.

Πρόταση 2.3
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$\boxed{(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} &= \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} \\ &= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1},\end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})$$

$$= x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Πρόταση 2.4
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$= \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.3 Κανόνες Παραγώγισης

Θεώρημα 2.2 (Παράγωγος Αθροίσματος)
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)}$$

Απόδειξη
Για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

Πρόταση 2.5
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}}$$

Απόδειξη
Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Πρόταση 2.6 (Παράγωγος της $\varepsilon\varphi x$)
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x : \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Απόδειξη
Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\varphi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \\
&= \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
&= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\
&= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.
\end{aligned}$$

Πρόταση 2.7
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή:

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Πρόταση 2.8
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή:

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha}$$

Απόδειξη
Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

Πρόταση 2.9
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, δηλαδή:

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Απόδειξη
Πράγματι

— αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε: $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.