# ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ

Νοέμβριος 2020

ΓΕΛ Ν. Αγιονερίου Κιλκίς

https://eclass.sch.gr/courses/2663010132/

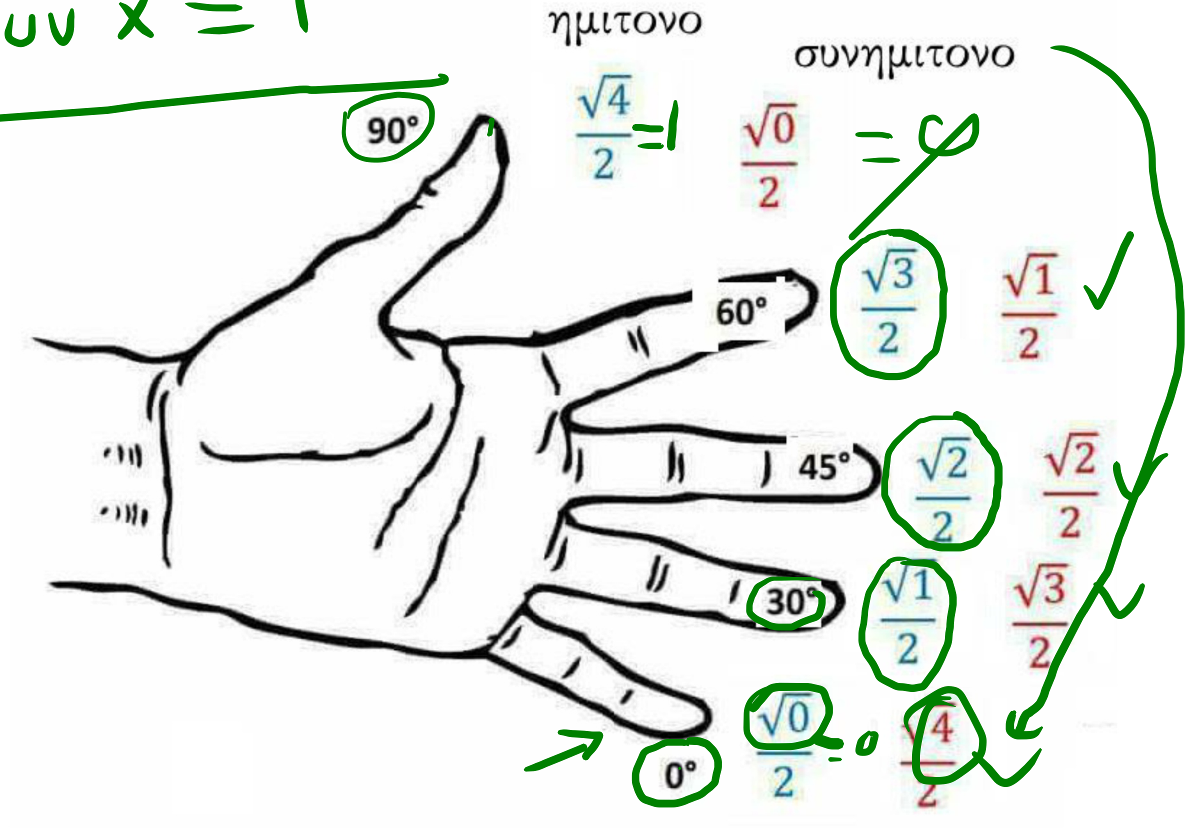
# Lots of Limit Examples, Part 1

- https://www.youtube.com/watch?v=kG_p2vKApOE

# Τριγωνομετρική Μούντζα

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu}$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$



$\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1$   $f(x)\to 0$

σ. 53    $x \to x_0$

$\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x} = \underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$

**Η.** Τριγωνομετρικά όρια τα οποία στηρίζονται στις σχέσεις:

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0.$$

Χρήσιμες και οι γνωστές σχέσεις: $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ και $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ από την οποία έχω εύκολα $\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$..

1. $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 5x}{7x}$ 2. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ 3. $\lim_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi 3x}{2x}$ 4. $\lim_{x\to0}\frac{3x+\eta\mu 5x}{x+\eta\mu 3x}$ 5. $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2+2x+4}-2}$

6. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3+\varepsilon\varphi x}{2x+\eta\mu 2x}$ 7. $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu^2 3x+x^2}{4x^2+\eta\mu^2 5x}$ (απ: 5/7, ½, 3/2, 2, 6, 7/24, 10/29)

$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu 5x}{5x}}{\frac{7x}{5x}} = \frac{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}}{\lim_{x\to0}\frac{7\cancel{x}}{5\cancel{x}}} = \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{7}.$

Θέτω $y = 5x$, $y\to0$: $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu 5x}{5x} = \lim_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$ ✓

4. $\lim_{x\to0}\frac{3x+\eta\mu 5x}{x+\eta\mu 3x} = \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{\eta\mu 5x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)} = \frac{3+5}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$

$\lim_{x\to0}\frac{5\,\eta\mu 5x}{5\cdot x}$   $\frac{y=5x}{y\to0}$   $\lim_{y\to0} 5\cdot\frac{\eta\mu y}{y} = 5\cdot1 = 5$

$\lim_{x\to0}\frac{3\,\eta\mu 3x}{3\cdot x}$   $\frac{y=3x}{y\to0}$   $\lim_{y\to0} 3\cdot\frac{\eta\mu y}{y} = 3\cdot1 = 3$

$x \to x_0$

**Θ.** Υπολογισμός ορίων της μορφής (0/0) όπου απαιτείται αλλαγή μεταβλητής:

1. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}-2}{\sqrt[6]{x-1}-1}$ 2. $\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu(2x-\pi)}{x^2-\pi^2}$ 3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\eta\mu^2x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x+9}-3}$ (απ: 7/2, -1/π, 0)

1. Αν μέσα στην ίδια παράσταση έχετε ριζικά διαφορετικών τάξεων της ίδιας παράστασης, ονομάστε με βοηθητικό άγνωστο το ριζικό με τάξη που ισούται με το ΕΚΠ των τάξεων των ριζικών. Αν, για παράδειγμα στο ίδιο όριο υπάρχουν τα $\sqrt[3]{x-1}$, $\sqrt[4]{x-1}$, $\sqrt{x-1}$ , ονομάστε $y = \sqrt[12]{x-1}$ .

2. ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ $\eta\mu(\pi-\omega) = \eta\mu\omega$

Θέτω $y=\sqrt[12]{x-1}$

αν $x\to 2$, $y\to 1$

$y=(x-1)^{\frac{1}{12}}$

$y^4=\left((x-1)^{\frac{1}{12}}\right)^4 = (x-1)^{4/12} = (x-1)^{1/3} = \sqrt[3]{x-1}$

$y^3=(x-1)^{3/12}=\sqrt[4]{x-1}$

$y^2=(x-1)^{2/12}=\sqrt[6]{x-1}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}-2}{\sqrt[6]{x-1}-1} = \lim_{y\to 1}\frac{y^4+y^3-2}{y^2-1}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y^3+2y^2+2y+2)}{\cancel{(y-1)}(y+1)} = \frac{7}{2}.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -2 | 1 |
| ↓ | 1 | 2 | 2 | 2 | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 0 | |

$x \to x_0$

**Ι**. Όταν δίνεται το όριο μίας παράστασης και ζητείται το όριο ενός «τμήματος» αυτής. Στην περίπτωση αυτή , ακολουθούμε τη **διαδικασία Θ.Λ.Λ (θέτω, λύνω, λιμάρω!!!).** Ονομάζω με μία βοηθητική συνάρτηση την παράσταση της οποίας γνωρίζω το όριο, λύνω ως προς αυτό του οποίου ζητείται το όριο και βάζω lim και στα δύο μέλη.

1. αν ισχύει ότι $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-2}{x+3}=5$,να βρείτε τα: $\lim_{x\to -3}f(x)$ (2), $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)+7-x^2}{x^2+3x}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(2x-7)-2}{x-2}$ (10)

$-2+2$    $x(x+3)$

2. αν ισχύει ότι $\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-3}{x-2}=7$, να βρείτε τα: $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3}{x-3}$ (7), $\lim_{x\to 3}f(x)$(3), $\lim_{x\to 4}\frac{f(x-1)-x+1}{x^2-16}$ $(\frac{3}{4})$

Θέτω $y=x-1$, $\Rightarrow y+1=x$   $x\to 4$, $y\to 3$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x-1)-x+1}{x^2-16}=\lim_{y\to 3}\frac{f(y)-(y+1)+1}{(y+1)^2-16}$$

$$=\lim_{y\to 3}\frac{f(y)-y}{y^2+2y-15}\checkmark \overset{!!!}{=} \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-x}{x^2+2x-15}\checkmark=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)\,\overset{-3}{}-x\,\overset{+3}{}}{(x-3)(x+5)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3+3-x}{(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-3}{(x-3)(x+5)}+\frac{\overset{-1}{\cancel{3-x}}}{\cancel{(x-3)}(x+5)}\right)$$

$$=\frac{7}{3+5}+\frac{-1}{3+5}=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\checkmark$$

Ι1 $\quad \lim_{x\to -3} \frac{f(x)-2}{x+3} = 5$, $\quad$ i) $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$

ii) $\lim_{x\to -3} \frac{f(x)+7-x^2}{x^2+3x}$

iii) $\lim_{x\to 2} \frac{f(2x-7)-2}{x-2}$

Η2,3,7 $\qquad$ Θ.Π.Λ.

Φ.ασκ. 10, 11, 14α

$$(x+3)\cdot g(x) = \frac{f(x)-2}{\cancel{x+3}}\cancel{(x+3)}$$

$$f(x) = (x+3)\cdot g(x)+2$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\left[\underbrace{(x+3)g(x)}\,+2\right] = 0\cdot 5+2 = 2.$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{f(x)+7-x^2}{x^2+3x} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)g(x)+9-x^2}{x\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3}\left[\frac{\cancel{(x+3)}g(x)}{x\cancel{(x+3)}} + \frac{(3-x)\cancel{(3+x)}}{x\cancel{(x+3)}}\right]$$

$$= \frac{5}{-3} + \frac{6}{-3} = \frac{11}{-3} = -\frac{11}{3}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(2x-7)-2}{x-2}$$

$u = 2x-7$

$u \to -3$ όταν $x \to 2$

$\frac{u+7}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$

$x = \frac{u+7}{2}$

$$\lim_{u\to -3} \frac{f(u)-2}{\frac{u+7}{2} - \frac{4}{2}} = \lim_{u\to -3} \frac{f(u)-2}{\frac{u+3}{2}}$$

$$\lim_{u\to -3} 2\cdot\frac{f(u)-2}{u+3} = 2\cdot 5 = 10.$$

H2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} = 1\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}.$

$\sigma\upsilon\nu 0 = 1$

H3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 3x}{2x\cdot\sigma\upsilon\nu 3x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\eta\mu 3x}{2x}}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 3x} = \dfrac{3}{2}\cdot 1 = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 3x}{2 x 3}3 \overset{u=3x}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

H7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 3x + x^2}{4x^2+\eta\mu^2 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\left(\overset{9}{\overline{\dfrac{\eta\mu^2 3x}{x^2}}}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(4+\underset{25}{\underline{\dfrac{\eta\mu^2 5x}{x^2}}}\right)} = \dfrac{9+1}{4+25} = \dfrac{10}{29}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 3x}{x^2} \underset{x=\frac{u}{3}}{\overset{u=3x}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 u}{u^2/9} = 9$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 5x}{x^2} \underset{x=\frac{u}{5}}{\overset{u=5x}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\overset{1}{\eta\mu^2 u}}{u^2/25}$

$=25$

Φ.10 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ημ(x^2-4)}{x-2}\cdot\dfrac{x+2}{x+2}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ημ(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2) = 1\cdot(2+2)=4.$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{ημ(x^2-4)}{x^2-4} \ \underset{u\to 0}{\overset{u=x^2-4}{=}} \ \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημ\, u}{u} = 1$

Φ.11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ 2x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim\limits_{x\to 0} 2\,\dfrac{\overset{\to 1}{ημ 2x}\,(\sqrt{x+1}+1)}{2x+\cancel{1}-\cancel{1}}$

$= 2\cdot 1\cdot(\sqrt{0+1}+1) = 4.$

$\dfrac{ημ\, u}{u} \to 1 \qquad \dfrac{συν x - 1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$