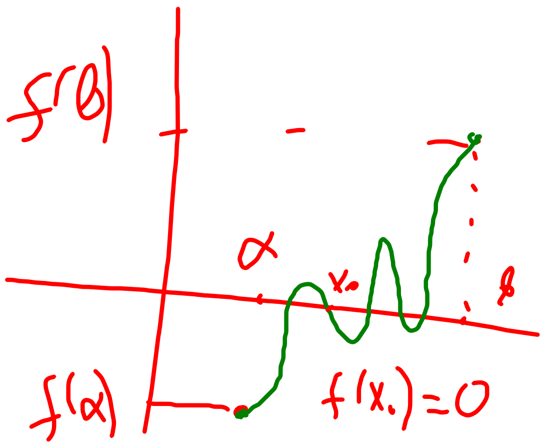
Θεωρήματα στη Συνέχεια συναρτήσεων

Δεκέμβριος 2020

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/



Θ-Β:

f συνεχής $[\alpha, \beta]$

$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

ΤΟΤΕ

υπάρχει ένα τλχ

$\alpha < x_0 < \beta$ ή $x_0 \in (\alpha, \beta)$

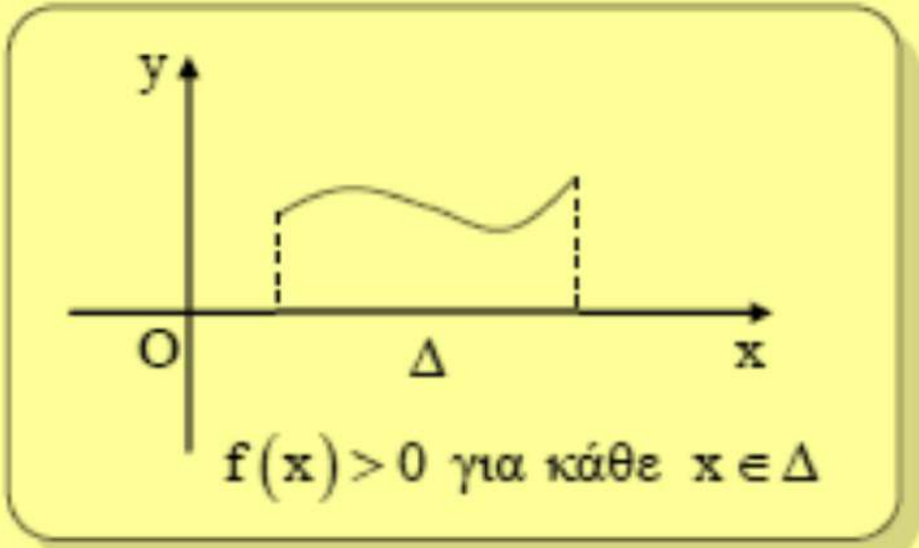
τ.ω $f(x_0) = 0$

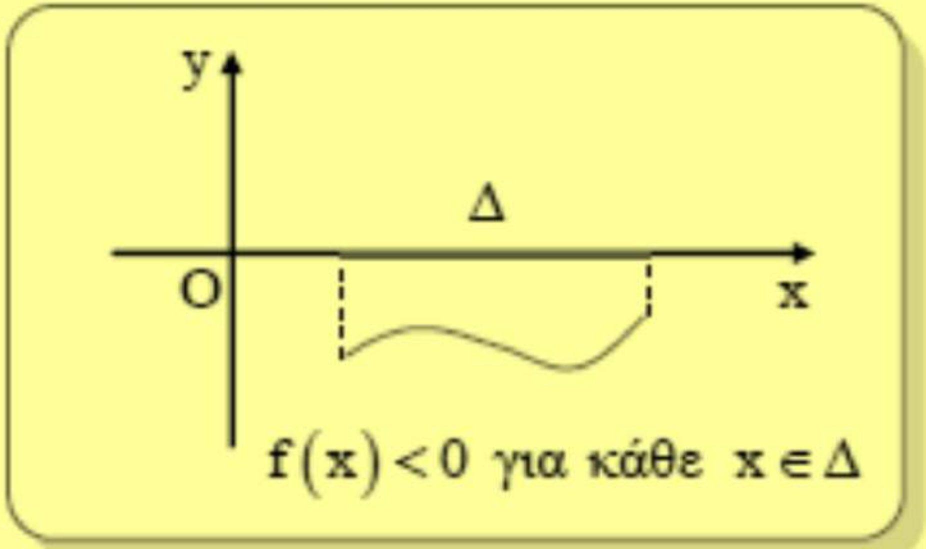
x_0 ρίζα της $f(x)$

Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης

Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε **ένα** διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο Δ. Δηλαδή, ισχύει

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ ή } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta$$





Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης

1

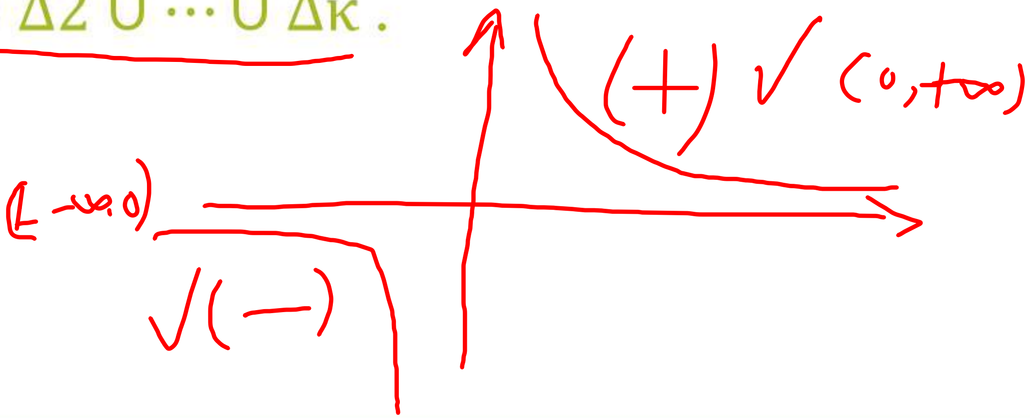
Η πρόταση **εφαρμόζεται σε διάστημα** και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Έτσι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα Δ1, Δ2, …, Δκ και δεν μηδενίζεται σε κανένα από αυτά, τότε η f διατηρεί βέβαια πρόσημο σε καθένα από τα Δ1, Δ2 , …, Δκ όχι όμως κατ' ανάγκη και στο Δ1 ∪ Δ2 ∪ ⋯ ∪ Δκ .

- **Παράδειγμα**

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$

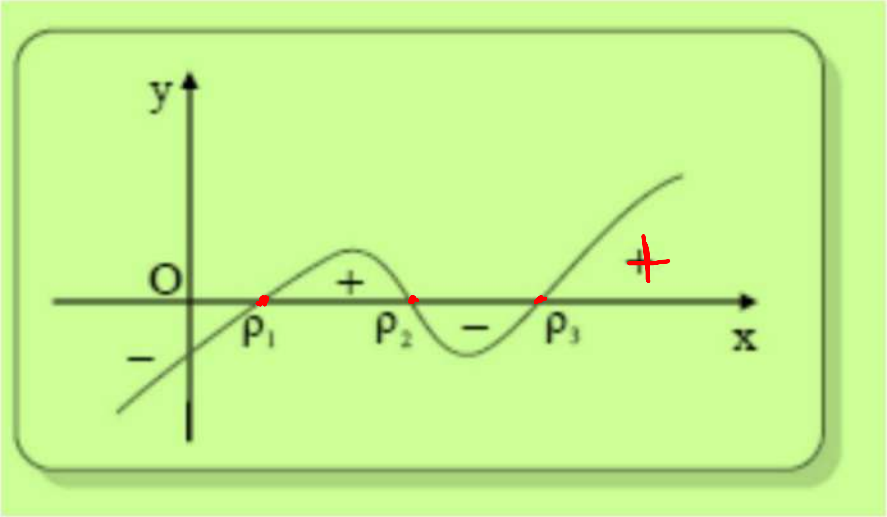
$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης

Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, σε ένα διάστημα Δ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το διάστημα Δ.

$$\left.\begin{matrix} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{matrix}\right\} (\rho_1, \rho_2)$$

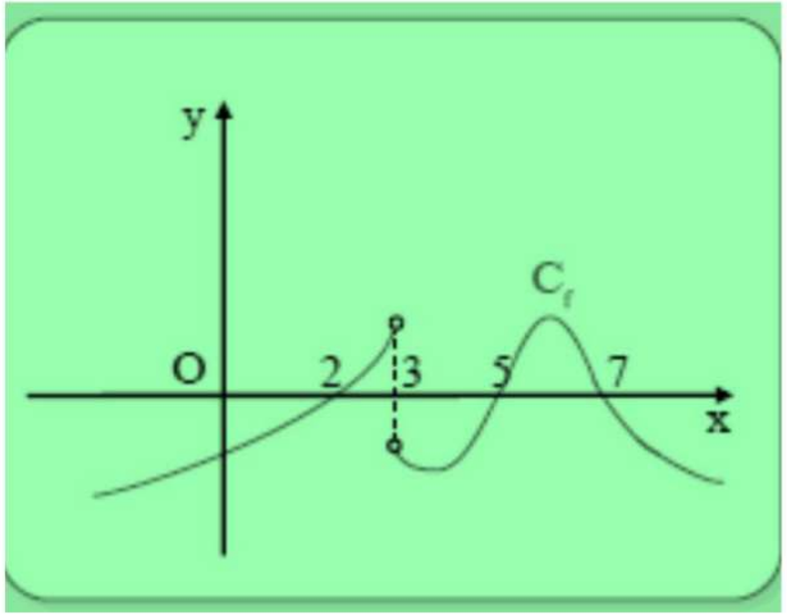


Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες, τους αριθμούς 2, 5 και 7.

Όμως η f δεν διατηρεί πρόσημο μεταξύ των διαδοχικών ριζών της 2 και 5.

Υπάρχει αντίφαση με τη συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano;



Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης **Βασική Άσκηση**

$-1 \le x \le 1$

Αν $f : [-1, 1] \to R$ είναι μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση : $x^2 + f^2(x) = 1$ και, επιπρόσθετα, γνωρίζετε ότι $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f.

Από τη δοσμένη σχέση παίρνουμε το εξής: $x^2 + f^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$ $|f(x)| = \sqrt{1 - x^2}$

$|f(x)| = \sqrt{1-x^2}$ ✓

επομένως, έχουμε τον τύπο της |f| και θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για τον τύπο της f. Αν γνωρίζαμε το πρόσημο της f στο πεδίο ορισμού της τότε θα μπορούσαμε, αναλόγως, να «βγάλουμε» το απόλυτο και έτσι να καταλήξουμε στον τύπο της f.

$f(x_0) = 0$, $\sqrt{1-x_0^2} = 0$

$\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\sqrt{1-x^2} \neq 0$

$|f(x)| \neq 0$

$f(x) \neq 0$

στο $(-1,1)$

σο $f(0)=1>0$

f διατηρεί το πρόσημο.

η f $(-1,1)$ είναι θετική

$|f| = f$

$f = |f| = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$

$|f(x)| = f(x)$

συμπλήρωση τετραγώνου

Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης **Άσκηση**

Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) = 9$ για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 3$

$$f^2(x) - 2 \cdot x \cdot f(x) + x^2 = 9 + x^2$$

$$\sqrt{(f(x)-x)^2} = \sqrt{9+x^2}$$

$$|f(x)-x| = \sqrt{9+x^2}$$

$$|g(x)| = \sqrt{9+x^2} \neq 0$$ για κάθε $x \in R$

έστω $g(x) = f(x) - x$ συνεχής

$x^2 \geq 0$

$\sqrt{9+x^2} \geq \sqrt{9+0} = 3 > 0$

$|g(x)| \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

g διατηρεί το πρόσημο.

$g(0) = f(0) - 0 = 3 - 0 = 3 > 0$

$g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

$|g(x)| = g(x)$

$$g(x) = \sqrt{9+x^2}$$

$$f(x) - x = \sqrt{9+x^2}$$

$$\boxed{f(x) = x + \sqrt{9+x^2}}$$

$f(0) = 0 + \sqrt{9+0^2} = 3$ ✓

Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης Άσκηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε $f^2(x) - 1 = 2xf(x)$ για κάθε $x \in R$

σ υ ν ε χ η ς

~~α~~) Να δείξετε ότι η $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

β) Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to-\infty} xf(x)$.

α) $f^2(x) - 1 = 2x f(x)$

$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = 1 + x^2$

$\sqrt{(f(x) - x)^2} = \sqrt{1+x^2}$

$|f(x) - x| = \sqrt{1+x^2}$

$|g(x)| = \sqrt{1+x^2} > 0$

$|g(x)| \neq 0$ για κάθε $x \in R$

$\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1+0} = 1$

$g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

g διατηρεί πρόσημο.

$g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$ } $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

$|g(x)| = g(x) \Rightarrow g(x) = \sqrt{1+x^2}$

$f(x) - x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

γ) $\lim_{x\to-\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{(x+\sqrt{1+x^2})\cdot(x-\sqrt{1+x^2})}{x-\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(x^2 - (1+x^2)\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot(-1)}{x-\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x - \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x - |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

$x \to -\infty$

$|x| = -x$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x + x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = \frac{-1}{1+\sqrt{0+1}} = \frac{-1}{2}$

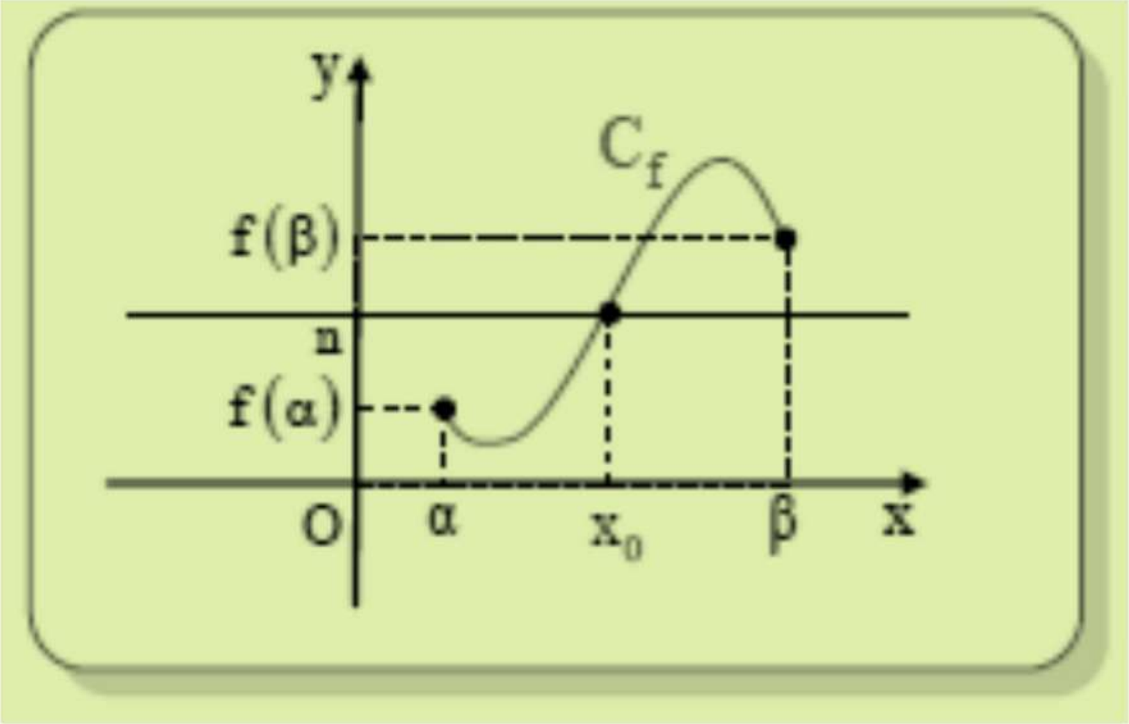
Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Αν:

1. η f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και
2. $f\,(\alpha) \neq f\,(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.



Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Αποτελεί γενίκευση του ΘΒ

Απόδειξη

f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Οπότε έχουμε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$

$x_0 \in (\alpha,\beta)$

$f(x_0) = \eta$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x_0) - \eta = 0$

$g(x) = f(x) - \eta, x \in [\alpha,\beta]$

Εφαρμόζω στην g(x) το ΘΒ

$g(x) = f(x) - \eta$

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) - \eta < 0 \\ g(\beta) &= f(\beta) - \eta > 0 \end{aligned}\right\} \quad g(\alpha)\cdot g(\beta) < 0$$

∃ τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω. $g(x_0) = 0$

$f(x_0) - \eta = 0$ ή $f(x_0) = \eta$

Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

$2 < e$

$\ln 2 < \ln e$

$f(1) = e^{2-1} + \ln 1 = e = 2{,}71$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = e^{2-x} + \ln x$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$. Επίσης, $f(1) = e$ και $f(2) = 1 + \ln 2$. Για τον αριθμό η=2 παρατηρούμε ότι $f(2) < 2 < f(1)$.

$f(2) = e^{2-2} + \ln 2 = 1 + \ln 2$

$< 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$

Οπότε,

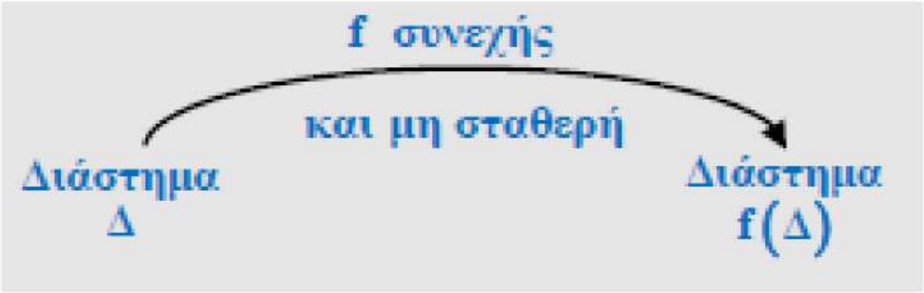
σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

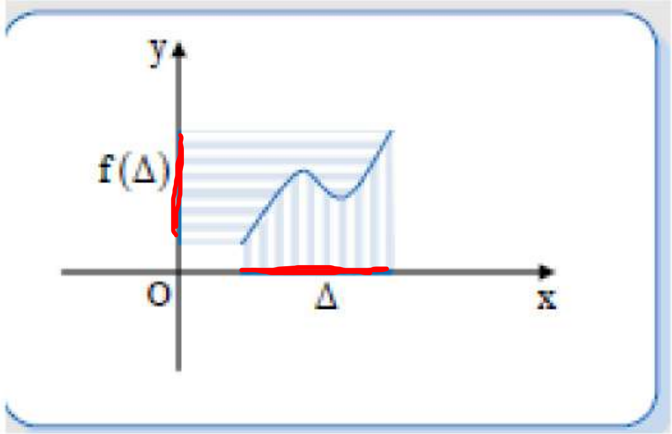
υπάρχει $\overset{\xi \lambda x}{x_0} \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε $\boxed{f(x_0) = 2}$

Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Πρόταση

Η εικόνα f (Δ) κάθε διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα





Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις f ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και τέτοιες, ώστε το f(Δ) να είναι διάστημα, χωρίς όμως οι συναρτήσεις αυτές να είναι συνεχείς στο διάστημα Δ

Παράδειγμα

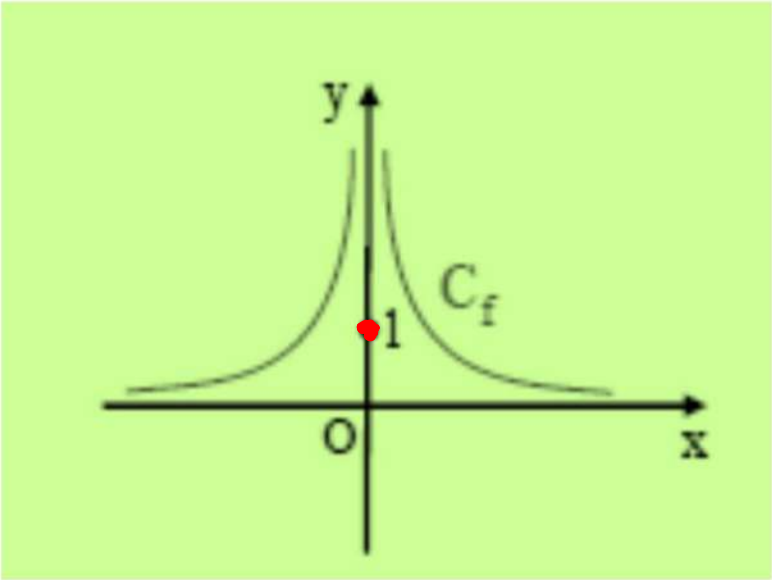
Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$,

$D_f = \mathbb{R} = \Delta$

έχει πεδίο ορισμού το διάστημα R και

σύνολο τιμών το διάστημα $f(R) = (0, +\infty)$.

Όμως, η f δεν είναι συνεχής στο 0 .

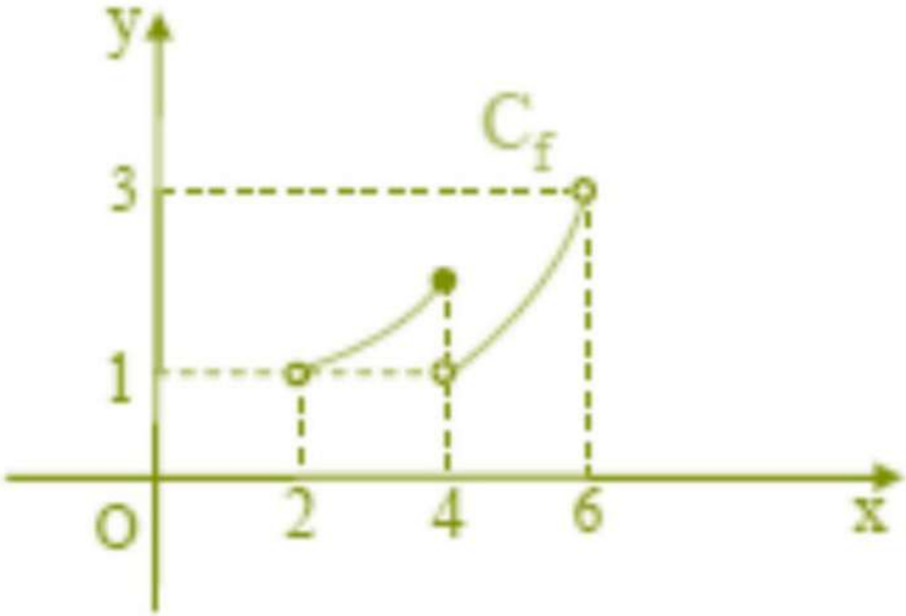


Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ=(2, 6). Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

Όμως, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα f(Δ)=(1,3).

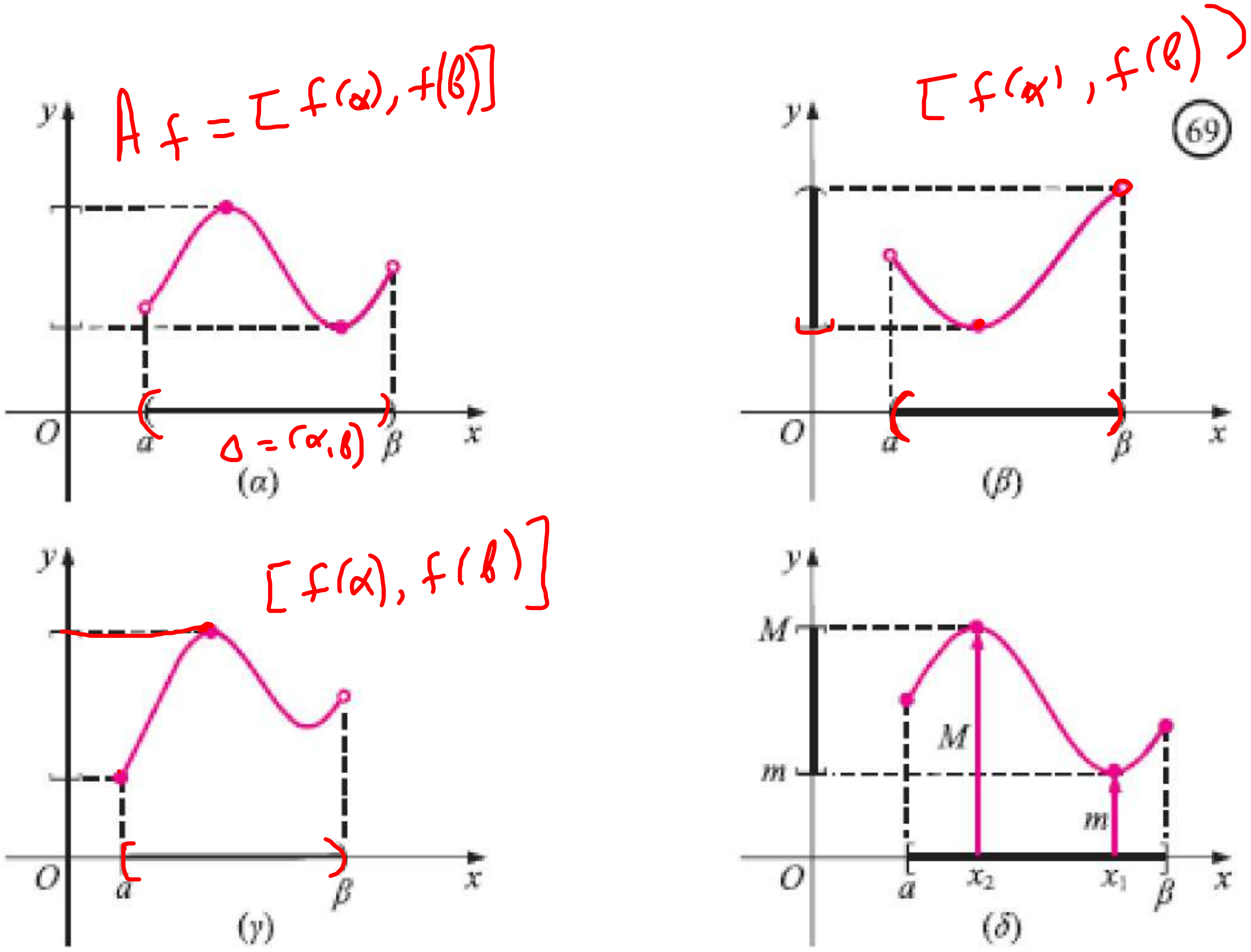
Υπάρχει αντίφαση με τη συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών που μας λέει ότι η εικόνα f (Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα;



Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Πρόταση

Μόνο αν το Δ είναι κλειστό και από τις δυο πλευρές μπορώ να είμαι σίγουρος ότι και το f(Δ) είναι επίσης κλειστό και από τις δυο πλευρές



Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν

$x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε

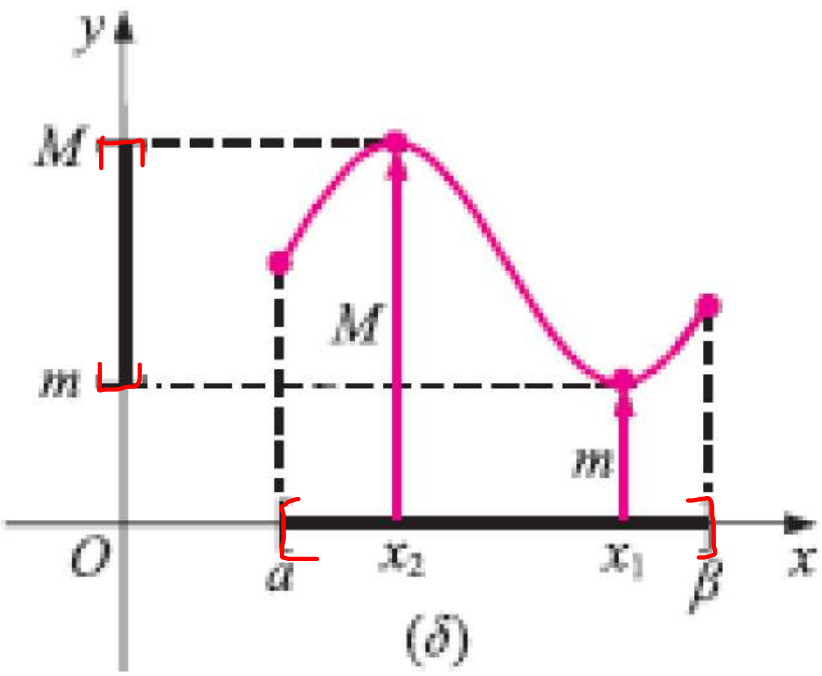
$f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$ και

$m \leq f(x) \leq M$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Όλα τα διαστήματα κλειστά!

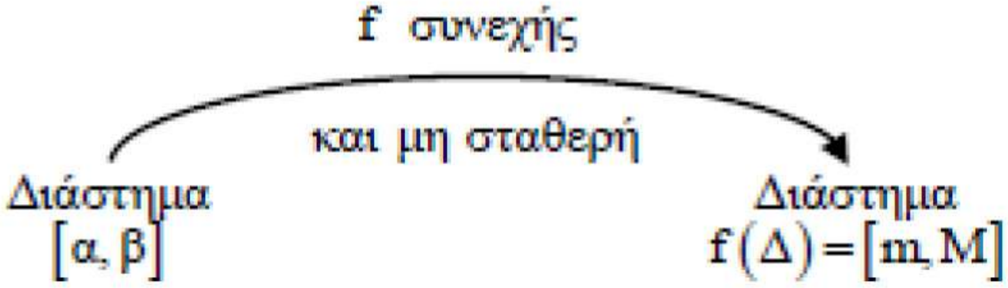
$[\alpha, \beta] \longrightarrow [m, M]$



Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

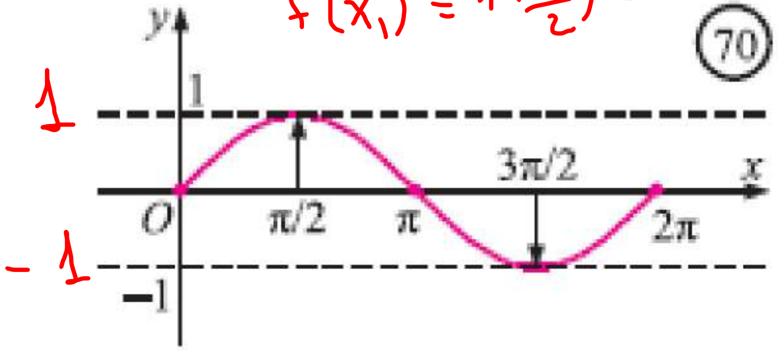
Το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής σε συνεργασία με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών εγγυάται ότι οι συνεχείς και μη σταθερές συναρτήσεις απεικονίζουν

κάθε κλειστό διάστημα Δ [α,β] σε επίσης κλειστό διάστημα f(Δ)= [m, M].



Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in [0,2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.

$f(x_1) = f(\frac{\pi}{2}) = 1 = M$ $\quad f(\frac{3\pi}{2}) = -1 = m$



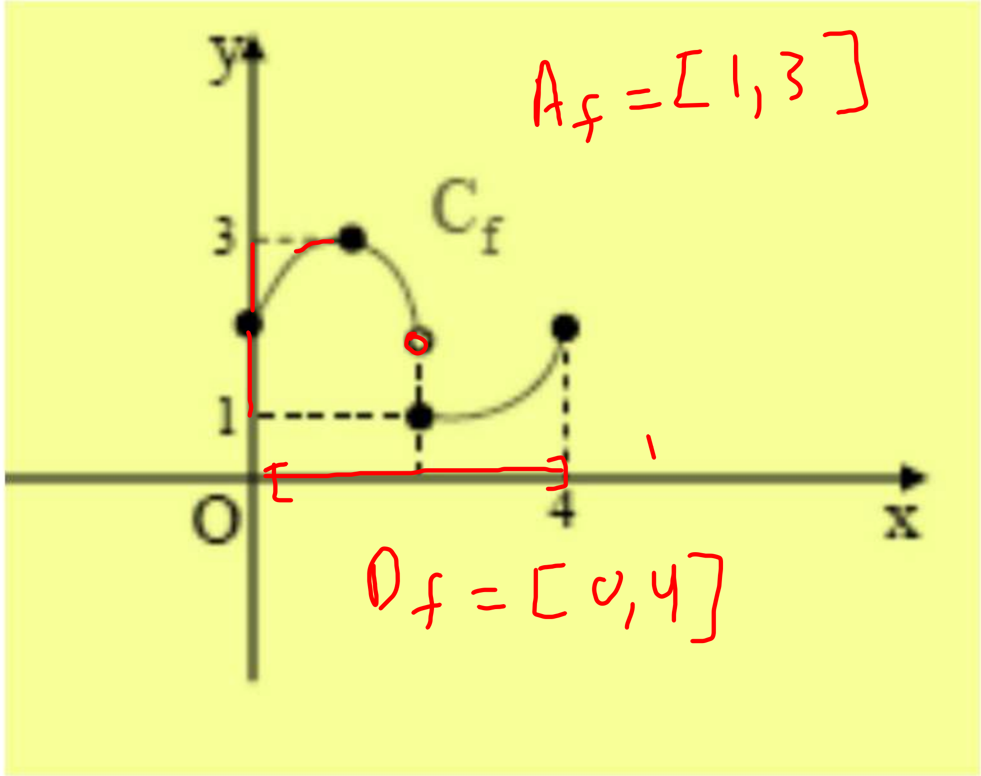
Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [0,4].

Η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το 1 και μέγιστη τιμή το 3. Μάλιστα, το σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα [1,3].

Όμως, η f δεν είναι συνεχής.

Υπάρχει αντίφαση με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής;



Σύνολο Τιμών σε Διαστήματα Μονοτονίας

Μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της. Σε κάθε διάστημα από το πεδίο ορισμού, εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

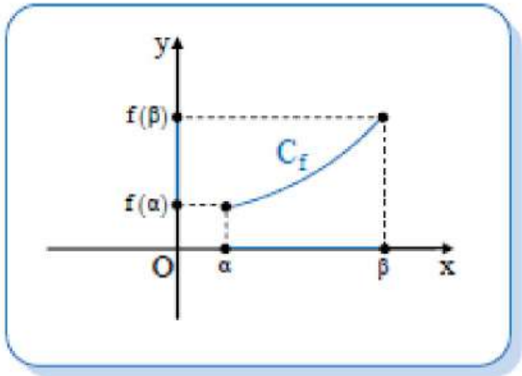
i. Αν $x \in [a, b]$ και $f \uparrow$ ΤΟΤΕ $f(x) \in [f(a), f(b)]$

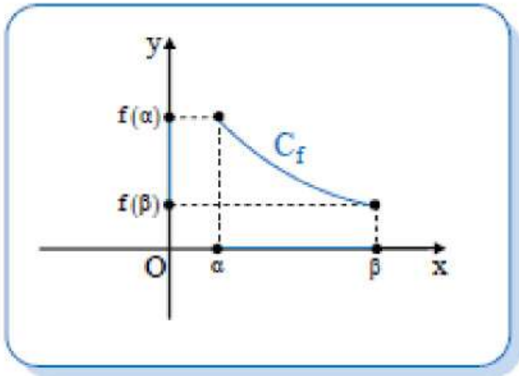
ii. Αν $x \in [a, b]$ και $f \downarrow$ ΤΟΤΕ $f(x) \in [f(b), f(a)]$

$\alpha < \beta \quad f \downarrow$

$f(\alpha) > f(\beta)$

$[f(\beta), f(\alpha)]$



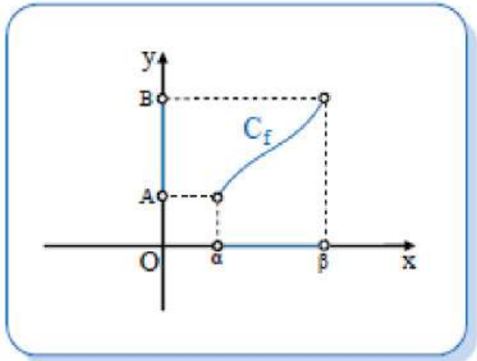


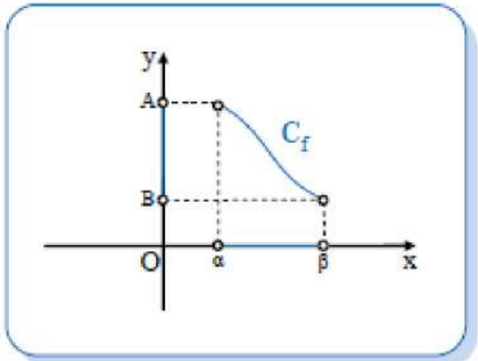
Σύνολο Τιμών σε Διαστήματα Μονοτονίας

Μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, αν γνωρίζουμε τη μονοτονία της. Σε κάθε διάστημα από το πεδίο ορισμού, εφαρμόζουμε τους παρακάτω κανόνες:

i. Αν $x \in (a, b)$ και $f \uparrow$ ΤΟΤΕ $f(x) \in (\lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to b-} f(x))$

ii. Αν $x \in (a, b)$ και $f \downarrow$ ΤΟΤΕ $f(x) \in (\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty, \lim_{x\to a^+} f(x))$





Σύνολο Τιμών σε Διαστήματα Μονοτονίας

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = e^x + \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$

$f(0)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Άρα $f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right)$$

9. σελ 81

10. σελ 81

7.8 σελ 82